

Projektarbeit

# Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise

von

Tristan Brack	4968977
Hannes Golombek	4838748
Henri Kammler	4947286
Ole Scholz	4947749

Betreut von Malte Woidt, M. Sc.

Die Arbeit umfasst:

113 Seiten

+ 38 Seiten Anhang

inkl. 65 Abbildungen

Institut für Flugzeugbau und Leichtbau  
Technische Universität Braunschweig

Januar 2021



Projektarbeit auf dem Gebiet des Flugzeugbaus und Leichtbaus

Bearbeitungsdauer: 13 Wochen

Brack Tristan	4968977
Golombek Hannes	4838748
Kammler Henri	4947286
Scholz Ole	4947749

Ausgegeben am: 21.10.2020

Abgegeben am:

## Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund -Holm-Bauweise

### 1. Einleitung

Im Rahmen dieser Projektarbeit soll der Flügel des LF1 „Zaunkönig“ (siehe Abbildung 1) im Modellmaßstab 1:4,7, d.h. die Halbspannweite beträgt ca. 848 mm, ausgelegt werden. Aus der Auslegung des Gesamtflugzeugs resultieren entsprechende Anforderungen an den Flügel, welche im Zuge der Auslegung und Fertigung berücksichtigt werden müssen. Sowohl die konstruktiven als auch die strukturmechanischen Maßnahmen sollen mit Hilfe geeigneter Ingenieursmethoden erfolgen und begründet werden.

Zur Überprüfung der Auslegung sollen die Ergebnisse der Berechnungen mit Messergebnissen aus vorangegangenen Tests verglichen werden.



Abbildung 1: Seitenansicht LF1 "Zaunkönig"

## 2. Anforderungen/Vorgaben

### 2.1. Geometrische Vorgaben des Flügels

Bei dem Flügel des Zaunkönigs handelt es sich um einen Rechteckflügel (Zuspitzung  $\tau = 0$ , Pfeilung  $\phi = 0^\circ$ ). Vorflügel und Hochauftriebsklappen erstrecken sich über die gesamte Spannweite und sind jeweils an der Flügelwurzel, -mitte und -spitze mit dem Hauptflügel verbunden (bei  $\eta = \{0,0; 0,5; 1,0\}$ ). Darüber hinaus ist der Hauptflügel gegenüber dem Rumpf mit Verstrebungen am Punkt ( $\eta = 0,50$ ;  $\xi = 0,25$ ) abgestützt. Die Maße des Gesamtflügels sind Abbildung 2 sowie den beigefügten Anlagen zu entnehmen. Im Gegensatz zu dem originalen, abgestrebten Flügel des Zaunkönigs soll eine alternative Bauweise ohne Streben umgesetzt werden.

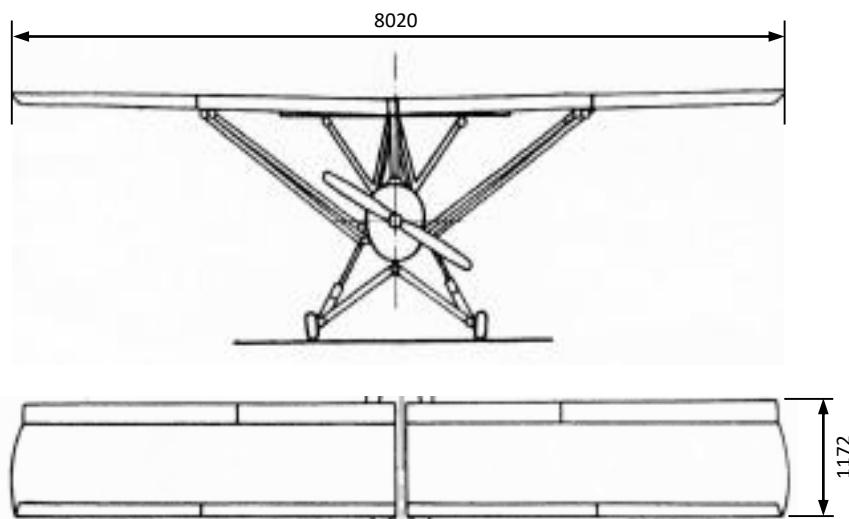


Abbildung 2: Bemaßte Front- und Draufsicht des LF1 "Zaunkönig"

### 2.2. Strukturmechanische Anforderungen

Für die strukturmechanischen Tests soll das Modell eines Halbflügels in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise gebaut werden, der bei einer möglichst geringen Eigenmasse eine Prüfkraft von 500 N ohne Bruch erträgt. Dabei soll der Flügel sowohl auf Festigkeit als auch auf Steifigkeit ausgelegt werden. Eine hinreichende Steifigkeit ist gegeben, wenn sich der Flügel bei einer senkrechten Belastung von  $F_{Prüf} = 100$  N an der Flügelspitze ( $L/4$ -Punkt) um nicht mehr als  $z_{100N} = 22$  mm durchbiegt. Um die Hautdicke ausschließlich auf Festigkeit zu dimensionieren, aber frühzeitiges Beulen der Haut zu vermeiden, kann ein Sandwich-Aufbau an kritischen Bereichen und/oder Rippen gewählt werden. Es sind geeignete konstruktive Mittel zu überlegen um diese Vorgaben zu erreichen. Die Einhaltung der Anforderungen ist rechnerisch nachzuweisen.

