

Blatt2_Olbrich_Rotgeri

May 18, 2020

1 Aufgabe 3

Nutzen Sie für diese Aufgabe die Schreibweise für Wahrscheinlichkeiten aus der Vorlesung (z.B. $(\text{rot}+\text{blau}=42)=\dots, (\text{rot}+\text{blau}=42|\text{rot}=4)=\dots$). Sie würfeln mit zwei Würfeln, einem roten und einem blauen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) die Summe der Punkte 9 ergibt?

a) Es gibt insgesamt $6^2 = 36$ Möglichkeiten, die Würfel zu würfeln (da diese unterscheidbar sind). Es gibt 4 Möglichkeiten eine 9 zu würfeln (3 und 6, 6 und 3, 4 und 5, 5 und 4)

$$\rightarrow P(\text{Summe}=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,11$$

(b) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt?

b) Es gibt 10 Möglichkeiten eine Summe von 9 oder mehr zu würfeln.

$$\rightarrow P(\text{Summe} \geq 9) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,28$$

(c) ein Würfel 4, der andere 5 Punkte zeigt?

c) Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: Roter Würfel 4, blauer Würfel 5 und Roter Würfel 5, blauer Würfel 4.

$$\rightarrow P(\text{Würfelzahl } 4 \wedge \text{Würfelzahl } 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0,06$$

(d) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?

Es gibt nur eine Möglichkeit.

$$\rightarrow P(W_{\text{rot}} = 4 \wedge W_{\text{blau}} = 5) = \frac{1}{36} \approx 0,03$$

Sie werfen die Würfel so, dass der blaue Würfel hinter einen Gegenstand rollt, sodass Sie ihn zunächst nicht sehen können. Der rote Würfel zeigt eine 4. Nachdem Sie das gesehen haben, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(e) die Summe der Punkte 9 ergibt?

Wenn die Summe genau 9 betragen soll, muss der blaue Würfel eine 5 anzeigen

$$\text{Satz von Bayes: } p(W_{\text{blau}} = 5 | W_{\text{rot}} = 4) = \frac{P(W_{\text{rot}}=4 | W_{\text{blau}}=5) \cdot P(W_{\text{blau}}=5)}{P(W_{\text{rot}}=4)}$$

$$\text{Mit } P(W_{\text{rot}} = 4 | W_{\text{blau}} = 5) = \frac{P(W_{\text{rot}}=4 \wedge W_{\text{blau}}=5)}{P(W_{\text{blau}}=5)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow p(W_{\text{blau}} = 5 | W_{\text{rot}} = 4) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

(f) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt?

$$p(W_{\text{blau}} = 5 \vee 6 | W_{\text{rot}} = 4) = \frac{P(W_{\text{rot}}=4|W_{\text{blau}}=5 \vee 6) \cdot P(W_{\text{blau}}=5 \vee 6)}{P(W_{\text{rot}}=4)}$$

$$\text{Mit } P(W_{\text{rot}} = 4 | W_{\text{blau}} = 5 \vee 6) = \frac{P(W_{\text{rot}}=4 \wedge W_{\text{blau}}=5 \vee 6)}{P(W_{\text{blau}}=5 \vee 6)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow p(W_{\text{blau}} = 5 \vee 6 | W_{\text{rot}} = 4) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

(g) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?

Berechnung wie bei e)

$$\rightarrow p(W_{\text{blau}} = 5 | W_{\text{rot}} = 4) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

2 Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Betrags der Geschwindigkeit v der Moleküle in einem idealen Gas bei der absoluten Temperatur T ist $f(v) = N \exp(-mv^2/2k_B T)$ dabei ist m die Molekülmasse, k_B die Boltzmannkonstante und N die Normalisierungskonstante. Zur Beantwortung der Fragen müssen Sie zuerst N bestimmen! Drücken Sie die Ergebnisse als Funktion von m und T aus, sowie die anderen Ergebnisse als Funktion von v_m .

$$N \text{ bestimmen: } \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1$$

$$\text{Hier: negative Geschwindigkeiten sind physikalisch nicht sinnvoll, daher: } \int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} (k_B T)^{\frac{3}{2}} N}{m^{\frac{3}{2}}} = 1$$

$$\rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1.5}$$

(a) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m

$$\rightarrow \text{Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte} \rightarrow f'(v) = 0$$

$$f'(v) = -\frac{4\pi N x (mx^2 - 2k_B T) e^{-\frac{mx^2}{2k_B T}}}{k_B T} = 0 \rightarrow v_1 = 0, v_2 = \sqrt{2k_B T/m}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow \text{nicht das Maximum}$$

$$f(v_1) = N e^{-1} 4\pi \cdot 2k_B T/m = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{0.5} / e$$

$$\text{Antwort: } v_m = \sqrt{2k_B T/m}$$

(b) der Mittelwert der Geschwindigkeit v

$$\int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{8\pi (k_B T)^2}{m^2} N = 2^{1.5} \left(\frac{k_B T m}{\pi} \right)^{0.5} = v$$

(c) der Median der Geschwindigkeit $v_{0.5}$

$$\int_0^{v_{0.5}} f(v) dv = 0.5$$

(d) die volle Breite auf halber Höhe der Verteilung (v_{FWHM})

$$f(v_{FWHM}) = 2\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{0.5} / e \rightarrow \text{umstellen nach } v_{FWHM}$$

(e) die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v

$$\sigma_v = \int_0^\infty (v - v)f(v)dv = -\frac{\left(2^{\frac{9}{2}}\pi^{\frac{5}{2}}(k_B T)^{\frac{7}{2}}m - 8\pi(k_B T)^2\sqrt{m}\right) N^2}{m^{\frac{9}{2}}}$$

$$\sigma_v = -\frac{\left(2^{\frac{9}{4}}\pi^{\frac{5}{4}}(k_B T)^{\frac{7}{4}}\sqrt{m} - \sqrt{8\pi}(k_B T)m^{\frac{1}{4}}\right) N}{m^{\frac{9}{4}}} = ((2\pi)k_B Tm)^{1/4} - \frac{1}{\pi(k_B T)^2}$$

In []: