Blatt14_Olbrich,Rotgeri

December 11, 2020

1 Aufgabe 28

a) Fitten sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Daten derDateiaufg_a.csv. Geben Sie die resultierenden Koeffizienten an und zeichnen Sie das gefittetePolynom und die Daten in eine Abbildung ein.

Polynom: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$

Bestimmen der Koeffizienten mit: $\vec{a} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

[2]:
```
data = pd.read_csv('aufg_a.csv')
x = data["x"].values[:]
y = data[' "y_0"'].values[:]
```

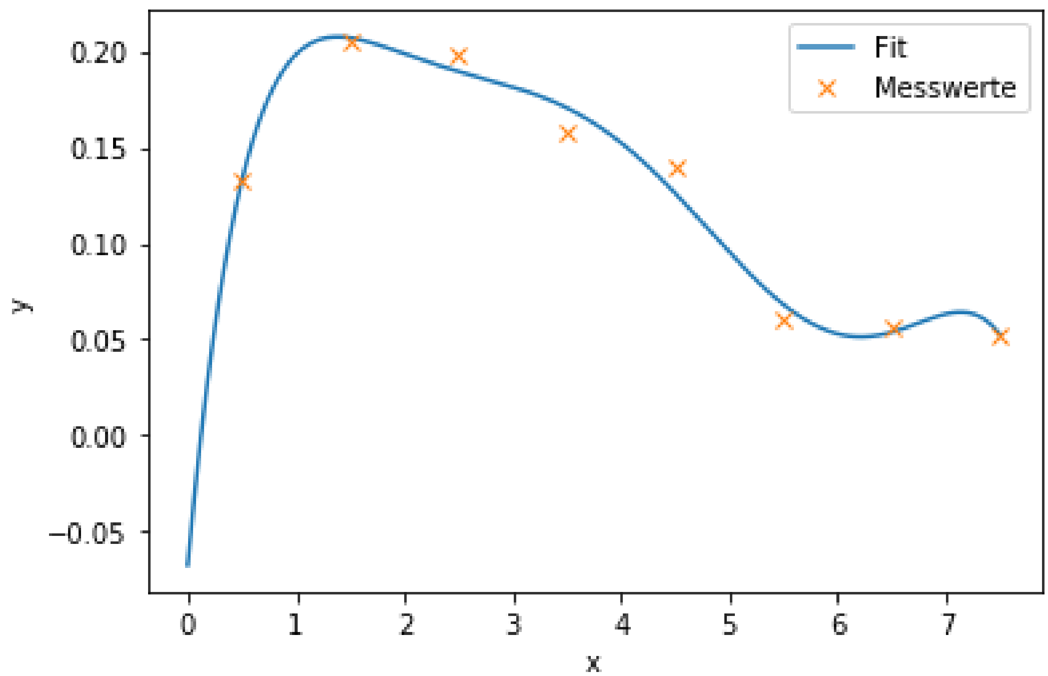
[3]:
```
# Aufstellen der Desingmatrx A

A = np.zeros((len(x),7))

for index,value in enumerate(x):
    for i in range(0,7):
        A[index,i]=value**i

# Berechnen der Koeffizienten

a = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T @ y
print(a)
```

```
[-6.74453241e-02  6.09609032e-01 -5.13748208e-01  2.10566519e-01
 -4.52007747e-02  4.78568044e-03 -1.96288194e-04]
```

[4]:
```
# Plotten

def polynom(x,para):
    f=0
    for i,value in enumerate(para):
```

```
        f=f+value*x**i
    return f

x1 = np.linspace(0, x.max(), 1000)
plt.plot(x1, polynom(x1, a), "-", label="Fit")
plt.plot(x, y, "x", label="Messwerte")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend(loc='best')
```

[4]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f74a3cce890>



b)Fitten sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Daten derDateiaufg_a.csvund nutzen Sie dabei zusätzlich die Regularisierung über die zweite Ableitung(=√). Für die Regularisierungsstärke nutzen sie (0.1,0.3,0.7,3,10). Geben Sie dieresultierenden Koeffizienten an und zeichnen Sie das gefittete Polynome und die Daten in eineAbbildung.

Bestimmen der Koeffizienten mit: $\vec{a} = (A^T A + \lambda (CA)^T (CA))^{-1} A^T \vec{y}$

