

Test Deckblatt

Projektarbeit auf dem Gebiet des Flugzeugbaus und Leichtbaus

Bearbeitungsdauer: 13 Wochen

Brack Tristan  
Golombek Hannes  
Kammler Hendrik  
Scholz Ole

Matr.-Nr.  
Matr.-Nr.  
Matr.-Nr.  
Matr.-Nr.

Ausgegeben am: 15.10.2020

Abgegeben am:

## Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund -Holm-Bauweise

### 1. Einleitung

Im Rahmen dieser Projektarbeit soll der Flügel des LF1 „Zaunkönig“ (siehe Abbildung 1) im Modellmaßstab 1:4,7, d.h. die Halbspannweite beträgt ca. 848 mm, ausgelegt werden. Aus der Auslegung des Gesamtflugzeuges resultieren entsprechende Anforderungen an den Flügel, welche im Zuge der Auslegung und Fertigung berücksichtigt werden müssen. Sowohl die konstruktiven als auch die strukturmechanischen Maßnahmen sollen mit Hilfe geeigneter Ingenieursmethoden erfolgen und begründet werden.

Zur Überprüfung der Auslegung sollen die Ergebnisse der Berechnungen mit Messergebnissen aus vorangegangenen Tests verglichen werden.



Abbildung 1: Seitenansicht LF1 "Zaunkönig"

## 2. Anforderungen/Vorgaben

### 2.1. Geometrische Vorgaben des Flügels

Bei dem Flügel des Zaunkönigs handelt es sich um einen Rechteckflügel (Zuspitzung  $\tau = 0$ , Pfeilung  $\phi = 0^\circ$ ). Vorflügel und Hochauftriebsklappen erstrecken sich über die gesamte Spannweite und sind jeweils an der Flügelwurzel, -mitte und -spitze mit dem Hauptflügel verbunden (bei  $\eta = \{0,0; 0,5; 1,0\}$ ). Darüber hinaus ist der Hauptflügel gegenüber dem Rumpf mit Verstrebungen am Punkt ( $\eta = 0,50$ ;  $\xi = 0,25$ ) abgestützt. Die Maße des Gesamtflügels sind Abbildung 2 sowie den beigefügten Anlagen zu entnehmen. Im Gegensatz zu dem originalen, abgestrebten Flügel des Zaunkönigs soll eine alternative Bauweise ohne Streben umgesetzt werden.



Abbildung 2: Bemaßte Front- und Draufsicht des LF1 "Zaunkönig"

### 2.2. Strukturmechanische Anforderungen

Für die strukturmechanischen Tests soll das Modell eines Halbflügels in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise gebaut werden, der bei einer möglichst geringen Eigenmasse eine Prüfkraft von 500 N ohne Bruch erträgt. Dabei soll der Flügel sowohl auf Festigkeit als auch auf Steifigkeit ausgelegt werden. Eine hinreichende Steifigkeit ist gegeben, wenn sich der Flügel bei einer senkrechten Belastung von  $F_{\text{Prüf}} = 100 \text{ N}$  an der Flügelspitze (L/4-Punkt) um nicht mehr als  $z_{100\text{N}} = 22 \text{ mm}$  durchbiegt. Um die Hautdicke ausschließlich auf Festigkeit zu dimensionieren, aber frühzeitiges Beulen der Haut zu vermeiden, kann ein Sandwich-Aufbau an kritischen Bereichen und/oder Rippen gewählt werden. Es sind geeignete konstruktive Mittel zu überlegen um diese Vorgaben zu erreichen. Die Einhaltung der Anforderungen ist rechnerisch nachzuweisen.

Darüber hinaus soll der Torsionswinkel der Flügelaußenkante in Abhängigkeit einer exzentrischen, senkrechten Prüflast mit Hilfe der Theorie nach St. Venant berechnet werden.

### 2.3. Konstruktive Anforderungen

Der Hauptflügel des Zaunkönigs ist als Modellflügel in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise umzusetzen. Vorflügel und Hochauftriebsklappen sind nicht auszuführen. Das aerodynamische Profil des Hauptflügels ist zu bewahren. Die V-Stellung des Flügels ist zu vernachlässigen. Als Kernmaterial steht Styrodur und Depron zur Verfügung. Die Faserorientierung der Gewebe ist im Einklang mit den durchgeführten Rechnungen belastungsgerecht zu wählen.

Die rumpfseitigen Einspannverhältnisse sind wie in Anlage C ausgeführt. Diese sehen eine wie bei Klein- und Segelflugzeugen übliche Konstruktion vor: Der Holm wird dabei im Rumpf mit der anderen Flügelhälfte verstiftet und jede Flügelhälfte stützt sich gegen den Rumpf wobei die Torsion mit Querkraftbolzen aufgenommen wird. Für den Flügelbau bedeutet dies, dass der Holm entsprechend Anlage C aus dem Flügel herausgezogen werden muss. Es sollte außerdem berücksichtigt werden, dass der Holm geeignet getapert wird, um Versagen im Einspannungsbereich zu vermeiden. An der freien Flügelspitze ist zur Lasteinleitung eine Endrippe vorzusehen, die die lösbare Montage der Endscheibe aus Anlage D erlaubt.

Der Flügel darf ein maximales Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten. Auf eine fertigungsgerechte Konstruktion ist zu achten.

