Blatt12

November 27, 2020

1 Aufgabe 24

Die Parameter einer Ausgleichsgeraden = 0+1 wurden zu 0=1,0ś0,2 und 1=1,0ś0,2 bestimmt. Der Korrelationskoefffizient ist = 0,8. Bestimmen Sie die Unsicherheit eines Wertes als Funktion von .

(a)Bestimmen Sie das Resultat analytisch sowohl unter Berücksichtigung der Korrelation als auch unter Vernachlässigung der Korrelation

Vernachlässigung der Korrelation:

$$\sigma_y^2 = (\frac{\partial y}{\partial a_0}\sigma_{a0})^2 + (\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a1})^2 \tag{1}$$

$$= \sigma_{a0}^2 + x^2\sigma_{a1}^2 = 0,04 + 0,04x^2 \tag{2}$$

Berücksichtigung der Korrelation:

$$\sigma_y^2 = (\frac{\partial y}{\partial a_0}\sigma_{a0})^2 + (\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a1})^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a_0}\frac{\partial y}{\partial a_1} \cdot cov \tag{3}$$

$$= \sigma_{a0}^2 + x^2\sigma_{a1}^2 + 2x \cdot cov \tag{4}$$

$$= \sigma_{a0}^2 + x^2\sigma_{a1}^2 + 2x \cdot \rho\sigma_{a0}\sigma_{a1} \tag{5}$$

$$= 0,04 + 0,04x^2 - 0,064x \tag{6}$$

(b)Bestimmen Sie das Resultat numerisch mit einer Monte Carlo Simulation. Visualisieren Sie die Parameter 0 und 1 in einem Scatter-Plot.

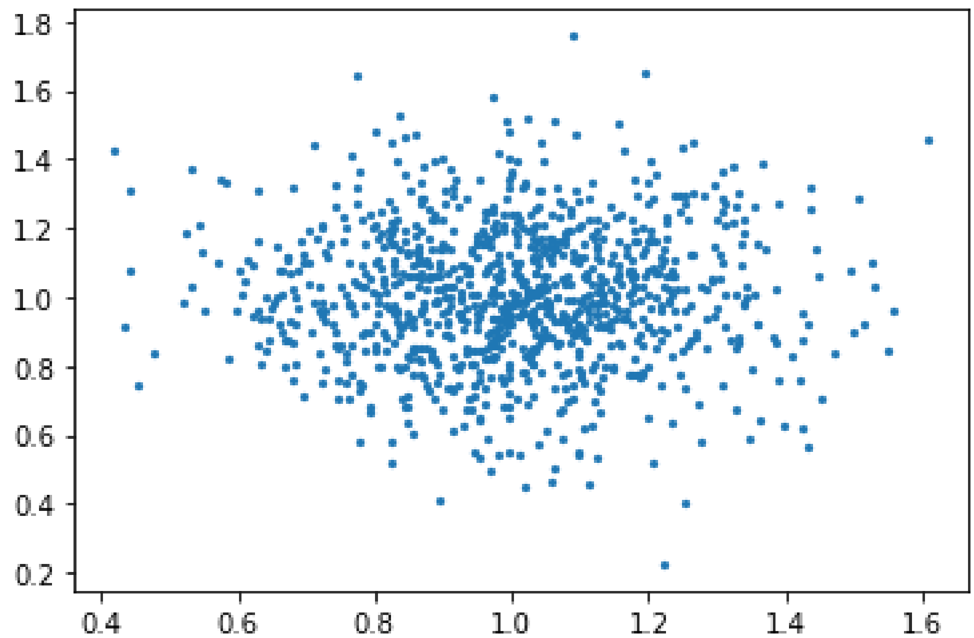
```
In [9]: import numpy as np
        import uncertainties as unc
        from uncertainties import ufloat
        from uncertainties import correlated_values
        from scipy.optimize import curve_fit
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [10]: a_0= ufloat(1,0.2)
         a_1= ufloat(1,0.2)
```

1.1 Ohne Korrelation

```
In [11]: #Scatterplot ohne Korrelation

         mu1, sigma1 = 1, 0.2 # mean and standard deviation
```

```
s1 = np.random.normal(mu1, sigma1, 1000)

mu2, sigma2 = 1, 0.2 # mean and standard deviation

s2 = np.random.normal(mu2, sigma2, 1000)

plt.scatter(s1,s2,s=5)
plt.show()
```



In [16]:
```
xWerte=np.linspace(-10,10,100)
#ich wei nicht in welchem Intervall x ist, bzw was die Grenzen der Ausgleichsgeraden
#, deswegen x-Intervall selber ausgesucht.


#Wir definieren eine Funktion, die die Unsicherheit von y in Abhängikeit von x darste
#zweite Ordnung, weil wir das schon aus der a) wissen
def sigmay(x, a, b, c):
    return a*x**2+b*x+c


#Fehler der y-Werte mit Monte Carlo simulieren
fehlery=[]
for x in xWerte:
    y=s1+s2*x
    yy = np.var(y)
```