Darüber hinaus soll der Torsionswinkel der Flügelaußenkante in Abhängigkeit einer exzentrischen, senkrechten Prüflast mit Hilfe der Theorie nach St. Venant berechnet werden.

### **2.3. Konstruktive Anforderungen**

Der Hauptflügel des Zaunkönigs ist als Modellflügel in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise umzusetzen. Vorflügel und Hochauftriebsklappen sind nicht auszuführen. Das aerodynamische Profil des Hauptflügels ist zu bewahren. Die V-Stellung des Flügels ist zu vernachlässigen. Als Kernmaterial steht Styrodur und Depron zur Verfügung. Die Faserorientierung der Gewebe ist im Einklang mit den durchgeführten Rechnungen belastungsgerecht zu wählen.

Die rumpfseitigen Einspannverhältnisse sind wie in Anlage C ausgeführt. Diese sehen eine wie bei Klein- und Segelflugzeugen übliche Konstruktion vor: Der Holm wird dabei im Rumpf mit der anderen Flügelhälfte verstiftet und jede Flügelhälfte stützt sich gegen den Rumpf wobei die Torsion mit Querkraftbolzen aufgenommen wird. Für den Flügelbau bedeutet dies, dass der Holm entsprechend Anlage C aus dem Flügel herausgezogen werden muss. Es sollte außerdem berücksichtigt werden, dass der Holm geeignet getapert wird, um Versagen im Einspannungsbereich zu vermeiden. An der freien Flügel spitze ist zur Lasteinleitung eine Endrippe vorzusehen, die die lösbare Montage der Endscheibe aus Anlage D erlaubt.

Der Flügel darf ein maximales Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten. Auf eine fertigungsgerechte Konstruktion ist zu achten.

### **3. Bewertungskriterien**

Das Hauptaugenmerk der Konstruktion sollte, unter Einhaltung der zuvor genannten Randbedingungen, auf einem möglichst geringen Eigengewicht des Flügels liegen. Ein Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gruppen untereinander soll anhand der Masse  $m_{\text{Flügel}}$  entsprechend des gewichtsnormalisierten Festigkeitskriteriums  $m_{\text{Belastung,max}}/m_{\text{Flügel}}$  erfolgen, welches die ertragene Bruchlast mit dem Eigengewicht der Konstruktion ins Verhältnis setzt.

### **4. Aufgabenstellung**

Um die oben beschriebenen Anforderungen zu erfüllen, sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

1. Einarbeitung in die Fragen der Anforderungen
2. Entwicklung konstruktiver und strukturmechanischer Lösungsansätze für die Faserverbund-Bauweise
3. Festlegung einer konstruktiven Lösungsvariante
4. Dimensionierung und Nachweis der gewählten Lösungsvariante mittels
  - a. Handbuchmethoden, sowie
  - b. Numerischer Methoden
5. Detailentwurf der dimensionierten Lösungsvariante
6. Auswertung, Vergleich und Diskussion der berechneten Daten (Biegung, Torsion, max. Bruchlast, Schubmittelpunkt)
7. Vergleich mit im Strukturtest ermittelten Daten und denen anderer Gruppen
8. Diskussion der Ergebnisse
9. Bewertung der eigenen Konstruktion und Diskussion einer Optimierung

Arbeitsteilung und -ablauf ist durch die Gruppe selbstständig zu organisieren. Theoretische Hintergründe, erstellte Modelle, sowie Vorgehensweisen, Entscheidungskriterien und gewonnene Ergebnisse sind sorgfältig zu dokumentieren. Die Verfasser der einzelnen Abschnitte des Abschlussberichtes sind zu kennzeichnen.

## 5. Literatur

- [A] Horst, P., (2013) 'Leichtbau I – Ingenieurtheorien des Leichtbaus' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [B] Ostermeyer, G.-P. (2010) 'Mechanik I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Dynamik und Schwingungen
- [C] Horst, P., (2013) 'Finite Elemente Methoden I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [D] Schürmann, H., (2007) 'Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden' Springer-Verlag Berlin Heidelberg

## 6. Anlagen

- [A] Merkblatt für die Anfertigung studentisch-wissenschaftlicher Arbeiten
- [B] Flügelkontur, Technische Zeichnung
- [C] Einspannung, Technische Zeichnung
- [D] Endscheibe, Technische Zeichnung

---

(Ort, Datum)

---

(Prof. Dr.-Ing. P. Horst)

## **Übersicht (O.S.)**

In dieser Projektarbeit wird ein Halbflügelmodell des Flugzeugs “Zaunkönig” im Maßstab 1:4,7 in der Glasfaserverbund-Holm-Bauweise konstruiert. Der Flügel wird dabei, soweit möglich, mit analytischen und ergänzend mit numerischen Methoden auf Festigkeit und Biegesteifigkeit ausgelegt. Hierfür werden die Programme ABAQUS und *eLamX*<sup>2</sup> zur Hilfe genommen. Anschließend wird eine kurze Anleitung gegeben, wie der Flügel zu fertigen wäre. Für einen simulierten Testdurchlauf, bei dem eine exzentrische Last wirkt, werden die Masse, die Bruchlast, der Schubmittelpunkt und sowohl Absenkung als auch Verdrehung an der Flügelvorderkante bestimmt. Unter besonderer Rücksichtnahme auf das gewichtsnormalisierte Festigkeitskriterium wird der Flügel in Bezug auf Vergleichsdaten bewertet und die errechneten Werte kritisch analysiert.