### 3. Bewertungskriterien

Das Hauptaugenmerk der Konstruktion sollte, unter Einhaltung der zuvor genannten Randbedingungen, auf einem möglichst geringen Eigengewicht des Flügels liegen. Ein Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gruppen untereinander soll anhand der Masse  $m_{\text{Flügel}}$  entsprechend des gewichtsnormalisierten Festigkeitskriteriums  $m_{\text{Belastung,max}}/m_{\text{Flügel}}$  erfolgen, welches die ertragene Bruchlast mit dem Eigengewicht der Konstruktion ins Verhältnis setzt.

### 4. Aufgabenstellung

Um die oben beschriebenen Anforderungen zu erfüllen, sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

1. Einarbeitung in die Fragen der Anforderungen
2. Entwicklung konstruktiver und strukturmechanischer Lösungsansätze für die Faserverbund-Bauweise
3. Festlegung einer konstruktiven Lösungsvariante
4. Dimensionierung und Nachweis der gewählten Lösungsvariante mittels
  - a. Handbuchmethoden, sowie
  - b. Numerischer Methoden
5. Detailentwurf der dimensionierten Lösungsvariante
6. Auswertung, Vergleich und Diskussion der berechneten Daten (Biegung, Torsion, max. Bruchlast, Schubmittelpunkt)
7. Vergleich mit im Strukturtest ermittelten Daten und denen anderer Gruppen
8. Diskussion der Ergebnisse
9. Bewertung der eigenen Konstruktion und Diskussion einer Optimierung

Arbeitsteilung und -ablauf ist durch die Gruppe selbstständig zu organisieren. Theoretische Hintergründe, erstellte Modelle, sowie Vorgehensweisen, Entscheidungskriterien und gewonnene Ergebnisse sind sorgfältig zu dokumentieren. Die Verfasser der einzelnen Abschnitte des Abschlussberichtes sind zu kennzeichnen.

## 5. Literatur

- [A] Horst, P., (2013) 'Leichtbau I – Ingenieurtheorien des Leichtbaus' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [B] Ostermeyer, G.-P. (2010) 'Mechanik I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Dynamik und Schwingungen
- [C] Horst, P., (2013) 'Finite Elemente Methoden I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [D] Schürmann, H., (2007) 'Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden' Springer-Verlag Berlin Heidelberg

## 6. Anlagen

- [A] Merkblatt für die Anfertigung studentisch-wissenschaftlicher Arbeiten
- [B] Flügelkontur, Technische Zeichnung
- [C] Einspannung, Technische Zeichnung
- [D] Endscheibe, Technische Zeichnung

---

(Ort, Datum)

---

(Prof. Dr.-Ing. P. Horst)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Hauptteil</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
3.1	Glasfaser . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Modellierung des Holms</b>	<b>7</b>
4.1	Annahmen zur Modellierung (T.B.) . . . . .	7
4.2	Analytische Lösung der Modellierung (T.B.) . . . . .	9
4.3	Ermittlung der Biegesteifigkeit . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Auslegung des Holms nach VDI 2013</b>	<b>11</b>
5.1	Dimensionierung der Gurte . . . . .	12
5.2	Nachrechnung der angepassten Gurte . . . . .	14
5.3	Bestimmung der Lagenanzahl des Steges . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>FEM</b>	<b>17</b>
7.1	Warum FEM? . . . . .	17
7.2	Wie funktioniert FEM? . . . . .	17
7.2.1	Schwache Lösung der Elastostatik . . . . .	17
7.2.2	Diskretisierung . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>18</b>
<b>9</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>18</b>
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>18</b>

## 1 Bezeichnungen

Alphabetische Ordnung!

Lateinisch vor griechisch, jeweils Groß- vor Kleinbuchstaben

(lat. Großbuchstaben)

$A$  : Festlager

$B$  : Loslager

$E_{11}$  : Elastizitätsmodul des Verbundes in Faserlängsrichtung  $E_{f,11}$  : Elastizitätsmodul der Fasern in Faserlängsrichtung

$E_{f,22}$  : Elastizitätsmodul der Fasern in Faserquerrichtung

$E_M$  : Elastizitätsmodul der Matrix

$F_{pruef}$  : Prüfkraft an der Flügelspitze  
 $F_Q$  : Kraftaufnahme der Querkraftbolzen  
 $R_{||}^{(+)}$  : Zugfestigkeit parallel zur Faserrichtung des UD-Handlaminats  $R_{||}^{(-)}$  : Druckfestigkeit parallel zur Faserrichtung des UD-Handlaminats  
 (lat. Kleinbuchstaben)

$l_0$  : Länge des freien Endes  
 $l_1$  : Abstand der Lager A und B  
 $l_2$  : Abstand zwischen Lager B und den Querkraftbolzen  
 $l_3$  : Abstand zwischen den Querkraftbolzen und der Flügelspitze  
 $s$  : Halbspannweite  
 $w$  : Absenkung der Flügelspitze in negative z-Richtung

(griechische Kleinbuchstaben)  
 $\phi$  : Faservolumengehalt  $\rho_f$  : Dichte der Fasern  $\rho_m$  : Dichte der Matrix

## 2 Hauptteil

TEst Hauptteil

## 3 Grundlagen

### 3.1 Glasfaser

Test

## 4 Modellierung des Holms

### 4.1 Annahmen zur Modellierung (T.B.)

Das Koordinatensystem des Flügels entspricht dem Flugzeugkoordinatensystem, sodass die Flügellängskoordinate durch  $y$  definiert ist. Der Koordinatenursprung ist im Lager A positioniert.

