UNIVERSITI TEKNIKAL MALAYSIA MELAKA

PEPERIKSAAN AKHIR SEMESTER II
FINAL EXAMINATION SEMESTER II
SESI 2019/2020
SESSION 2019/2020

FAKULTI TEKNOLOGI MAKLUMAT DAN KOMUNIKASI

KOD MATAPELAJARAN ***SUBJECT CODE***	**: BITI 1223**
MATAPELAJARAN ***SUBJECT***	**: KALKULUS DAN KAEDAH BERANGKA** ***CALCULUS AND NUMERICAL METHODS***
PENYELARAS ***COORDINATOR***	**: TS. DR. NORZIHANI BINTI YUSOF**
KURSUS ***COURSE***	**: BITC, BITD, BITE, BITI, BITM, BITS, BITZ**
MASA ***TIME***	**: 2.15 PETANG** ***2.15 PM***
TEMPOH ***DURATION***	**: 2 JAM** ***2 HOURS***
TARIKH ***DATE***	**: 19 JULAI 2020** ***19 JULY 2020***
TEMPAT ***VENUE***	**: HALL 2, HALL 3, HALL 4**

ARAHAN KEPADA CALON
INSTRUCTION TO CANDIDATES

1. Kertas soalan ini mengandungi **(4) SOALAN** dalam dwi-bahasa.
   This exam paper consists of **(4) QUESTIONS** in bi-language.
2. Jawab **SEMUA SOALAN**.
   Answer ***ALL QUESTIONS***.

KERTAS SOALAN INI TERDIRI DARIPADA SEBELAS (11) MUKA SURAT SAHAJA TERMASUK MUKA SURAT HADAPAN
THIS QUESTION PAPER CONTAINS ELEVEN(11) PAGES INCLUSIVE OF FRONT PAGE

INSTRUCTION : ANSWER ALL QUESTIONS IN THE ANSWER BOOKLET.

QUESTION 1 (25 MARKS)

a) The fuel consumption of an engine has been recorded as shown in the following table.

Time (hour)	1.2	1.7	1.8	2.0
Fuel (liter)	0.3320	0.5474	x	0.7389

Predict the missing term, x using second order Lagrange's interpolation method. [Correct your answer in 4 significant figures.]

[8 marks]

b) The upward velocity of a rocket is given as a function of time in the following table.

Time, t *(seconds,s)*	Velocity, $v(t)$ *(m/s)*
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

i) Compute the value of the velocity at $t = 16s$ with third order Newton's interpolating polynomial.

[11 marks]

ii) Using the third order Newton's interpolation polynomial for velocity, predict the distance covered by the rocket from $t = 11s$ to $t = 16s$.

[3 marks]

iii) Using the third order Newton's interpolation polynomial for velocity, predict the acceleration of the rocket at $t = 16s$.

[3 marks]

QUESTION 2 (25 MARKS)

a) Find your answer by using a forward difference to approximate the derivative of $f(x) = cos(x)$ at $x = \frac{\pi}{3}$ by using different step sizes as follows:
[Please use 8 decimal points for your calculation.]

i) $h = 0.1$

[3 marks]

ii) $h = 0.01$

[3 marks]

iii) $h = 0.001$

[3 marks]

iv) $h = 0.0001$

[3 marks]

b) Given the exact value for the differentiation of $f(x) = cos(x)$ is -0.86602540. Compare all of the results that you get in a).

[8 marks]

c) Central difference formula has been known to provide more accuracy in approximation. By using this information, identify the new result of the approximation by using the best step size that you have concluded in b) and write new conclusion.

[5 marks]

QUESTION 3 (25 MARKS)

Given the following integral, with its exact integral is 0.8939

$$\int_{0.1}^{1.3} 5x\, e^{-2x}\, dx$$

a) Find your answer by using a Simpson's 1/3 rule with step size is 0.6 to estimate its integral function. Then, determine its absolute error.
[Round-up all the calculations to 4 decimal points.]

[12 marks]

b) Estimate its integral function by using the three-segment trapezoidal rule. Then, find its absolute error.
[Round-up all the calculations to 4 decimal points.]

[12 marks]

c) From part a) and b), identify which method is better to estimate its integral function?

[1 mark]

QUESTION 4 (25 MARKS)

Consider the autonomous differential equation with the initial condition

$$\frac{dy}{dt} = 18y^2 \ , \quad y(0) = -0.1 \, , \quad t \in [0, 0.15] \ , \quad \Delta t = 0.075$$

a) Find the Euler's approximation.
[Express all calculations in 5 decimal points.]

[6 marks]

b) Find the 4th-Order Runge-Kutta's approximation.
[Express all calculations in 5 decimal points.]

[11 marks]

c) Using the solutions from part a) and b), find the comparison with the exact solution to determine the absolute errors.

[8 marks]

-END OF QUESTIONS-

ARAHAN: JAWAB SEMUA SOALAN DALAM BUKU JAWAPAN YANG DISEDIAKAN.

SOALAN 1 (25 MARKAH)

a) Penggunaan bahan api enjin telah direkodkan seperti yang ditunjukkan dalam jadual berikut.

Masa (jam)	1.2	1.7	1.8	2.0
Bahan api (liter)	0.3320	0.5474	x	0.7389

Anggarkan nilai x dengan menggunakan kaedah interpolasi Lagrange peringkat ke-2.