*Abstract*

---

**Abstract (O.S.)**

In the scope of this student research project a model half-wing of the aircraft “Zaunkönig” will be constructed scaled down to 1:4.7 as a glass fibre spar structure. The wing will be construed for strength and bending stiffness using analytical methods as far as possible, completed by numerical methods. The computing programs ABAQUS and *eLamX*<sup>2</sup> will be used in assistance. Afterwards a short manual to manufacture the wing is presented. For a simulated test with an eccentric load the mass, breaking load, shear center and lowering as well as torsion of the tip of the wing will be determined. Under special consideration of the weight normalized strength criterion the wing will be rated in relation to comparative data and the calculated values will be analyzed critically.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Bezeichnungen</b>	<b>4</b>
<b>2 Einleitung</b>	<b>8</b>
2.1 Projektbeschreibung (H.G.) . . . . .	8
2.2 Motivation (O.S.) . . . . .	8
2.3 Lösungsstrategie (H.G.) . . . . .	8
<b>3 Grundlagen</b>	<b>10</b>
3.1 Einführung zu Glasfasern (H.G.) . . . . .	10
3.2 Einführung zur Matrix (H.G.) . . . . .	10
3.3 Einführung in die Balkenbiegung (T.B.) . . . . .	11
3.4 Einführung in die Netztheorie (H.G.) . . . . .	13
3.5 Einführung in die Klassische Laminattheorie (H.G.) . . . . .	14
3.5.1 Ingenieurskonstanten des MSV . . . . .	15
3.5.2 Plattenelement . . . . .	15
3.6 Einführung in die Mischungsregel (H.G.) . . . . .	17
3.7 Einführung in das Versagenskriterium nach Puck (O.S.) . . . . .	18
3.7.1 Definitionen . . . . .	18
3.7.2 Zwischenfaserbruch ohne Längsspannung . . . . .	18
3.7.3 Einfluss der Längsspannung . . . . .	20
3.7.4 Faserbruch . . . . .	20
3.8 Einführung in Stabilitäts-Überprüfungen (T.B.) . . . . .	24
3.9 Einführung in den Kraftfluss dünnwandiger Profile (O.S.) . . . . .	26
3.10 Einführung in die Finite Elemente Methode (O.S.) . . . . .	29
3.10.1 Schwache Lösung der Elastostatik . . . . .	29
3.10.2 Diskretisierung . . . . .	29
3.11 Einführung zu Verklebungen (T.B.) . . . . .	31
3.12 Einführung in Bauweisen (O.S.) . . . . .	32
<b>4 Auslegung des Holms nach Handbuchmethoden</b>	<b>33</b>
4.1 Modellierung des Holms (T.B.) . . . . .	33
4.1.1 Annahmen zur Modellierung . . . . .	33
4.1.2 Analytisches Lösen der Modellierung . . . . .	34
4.1.3 Analyse der Modellierung . . . . .	38
4.2 Auslegung des Holms nach VDI 2013 (H.K.) . . . . .	41
4.2.1 Allgemeine Informationen zu der Richtlinie . . . . .	41
4.2.2 Dimensionierung der Gurte mit rechteckigen Querschnitten . . . . .	41
4.2.3 Nachrechnung der angepassten Gurte . . . . .	44

4.2.4	Bestimmung der Lagenanzahl des Steges . . . . .	45
4.2.5	Überprüfung der Faserausrichtung . . . . .	48
4.3	Auslegung des Holms nach Klassischer Laminattheorie (T.B.) . . . . .	51
4.3.1	Beispielrechnung nach Klassischer Laminattheorie . . . . .	51
4.3.2	<i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	54
4.4	Beulabschätzung des Holms (T.B.) . . . . .	57
4.4.1	Beulsicherheit der Gurte . . . . .	57
4.4.2	Beulsicherheit des Steges . . . . .	58
4.5	Dimensionierung der Klebeverbindungen (T.B.) . . . . .	62
4.5.1	Klebeverbindung Steg - Gurt . . . . .	62
4.5.2	Klebeverbindung Holm - Rippen . . . . .	63
4.6	Bolzenauslegung (H.G.) . . . . .	64
4.6.1	Bolzenberechnung . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Auslegung der Flügelschale nach Handbuchmethoden</b>	<b>66</b>
5.1	Schubfluss . . . . .	66
5.1.1	Idealisierung(H.G.) . . . . .	66
5.1.2	Schwerpunktkoordinaten(H.G.) . . . . .	66
5.1.3	Schubmittelpunkt (H.G.) . . . . .	69
5.1.4	Torsion (O.S.) . . . . .	71
5.1.5	Schubspannung (O.S.) . . . . .	73
5.2	Auslegung der Flügelschale nach Klassischer Laminattheorie (T.B.) . . . . .	75
5.2.1	<i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	75
5.3	Beulabschätzung der Flügelschale (T.B.) . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Numerische Berechnung</b>	<b>78</b>
6.1	Vorteile der Finiten Element Methode (O.S.) . . . . .	78
6.2	ABAQUS Analyse (H.G.) . . . . .	79
6.2.1	Modell . . . . .	79
6.2.2	Analyse . . . . .	80
6.2.3	Beulanalyse . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Konstruktion und Fertigung des Flügels</b>	<b>84</b>
7.1	CAD-Konstruktion des Flügels (H.K.) . . . . .	84
7.1.1	Konstruktion der Gurte . . . . .	84
7.1.2	Konstruktion des Stegs . . . . .	85
7.1.3	Konstruktion der Haut und der Rippen . . . . .	86
7.1.4	Konstruktion unterstützender Bauteile des Holms . . . . .	87
7.1.5	Querkraftbolzen und Montage auf dem Teststand . . . . .	88
7.2	Massenabschätzung (H.K.) . . . . .	90

