

浙江大学



题目 二级倒立摆的分析与控制

姓名与学号 彭昱翔 3150103517

樊武 3150104930

授课教师 雷勇

年级与专业 15 级 机械电子工程

目录

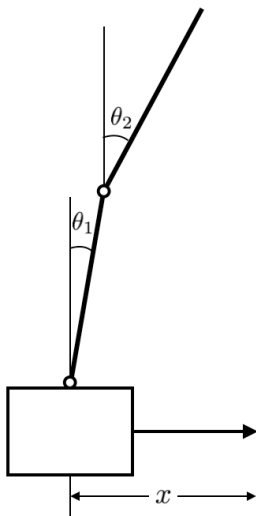
一、模型的分析 and 建立：	3
二、连续系统的能控性分析：	5
三、系统离散化：	5
四、控制器的设计：	5
五、状态观测器	10
六、LQR 方法	12

二阶直线倒立摆的建模仿真

倒立摆系统是一个典型的多变量、非线性、强耦合和快速运动的高阶不稳定系统，它是检验各种新的控制理论和方法有效性的典型理想模型。在其控制过程中，能有效地反映诸如镇定性、鲁棒性、随动性以及跟踪等许多关键问题。本文将着重研究二级倒立摆的建模、控制和仿真。其次，本文主要研究倒立摆系统的现代以及智能控制方法，用极点配置、LQR 最优控制、设计了控制器，通过 MATLAB 及 SIMULINK 仿真，分析指出各种方法之间的优缺点。

一、模型的分析 and 建立：

如图：是二级倒立摆的模型简图，该模型有三个自由度，分别为底部基座的平移自由度，下摆与竖直方向的夹角 θ_1 和上摆与竖直方向的夹角 θ_2 ，其他具体数据由下图和下表可以获知：



参数名称	参数符号	参数值
小车及驱动系统的等效质量	M	$1.6kg$
下摆质量	m_1	$0.185kg$
上摆质量	m_2	$0.21kg$
下摆转动惯量	J_1	$0.0036kg/m^2$
上摆转动惯量	J_2	$0.0040kg/m^2$
下摆质心到轴心的距离	l_1	$0.2415m$
上摆质心到轴心的距离	l_2	$0.2450m$
下摆轴心到上摆轴心的距离	L_1	$0.4830m$
力与控制电压之比值	G_0	$11.80N/V$

由于直接通过力学方法建立其微分方程比较繁琐，故我们决定使用拉格朗日方程方法进行建模，先列出系统的动能公式：

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1[(-\dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1)^2 + (\dot{x} + \dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1)^2] \\
& + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[(-\dot{\theta}_1 L \sin\theta_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2)^2 \\
& + (\dot{x} + \dot{\theta}_1 L \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2)^2] + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

根据拉格朗日公式: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$, 分别求出对应三个广义坐标 x 、 θ_1 、 θ_2 的微分方程, 并对其进行线性简化, 省略 θ_1 、 θ_2 和各自一阶导量的高阶无穷小量, 把 $\sin\theta$ 变为 θ , 把 $\cos\theta$ 变为 1, 实现线性化, 得到以下三个微分方程:

$$\begin{cases}
(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 l_1 + m_2 L)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = F \\
(m_1 l_1 + m_2 L)\ddot{x} + (m_1 l_1^2 + m_2 L^2 + J_1)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 L \ddot{\theta}_2 = (m_1 l_1 + m_2 L)g\theta_1 \\
m_2 l_2 \ddot{x} + m_2 l_2 L \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + J_2)\ddot{\theta}_2 = m_2 l_2 g\theta_2
\end{cases}$$

这时带入实际数据, 具体计算由计算机完成, 并解这个三阶线性方程组即可得到此模型的状态空间模型, 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 59.1 & 0 & -28.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -80.5 & 0 & 70.6 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.1 \\ 0 \\ -18.9 \\ 0 \\ 6.0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{X} = AX + BU \\
& Y = CX + DU
\end{aligned}$$

状态空间表达式:

二、连续系统的能控性分析：

$$\text{rank } Gc = \text{rank}[B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B] = 6$$

通过 Matlab 函数计算得到满足能控性条件，系统能控。

连续系统的能观性分析：

$$\text{rank } Go = \text{rank}[C^T \ (CA)^T \ (CA^2)^T \ (CA^3)^T \ (CA^4)^T \ (CA^5)^T]^T = 6$$

通过 Matlab 函数计算得到满足能观性条件，系统能观。

控制前连续系统的稳定性分析：

从倒立摆模型的事物模型看，该系统在没有添加反馈和控制的情况下，系统必然是不稳定的，从理论上的李雅普诺夫第一方法判定来看，通过求解 $|\lambda I - A| = 0$ 得到矩阵 A 的特征值为 0、0、-10.6115、10.6115、-4.1277、4.1277，其中有正数，印证了不稳定的特性。

三、系统离散化：

在 Matlab 中使用 c2d 函数，对这个模型进行离散化，条件是采样时间 $T=0.01s$ ，采用零阶保持器 zoh，得到离散后的状态空间：

$$A' = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & -0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.59 & 1.00 & -0.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.81 & 0 & 0.71 & 1.00 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.07 \\ 0 \\ -0.19 \\ 0 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

四、控制器的设计：

- 设计目标：

- 1、位移最大超调量小于 10%
- 2、电机额定电压假设为 24V，最大电压不超过额定电压 10%
- 3、为了减小线性化带来的误差，上下摆杆的摆角小于 10° 。
- 4、系统响应应尽可能快，2%误差的调整时间要小于 7.5s。

1、线性离散系统的极点配置：

先以连续系统为基础，在 s 域的左半平面进行极点配置，为了达到比较好的动态性能，优先取与实轴负方向呈 45° 的主极点，取 $-1+i$ 、 $-1-i$ ，对应的阻尼比为 0.707，是一种性能指标下的最优，此时系统的平稳性与快速性都较理想，为了减小其他极点对系统动态性能的影响，取在到虚轴的距离为主导极点的 5 倍以上，分别取 -5 、 -7 、 -9 、 -11 ，得到 s 域预期极点 p_c ：

$$p_c = [-1 + i \quad -1 - i \quad -5 \quad -7 \quad -9 \quad -11]$$

通过 s 域到 z 域的映射 $z = e^s$ ，把这些极点转化到 z 域上，得到了在 z 域上分布在单位圆内的极点组合 p ：

$$p = [0.99 + 0.0099i \quad 0.99 - 0.0099i \quad 0.9512 \quad 0.9324 \quad 0.9139 \quad 0.8958]$$

根据所选定的特征值，可以得到闭环离散系统的特征方程为：

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

使用爱克曼法：

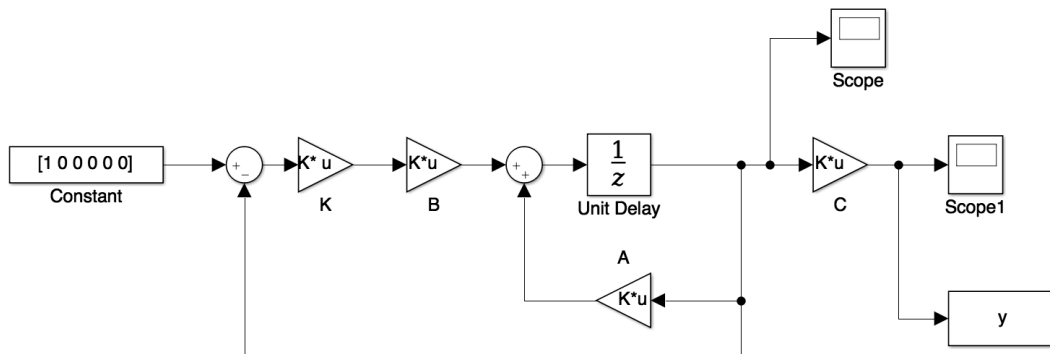
$$-K = [0 \cdots 0 \quad 1]G_c^{-1}P(A)$$

$$\text{其中 } P(A) = A^n + \beta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \beta_1A + \beta_0I$$