Der Holm inkl. des Holmstummels wird für die Belastung durch eine Prüfkraft  $F_{pruef}$  in negative z-Richtung als Biegebalken ausgelegt. Dafür ist er an zwei Stellen gelagert, dem Lager A und Lager B, dabei repräsentieren sie die Verstiftungen (siehe Bauteil Ü-Profil"). Um eine Überbestimmung des Systems zu vermeiden, wird das Lager B als Loslager angenommen. Die Querkraftbolzen werden nicht durch ein Lager, sondern durch eine zusätzlich angreifende Kraft  $F_Q$  simuliert, da keine Absenkung, sondern lediglich eine Kraftaufnahme der Wurzelrippen möglich ist.

Als Randbedingungen der Modellierung sind die Halbspannweite  $s$  und die Absenkung  $w$  gegeben. Für die Absenkung  $w$  soll eine Sicherheit  $j = 1,1$  gesetzt werden. Zwischen Lager A und

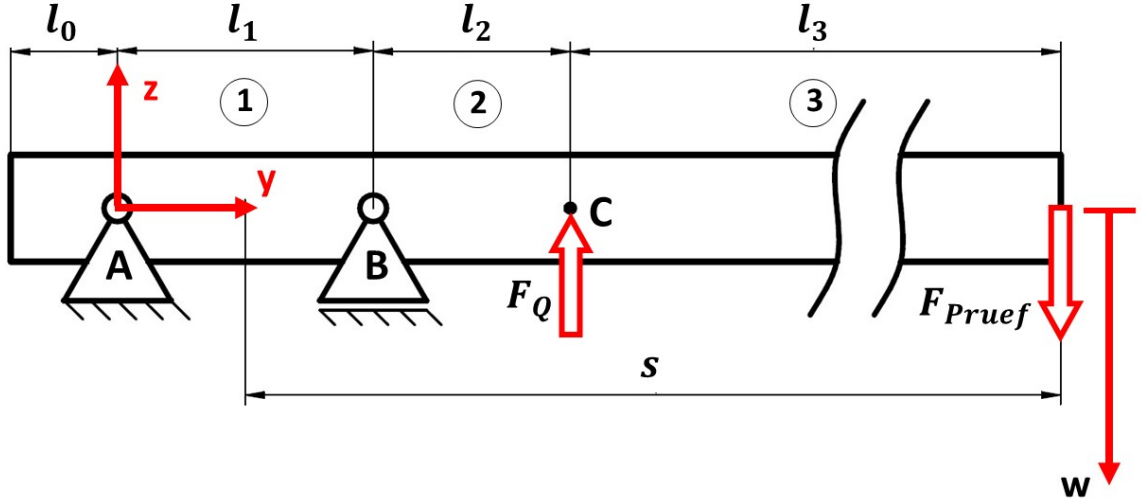


Abbildung 1: Modellierung des Holms

$B$  wird die Länge  $l_1$  angenommen, zwischen Lager  $B$  und der Wurzelrippe  $C$  die Länge  $l_2$ . Die verbleibende Länge bis zur Flügelspitze, an der die Prüfkraft  $F_{pruef}$  wirkt, wird  $l_3$  bezeichnet. Die Halbspannweite  $s$  wird beginnend in der Mitte der Verstiftungen bis zur Flügelspitze gemessen. Das Holmstummelende wird ab dem Lager  $A$  mit  $l_0$  als Länge definiert. Diese Länge ist jedoch unerheblich für die Modellierung, sondern wird erst für die Massenbestimmung benötigt.

Anhand der Randbedingungen und der Einspannvorrichtung für den Versuchsaufbau ergeben sich folgende Längen (ebenfalls in Abb. 1 dargestellt):

$$s = 0,848m \quad (1)$$

$$l_0 = 0,03m \quad (2)$$

$$l_1 = 0,076m \quad (3)$$

$$l_2 = 0,037m \quad (4)$$

$$l_3 = s - \frac{l_1}{2} - l_2 = 0,773m \quad (5)$$

$$w_{j=1,1} = \frac{1}{j} * w = \frac{1}{1,1} * 0,022m = 0,02m \quad (6)$$



## 4.2 Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)

Um die der Differentialgleichungen der Balkenbiegung lösen zu können, wird das System vorerst in drei Teilbereiche *I*, *II*, und *III* aufgeteilt, die sich von Lager *A* nach *B*, von Lager *B* zur Wurzelrippe *C* und von dort us bis zur Flügelspitze.