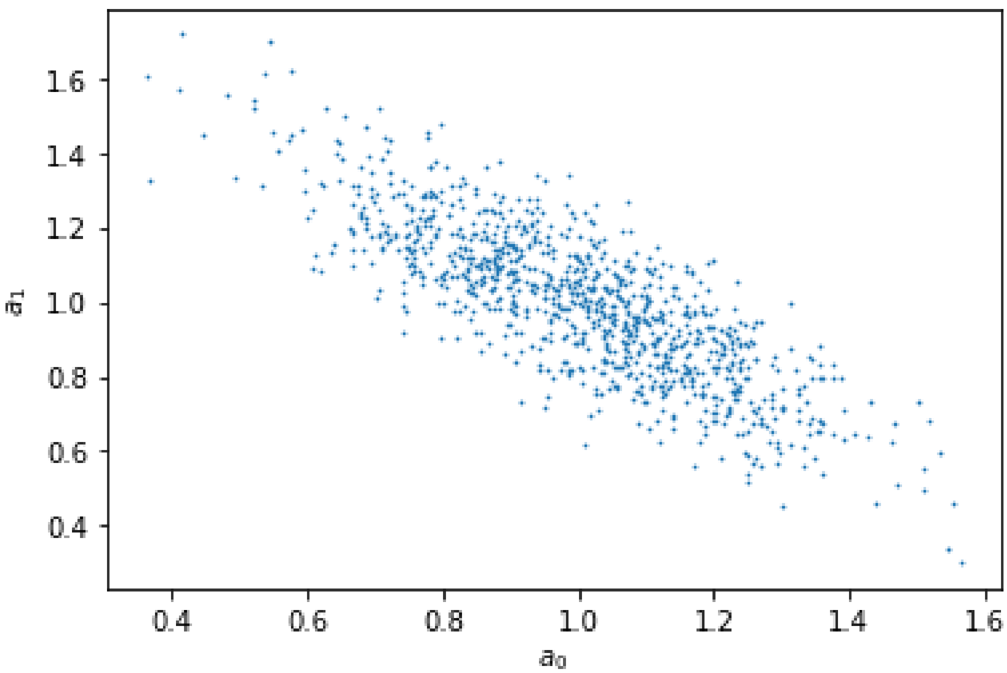
```
        fehlery.append(yy)
    print(yy)
    #Ausgleichskurve liefert uns dann die Parameter a,b,c.
    #Dafür muss sigmay an unsere simulierten Werte gefittet werden.
    params, cov0 = curve_fit(sigmay, xWerte, fehlery)

    a, b, c = params

    print(a, b, c)
```

```
4.060797692042788
0.040290047264616984 -0.0005778984906811916 0.03757195048790256
```

Numerisches Ergebnis ohne Berücksichtigung der Korrelation: $\sigma_y^2 = 0,039x^2 + 0,003x + 0,041$

1.2 Mit Korrelation

```
In [13]: rho=-0.8
         cov= np.array([ [a_0.s**2, rho*a_0.s*a_1.s],
                         [rho*a_0.s*a_1.s, a_1.s**2]])

         mean=[a_0.n, a_1.n]
         Korr = np.random.multivariate_normal(mean, cov, size=10**3, check_valid='warn', tol=1e

         np.shape(Korr)

         a0_korr=Korr[:,0]
         a1_korr=Korr[:,1]
         plt.scatter(a0_korr, a1_korr, s=0.5)
         plt.xlabel(r'$a_0$')
         plt.ylabel(r'$a_1$')
         plt.show()
```




```
In [14]: #Fehler der y-Werte mit Monte Carlo simulieren
         fehlery=[]
         for x in xWerte:
             y=a0_korr+a1_korr*x
             yy = np.var(y)
             fehlery.append(yy)
         print(yy)
         #Ausgleichskurve liefert uns dann die Parameter a,b,c. Dafür muss sigmay an unsere si
         params, cov0 = curve_fit(sigmay, xWerte, fehlery)

         a, b, c = params
         print(params)
         print(a, b, c)
```

```
3.572855231225237
[ 0.041906   -0.06561236  0.0383786 ]
0.04190600247393379 -0.06561236209586449 0.03837860479050309
```

Numerisches Ergebnis mit Berücksichtigung der Korrelation: $\sigma_y^2 = 0,039x^2 - 0,060x + 0,037$

c) Bestimmen Sie die Vorhersagen (Mittelwert und Standardabweichung) für feste =3,0,+3 numerisch sowie analytisch und vergleichen Sie diese

```
In [15]: def y_varianz(x, sigma_a0, sigma_a1, cov):
             return sigma_a0**2+x**2*sigma_a1**2+2*cov*x
```

```
x_c=[-3,0,3]
for x in x_c:
    print('x=',x,':')
    mean_ana= 1+x #denn y=a_0+a_1*x mit a_0 und a_1=1
    std_ana=np.sqrt(y_varianz(x,0.2,0.2, -0.032))
    print( 'Analytischer Mittelwert=', mean_ana)
    print('Analytische Standardabweichung:', std_ana)
    y= a0_korr + a1_korr *x #Monte Carlo Berechnung
    mean_monte=np.mean(y)
    std_monte=np.std(y)
    print('Mittelwert nach Monte Carlo=',mean_monte)
    print('Standardabweichung nach MC=', std_monte)
    Abweichung_mean=(mean_ana-mean_monte)/mean_ana*100
    Abweichung_std=(std_ana-std_monte)/std_ana*100
    print('Abweichung Mittelwert=', Abweichung_mean, '%')
    print('Abweichung Standardabweichung=', Abweichung_std, '%')
```

```
x= -3 :
Analytischer Mittelwert= -2
Analytische Standardabweichung: 0.7694153624668538
Mittelwert nach Monte Carlo= -1.9921332000192467
Standardabweichung nach MC= 0.7825405506064851
Abweichung Mittelwert= 0.39333999903766736 %
Abweichung Standardabweichung= -1.7058650996452767 %
x= 0 :
Analytischer Mittelwert= 1
Analytische Standardabweichung: 0.2
Mittelwert nach Monte Carlo= 1.0014279896138782
Standardabweichung nach MC= 0.19590458083082973
Abweichung Mittelwert= -0.14279896138782444 %
Abweichung Standardabweichung= 2.0477095845851387 %
x= 3 :
Analytischer Mittelwert= 4
Analytische Standardabweichung: 0.45607017003965533
Mittelwert nach Monte Carlo= 3.9949891792470034
Standardabweichung nach MC= 0.46764895035519294
Abweichung Mittelwert= 0.1252705188249159 %
Abweichung Standardabweichung= -2.5388155323841572 %
```

In [ ]:

Aufgabe 25

a) $x = a z + b \quad \to \quad x_1 = a z_1 + b, \quad x_2 = a z_2 + b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}$

$b = x_2 \cdot \frac{z_1}{z_1 - z_2} - x_1 \frac{z_2}{z_1 - z_2}$

als Matrix: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{z_1 - z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Kovarianzmatrix (mit BVB Formel):

$$V_{a,b} = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ -1 & z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & -\sigma_{x_2}^2 \\ -\sigma_{x_1}^2 z_2 & \sigma_{x_2}^2 z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ -1 & z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & -(\sigma_{x_1}^2 z_2 + \sigma_{x_2}^2 z_1) \\ -(\sigma_{x_1}^2 z_2 + \sigma_{x_2}^2 z_1) & \sigma_{x_1}^2 z_2^2 + \sigma_{x_2}^2 z_1^2 \end{pmatrix}$$

Fehler:

$\sigma_a = \frac{1}{(z_1 - z_2)} \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} \qquad \sigma_b = \frac{1}{(z_1 - z_2)} \sqrt{\sigma_{x_1}^2 z_2^2 + \sigma_{x_2}^2 z_1^2}$

Korrelationskoeff:

$$\rho(a,b) = \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \operatorname{Cov}(a,b) = -\frac{(z_2 \sigma_{x_1}^2 + z_1 \sigma_{x_2}^2)}{\sqrt{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)(\sigma_{x_1}^2 z_2^2 + \sigma_{x_2}^2 z_1^2)}}$$

b) $x_3 = a \cdot z_3 + b = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \cdot z_3 - x_1 \frac{z_2}{z_1 - z_2} + x_2 \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(x_2 z_1 - x_1 z_2 + (x_1 - x_2) z_3 \right)$

$$V_{x_3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial a} & \frac{\partial x_3}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & -(\sigma_{x_1}^2 z_2 + \sigma_{x_2}^2 z_1) \\ -(\sigma_{x_1}^2 z_2 + \sigma_{x_2}^2 z_1) & \sigma_{x_1}^2 z_2^2 + \sigma_{x_2}^2 z_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial a} \\ \frac{\partial x_3}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \begin{pmatrix} z_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2) \\ z_3 (\sigma_{x_1}^2 z_2 + \sigma_{x_2}^2 z_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \cdot z_3^2 (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)$$

$$= \frac{\cancel{(x_1 - x_2)^2}}{z_3} \cdot (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)$$

$\sigma_{x_3} = \sqrt{V_{x_3}} = \frac{\cancel{m}}{z_3} \cancel{(x_1 - x)} \cdot (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)$

c) für diesen Vektor $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial a} \\ \frac{\partial x_3}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ macht es keinen Unterschied,

da die Korrelation eh weg fällt $\to$ stimmt vermutlich nicht.