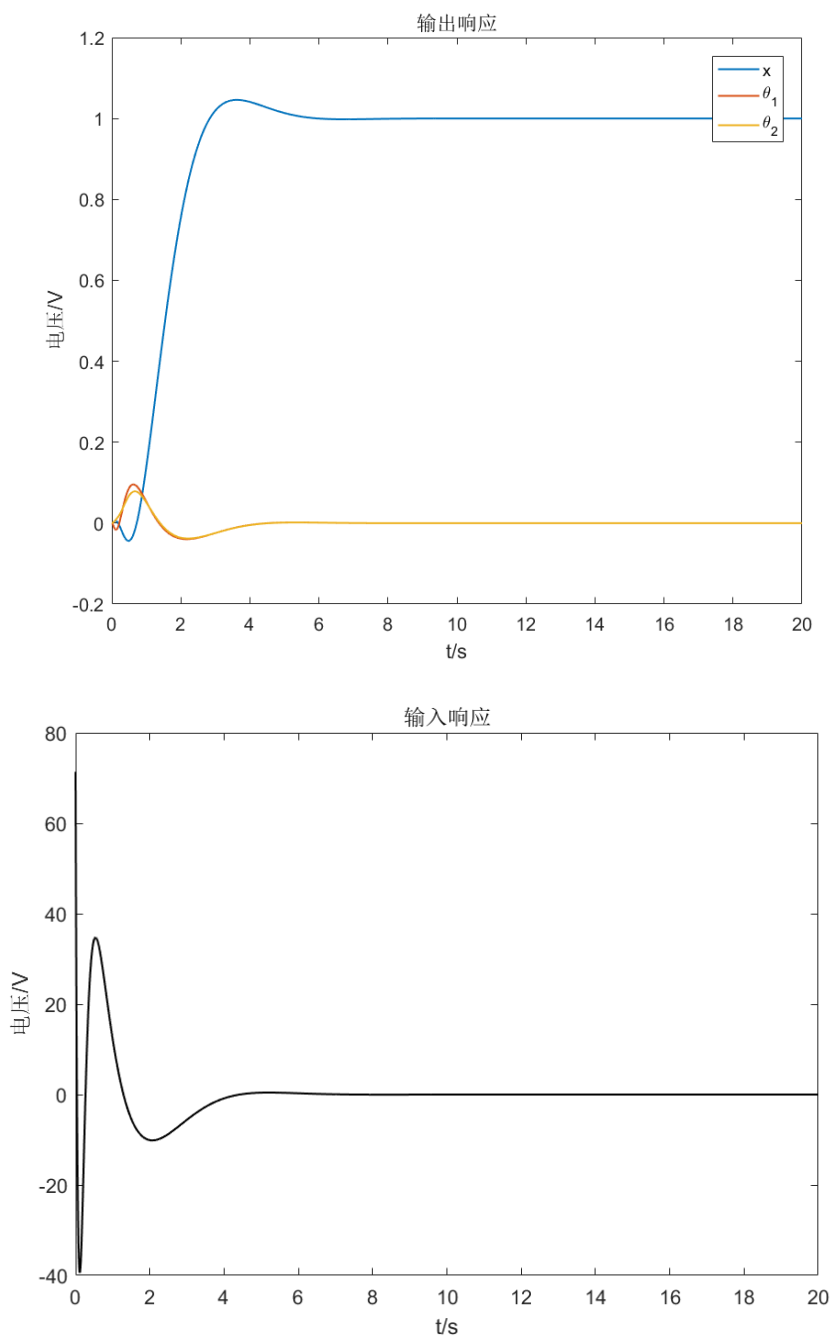
或者使用 Matlab 中的 `acker`、`place` 等函数也可以得到对应配置极点的反馈增益 K ：

$$K = [71 \quad 111 \quad -2695 \quad -56 \quad 3332 \quad 416]$$

在 Matlab 中搭建对应的离散系统仿真模型：



当输入为 x 的单位参考信号，仿真结果如下



从仿真结果中我们可以获得位移的最大超调量为 4.1%，上摆杆最大摆角为 4.51° ，下摆杆的最大摆角为 5.48° ，2%误差下的调整时间为 4.7s，响应速度很快，但最大输入电压为 71V，远远超过限定的 24V 范围，显然是不可接受的。但从理论上分析，为了达到较好的快速性，必须要使调整电压较大，所以为了保证输入电压的最大值不超过电机最大输入电压的限制，必须在快速性上作出一定的让步。

从理论上分析，由 2%误差的调整时间计算公式

$$t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta}$$

当主导极点的阻尼比 ξ 一定时，无阻尼自振角频率 ω_n 越大，系统的调整时间越小，即动态性能越好，此外，由最大超调量的计算公式

$$M_p = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

可得阻尼比 ξ 越小超调量越大，可算得阻尼比 $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，超调量为 4.3%，和仿真结果一致，但离 10%的目标仍然有一定距离，所以阻尼比也还有一定可以减小的余量。

综上，可以适当减小当前配置主导极点的阻尼比和无阻尼自振角频率 ω_n 来提高系统的动态性能。

保持系统主导极点阻尼比 ξ 不变，仍为临界阻尼系统，根据 2%误差的调整时间计算公式，代入调整时间目标 7.5s, 得

$$\omega_n \geq 0.75 \text{ rad/s}$$

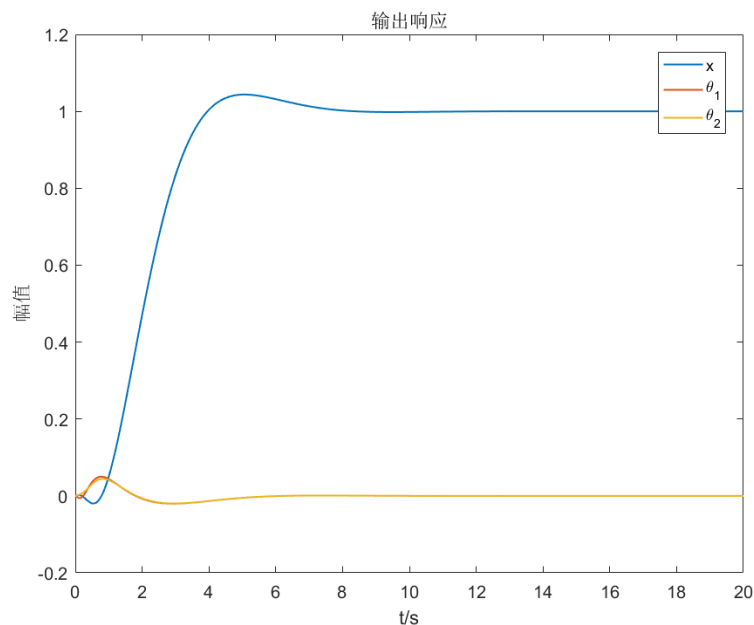
取

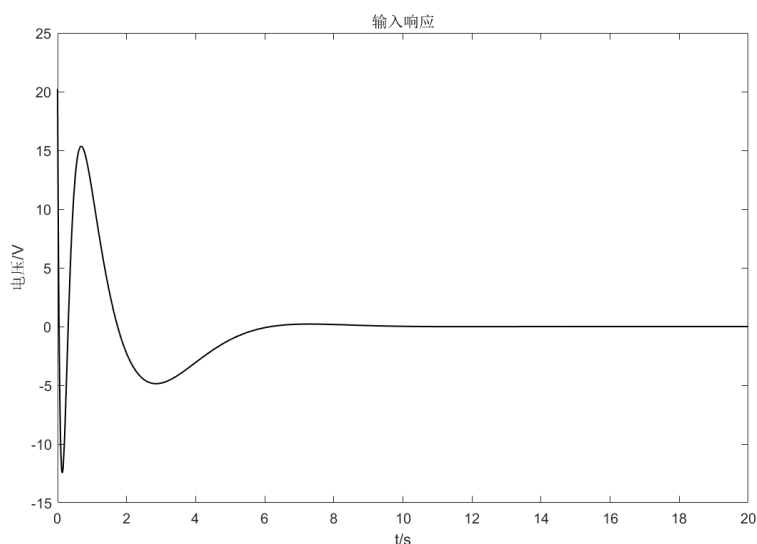
$$\omega_n = 1 \text{ rad/s}$$

以此代入计算获得一组新的连续域极点为

$$p_c = [-0.707 + 0.707i \quad -0.707 - 0.707i \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad -10]$$

根据同之前的方法配置极点获得反馈矩阵 K 后进行仿真，得





从改进后控制器的仿真结果中我们可以获得位移的最大超调量为 4.36%，上摆杆最大摆角为 2.86° ，下摆杆的最大摆角为 2.54° ，调整的平稳性要求得到了保证，2%误差下的调整时间为 6.6s，系统的快速性满足了要求，最大输入电压为 20.32V，满足最大电压小于 24V 的限制。综上改进后的系统满足了设计要求。