[Betulkan jawapan anda sehingga 4 angka bererti.]

[8 markah]

b) Had laju ke atas roket diberikan sebagai fungsi masa dalam jadual berikut.

Time, t (seconds,s)	*Velocity, v(t) (m/s)*
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

i) Kira nilai had laju pada t = 16s dengan interpolasi polinomial Newton peringkat ke-3.

[11 markah]

ii) Dengan menggunakan interpolasi polinomial Newton peringkat ke-3 untuk had laju, anggarkan jarak yang diliputi oleh roket dari t = 11s hingga t = 16s.

[3 markah]

iii) Dengan menggunakan interpolasi polinomial Newton peringkat ke-3 untuk had laju, cari pecutan roket pada t = 16s.

[3 markah]

SOALAN 2 [25 MARKAH]

a) Cari jawapan anda dengan menggunakan kaedah pembezaan ke hadapan untuk menganggarkan pembezaan bagi fungsi $f(x) = kos(x)$ pada nilai $x = \frac{\pi}{3}$ dengan menggunakan nilai saiz langkah seperti berikut:
[Sila bundarkan kepada 8 titik perpuluhan untuk setiap pengiraan.]

i) $h = 0.1$

[3 markah]

ii) $h = 0.01$

[3 markah]

iii) $h = 0.001$

[3 markah]

iv) $h = 0.0001$

[3 markah]

b) Diberi nilai sebenar pembezaan bagi fungsi $f(x) = kos(x)$ adalah -0.86602540. Bandingkan semua keputusan yang anda perolehi di dalam a).

[8 markah]

c) Kaedah pembezaan berpusat (*Central Difference*) telah diketahui sebagai satu kaedah yang dapat memberikan lebih kejituan dalam penentuan anggaran. Dengan menggunakan maklumat ini, kenalpasti keputusan penganggaran terbaru dengan menggunakan nilai saiz langkah terbaik yang anda telah simpulkan di b) dan tuliskan kesimpulan baru.

[5 markah]

SOALAN 3 (25 MARKAH)

Diberi kamiran berikut dengan nilai kamiran tepat ialah 0.8939

$$\int_{0.1}^{1.3} 5x\, e^{-2x}\, dx$$

a) Cari jawapan anda dengan menggunakan *Simpson's 1/3 Rule* dengan saiz langkah ialah 0.6 untuk menganggarkan fungsi kamirannya. Kemudian, tentukan ralat mutlaknya.

[Bundarkan kesemua pengiraan kepada 4 titik perpuluhan.]

[12 markah]

b) Anggarkan fungsi kamirannya dengan menggunakan *Trapezoidal Rule* dengan tiga segmen. Kemudian, tentukan ralat mutlaknya.

[Bundarkan kesemua pengiraan kepada 4 titik perpuluhan.]

[12 markah]

c) Daripada bahagian a) dan b), kenalpasti teknik penganggaran yang manakah yang lebih baik bagi menganggarkan fungsi kamirannya?

[1 markah]

SOALAN 4 (25 MARKAH)

Pertimbangkan persamaan pembezaan autonomi dengan syarat awal

$$\frac{dy}{dt} = 18y^2 \ , \qquad y(0) = -0.1\,, \qquad t \in [0, 0.15] \ , \qquad \Delta t = 0.075$$

a) Cari penghampiran Euler.
[Kira semua pengiraan dalam 5 tempat perpuluhan.]

[6 markah]

b) Cari penghampiran *Runge-Kutta* peringkat ke-4.
[Kira semua pengiraan dalam 5 tempat perpuluhan.]

[11 markah]

c) Dengan menggunakan penyelesaian dari bahagian a) dan b), cari perbandingan dengan penyelesaian tepat untuk menentukan ralat mutlak.

[8 markah]

-SOALAN TAMAT-

FORMULAE

1. Lagrange interpolating polynomial:

$$\boldsymbol{f_n(x)} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{L_i(x) f(x_i)}\ ;\ \text{where}$$

$$\boldsymbol{L_i(x)} = \prod_{\substack{\boldsymbol{j=0} \\ \boldsymbol{j \neq i}}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{x - x_j}}{\boldsymbol{x_i - x_j}}$$

2. Newton's divided difference formula for *n* degree interpolating polynomial:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

3. Numerical Derivatives Formulas:

Forward Difference approximation of 1st derivative: $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Backward Difference of approximation 1st derivative: $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

Central Difference approximation of 1st derivative: $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Forward Difference approximation of 2nd derivative: $f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}$

Central Difference approximation of 2nd derivative: $f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

4. a) Trapezoidal rule:

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

b) Simpson's 1/3 rule

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

c) Simpson's 3/8 rule

$$I \approx \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

5. Numerical Solution of Initial Value Problems: Euler's Method

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k , y_k), \text{ for } k = 0,1,\cdots,n-1.$$

6. Numerical Solution of Initial Value Problems: Heun's Method

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_k + h f(x_k , y_k)\right)\right], \text{ for } k = 0,1,\cdots,n-1.$$

7. Numerical Solution of Initial Value Problems: 4th Order Classical Runge-Kutta Method

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{h}{6}[v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4] \text{ for } k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ where}$$

$$v_1 = f(x_k, y_k)$$

$$v_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}v_1)$$

$$v_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}v_2)$$

$$v_4 = f(x_k + h, y_k + hv_3)$$