7.2.1	Masse der Gurte . . . . .	90
7.2.2	Masse des Stegs . . . . .	90
7.2.3	Masse der Haut . . . . .	91
7.2.4	Masse der Holzklötze und Rippen . . . . .	92
7.2.5	Abschätzung der Verklebungen und der Gesamtmasse . . . . .	92
7.3	Bauanleitung für die Fertigung (T.B.) . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Begutachtung der erarbeiteten Ergebnisse</b>	<b>97</b>
8.1	Gewichtsnormalisiertes Festigkeitskriterium (O.S.) . . . . .	97
8.2	Diskussion der Ergebnisse (H.G.) . . . . .	98
8.3	Ausblick auf Optimierungen der Berechnungen (H.G.) . . . . .	99
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>100</b>
9.1	Die Berechnungen im Überblick (H.K.) . . . . .	100
9.2	Die Konstruktion und FEM-Analyse im Überblick (H.K.) . . . . .	103
<b>10</b>	<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>105</b>
<b>11</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>107</b>
<b>12</b>	<b>Anhang</b>	<b>109</b>
12.1	Berechnung: Analytische Lösung der Modellierung (T.B.) . . . . .	109
12.2	Berechnung: Schubfluss und Schubmittelpunkt (O.S.) . . . . .	111
12.3	Abbildungen: <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	120
12.4	Abbildungen: Beulberechnung . . . . .	129
12.5	Abbildungen: Schubfluss . . . . .	133
12.6	Abbildungen: Numerische Berechnung . . . . .	139
12.7	Abbildungen: Konstruktion und Fertigung . . . . .	141

# 1 Bezeichnungen

## Lateinische Buchstaben

- A* Festlager  
in Bezug auf Wirkebene (hoch gestellt)  
Fläche  
Scheibensteifigkeit  
Abtriebskraft
- B* Loslager
- C* Krafteinleitung der Querkraftbolzen
- E* Elastizitätsmodul
- F* Kraft
- G* Schubmodul
- I* Flächenträgheitsmoment
- K* Dimensionierungskennwert nach [VDI70],  
Elementsteifigkeitsmatrix (zweifach unterstrichen)
- M* Moment
- N* Normalkraft
- Q* Querkraft  
Steifigkeit Einzelschicht
- R* Integrationskonstante  
Festigkeit
- P* Gewichtsnormalisierte Festigkeit
- S* Statisches Moment
- T* Bei Torsion  
Transformationsmatrix
- a* Lange Seite des Streifens nach [Her60]
- b* Kurze Seite des Streifens nach [Her60]  
Biegung
- d* Druck
- f* Anstrengung (mit E als Index)  
Faser
- h* Höhenabmessung des Holmes
- j* Sicherheitsfaktor
- k* Beuklfaktor nach [Her60]
- l* Längenabmessung des Holmes a

---

$n$	Lagenanzahl
	Normalkraftfluss
$m$	Matrix
$p$	Steigungs-/Neigungsparameter
$q$	Schubfluss
$\bar{q}$	Flächengewicht nach [VDI70]
$s$	Dicke des Streifens nach [Her60]
	Schub
	Laufvariable in der y-z-Ebene
	Halbspannweite
$t$	Dicke des Verbunds nach [Sch05]
$u$	Verschiebung in x-Richtung
$v$	Verschiebung in y-Richtung
$w$	Absenkung des Balkens unter Prüfkraft
	Verschiebung in z-Richtung (allgemein)
$x$	x-Koordinate in Flugzeuglängsrichtung
$y$	y-Koordinate in Spannweitenrichtung, positiv Richtung von Rumpf zur Endrippe
$z$	z-Koordinate der Rechtssystems

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Drehwinkel Fasern
$\beta$	Drehwinkel Fasern
$\epsilon$	Dehnung
$\eta$	Schwächungsfaktor
$\gamma$	Schubverzerrung
$\vartheta$	Verwindung
$\theta$	Winkel der Bruchebene
$\varphi$	Faservolumengehalt Winkel zwischen Hauptachsen- und Schwerpunkt-Koordinatensystem
$\phi$	Orientierungsabweichung, Drillwinkel
$\kappa$	Steifigkeitserhöhung des Sandwich nach [Her60]
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Zug-/Druckspannung
$\tau$	Schubspannung