保持系统主导极点无阻尼自振角频率 ω_n 不变，减小阻尼比 ξ ，根据 2% 误差的调整时间计算公式，代入调整时间目标 7.5s，得

$$\xi \geq 0.38 \text{ rad/s}$$

同时需满足 10% 最大超调量的要求

$$\xi \geq 0.6 \text{ rad/s}$$

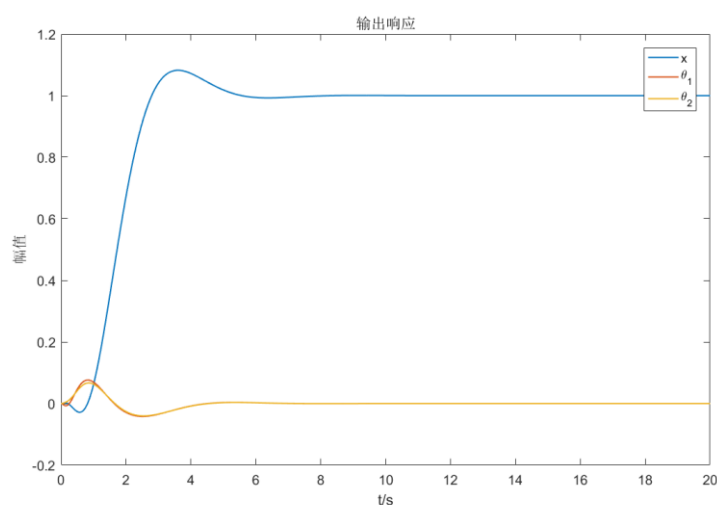
综上，选取

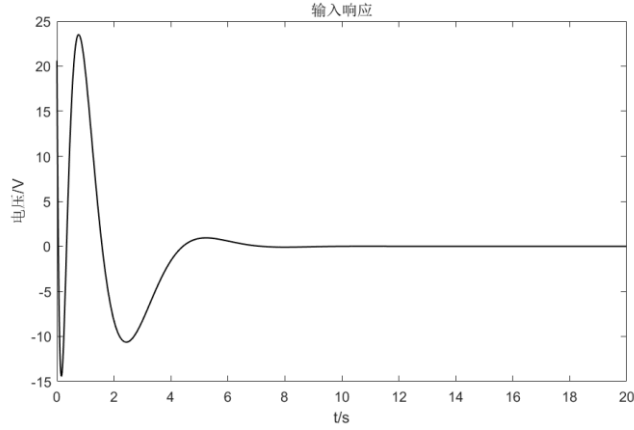
$$\xi = 0.6$$

以此代入计算获得一组新的连续域极点为

$$pc = [-0.848 + 1.131i \quad -0.848 - 1.131i \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad -10]$$

仿真结果如下图





从改进后控制器的仿真结果中我们可以获得位移的最大超调量为 8.24%，上摆杆最大摆角为 4.37° ，下摆杆的最大摆角为 3.84° ，系统响应的平稳性要求是满足的，2%误差下的调整时间为 4.9s，系统的快速性非常好，最大输入电压为 23.52V，满足最大电压小于 24V 的限制。

综上改进两种改进方法下，阻尼比 ξ 不变，调整无阻尼自振角频率 ω_n 配置主导极点获得的控制器的平稳性要好一些，位移超调量和摆杆最大摆角都比较小，快速性相对差一点；无阻尼自振角频率 ω_n 不变，调整阻尼比 ξ 配置主导极点获得的控制器的尽管在同样满足设计要求的条件下平稳性略差一点，但其快速性是非常优越的。

五、状态观测器

1. 龙贝格降维观测器设计：

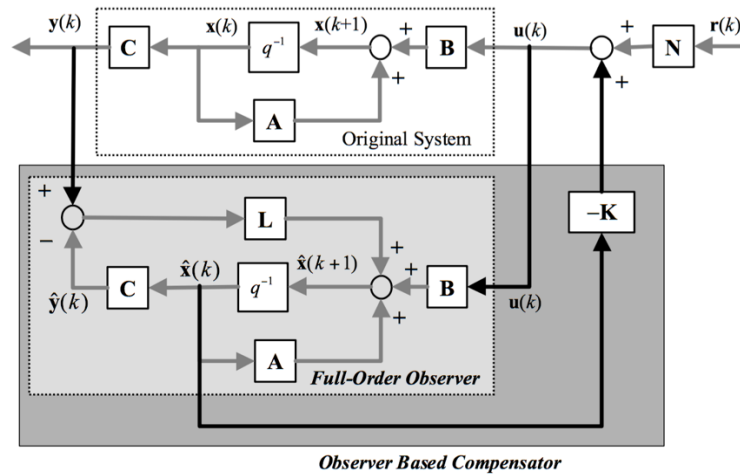
由于在实际情况中系统状态 x 中变量往往并不是能够全部被直接地观测或者测量,此时就可以采用状态观测器,通过系统输出 y 和系统输入 u 对系统状态 x 进行估计或者推测来对模型进行反馈。

$$\hat{x}(k+1) = (A - LC) \cdot \hat{x}(k) + L \cdot y(k) + B \cdot u(k)$$

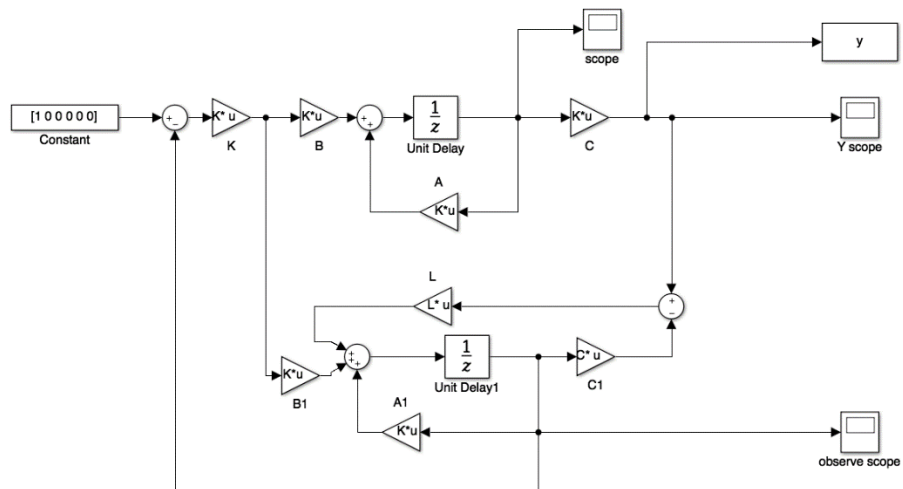
为了使稳态误差为零，需要使：

$$(I - CL) = 0$$

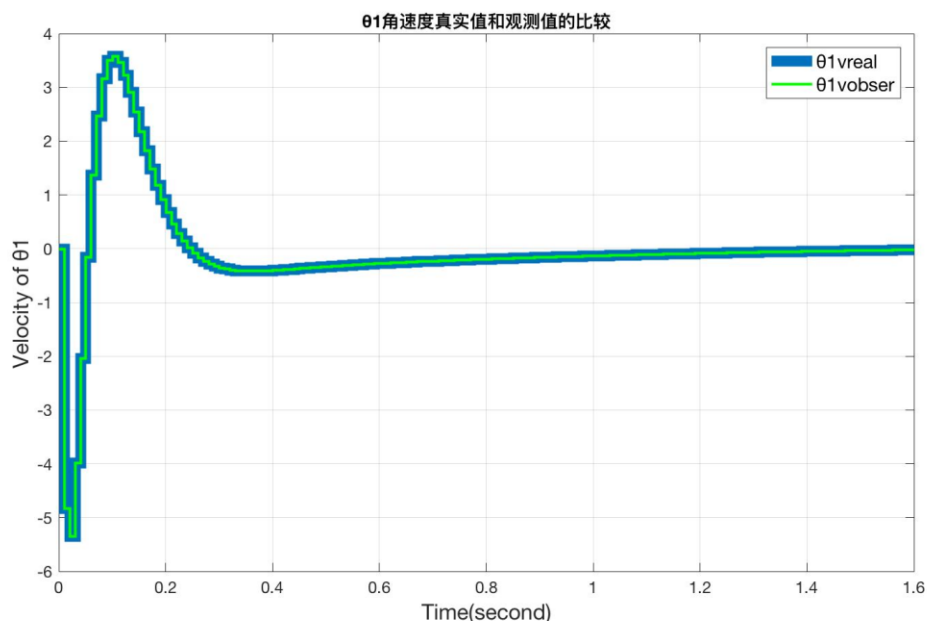
进行闭环反馈的方式选用如图策略：



在极点配置控制的基础上，搭建离散系统观测器：



比较状态观测器的观测结果和系统实际状态的曲线，由于状态变量比较多，这里仅仅选取 θ_1 的角速度(这个变量是无法直接测量的)作为比较对象：



如图，由于两者是重合的，所以对其中的线条进行了加宽，以便区分，其他的 5 个变量也都是几乎完全一致，可见这种离散控制系统的观测器的效果是非常好的，在没有噪声的情况下，可以非常完好地还原出系统状态，给予反馈非常真实的信息。