Dadurch ergeben sich folgende zwölf Differentialgleichungen:

$$EI \cdot w_I''''(y) = q_I(y) \quad (7)$$

$$EI \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \cdot y + R_1 = -Q_I(y) \quad (8)$$

$$EI \cdot w_I''(y) = \frac{q_I(y)}{2} \cdot y^2 + R_1 \cdot y + R_2 = -M_I(y) \quad (9)$$

$$EI \cdot w_I'(y) = \frac{q_I(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_1}{2} \cdot y^2 + R_2 \cdot y + R_3 \quad (10)$$

$$EI \cdot w_I(y) = \frac{q_I(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_1}{6} \cdot y^3 + \frac{R_3}{2} \cdot y^2 + R_3 \cdot y + R_4 \quad (11)$$

$$EI \cdot w_{II}''''(y) = q_{II}(y) \quad (12)$$

$$EI \cdot w_{II}'''(y) = q_{II}(y) \cdot y + R_5 = -Q_{II}(y) \quad (13)$$

$$EI \cdot w_{II}''(y) = \frac{q_{II}(y)}{2} \cdot y^2 + R_5 \cdot y + R_6 = -M_{II}(y) \quad (14)$$

$$EI \cdot w_{II}'(y) = \frac{q_{II}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_5}{2} \cdot y^2 + R_6 \cdot y + R_7 \quad (15)$$

$$EI \cdot w_{II}(y) = \frac{q_{II}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_5}{6} \cdot y^3 + \frac{R_6}{2} \cdot y^2 + R_7 \cdot y + R_8 \quad (16)$$

$$EI \cdot w_{III}''''(y) = q_{III}(y) \quad (17)$$

$$EI \cdot w_{III}'''(y) = q_{III}(y) \cdot y + R_9 = -Q_{III}(y) \quad (18)$$

$$EI \cdot w_{III}''(y) = \frac{q_{III}(y)}{2} \cdot y^2 + R_9 \cdot y + R_{10} = -M_{III}(y) \quad (19)$$

$$EI \cdot w_{III}'(y) = \frac{q_{III}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_9}{2} \cdot y^2 + R_{10} \cdot y + R_{11} \quad (20)$$

$$EI \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{III}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_9}{6} \cdot y^3 + \frac{R_{10}}{2} \cdot y^2 + R_{11} \cdot y + R_{12} \quad (21)$$

Die Randbedingungen der Modellierung ergeben sich folgend:

$$w_I(l = 0) = 0 \quad (22)$$

$$M_I(l = 0) = 0 \quad (23)$$

$$w_I(l = l_1) = 0 \quad (24)$$

$$w_{II}(l = l_1) = 0 \quad (25)$$

$$w'_I(l = l_1) = w'_{II}(l = l_1) \quad (26)$$

$$M_I(l = l_1) = M_{II}(l = l_1) \quad (27)$$

$$w_{II}(l = l_1 + l_2) = w_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (28)$$

$$w'_{II}(l = l_1 + l_2) = w'_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (29)$$

$$M_{II}(l = l_1 + l_2) = M_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (30)$$

$$Q_{II}(l = l_1 + l_2) = Q_{III}(l = l_1 + l_2) + F_Q \quad (31)$$

$$M_{III}(l = l_1 + l_2 + l_3) = 0 \quad (32)$$

$$Q_{III}(l = l_1 + l_2 + l_3) = F \quad (33)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass  $q_I(y) = q_{II}(y) = q_{III}(y) = 0$  gilt, da keine Streckenlast angreift.

Als Lösung dieser Differentialgleichungen lässt sich die Querkraft  $Q(y)$ , das Moment  $M(y)$  und die Biegelinie  $w(y)$  ermitteln:

$$Q(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} & , y \in (0, l_1) \\ F + F_Q & , y \in (l_1 + l_2) \\ F & , y \in (l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (34)$$

$$M(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} (-F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1}) \cdot y & , y \in (0, l_1) \\ (F + F_Q) \cdot y - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_Q \cdot (l_1 + l_2) & , y \in (l_1 + l_2) \\ F \cdot y - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3) & , y \in (l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (35)$$

$$w(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) \cdot y^3 - \left( (l_2 + l_3) \cdot l_1 \cdot F - l_1 \cdot l_2 \cdot F_Q \right) \cdot y \\ , y \in (0, l_1) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{(-F-F_Q)}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3) + F_Q \cdot (l_1+l_2)}{2} \cdot y^2 \right. \\ + \left( F \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left( -\frac{1}{2} l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y \\ + \left. F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2) \right) \\ , y \in (l_1, l_2) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{F}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3)}{2} \cdot y^2 + \left( F \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) \right. \right. \\ + \left. \left. F_Q \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + \right. \\ \left. F_Q \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) \\ , y \in (l_1 + l_2, l_3) \end{cases} \quad (36)$$

Die Herleitung der Lösung ist dem Anhang beigelegt.

### 4.3 Ermittlung der Biegesteifigkeit

Um nun für die Biegesteifigkeit  $EI$  ein Ergebnis zu erhalten, wird die Gleichung  $w(y, F, F_Q)$  nach  $EI(y, F, F_Q, w)$  umgestellt. Die eingesetzten Werte ergeben sich aus der Auslegung auf Steifigkeit. Über die Wurzelrippe werden Kräfte des Holms in die Querkraftbolzen abgesetzt. Aufgrund der biegeweichen Wurzelrippe darf die Absenkung des Holms dort nicht mit Null angenommen werden. Vereinfacht wird definiert, dass die eingeleitete Prüfkraft  $F_{pruef}$  an den Querkraftbolzen um ihren Betrag abgesetzt wird, wie es tatsächlich an einem Flugzeugrumpf geschehen würde.