### Indizes

---

0	Länge von Holmstummelende zu A
1	Länge von A zu B
2	Länge von B zu C
3	Länge von C zu Flügelende
11	Faserhauptrichtung
22	Fasernebenrichtung
12	Richtung „Wirkung (1) - Ursache (2)“
	Parallel zur Faser
⊥	Senkrecht zur Faser
⊥	Belastungsrichtung „Wirkung (⊥) - Ursache (  )“ (bei eLamX <sup>2</sup> umgekehrt)
#	Unter 45° zur Faserrichtung
+	Bei Zugbeanspruchung
-	Bei Druckbeanspruchung
(̄)	Bei Schwerpunkt-Koordinaten
(̂)	Bei Hauptachsen-Koordinaten
(̅)	Differentiation
(̇)	Matrix
(̈) <sup>T</sup>	Transponiert
I	Holzbereich zwischen A und B
II	Holzbereich zwischen B und C
III	Holzbereich zwischen C und Flügelspitze
f	Faser
m	Matrix
krit	kritisch
max	maximal
min	mindestens
prüef	Prüfkraft
Q	Kraft der Querkraftbolzen
zul	zulässig

## Abkürzungen

BD	bidirektional
Fb	Faserbruch
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
GFK	Glasfaser-Kunststoffverbund
KOS	Koordinatensystem
MSV	Mehrschichtverbund

*UD* unidirekional

*Zfb* Zwischenfaserbruch

*H.G.* verfasst von Hannes Golombek

*H.K.* verfasst von Henri Kammler

*O.S.* verfasst von Ole Scholz

*T.B.* verfasst von Tristan Brack

## 2 Einleitung

### 2.1 Projektbeschreibung (H.G.)

Der LF1 *Zaunkönig* ist ein in den frühen 1940er Jahren entstandenes Flugzeug, das unter der Leitung von Hermann Winter an der Technischen Hochschule Braunschweig konstruiert wurde [HUM10]. Da der Zaunkönig vornehmlich aus Holz gebaut wurde, soll jetzt ein neuer Flügel im Maßstab 1:4,7 aus Glasfaser-Kunststoffverbund (GFK) konstruiert werden. Der Flügel muss gewisse Anforderungen erfüllen, die im Folgenden definiert werden. Bei der Tragfläche handelt es sich um einen Rechteckflügel, der im Original über Verstreubungen mit dem Rumpf verbunden ist. Diese Streben sollen in der neuen Konstruktion nicht vorhanden sein. Der Flügel soll im Rumpf verstiftet werden, wobei die Torsionsbelastung durch zusätzliche Querkraftbolzen aufgenommen wird. Insgesamt darf der Flügel das Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten.

Um die strukturmechanischen Anforderungen zu erfüllen wird der Flügel auf seine Steifigkeit und Festigkeit geprüft. Die Steifigkeit ist hinreichend, wenn der Flügel bei einer senkrechten Belastung von  $F_{pruef} = 100N$  an der Position des L/4-Punkts an der Endrippe eine Durchbiegung von  $w = 22mm$  nicht überschreitet. Außerdem darf der Flügel bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  nicht brechen. Der Flügel muss so auf Stabilität ausgelegt sein, dass kein Beulen auftritt. Zusätzlich sollen der Torsionswinkel und Schubmittelpunkt berechnet werden.

### 2.2 Motivation (O.S.)

Zunächst ist zu klären, warum es sinnvoll ist für diesen Flügel GFK zu verwenden. In der Luftfahrt wird immer nach Wegen gesucht das Gewicht zu minimieren, um die Wirtschaftlichkeit von Flugobjekten zu maximieren. Faser-Kunststoffverbunde (FKV) stellen hierbei mit ihrer hohen spezifischen Festigkeit einen idealen Kandidaten dar. Zusätzlich bieten FKV einfache Formgebungsmöglichkeiten für komplexe aerodynamische Profile und auch die Korrosionsbeständigkeit ist höher als bei konventionellen Werkstoffen. Als ein großer Nachteil ist der hohe Preis zu nennen, der in diesem Fall jedoch keine große Rolle spielt, da nur ein Modell entworfen wird und der Flügel nicht für hohe Stückzahlen optimiert wird. Glasfasern sind im Vergleich zu Kohlenstofffasern die günstigere Variante, auf sie wird in Kapitel 3.1 noch mal genauer eingegangen.

### 2.3 Lösungsstrategie (H.G.)

Um eine möglichst optimale Lösung für die Aufgabenstellung zu finden wird zunächst das Vorgehen festgelegt. Die Dimensionierung des Holms erfolgt im ersten Schritt analytisch nach Handbuchmethoden. Um die maximalen Beanspruchungen zu errechnen, wird der Holm als Balken modelliert und analysiert. Mit diesen Lasten wird der Holm unter

Zuhilfenahme der VDI 2013 ausgelegt. Darauf folgend findet die Dimensionierung der Klebeverbindungen und Bolzen statt. Als letzter Schritt der analytischen Berechnung, wird der Schubmittelpunkt und die Verdrillung durch die Schubflussberechnung im Flügelquerschnitt ermittelt. Ebenfalls wird die nötige Dicke der Schale errechnet und auf die Sicherheit gegen Beulen geprüft.