六、LQR 方法

LQR (Linear Quadratic Regulator) 即线性二次型调节器。LQR 通过设计状态量的加权矩阵 Q 和控制量的加权矩阵 R 来确定反馈增益矩阵 K , 使得二次型目标函数 J 取得最小值，来实现控制。LQR 的性能指标易于分析、处理和计算，而且通过线性二次型最优设计方法得到的倒立摆系统控制方法，具有较好的鲁棒型和动态特性，在倒立摆控制中得到了广泛的应用。

对于线性离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y &= Cx(k) \end{aligned}$$

二次代价函数为

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)]$$

其中 R 为正定矩阵, Q 为正半定矩阵。

最优控制序列规则为

$$u^*(k) = -[R + B^T H(k+1)^{-1} B]^{-1} B^T H(k+1) A x(k) = -K_{LQ}(k) x(k)$$

其中 H 通过离散 Riccati 方程解得。

$$H(k) = Q + A^T H(k+1) A - A^T H(k+1) B [R + B^T H(k+1) B]^{-1} B^T H(k+1) A$$

其最优代价为

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0)$$

所以在设计 LQR 控制器中, 关键在于如何合理的选择代价权重矩阵 Q 和 R 。

LQR 观测器初步设计

在设计运用中, 通常 R 和 Q 都取对角矩阵, 二阶倒立摆系统中, 一般情况下, R 增加, 控制力减小, 输入向量 u 变小, 即输入电压的幅值变小, 有利于满足最大输出电压不超过电机额定电压的限制, 避免出现控制模型出现饱和的情况, 同时状态量的变化较小, 可以减小位移超调量和杆偏转角度在调整过程中的最大值, 但带来的弊端是需要的调整时间将被延长。

对于矩阵 Q , 当其找那个某元素相对增加, 其对应的状态变量的响应速度相对减慢, 如 Q 对于摆杆 1 的转角 θ_1 增大时, θ_1 的变化速度就会减小, 有利于满足 θ_1 调整过程中的最大值较小, 避免出现因 θ_1 偏大而导致的线性化误差。

根据经验, Q 、 R 可以通过下面的式子初步确定:

$$Q(i, i) = \frac{1}{x_{i, \max}^2}$$

$$R(i, i) = \frac{1}{u_{i, \max}^2}$$

其中 $x_{i, \max}^2$ 表示第 i 个状态量可接受的最大值, $u_{i, \max}^2$ 表示第 i 个输入量可接受的最大值

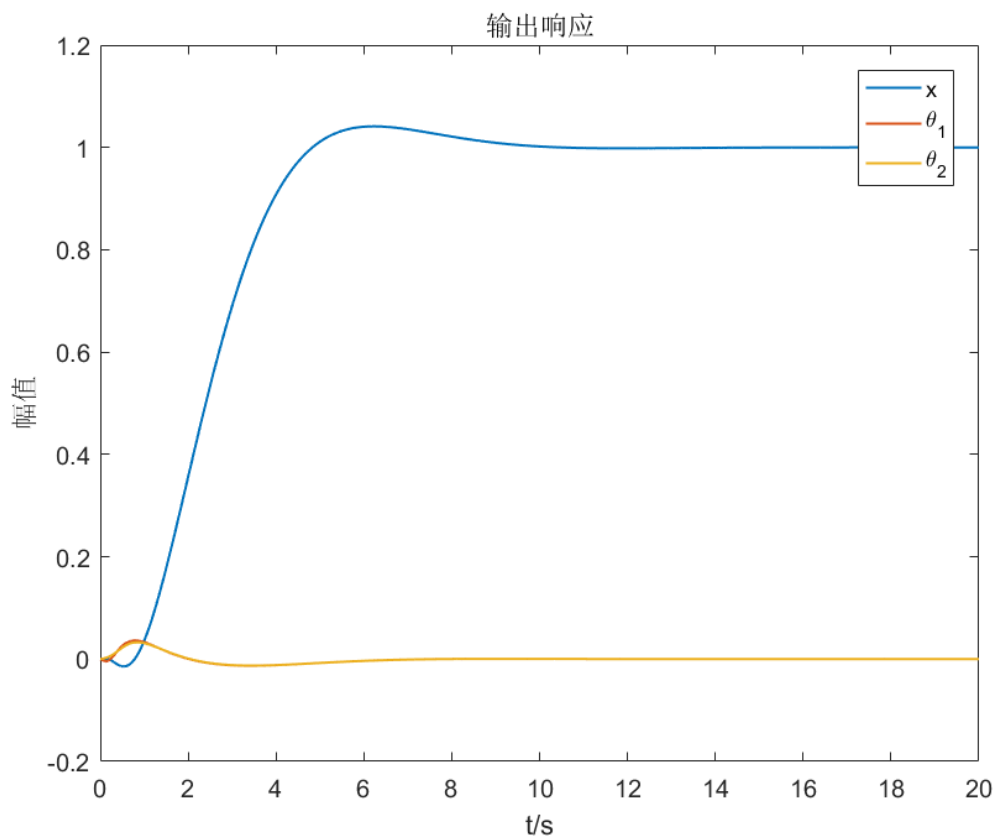
考虑到当摆杆偏转角度大于 5° 时, 系统线性化带入的误差较大, 但当摆杆偏转角度过小时, 系统的调整时间偏大, 所以综合考虑, 选择摆杆的最大偏转角度为 $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 10^\circ$ 。位移的最大值要求相对较小, 取为 1.2。其余几个状态变量并不是主要的控制目标, 认为可接受最大值为无穷, 即其 Q 矩阵中对应的值为 0。电机的最大输入电压并不确定, 所以先假定为 24V, 故选择 $u_{\max} = 24$, 最大电压允许超过 10%。

根据上述方法和设计得到的矩阵 Q 和 R 如下:

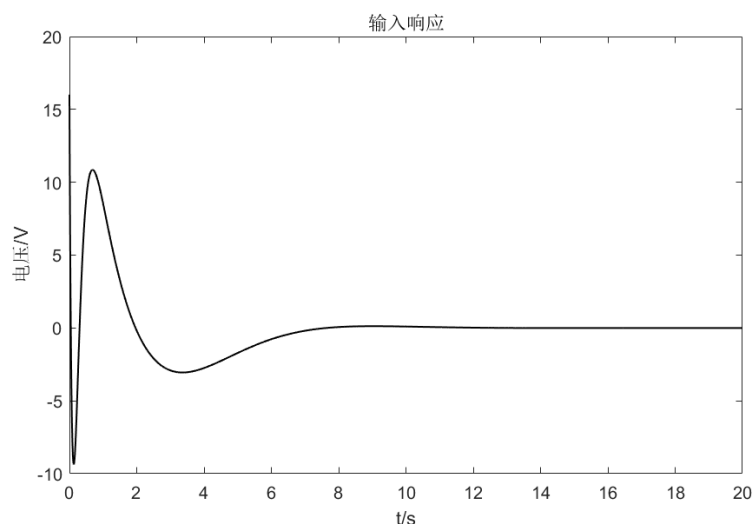
$$Q = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.002$$

在 matlab 中，可以很方便地用“dlqr”命令完成对系统的 LQR 最优控制。仿真结果如下图



从系统的仿真结果可以得到，x 的最大值为 1.04，超调量为 4%， θ_1 的最大值为 2.08 度， θ_2 的最大值为 1.88 度，可见超调量相对较小，摆杆的摆动 θ_1 和 θ_2 很小，完全满足初始给定的条件，但由于离给定的限定条件距离较远，所以最终的 2%误差下的调整时间约为 8.1s，明显较慢，快速性不能满足设计要求。



