Blatt 14 Hannah & Lena

Aufgabe 29

a: $\frac{t_{on}}{t_{off}}$ Quotient der untersch. Messzeiten

$\underline{b} = \langle N_{off} \rangle$; S = EW für Zahl der Photonen während Messzeit t_{on} aus Quelle

$\langle N_{on} \rangle = S + \underbrace{\text{Untergrund}}$
Zahl Photonen aus Untergrund

Untergrund wird mit $\underline{b}$ bestimmt
↳ b ist EW für Photonen während t_{off} und wir wollen EW für Photonen während t_{on}

$\langle N_{off} \rangle = \langle N \rangle \cancel{t}_{off}$

Idee: Untergrund $= \langle N \rangle \cdot t_{on} = \frac{\langle N_{off} \rangle}{\cancel{t_{off}}} \cdot \alpha \cdot \cancel{t_{off}}$

$\Rightarrow$ Untergrund $= b \cdot \alpha$

$\Rightarrow \langle N_{on} \rangle = S + b \cdot \alpha$

b) Welchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgen N_{on} und N_{off}?
→ Poissonverteilung

c) ges: Likelihoodfkt $\mathcal{L}(b,s)$ für Parameter b und S

Poissonverteilung : $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$P(b,s) = \frac{s^b}{b!} e^{-s}$

$L(b,s) = \frac{s^b}{b!} e^{-s}$

für Parameter b:

$$\mathcal{L}(b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s^{b_i}}{b_i!} e^{-s}$$

für Parameter s:

$$\mathcal{L}(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i^{b}}{b!} e^{-s_i}$$

d)

$$\ln(L(b)) = \sum \ln(L(b)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{s^{b_i}}{b_i!} e^{-s}\right)$$

$$= \sum \ln\left(\frac{s^{b_i}}{b!}\right) - s \qquad = \ell(b)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum \underbrace{\ln(s^{b_i})}_{s \ln(b_i)} - \ln(b!) - ns\right)$$

$$= s \sum \frac{1}{b_i} - \Gamma(1+b)$$

$$\ell(s) = \sum \ln(s_i^{b}) - \ln(b!) - s_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial s} = \left(\sum b \frac{1}{s_i}\right) - n$$