Um die analytischen Berechnungen zu verifizieren soll eine numerische Berechnung mittels eines FEM-Programms stattfinden. Dafür wird ein CAD-Modell erstellt, welches dann in ein FEM-Programm importiert und analysiert wird.

Zuletzt soll ein Vergleich zu anderen Lösungen der Aufgabenstellung gezogen werden und mögliche Optimierungsmöglichkeiten der Auslegung gesucht werden.

Um eine Einführung in die Berechnungen bereitzustellen, sollen anfangs wichtige Grundlagen erläutert werden. Weitergehende Berechnungsmethoden und Theorien werden inhaltlich jedoch erst im Zuge der eigentlichen Berechnung dargestellt, um einen direkten Bezug zwischen Theorie und Anwendung vermitteln zu können.

## 3 Grundlagen

### 3.1 Einführung zu Glasfasern (H.G.)

Glasfasern gelten als älteste synthetische Faserart und wurden schon vor 3500 Jahren verwendet. Heutzutage werden Glasfasern überwiegend aus SiO<sub>2</sub> und Metalloxiden hergestellt. Die Bestandteile werden bei ca. 1400°C aufgeschmolzen und durch kleine Düsen im Boden des Kessels als dünne Fäden ausgelassen. Die Fäden werden aufgewickelt und zu größeren Fasern versponnen [Sch05]. Die hohe Festigkeit der Glasfaser beruht auf den kovalenten Bindungen von Silizium- und Sauerstoff-Atomen. Zugesetzte Metalloxide verhindern eine Ausbildung eines geordneten Gefüges und erhöhen somit zusätzlich die Festigkeit. Die Fasern können in Längsrichtung sehr hohe Kräfte aufnehmen, jedoch nicht in Querrichtung. Deshalb werden sie in eine Matrix integriert, die die Querkräfte aufnimmt und die Faser vor dem Knicken schützt. Glasfasern lassen sich auch um enge Radien sehr gut drapieren und sind durch ihre einfache Herstellungsweise im Vergleich zu anderen Faserarten sehr preiswert [Wit14]. Durch die zuvor erläuterten Eigenschaften sind Glasfasern sehr gut für dieses Projekt geeignet, für einen größeren Flügel wäre jedoch der Elastizitätsmodul zu gering und es müsste auf andere Fasern, wie zum Beispiel Kohlefasern, zurückgegriffen werden. Für die Konstruktion des Flügels stehen die Glasfasern Interglas 90070 (bidirektional) und Interglas 92145 (idealisiert unidirektional) des Herstellers Interglas Technologies zur Verfügung.

### 3.2 Einführung zur Matrix (H.G.)

Unter der Matrix versteht man den Fasern umgebenden Teil des Faserverbundstoffs. Dabei werden im Bereich des Faser-Kunststoff-Verbunds Polymere, wie z.B. Epoxidharz, verwendet. Die Matrix ist meist der schwache Teil des FKV und hat die Aufgabe, die Fasern gegen Knicken bei Druckbelastung zu schützen und eine gleichmäßige Krafteinleitung in die Fasern zu ermöglichen. Zusätzlich hält sie die Fasern in Position und verhindert Reibung zwischen den einzelnen Fasern [Sch05].

Für den Flügel wird der Epoxy-Kunststoff L 385 des Herstellers *MGScheufler* zusammen mit dem Härter H 386 im Mischverhältnis 100/40 verwendet.

### 3.3 Einführung in die Balkenbiegung (T.B.)

Anhand der *Balkentheorie nach Bernoulli* soll das mechanische Verhalten eines Balkens unter gegebenen Belastungen ermittelt werden. Dazu werden einführend diese Theorie und zusätzliche Zusammenhänge kurz dargestellt.

Die *Balkentheorie nach Bernoulli* beschreibt elastische Verformungen eines Balkens beliebigen Querschnitts, resultierend durch angreifende Kräfte, Streckenlasten und Momente. Diese können durch Lager oder äußere angreifende Lasten in einen solchen Körper eingeleitet werden. Ergänzend sei angemerkt, dass es sich bei einem Balken um einen Körper handelt, dessen Länge sehr viel größere Beträge als die der Breite und der Höhe besitzt. Durch die Lasten herrschen im Balken innere Normal- und Querkräfte und innere Momente ( $N, Q, M$ ). Mittels des Freischneidens können diese an beliebigen Stellen berechnet werden (siehe Abbildung 3.3). Folgend ergeben sich Normal- ( $\sigma_{Zug/Druck}$ ) und Schubspannungen ( $\tau$ ), die wiederum über das *Hooke'sche Gesetz* zu Dehnungen und Verzerrungen ( $\epsilon, \gamma$ ) führen, sodass letztendlich, verursacht durch diese, die beschriebenen Verformungen ( $u, v, w$ ) zu erkennen sind. Durch das große Verhältnis der Abmessungen zueinander werden Schubspannungen im Weiteren vernachlässigt [Hor20c][Ost18][LiN15].

Für die Reaktionseigenschaften auf angreifende Lasten sind Materialkennwerte und die Geometrie des Balkens verantwortlich, welche mit der Biegesteifigkeit  $EI$  repräsentiert werden. Gebildet wird sie durch den E-Modul  $E$  und das Flächenträgheitsmoment  $I$ . Während Ersteres eine wichtige Eigenschaft eines Materials ist, ist Letzteres von der Querschnittsform abhängig. Neben der eigentlichen Form können ebenfalls Steiner-Anteile das Flächenträgheitsmoment erhöhen. Für die zu verwendenden Formeln wird auf das spätere Kapitel 3.9 verwiesen [Ost18].

Für einen verformten Balken gibt es stets eine neutrale Faser, die eine Linie bzw. Fläche ohne eine relative Längenänderung unter angreifenden Kräften und Momenten repräsentiert. Diese Linie wird auch Biegelinie genannt, für welche die vereinfachte *Differentialgleichung des Biegebalkens*

$$w'' = -\frac{M}{EI} \quad (3.1)$$

aufgestellt wurde. Neben der Krümmung  $w''$  kann mittels Integration die Neigung  $w'$  und die Absenkung  $w$  bestimmt werden. Über Differentiationen werden, neben äußeren Momenten, Kräfte und Streckenlasten in der Balkentheorie mit einbezogen. Durch Integrationskonstanten können geometrische Rand- und Übergangsbedingungen beachtet werden. Während in der neutralen Faser keine Normalspannungen auftreten, sind diese in den Randfasern maximal [Ost18][LiN15].

Es sei außerdem angemerkt, dass jederzeit Superpositions-Eigenschaften gelten. Dadurch können einerseits mehrere Balken in einem System betrachtet werden, andererseits aber auch Balken mit mehreren Belastungen in einzelne einfache Berechnungen überführt werden [Ost18].

Für die Berechnung einer Balkenbiegung kann nach folgendem Schema vorgegangen werden: Vorerst werden die notwendigen Lagerarten bestimmt. Wichtige Lagerarten bilden dabei das Festlager (ein rotatorischer Freiheitsgrad), das Loslager (ein rotatorischer und ein translatorischer Freiheitsgrad) und eine feste Einspannung (keine Freiheitsgrade), die Freiheitsgrade seien dabei auf den zweidimensionalen Fall bezogen. Anschließend wird der Balken bereichsweise an Unstetigkeiten (z.B. Lager oder Krafteinleitungspunkte und ändernde Geometrien) geschnitten, um Bedingungen für innere Kräfte und Momente am entstandenen positiven und negativen Schnittufer zu ermitteln. Dadurch lassen sich in diesen markanten Orten relevante Rand- und Übergangsbedingungen der Differentialgleichung des Biegebalkens bestimmen (siehe Abbildung 3.3). Abschließend führen Integrationen und Differentiationen der Differentialgleichung des Biegebalkens und deren Lösung zur Absenkung, der Neigung, der Krümmung sowie innerem Kraft- bzw. Momentverlauf [Ost18][LiN15].

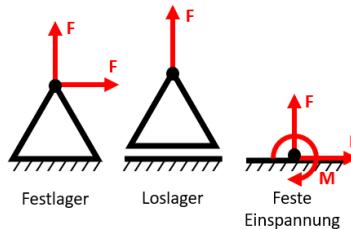


Abbildung 3.1: Lagerarten mit ihren Freiheitsgradbeschränkungen (2D)

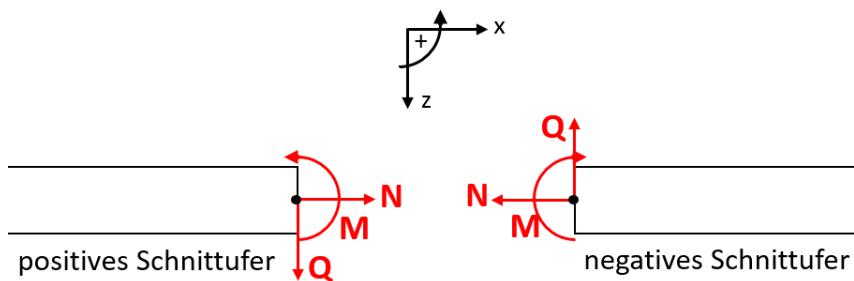


Abbildung 3.2: Schnittkräfte und -momente in einem Balkenschnitt (2D)

### 3.4 Einführung in die Netztheorie (H.G.)

Bevor die klassische Laminattheorie entwickelt wurde, verwendete man die sogenannte Netztheorie. Bei der Netztheorie wird das Mittragen der Matrix vernachlässigt. Dadurch lassen sich die Schichtkräfte mit Hilfe eines Kräftegleichgewichts bestimmen. Durch diese Vereinfachungen kann der Konstrukteur schnell feststellen, ob die Fasern alleine der Belastung standhalten können. Wenn dies nicht der Fall ist werden die Kräfte größtenteils über die Matrix übertragen und das Laminat wird als *ungesund* bezeichnet. Durch die Annahme, dass die Matrix nicht tragend ist, wird das Laminat jedoch unterschätzt und weist deutlich höhere Festigkeiten auf, als in der Netztheorie angenommen. Damit wird in jedem Fall eine Sicherheit mit eingerechnet.