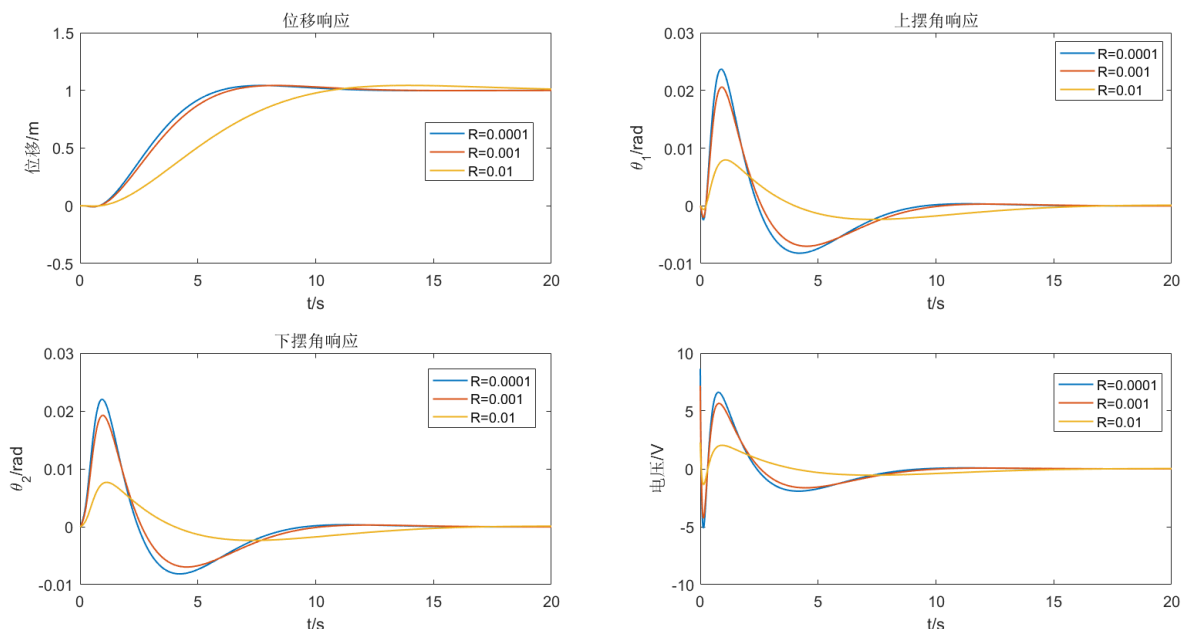
从仿真结果上看,输入正电压最大值为 16.01V,负电压幅值最大值为 9.36V,离初始给定的 24V 边界裕量相对还是比较大的。

综上,通过经验公式初步设计的 Q 和 R 矩阵的平稳性很好,最大幅值的限制都满足了,但由于离设定的边界较远,整个系统响应的快速性还有一定的提升空间,可以适当调整 Q、R 参数,让系统的响应更加接近我们初始设定的最大限制条件来提速其响应速度。

QR 参数测试

对 R 参数对系统响应的影响进行测试。

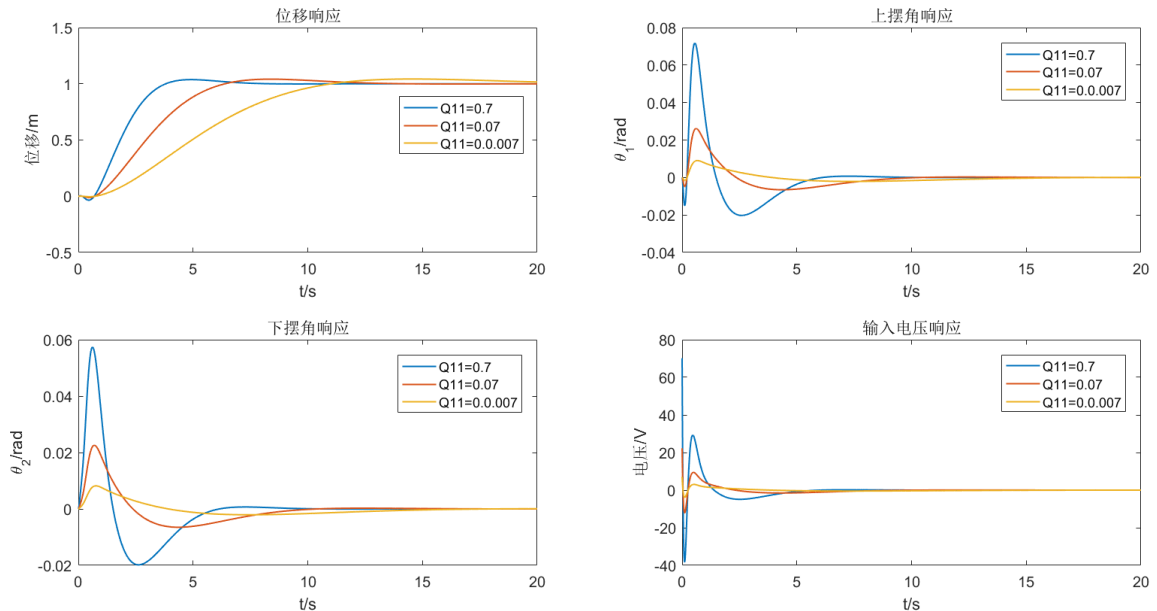
- 保持初始的 Q 矩阵不变,变动 R, 观察系统输入输出的变化。



通过改变 R 值输入输出的响应,不难看出 R 减小可以系统的快速性,但会使得系统振动的幅值变大,即使得位移的超调量增大,上下摆角的最大幅值增大。不过由于所取 R 值还不够小,所以离设定的最大幅值边界限制还相对比较远,但 R=0.0001 和 R=0.001 的输出波的改变量已经不是很大了,虽 R 应该尽量取小一

点,但这种情况下,光改变 R 已经不够了,需要配合其他参数进一步提高系统的快速性。

- 设置 $R=0.001$, 改变 Q 矩阵和位移对应的对角线上的参数 Q_{11} 观察系统输入输出的变化。



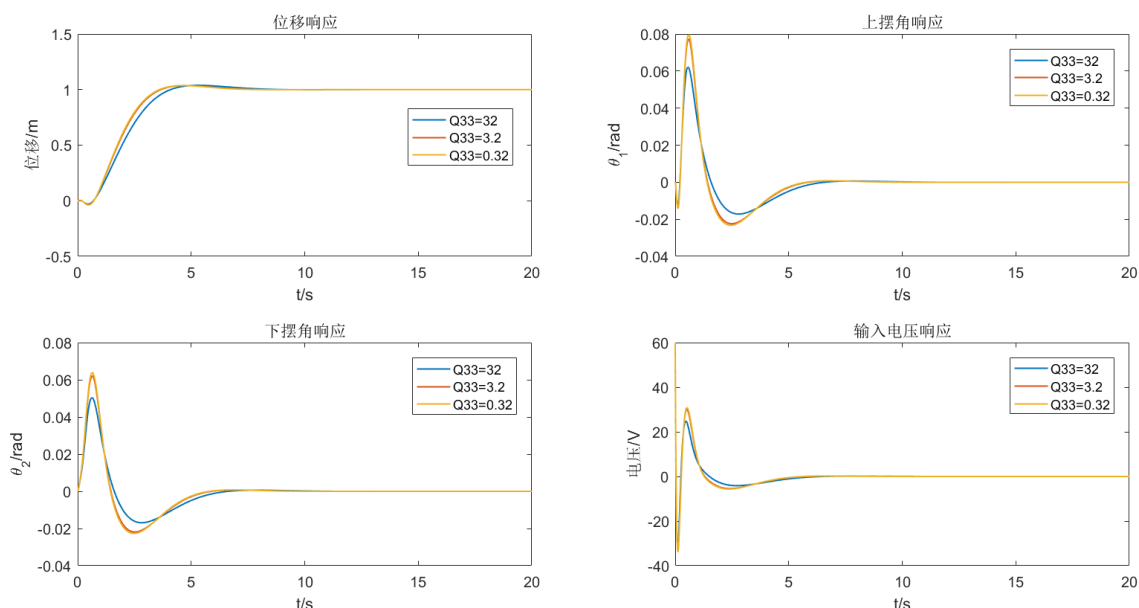
从图中,对于位移响应图,由于 Q_{11} 改变对位移的超调量改变较小,所以从图中难以看出超调量随 Q 的变化情况,查看数值,可得

