Blatt 17 Hannah & Lena

Aufgabe 35

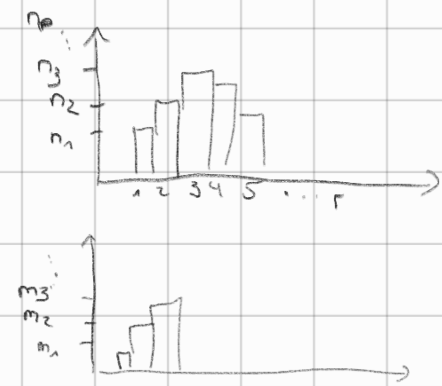
a) Die Zählraten folgen der Poissonverteilung

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(n_i) = \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda} \qquad \lambda = p_i N$$

$$\Rightarrow P(n_i) = \frac{(p_i N)^{n_i}}{n_i!} e^{-(p_i N)}$$

$$P(m_i) = \frac{(p_i M)^{m_i}}{m_i!} e^{-p_i M}$$



p_i ist gleich, weil man annimmt, dass beide Verteilungen gleich sind

b) $$\mathcal{L} = \frac{(p_i N)^{n_i}}{n_i!} e^{-p_i N} \cdot \frac{(p_i M)^{m_i}}{m_i!} e^{-p_i M}$$

$$= \frac{1}{n_i! \, m_i!} e^{-p_i(N+M)} p_i^{(n_i+m_i)} N^{n_i} M^{m_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \frac{N^{n_i} M^{m_i}}{n_i! \, m_i!} \left((n_i+m_i) p_i^{(n_i+m_i-1)} e^{-p_i(N+M)} + p_i^{(n_i+m_i)} e^{-p_i(N+M)} (-(N+M)) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (n_i+m_i) p_i^{n_i+m_i-1} \cancel{e^{-p_i(N+M)}} = p_i^{(n_i+m_i)} \cancel{e^{-p_i(N+M)}} (N+M)$$

$$\Leftrightarrow (n_i+m_i) p_i^{n_i+m_i-1} = (N+M) \, p_i^{(n_i+m_i)}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_i = \frac{n_i+m_i}{M+N}$$

c) $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - M\hat{p}_i)^2}{M\hat{p}_i}$$

d)
- Die χ^2-Verteilung hat $(r-1)$ Freiheitsgrade
- Für kleine Bininhalte folgt die Teststatistik keiner χ^2-Verteilung mehr, weil man dann die Poissonverteilung nicht mehr ausreichend gut durch eine Gaußverteilung beschreiben kann

e) $\chi^2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{r} \frac{(Nm_i - Mn_i)^2}{n_i + m_i}$ $\quad N = 632 \quad M = 81$

$$\chi^2 = \frac{1}{632 \cdot 81} \left[\left(\frac{(632 \cdot 15 - 81 \cdot 111)^2}{111 + 15} \right) + \frac{(632 \cdot 36 - 81 \cdot 188)}{188 + 36} + \frac{(632 \cdot 30 - 81 \cdot 333)^2}{333 + 30} \right]$$

$$\chi^2 = 8{,}429$$

Aus Tabelle für $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow 4{,}61$

$\Leftrightarrow 8{,}429 > 4{,}61 \Rightarrow$ Nullhypothese wird verworfen

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 5{,}99 < 8{,}429 \Rightarrow$ Nullhypothese wird verworfen

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 9{,}21 > 8{,}429 \Rightarrow$ Nullhypothese wird beibehalten