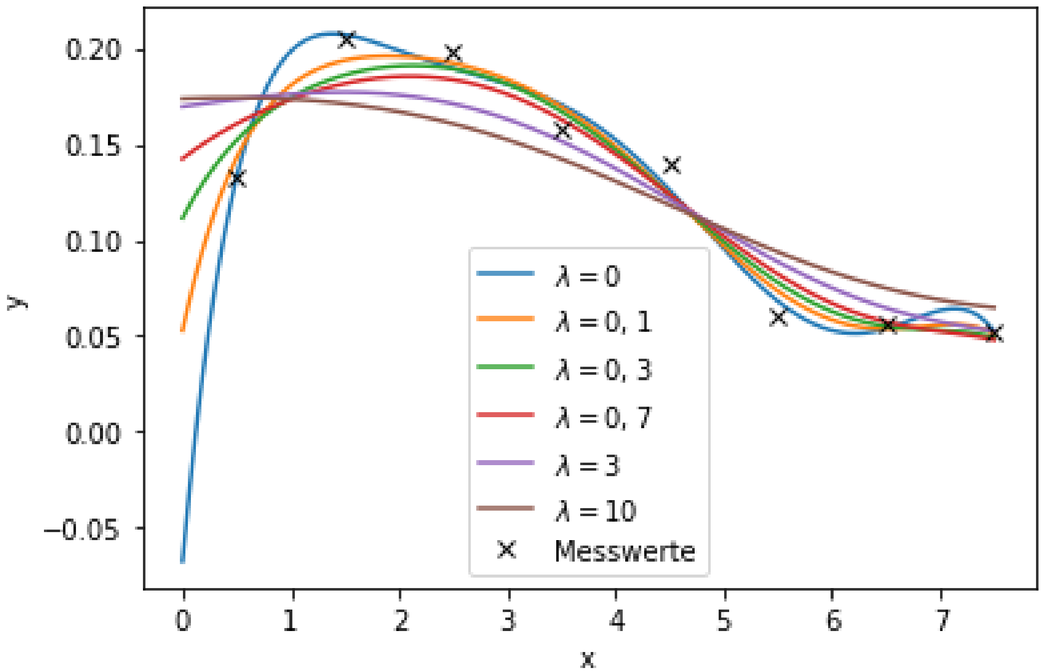
[5]:
```
#Regolarisierungsstärke und C-Matrix implementieren
lam = [0, 0.1, 0.3, 0.7, 3, 10]
C = -2 *np.eye(len(x)) + np.eye(len(x), k =1) + np.eye(len(x), k =-1)
C[0,0] = C[-1,-1] = -1

a = np.zeros((len(lam),7))
```

```python
#Koeff berechnen
def reg(lam, A, y):
    a = np.linalg.inv(A.T @ A + lam * (C @ A).T @ (C @ A)) @ A.T @ y
    return a

for index,lamb in enumerate(lam):
    a[index,:] = reg(lamb, A, y)

print(a)
```

```
[[-6.74453241e-02  6.09609032e-01 -5.13748208e-01  2.10566519e-01
  -4.52007747e-02  4.78568044e-03 -1.96288194e-04]
 [ 5.27965883e-02  2.59531149e-01 -1.93231286e-01  7.69667250e-02
  -1.71628070e-02  1.90376484e-03 -8.10349701e-05]
 [ 1.11464648e-01  1.07755243e-01 -6.42970519e-02  2.49315777e-02
  -6.33557738e-03  7.89265587e-04 -3.62702784e-05]
 [ 1.42378398e-01  4.36794607e-02 -1.71856911e-02  6.46195658e-03
  -2.35843750e-03  3.58573783e-04 -1.81387872e-05]
 [ 1.69656309e-01  7.96727955e-03 -1.06348501e-03 -1.07152879e-04
  -4.91755883e-04  1.07573168e-04 -6.00485672e-06]
 [ 1.73753418e-01  2.10097391e-03 -2.09778443e-03 -1.88380412e-04
  -1.43934178e-04  3.94085783e-05 -2.28679067e-06]]
```

[6]:
```python
#plotten
x1 = np.linspace(0, x.max(), 1000)
plt.plot(x1, polynom(x1, a[0]), "-", label=r"$\lambda = 0$")
plt.plot(x1, polynom(x1, a[1]), "-", label=r"$\lambda = 0,1$")
plt.plot(x1, polynom(x1, a[2]), "-", label=r"$\lambda = 0,3$")
plt.plot(x1, polynom(x1, a[3]), "-", label=r"$\lambda = 0,7$")
plt.plot(x1, polynom(x1, a[4]), "-", label=r"$\lambda = 3$")
plt.plot(x1, polynom(x1, a[5]), "-", label=r"$\lambda = 10$")
plt.plot(x, y, "x", color="black", label="Messwerte",)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend(loc='best')
```

[6]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f74a3ce5850>



c)Fitten Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Mittelwerte der Daten aus der Dateiaufg_c.csv. Gewichten Sie die berechneten Mittelwerte mitdem Fehler des Mittelwerts. Nutzen Sie diese Gewichte beim Fitten. Zeichnen Sie das gefittetePolynom und die gemittelten Daten in eine Abbildung ein.