Q_{11}	超调量
0.7	3.74%
0.07	4.13%
0.007	4.26%

可见增大 Q_{11} , 确实可以减小系统的超调量,和 LQR 理论相符合,但是,系统的跟随速度并没有降低,所以超调量和跟随速度有时并没有必然的联系,所以之前关于“增大状态量对应的 Q 参数,该状态量最大改变幅度减小,响应速度也减小”的推测不完全正确。

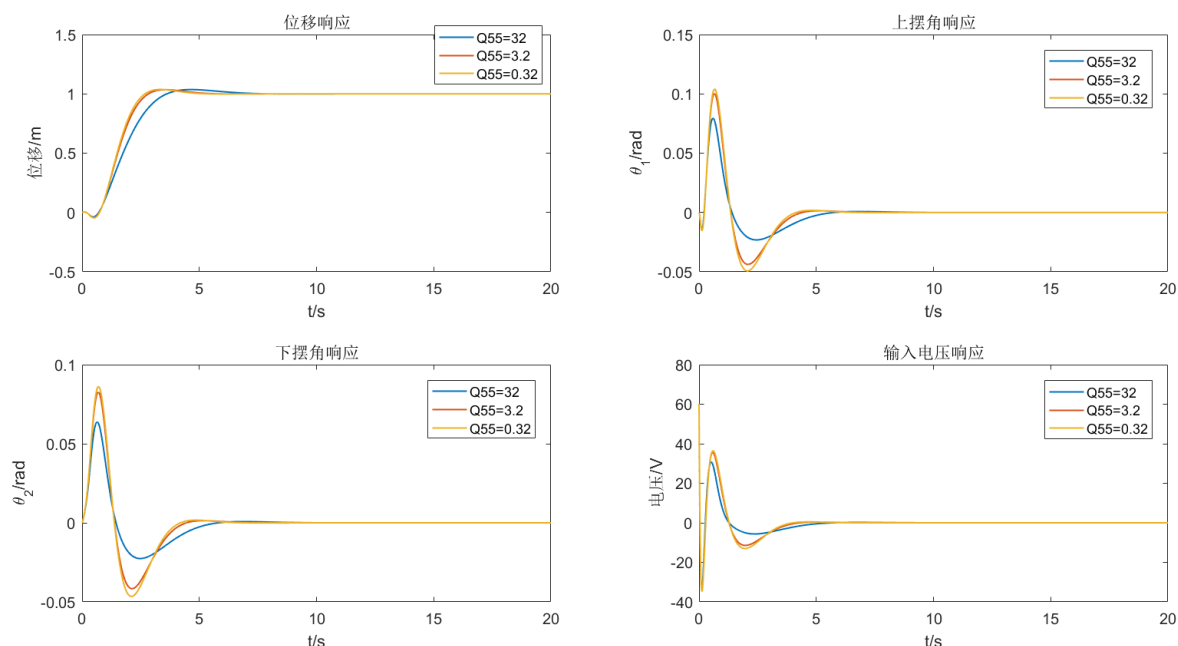
从仿真结果上来看,增大 Q_{11} 可以提高系统的快速性,由于耦合关系,上下摆角的摆动幅度和最大电压也随之增大,向限定的边界接近,所以在 Q_{11} 的选择上,应该尽量大。

- 设置 $R=0.001$, $Q_{11}=0.5$, 改变 Q 矩阵和上摆角对应的对角线上的参数 Q_{33} 观察系统输入输出的变化。



从仿真结果，不难看出，随着 Q_{33} 减小，上摆角的最大摆角增大，同时由于耦合关系，下摆角和电压也同样都增大了，不过快速性也都得到了提升，和之前的理论预期是完全一致的。但是随着 Q_{33} 的减小， $Q_{33}=3.2$ 和 $Q_{33}=0.32$ 得到的波形，已经相差不大，这时候应该调整其他参数来进一步提高快速性。

- 设置 $R=0.001$, $Q_{11}=0.5$, $Q_{33}=0.5$ 改变 Q 矩阵和上摆角对应的对角线上的参数 Q_{55} 观察系统输入输出的变化。



从仿真结果可以看出，随着 Q_{55} 的减小，由于耦合关系，系统的输入输出的波动幅度都变大了，但快速性也得到了明显的提升，不过同样的，在 Q_{55} 较小时，即 $Q_{55}=3.2$ 和 $Q_{55}=0.32$ 两种情况下，快速性的改变已经相对比较小了，进一步减小 Q_{55} 意义不大。

综上，在设计 LQR 控制器时， R 应尽可能取得小， Q_{11} 应尽可能取大一点，

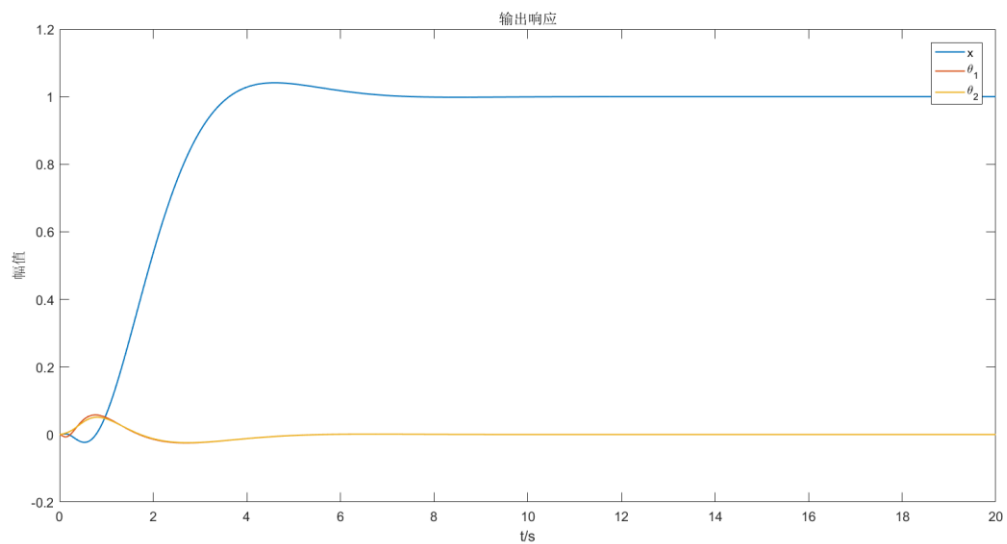
但不宜过大，否则会超出电压的限制条件。此外，Q33 和 Q55 都可以尽可能小一点。

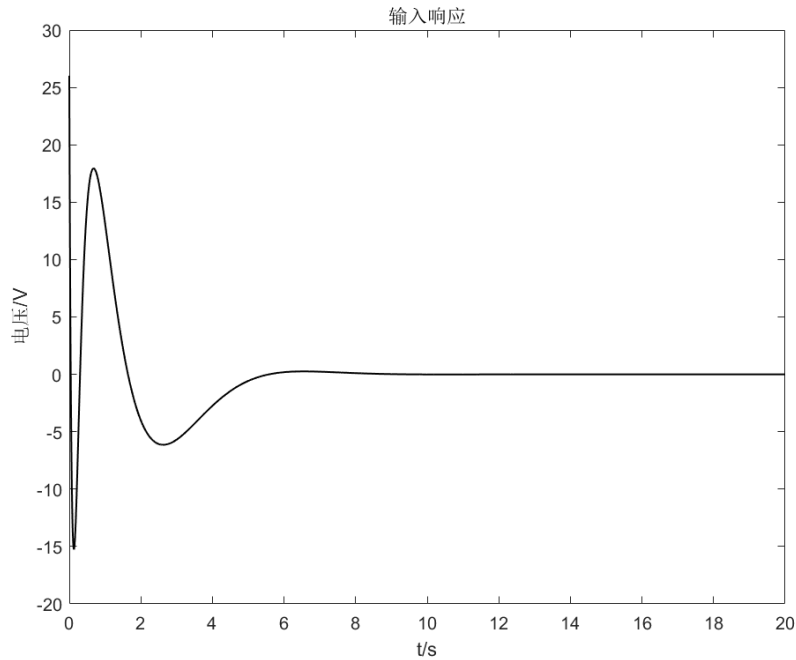
最终设计

通过几次调试，迭代设计，最后选定的 Q 和 R 如下

$$Q = \begin{bmatrix} 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$R = 0.00092$$