$$\begin{aligned} EI(0.961m, 100N, -100N, 0.022m) = \\ \frac{1}{w} \cdot \left( -\frac{F}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3)}{2} \cdot y^2 + \left( F \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + \right. \\ \left. F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) \\ = 3,102631 \cdot 10^{-8} m^4 \end{aligned} \quad (37)$$

## 5 Auslegung des Holms nach VDI 2013

Auf Basis der in der Balkenberechnung bestimmten Parameter Biegesteifigkeit, maximales Biegemoment und der maximalen Querkraft, sollen die Gurte und der Steg dimensioniert werden. Die Vorauslegung soll dabei anhand der VDI- Richtlinie 2013 erfolgen, diese enthält in einem Unterkapitel Informationen speziell zur Auslegung eines I-Trägers. Dabei ist zu beachten, dass

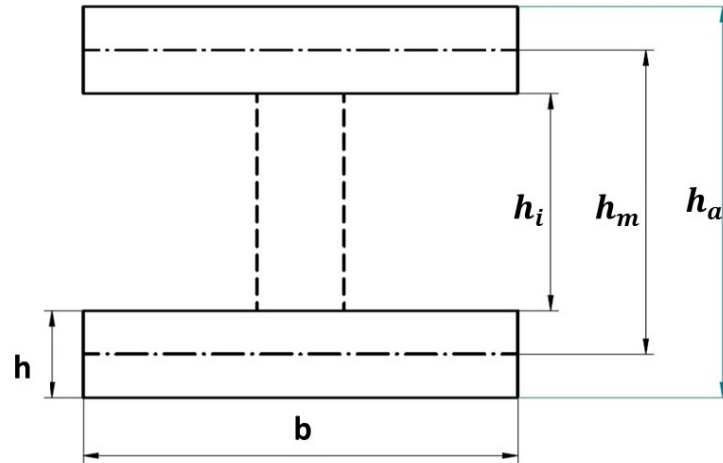


Abbildung 2: Maße des rechteckigen I-Holms

bei einigen Berechnungen Vereinfachungen angenommen werden, die an den betreffenden Stellen spezifiziert werden. Zusätzlich sei angemerkt, dass die erste Auslegung nur an an ausgewählten Stellen Sicherheitsfaktoren ungleich eins berücksichtigt. Grund dafür ist die Annahme, dass in den bereitgestellten Materialkennwerten ausreichende Sicherheiten verrechnet worden sind.

## 5.1 Dimensionierung der Gurte

Bei der Auslegung der Gurte auf Steifigkeit wird angenommen, dass der Steg des I-Trägers keine Längskräfte aufnimmt und der Biegung nicht entgegenwirken kann. Die in der Balkenberechnung ermittelte Biegesteifigkeit  $EI_x = 952,55 Nm^2$ , die erforderlich ist, damit bei einer Kraft  $F_{pruef} = 100N$  die Flügelspitze eine Absenkung von  $w_{j=1,1} = 20mm$  erfährt, muss allein durch die Gurte aufgebracht werden. Im Sinne der kraftflussgerechten Gestaltung sollen die Glasfasern unidirektional in Längsrichtung des Gurtes angeordnet werden. Die Bezeichnungen der Längenangaben des Holmes orientieren sich an Abb. 2 .

Die Gurte werden zur Bestimmung der notwendigen Lagenanzahl als rechteckig angenommen, erst in einem späteren Schritt soll die Form der Kontur der vorgegebenen Haut angepasst werden. Die Maße sind über die gesamte Länge des Holmes als konstant anzusehen.

Zur Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes  $I_x$  wird der E-Modul in Längsrichtung der Fasern nach der Mischungsregel nach [3] berechnet.

Tabelle 1: Verschiedene Kombinationsmöglichkeiten von  $b$  und  $h$

$h$	$b$	$2 * b * h$
$1mm$	$38,3mm$	$76,6mm^2$
$1,25mm$	$31,1mm$	$77,7mm^2$
$1,5mm$	$26,3mm$	$78,8mm^2$
$2,25mm$	$18,3mm$	$82,3mm^2$

$$E_{11} = \phi * E_{f,11} + (1 - \phi) * E_M \quad (38)$$

Mit den gegebenen Materialkennwerten bestimmt sich  $E_{11} = 31580MPa$ . Damit ergibt sich ein benötigtes Flächenträgheitsmoment von  $I_x = 3,01631 * 10^{-8}m^4$ .

Das Flächenträgheitsmoment der Gurte bestimmt sich aus den Flächenträgheitsmomenten der beiden Rechteckquerschnitte und ihren zugehörigen Steiner-Anteilen.

$$I_x = 2 * \left( \frac{b * h^3}{12} + b * h * \left( \frac{h_m}{2} \right)^2 \right) \quad (39)$$

Es wird nach einer Kombination aus Gurtbreite  $b$  und Gurthöhe  $h$  gesucht, die die Anforderungen an das Flächenträgheitsmoment erfüllt, aber dennoch zu einer möglichst geringen Gurtquerschnittsfläche und damit zu einer möglichst geringen Masse der Gurte führt. Um die Steiner-Anteile der Gurte zu maximieren, sollen die Gurte in einem möglichst großen Abstand zur neutralen Faser angeordnet werden. Vorgegeben ist eine Profildicke von  $37,5mm$ , allerdings muss berücksichtigt werden, dass die nach innen gelegte Haut, die Wölbungsrücklage und die Dickenrücklage die maximale Höhe des Holmes einschränken. Deshalb wird die gesamte Gurthöhe auf  $h_a = 36mm$  abgeschätzt.