Bestimmen der Koeffizienten mit: $\vec{a} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{y}$

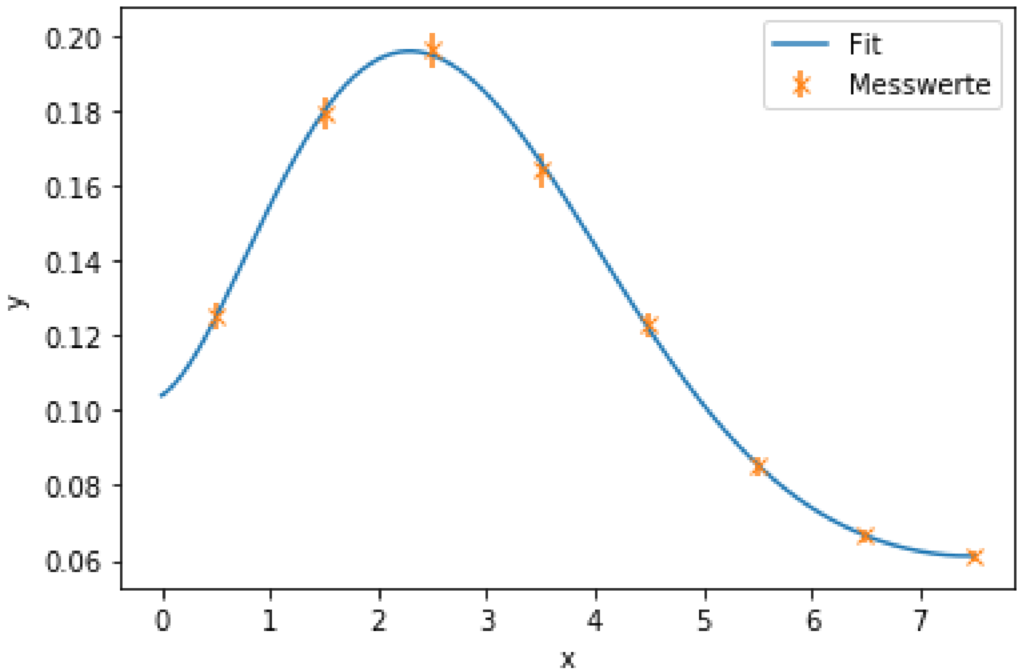
[7]:
```
#neue Daten einlesen
data = pd.read_csv('aufg_c.csv')

y = data.iloc[:,1:].mean(axis=1)
y_err =  data.iloc[:,1:].std(axis=1) / np.sqrt(50)

#Gewichtungsmatrix erstellen
W = np.diag(1/(y_err**2))

#Koeff berechnen
a = np.linalg.inv(A.T @ W @ A) @ A.T @ W @ y
print(a)
```

```
[ 1.03975571e-01  1.92955261e-02  6.17000835e-02 -3.75650730e-02
  7.91884410e-03 -7.34894268e-04  2.56958565e-05]
```

[8]:
```
#plotten
x1 = np.linspace(0, x.max(), 1000)
plt.plot(x1, polynom(x1, a), "-", label="Fit")
```

```
plt.errorbar(x, y, yerr=y_err, label="Messwerte", fmt="x")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend(loc='best')
```

[8]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f74a3ade950>



[ ]:

[ ]:

Hannah & Lena

Blatt 14

Aufgabe 29

a: $\frac{t_{on}}{t_{off}}$ Quotient der untersch. Messzeiten

$b = \langle N_{off} \rangle$; S = EW für Zahl der Photonen während Messzeit t_{on} aus Quelle

$\langle N_{on} \rangle = S + \underbrace{\text{Untergrund}}_{\text{Zahl Photonen aus Untergrund}}$

Untergrund wird mit b bestimmt
↳ b ist EW für Photonen während t_{off} und wir wollen EW für Photonen während t_{on}

$\langle N_{off} \rangle = \langle N \rangle \cdot t_{off}$

Idee: Untergrund $= \langle N \rangle \cdot t_{on} = \frac{\langle N_{off} \rangle}{\cancel{t_{off}}} \cdot \alpha \cdot \cancel{t_{off}}$

$\Rightarrow$ Untergrund $= b \cdot \alpha$

$\Rightarrow \langle N_{on} \rangle = S + b \cdot \alpha$

b) Welchen Warscheinlichkeitsverteilungen folgen Non und Noff?
→ Poissonverteilung

c) ges: Likelihoodfkt $\mathcal{L}(b,s)$ für Parameter b und s

Poissonverteilung: $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$P(b,s) = \frac{s^b}{b!} e^{-s}$

$L(b,s) = \frac{s^b}{b!} e^{-s}$

für Parameter b:

$$\mathcal{L}(b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s^{b_i}}{b_i!} e^{-s}$$

für Parameter S:

$$\mathcal{L}(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i^{b}}{b!} e^{-s_i}$$

d)

$$\ln(L(b)) = \sum \ln(L(b)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{s^{b_i}}{b_i!} e^{-s}\right)$$

$$= \sum \ln\left(\frac{s^{b_i}}{b!}\right) - s \quad = \ell(b)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum \underbrace{\ln(s^{b_i})}_{s \ln(b_i)} - \ln(b!) - ns\right)$$

$$= s\sum \frac{1}{b_i} - \Gamma(1+b)$$

$$\ell(s) = \sum \ln(s_i^{b}) - \ln(b!) - s_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial s} = \left(\sum b \frac{1}{s_i}\right) - n$$