仿真结果如下





最终系统的动态性能为 2%误差的调整时间为 5.9s，满足设计要求；最大输入电压为 26.01V，超出最大电压 8.3%，满足要求；位移控制超调量 4%，满足设计要求；上摆角最大值为 3.32° ，下摆角最大值为 2.93° ，均满足设计要求。

基于遗传算法对 LQR 控制器进行优化

1、遗传算法简介

遗传算法 (Genetic Algorithm, 简称 GA) 是一种最基本的进化算法，它是模拟达尔文生物进化理论的一种优化模型，最早由 J.Holland 教授于 1975 年提出。遗传算法中种群分每个个体都是解空间上的一个可行解，通过模拟生物的进化过程，从而在解空间内搜索最优解。

2、遗传算法在 LQR 控制器优化中的应用

由于在 LQR 控制器设计过程中，Q、R 需要人工选定，所以存在一定的主观性，且参数之间存在耦合作用，难以分离开分析单个参数，且穷举时间成本太大，所以可以利用遗传算法来选取合适的 Q 和 R 来优化 LQR 控制器。

具体设计流程如下：

Step 1 种群初始化：由于需要优化的参数只涉及 Q 矩阵中的 Q11、Q33 和 Q55 和 R（尽量降低维数，提高速度），一共四个，所以以四个参数为一组个体，对种群中的 N 个个体进行初始化操作，选择之前 LQR 控制器的最终设计结果作为优化的初始条件，即初始种群为

$$[0.85 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.00092]$$

Step 2 个体评价：根据优化的目标函数计算种群中个体的适应值，观察到极点配置的最好情况调节时间为 4.9s，故选择适应度函数为

$$fitness = \begin{cases} 100^{\frac{5}{t_s}}, & \text{平稳性要求满足} \\ 0, & \text{平稳性要求不满足} \end{cases}$$

这样可以满足时间越小越容易被选中，不满足平稳性要求的解被直接筛去。

Step 3 迭代设置：设置种群最大迭代次数 g_{max} ，并令当前迭代次数 $g=1$ ；

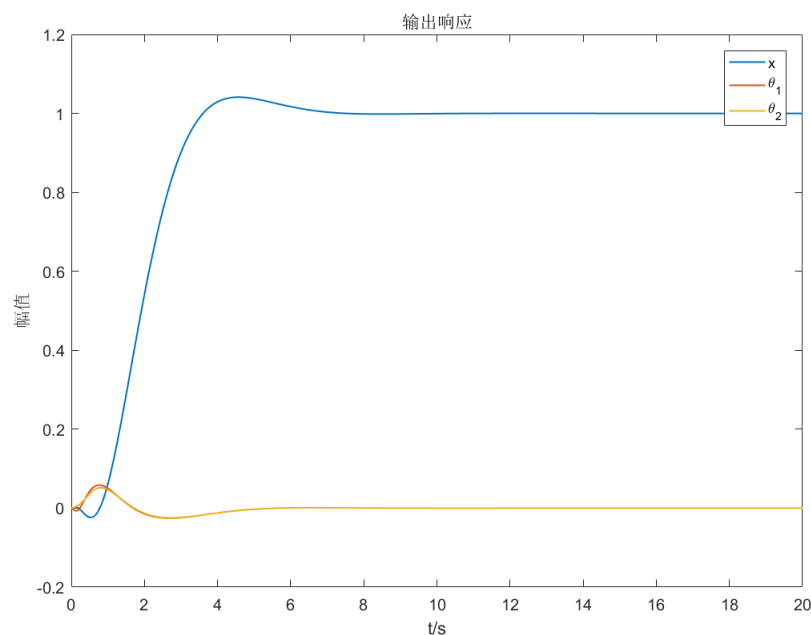
Step 4 个体选择：设计合适的选择算子来对种群 $P(g)$ 个体进行选择，被选择的个体将进入交配池中组成父代种群 $FP(g)$ ，用于交叉变换以产生新的个体。选择策略要基于个体适应值来进行，假如要优化的问题为最小化问题，那么具有较小适应值的个体被选择的概率相应应该大一些。常用的选择策略有轮盘赌选择，锦标赛选择等。在实际实践中使用轮盘赌选择。

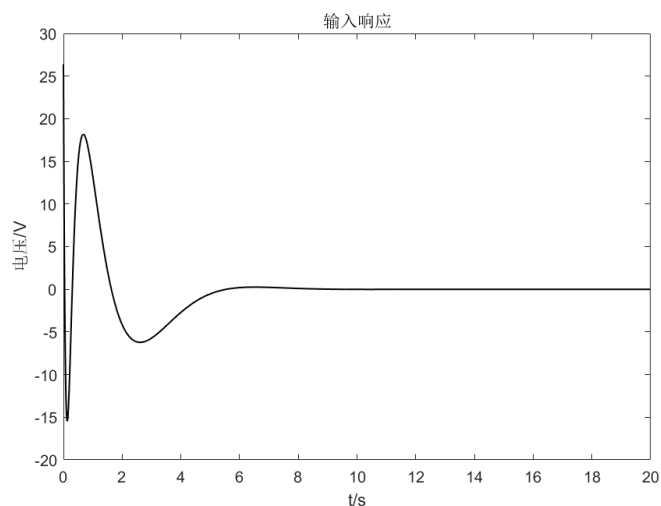
Step 5 交叉算子：根据交叉概率 p_m （设置为 0.9）来判断父代个体是否需要交叉操作。

Step 6 变异算子：根据变异概率 p_c （设置为 0.1）来判断父代个体是否需要变异操作。变异算子的主要作用是保持种群的多样性，防止种群陷入局部最优。

Step 7 通过交叉变异操作以后父代种群 $FP(g)$ 生成了新的子代种群 $P(g+1)$ ，令种群迭代次数 $g=g+1$ ，进行下一轮的迭代操作（跳转到 Step 4），直至迭代次数达到最大的迭代次数。

计算结果





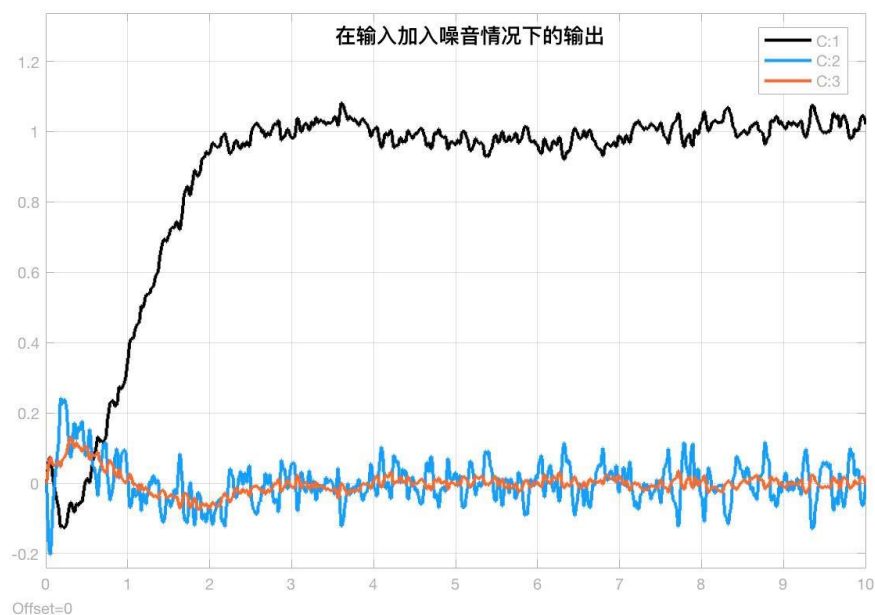
获得的系统动态性能为 2%误差的调整时间为 5.7s，满足设计要求，相比于优化前提升了 0.2s，平稳性条件都满足。所以总体上看，优化后和优化前的控制器性能由于参数选择不佳提升并不大，但还是有一定提升的，所以通过启发式算法来优化 LQR 控制器是完全可行的。

七、卡尔曼滤波：

在实际的环境中，往往存在激励噪声和干扰噪声，使得控制系统无法再理想的条件下工作，所以我们使用 simulink 对控制系统进行仿真时不妨加入噪声干扰，模拟实际的工作情况，来检测我们所设计的控制系统在有噪声时的性能。