Die nachstehende Tabelle 1 enthält Werte der Gurtquerschnittsfläche bei verschiedenen Kombinationen von  $b$  und  $h$ , die zu einem gesamten Flächenträgheitsmoment von  $I_x = 3,01631 * 10^{-8}m^4$  führen.

Den Daten ist zu entnehmen, dass breite Gurte geringer Dicke bei gleichem Flächenträgheitsmoment geringere Querschnittsflächen aufweisen. Aus diesem Grund sollen die Gurte möglichst breit gewählt werden. Die Breite der Gurte ist durch die vorgegebene Konstruktion der Platte zur Aufnahme der Tragfläche am Teststand begrenzt. Die vorgesehene Aussparung weist eine Breite von  $30mm$  auf. Für die weitere Berechnung soll  $b = 28mm$  gelten. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass die Fertigung des Holms im Bereich des Modellbaus von Hand erfolgen würde, womit nur grobe Toleranzen einhaltbar sind.

Mithilfe eines Solvers bestimmt sich aus dem Flächenträgheitsmoment und der Gurtbreite die Gurthöhe  $h = 1,845mm$ .



Abbildung 3: Der rechteckige Gurt ist gestrichelt dargestellt, der angepasste gekrümmte Gurt mit einer durchgezogenen Linie.

Im nächsten Schritt wird die zu stapelnde Lagenanzahl ermittelt. Als unidirektionales Material steht das Glasgewebe Interglas 92145 mit einem Flächengewicht von  $220 \frac{g}{m^2}$  zur Verfügung. Nach [3] berechnet sich die Lagenanzahl  $n$  für eine Dicke des Verbundes  $t_{soll}$  zu:

$$n = t_{soll} * \frac{\phi * \rho_f}{\left(\frac{m_f}{L*b}\right)} \quad (40)$$

Mit  $\left(\frac{m_f}{L*b}\right) = 220 \frac{g}{m^2}$  und  $t_{soll} = h$  ergibt sich  $n = 8,55$ . Es sind also 9 Lagen des Gewebes 92145 für jeden Gurt vorzusehen. Die sich aus 9 Lagen ergebende Gurthöhe kann durch Umstellen von Gleichung 40 zu  $\tilde{h} = 1,941mm$  bestimmt werden. Für den zunächst angenommenen Fall von Gurten mit rechteckigen Querschnitten ist die Auslegung zur Einhaltung der Anforderungen an die Steifigkeit damit abgeschlossen.

## 5.2 Nachrechnung der angepassten Gurte

Die Modellierung der Haut und der Holmgurte in einem CAD-Programm zeigt, dass die Gurte mit den berechneten Bemaßungen nicht innerhalb des Profils mit der als  $0,75mm$  dick angenommenen Haut liegen. Die Anpassung der Konstruktion der Gurte erfolgt so, dass sich die Gurtoberseite der Innenseite der Haut anschmiegt. Die Gesamtbreite von  $28mm$ , sowie die Gurtdicke bleiben dabei gleich. Da die Wölbungsrücklage ungleich der Dickenrücklage ist, muss die Gesamthöhe  $h_a$  auf  $\tilde{h}_a = 35,8mm$  leicht verringert werden. Abbildung ?? veranschaulicht die gekrümmte Form des oberen Holmgurtes.

Die angepasste Krümmung der Gurte führt zu einem veränderten Flächenträgheitsmoment  $\tilde{I}_x$  des Balkens, das mithilfe des CAD-Programms exakt zu  $\tilde{I}_x = 3,075406 * 10^{-8} m^4$  bestimmt werden kann. Da  $3,075406 * 10^{-8} m^4 > 3,01631 * 10^{-8} m^4$  ist, genügen auch die veränderten Gurte der Steifigkeitsanforderung.

Abschließend wird gezeigt, dass die Festigkeit der Gurte einer Belastung der Flügelspitze durch  $F_{pruef} = 500N$  standhält. Die aus der Biegung resultierenden und betragsmäßig gleichen Zug- und Druckspannungen werden dazu mit den vorhandenen UD-Festigkeitskennwerten des Handlaminats verglichen. Die Resultate der Balkenberechnungen zeigen, dass das maximale Biegemoment im Holm an Punkt C auftritt und  $M^b = 500N * 0,773m = 386,5Nm$  beträgt. In den Randfasern der Gurte resultieren Spannungen, die sich nach

$$\sigma_b = \frac{M_b * \tilde{h}_a}{\tilde{I}_x * 2} \quad (41)$$

zu  $\sigma_b = 224,96MPa$  berechnen. Da  $\sigma_b < R_{||}^{(+)} = 597,9MPa < R_{||}^{(-)} = 650,0MPa$ , ist der Festigkeitsnachweis erbracht. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Gurte bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  nicht versagen.

