Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Modellierung des Zufalls **5**
1.1 Zufallsexperimente 5
1.1.1 Das Würfeln 5
1.1.2 Das Lottospiel 5
1.1.3 Das Geburtstagsproblem 6
1.1.4 Das Ziegenproblem 6
1.2 Algebra und Maße 6
1.2.1 Die Axiome von Komolgoroff 6
1.2.2 “Erweiterung” der Kolmogoroff-Axiome 7
1.2.3 σ-Algebra 7

Kapitel 1

Mathematische Modellierung des Zufalls

1.1 Zufallsexperimente

1.1.1 Das Würfeln

Vorlesung vom 14.4.2010
$\Omega = \{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ Wir möchten zufällig genau eine Zahl aus Ω ziehen. Eine Möglichkeit: n-seitiger Würfel
Ansatz: $Pr[i] = \frac{1}{n} \forall i \in \Omega$
$Pr \mathrel{\widehat{=}} \text{``}Probability''$
Sei $A = \{a_1, ..., a_k\} \subset \Omega$, dann ist $Pr[A] = \frac{|A|}{n} = \frac{k}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass $a_1, ..., a_{k-1}$ oder a_k ausgewählt werden.
A nennt man *Ergeignis* Ergeignis
Wenn alle $Pr[i]$ gleich sind so spricht man von einer *Gleichverteilung* . Gleichverteilung
Bei Spielen: n=6 Es herrscht Unabhängigkeit der Würfe, d.h. Ergebnisse beeinflussen sich nicht.

1.1.2 Das Lottospiel

Es werden 6 Zahlen aus 49 gezogen, sagen wir $a_1, ..a_6$. Wir nehmen an, dass wir diese schon geordnet haben: $a_1 < ... < a_6$. Eine Ziehung ist ein Vektor $(a_1, ..., a_6)$ mit $a_1 < ... < a_6$. Ergebnisse sind diese Vektoren. Man fasst die Ergebnisse zu einem *Grundraum* zusammen, den wir üblicherweise Ω nennen. Grundraum

$$\Omega = \{\{a_1, ..., a_6\} \mid a_i \in \{1, ..., 49\} \forall i = 1...6\}$$

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tipp 6 Richtige hat? Allgemeiner: k Richtige? Welche $\{a_1, ..., a_6\} \in \Omega$ haben k Stellen gemeinsam mit dem Tipp? Die bezeichnen wir als *günstige Ereignisse* . günstige Ereignisse

$$A = \{\{a_1, ..., a_6\} \in \Omega \mid \left|\{a_1, ..., a_6\} \bigcup \{b_1, ..., b_6\}\right| = k\}$$

Wenn ein Element aus A gezogen wird haben wir k Richtige.

$$Pr[k\text{Richtige}] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

$$\Rightarrow Pr[6\text{Richtige}] = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \binom{1}{49}$$

Vorlesung vom 19.4.2010

1.1.3 Das Geburtstagsproblem

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen in einer Gruppe von m Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? z.B.: $m = 50$

1.1.4 Das Ziegenproblem

Bei einem Fernsehquiz gibt es drei Türen, wobei hinter zwei Türen eine Ziege steht und hinter der dritten Tür ein Hauptgewinn. Der Showmaster fragt den Kandidaten, welche Tür er öffnen soll. Nachdem der Kandidat einen Tipp abgegeben hat, bietet der Showmaster seine Hilfe an: Er schlägt vor eine Tür zu öffnen und danach soll der Kandidat die Möglichkeit haben seinen Tipp zu verändern.Würden Sie sein Angebot annehmen?

> In diesem Fall ist es nicht so einfach, da die günstigen Ergeignisse nicht unabhängig sind.

1.2 Algebra und Maße

Die axiomatische Fundierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurder von Kolmogoroff Anfang des 20. Jahrhunderts gegeben. Erst dadurch wurde Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wissenschaftliche und quantitative Disziplin.

1.2.1 Die Axiome von Komolgoroff

Ereignisse

- Ergebnisse eines Zufallsexperimentes fassen wir in einer Menge Ω zusammen.
- *Ereignisse* sind gewisse Teilmengen von Ω.
- Wahrscheinlichkeiten werden auf Ereignisse bezogen und sind Zahlen zwischen 0 und 1. Eine Zahl $p \in [0, 1]$,z.B. $p = \frac{3}{4}$ besagt dass das entsprechende Ereigniss in $\frac{3}{4}$ der Zufallsexperimente auftrit, oder die Wahrscheinlichkeit ist 75 Prozent.

  $p = 0$: Das Ereignis tritt nicht auf.

  $p = 1$: Das Ereignis tritt stets auf.

Beispiel: Wir werfen eine faire Münze. Kopf und Zahl kommen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

$$\text{Menge } \Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\} = \{0, 1\}$$

$$\text{Ereignisse} = \{\{0\}, \{1\}, \emptyset, \{0, 1\}\} = \mathcal{P}(\Omega) = \text{Potenzmenge von } \Omega$$

$$P(\{0\}) = \frac{1}{2} = P(\{1\}), P(\emptyset) = 0, P(\{0, 1\}) = 1$$

1.2.2 "Erweiterung" der Kolmogoroff-Axiome

Wie muss die Menge der Ereignisse aussehen?

- A Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p. Wir möchten das Gegenereignis ("A tritt nicht auf" $= A^c$) ebenfalls als Ereignis ansehen mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$.
- Ereignisse A,B mit den Wahrscheinlichkeiten p und q . Was ist das Ereignis "A oder B" bzw. ?
  "A oder B" $= A \cup B$
  "A und B" $= A \cap B$
  Mithin sollten auch diese Ereignisse in der Ereignismenge drin sein.
- Was ist $P(A \cup B)$?
  Situation: $A \cap B = \emptyset$ dann ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.2.3 σ-Algebra

Definition 1.1 Es sei Ω eine Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Σ heißt σ-Algebraüber Ω fallse folgende Eigenschaften gelten:

> Das *sigma* steht für die Abzählbarkeit der Vereinigung. Für bestimmte Modellierungen ist die Potenzmenge zu groß, daher beschränkt man sich auf eine Teilmenge.

- $\Omega, \emptyset \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
- Für eine Folge $A_1, A_2, ... \in \Sigma$ gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

  (Σ-Abgeschlossenheit)

Ereignisse über einer Menge Ω werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie durch eine geeignete σ-Algebra beschrieben wird.

Was ist mit $A \cap B$ falls $A, B \in \Sigma$? Ist $A \cap B \in \Sigma$?

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

$$\Rightarrow A^c, B^c \in \Sigma \Rightarrow A^c \cup B^c \in \Sigma \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \Sigma$$

$\{\emptyset, \Omega\}$ ist die kleinste und $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die größte σ-Algebra über Ω.