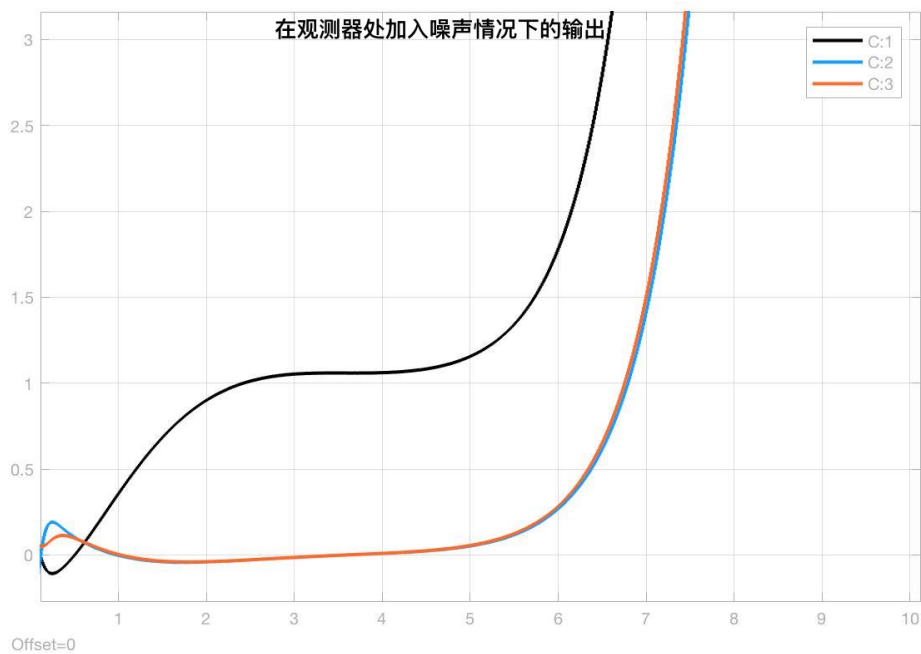
先探究系统不同环节引入离散高斯白噪音的影响：

系统输入加入噪音的影响：



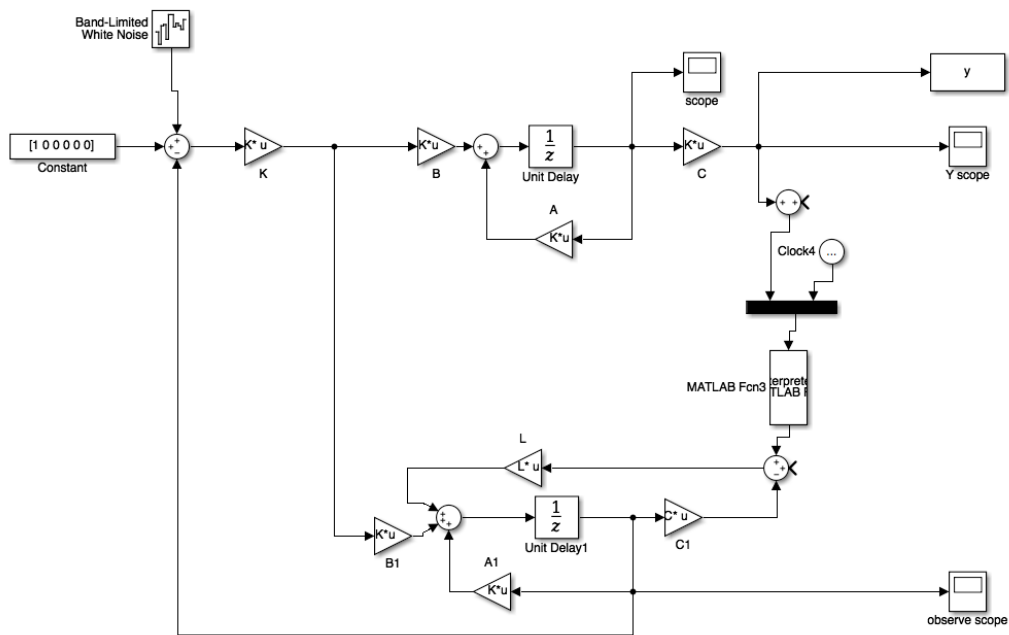
可以看到如果有噪声的情况下，系统的输出会因为噪声，在噪声功率不大的情况下还是可以保持稳定的。

在观测器输入噪声的影响：

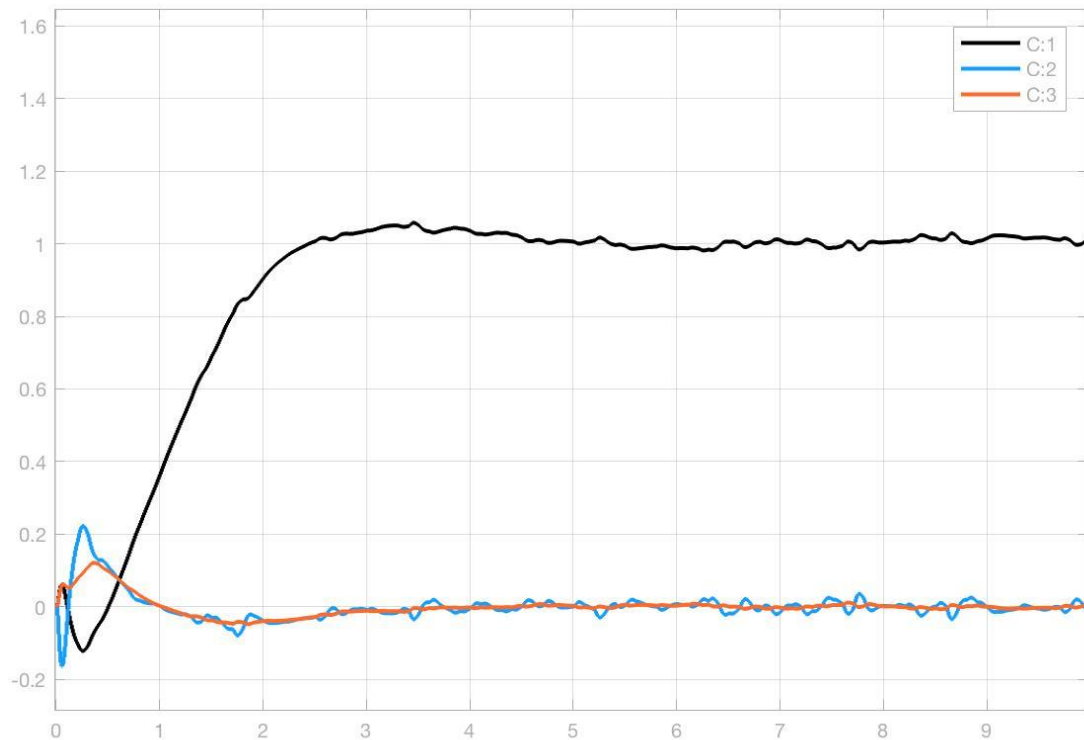


可以看到曲线在 3~4s 间有要稳定的趋势，但是之后发散了，可见离散的观测器稳定性很低，需要进行滤波保证系统的稳定性。

为了减小噪声影响，我们在观测器处加入了卡尔曼滤波的函数，通过一定程度上滤处部分高斯噪声解决问题：



滤波处理后得到曲线，可以看到相比于最初的噪声情况，改善了很多



总结

在本次控制器设计大作业中，我们针对二阶倒立摆进行了极点配置法的控制器配置和 LQR 控制器设计。

在仿真实践中我们发现，极点配置法对于极点的选择很有讲究，而且存在很大程度的主观性，所以对于要设计一个能满足比较条件比较宽裕的控制器，这种方法是比较可行，而且相对比较简单，但对于最优控制的实现比较困难，因为设计时方向性不够，比如我们组在设计时通过改变无阻尼自振角频率和阻尼比改进最初方案后设计出来的控制器的性能就大不相同，后者的快速性非常优秀，远远高于前者。所以这种设计方法的随机性很高。

LQR 通过合理选择 Q 权重矩阵和 R 权重矩阵，可以比较容易地实现最优控制，方向性比较高。同时 Q 和 R 矩阵同样存在选择性问题，不过可以通过模糊控制、强化学习、神经网络、遗传算法等进行 Q 、 R 的选择和优化，在实验中尝试了遗传算法进行优化，但可能由于参数选择不佳，最终效果并不是特别好，比较遗憾。

设计了 Lubuenger 观测器，在无噪声下跟随性能很好，但有噪声下出现了发散，尝试了卡尔曼滤波，对波形有了一定的改善。