### 5.3 Bestimmung der Lagenanzahl des Steges

Die Auslegung des Steges erfolgt auch anhand der VDI 2013. Dabei muss beachtet werden, dass der Steg sowohl durch Schubkräfte als auch durch Normalkräfte senkrecht und parallel zu den Gurten Belastungen erfährt. Die Dehnungen der Innenseiten der Gurte werden dem Steg aufgeprägt, da beide Bauteile stoffschlüssig miteinander verbunden sind. Anders als in der VDI 2013 wird jedoch nicht die Bruchdehnung der Gurte betrachtet, sondern die Dehnungen der Innenseiten bei einer Prüfkraft von 500N. So soll die Dimensionierung des Steges auf die Anforderungen an die Festigkeit angepasst werden, um Leichtbaupotentiale bestmöglich auszuschöpfen.

Die größte Längsdehnung der Gurte tritt an der Stelle C auf, da dort das größte Biegemoment wirkt. Sie lässt sich für die Innenseite der Gurte durch

$$\epsilon_{Gurt} = \frac{\sigma_{innen}}{E_{11}} = \frac{\frac{F_{pruef} * l_3 * h_i}{\tilde{I}_x * 2}}{E_{11}} \quad (42)$$

zu  $\epsilon_{Gurt} = 6,351 * 10^{-3}$  berechnen. Auf der Zugseite ist die Dehnung positiv, auf der Druckseite negativ. Die dem Steg aufgeprägte Dehnung führt in Längsrichtung des Steges zu einem Normalkraftfluss, der sich nach VDI 2013 mit

$$p_\epsilon = n * \bar{q} * K_{Ex} * \epsilon_{Gurt} \quad (43)$$

ermitteln lässt.  $K_{Ex}$  ist dabei ein verallgemeinerter Dimensionierungskennwert, der Tafel 3 der VDI 2013 zu  $K_{Ex} = 1150 * 10^3m$  entnommen wird. Die Dimensionierungskennwerte der VDI sind nur für bestimmte Verbunde als exakt anzusehen, dennoch liefern sie für die Vorauslegung hinreichend genaue Werte, die in einem späteren Schritt mithilfe eines Laminatrechners überprüft werden können.

Es ist zu beachten, dass in der VDI mit veralteten Einheiten, wie dem Kilopond, gerechnet wird. Flächengewichte  $\bar{q}$  sind durch Multiplikation der auf die Fläche bezogene Masse  $\frac{m_f}{L*b}$  mit der

Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  zu ermitteln.  $n$  kennzeichnet erneut die Lagenanzahl.

Zur kraftflussgerechten Gestaltung des Steges werden die Gewebelagen unter einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Holmgurten angeordnet. Deshalb muss die Belastung parallel zu den Fadenrichtungen mithilfe einer Transformationsformel nach VDI 2013 berechnet werden.

$$p_{\epsilon||} = p_{\epsilon} * \cos^2(45^\circ) = p_{\epsilon} * 0,5 \quad (44)$$

Die Normalkräfte an den Gurten bilden im Allgemeinen einen Winkel  $\neq 180^\circ$  zueinander, da der Holm eine Absenkung erfährt. Daraus resultiert eine Normalkraft auf den Steg, die senkrecht zu den Gurten steht. Diese Abtriebskraft berechnet sich nach VDI 2013 zu:

$$p_A = \frac{2 * F_{pruef} * l_3 * \epsilon_{Gurt}}{h_m^2} \quad (45)$$

Mit der oben genannten Transformationsformel ergibt sich die Belastung in Faserrichtung.

$$p_{A||} = p_A * \cos^2(45^\circ) \quad (46)$$

Darüber hinaus erfährt der Steg einen Schubkraftfluss durch den Querkraftschub. Wegen der vernachlässigbaren Längskraftaufnahme des Steges im Vergleich zu den Gurten, kann der Querkraftschub über die Höhe des Steges als konstant angenommen werden. Es muss berücksichtigt werden, dass die Modellierung des Holmes als Balken, der an zwei Punkten gelagert ist und durch die Querkraftbolzen eine weitere Kraft erfährt, zu einem anderen Querkraftverlauf führt als dem konstanten, der in der Richtlinie für den Kragbalken angenommen wurde. Den Berechnungen des Holms als Balken kann eine maximale Querkraft von  $5085,5N$  im Bereich 2 und eine maximale Querkraft von  $500N$  im Bereich 3 entnommen werden. Mit dem Ziel, im langen Bereich 3 Gewicht einzusparen, ist es vorteilhaft diesen Bereich geringer Querkraft getrennt von den höher beanspruchten Bereichen 1 und 2 auszulegen. Die resultierende Druckbeanspruchung berechnet sich mithilfe der folgenden Formel.

$$p_{s||} = p_s = \frac{Q}{h_i} \quad (47)$$

Der Kraftfluss, der durch den Steg aufgenommen werden muss, ergibt sich aus der Überlagerung der drei Kraftflüsse  $p_{s||}, p_{A||}, p_{\epsilon||}$ . Die Tragfähigkeit einer Schicht des Verbundes wird durch  $K_{\sigma d}$  charakterisiert und kann ebenfalls Tafel 3 der VDI entnommen werden. Da ein Teil der Schubbeanspruchung durch die Matrix geleitet wird, besteht die Gefahr eines Zwischenfaserbruchs. VDI 2013 schlägt deshalb die Verwendung von  $K_{\sigma d} = 30 * 10^3 m$  vor. Zusätzlich muss der Anteil der Glasmengen in Kette und Schuß durch den Faktor  $k_{||}$  berücksichtigt werden. Das zur Verfügung stehende Gewebe Interglas 90070 hat annähernd gleiche Fadenanzahlen in Kette- und Schußrichtung, damit ist  $k_{||} = 0,5$ .

$$n * \bar{q} * K_{\sigma d} * k_{||} = p_{s||} + p_{A||} + p_{\epsilon||} \quad (48)$$

Die Anzahl der notwendigen Gewebelagen  $n$  im Steg lässt sich nun durch Umstellen der Gleichungen und Einsetzen der bekannten Werte ermitteln.



$$n = \frac{\frac{2 * F_{Pruef} * l_3 * \epsilon_{Gurt}}{h_m^2 * 2} + \frac{Q}{h_i}}{\bar{q} * (k_{||} * K_{\sigma d} - K_{Ex} * \epsilon_{Gurt} * 0,5)} \quad (49)$$

Damit ergibt sich die Lagenanzahl von  $n(500N) = 1,99$  für den Bereich 3 und  $n(5085,5N) = 18,13$  für die Bereiche 1 und 2. Um einen symmetrischen Lagenaufbau zu ermöglichen, sind also 2 Lagen für den Bereich 3 und 20 Lagen für die Bereiche 1 und 2 vorzusehen.

Es ist zu betonen, dass diese Lagenanzahlen maßgeblich durch die Annahmen der Dimensionierungskennwerte  $K_{Ex}$  und  $K_{\sigma d}$  beeinflusst werden.

## 6 Zusammenfassung

Test Zusammenfassung

## 7 FEM

### 7.1 Warum FEM?

Nachdem der Flügel nun analytisch ausgelegt wurde, stellt sich die Frage, ob eine numerische Herangehensweise hier überhaupt noch sinnvoll ist. In den vorherigen Kapiteln wurde viele Vereinfachungen angenommen, um die Berechnungen mit verhältnismäßigen Aufwand zu bewältigen. Je komplexer ein Beiteil ist, desto unwirtschaftlicher wird es, dies in seiner Fülle analytisch zu berechnen oder gar unmöglich, wenn keine geschlossenen Lösungen bekannt sind. Im Leichtbau werden diese Details benutzt, um Beiteile an den Stellen zu verstärken, wo besonders große Lasten auftreten (z.B. Rippen). Wenn diese nun für eine einfachere Berechnung wegfallen, muss das Restliche Bauteil robuster ausgelegt werden, was zu einer vermeidbaren Gewichtszunahme führt. Auch wenn es sich bei numerischen Lösungen nur um Annäherungen an den wahren Zustand handelt, kann durch einen hohen Vernetzungsgrad ein präziseres Ergebnis erzielt werden als das vereinfachte Analytische. Somit übernimmt die numerische Berechnung auch eine Kontrollfunktion.

### 7.2 Wie funktioniert FEM?

#### 7.2.1 Schwache Lösung der Elastostatik

Für die Berechnung der Elastostatik sind die Gleichgewichtsbedingung (50), Verzerrungs-Verschiebungsbedingung (51) und das Stoffgesetz (52) auch bei der Finiten Elemente Methode (FEM) ausschlaggebend.

$$\underline{0} = \underline{X} + \underline{E}^T \sigma \quad (50)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} u \quad (51)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon} \quad (52)$$

Wobei  $\underline{X}$  der Vektor der Volumenkräfte,  $\underline{E}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\underline{\epsilon}$  der Verzerrungsvektor,  $\underline{u}$  der Verschiebungsvektor und  $\underline{D}$  die Operatormatrix ist.

Um einer aufwendigen Bestimmung der analytischen Lösung zu entgehen, bedient sich die FEM an dem Prinzip der *schwachen Lösung*. Hierbei hat man eine Differenzialgleichung, die in dem betrachteten Gebiet gleich null ist. Für die Elastostatik kann man hierbei die Gleichgewichtsbedingung verwenden. Diese kann man mit  $\delta \underline{u}$  multiplizieren und über das Gebiet integrieren, sodass man

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{\sigma} dV + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{X} dV = 0 \quad (53)$$

erhält. Umgeformt ergibt sich das zu

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} dV = \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{p} dO_p + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{X} dV \quad (54)$$

Wobei die Terme auf der rechten Seite den Lasten entsprechen, die auf das Volumen  $V$  und die mit  $p$  belastete Oberfläche  $O_p$  wirken. Die schwer zu lösende Differenzialgleichung hat sich nun schon zu einem Integrationsproblem vereinfacht. Diese Gleichung ist noch ganz allgemein fürs Kontinuum gültig. Im nächsten Schritt wird das Gebiet in eine finite Menge von Elementen zerteilt.

## 7.2.2 Diskretisierung

# 8 Quellenverzeichnis

## Literatur

- [1] H. Hertel : *Leichtbau: Bauelemente, Bemessungen und Konstruktionen von Flugzeugen u. a.* . Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg , 1960.
- [2] Mises, R. V. : *Fluglehre: Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung* . Springer Verlag , 1936.
- [3] Helmut Schürmann : *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden* . Springer Verlag , 2005.
- [4] Elmar Witten : *Handbuch Faserverbundkunststoffe, Composites: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen* . Springer Vieweg , 2014.

## 9 Abbildungsverzeichnis

## 10 Anhang

Test Anhang