Für die Verwendung der Netztheorie sollte das Gelege zunächst in ein Hauptachsenkoordinatensystem überführt werden, damit die Schubspannungen verschwinden. Die Kraftflüsse werden damit zu  $\hat{n}_I$  und  $\hat{n}_{II}$ . Nun lässt sich der Winkel  $\beta$  zwischen den Fasern und den Achsen des Hauptachsenkoordinatensystems bestimmen. Mit diesem und der Annahme, dass nur die Spannungen  $\sigma_{\parallel}$  auftreten, können nun die Schnittkräfte in den Fasern bestimmt werden:

$$\hat{n}_I = \sum n_{\parallel k} \cdot \cos^2 \beta_k \quad (3.2)$$

$$\hat{n}_{II} = \sum n_{\parallel k} \cdot \sin^2 \beta_k \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{1}{2} \sum n_{\parallel k} \cdot \sin 2\beta_k. \quad (3.4)$$

Da der gesamte Kraftfluss als Summe der Kraftflüsse in den einzelnen Fasern angenommen werden kann, lässt sich dadurch der Kraftfluss in den einzelnen Faserschichten und somit die benötigte Dicke der Schichten, bzw. die Anzahl der Lagen bestimmen[Sch05].

In der folgenden Berechnung wird die Netztheorie jedoch nicht verwendet, da die Auslegung vorerst mit der VDI 2013 erfolgt und anhand der Klassischen Laminattheorie.

### 3.5 Einführung in die Klassische Laminattheorie (H.G.)

Das Prinzip der klassischen Laminattheorie ist die Beschreibung des Elastizitätsgesetzes eines MSV durch die Elastizitätsgesetze der einzelnen Schichten. Dies lässt sich durch die Annahme eines ideal elastischen und fehlerfrei verklebten Mehrschichtverbund (MSV), wovon ein infinitesimales Scheibenelement betrachtet wird, realisieren. Zusätzlich gilt die Annahme, dass ein ebener Spannungszustand vorliegt, die Schnittspannungen über die Dicke konstant sind und keine Verwölbungen auftreten.

Der Kraftfluss  $\hat{n}$  im ganzen Laminat lässt sich durch die Summe der Kraftflüsse in den einzelnen Schichten zusammensetzen.

$$\hat{n}_x = \hat{\sigma}_x \cdot t = \sum n_{xk} = \sum \sigma_{xk} \cdot t_k \quad (3.5)$$

$$\hat{n}_y = \hat{\sigma}_y \cdot t = \sum n_{yk} = \sum \sigma_{yk} \cdot t_k \quad (3.6)$$

$$\hat{n}_{xy} = \hat{\tau}_{xy} \cdot t = \sum n_{xyk} = \sum \sigma_{xyk} \cdot t_k \quad (3.7)$$

Nun lässt sich das Elastizitätsgesetz für den MSV aufstellen:

$$\{\hat{n}\} = [A] \cdot \{\hat{\varepsilon}\}. \quad (3.8)$$

[A] ist hierbei die Steifigkeitsmatrix des MSV. Mit Hilfe der Kraftfluss- Spannungsbeziehung aus Gleichung 3.5, lässt sich dann auf die Spannung schließen.

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Die Verzerrung des MSV und somit auch die Verzerrung der Einzelschichten, lässt sich nun durch die Umstellung von Gleichung 3.8 bestimmen.

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [A]^{-1} \cdot \{\hat{n}\} \quad (3.10)$$

Um die Matrix A zu bestimmen werden die Steifigkeitsmatrizen der Einzelschichten [Q] benötigt. Diese lassen sich mit Hilfe der E-Moduln, Querkontraktionszahlen definieren.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\perp\parallel}\cdot E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\parallel\perp}\cdot E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Da manche Faserschichten um einen Winkel  $\alpha$  gedreht sein können, muss für diese Schichten die Steifigkeitsmatrix mit Hilfe der Transformationsmatrix  $[T]$  nach der Transformationsregel aus Gleichung 3.13 transformiert werden.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ 0,5 \cdot \sin 2\alpha & -0,5 \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (3.13)$$

Nun lässt sich die Scheibensteifigkeits-Matrix  $[A]$  aus den Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Schichten zusammensetzen (siehe Glg.3.14).

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \underline{\underline{Q}}_{ij,k} \cdot t_k \quad (3.14)$$

Um ein passende Anzahl an Faserschichten zu bekommen kann das Ergebnis nun iterativ angepasst werden.[Sch05]

### 3.5.1 Ingenieurskonstanten des MSV

Für den einachsigen Spannungszustand lassen sich die Moduln und Querkontraktionszahlen für den MSV ableiten. Diese lassen sich experimentell über z.B. einen Zugversuch oder rechnerisch aus dem Elastizitätsgesetz des MSV bestimmen.

$$\hat{E}_x = \frac{1}{A_{11}^{-1} \cdot t}; \hat{E}_y = \frac{1}{A_{22}^{-1} \cdot t}; \hat{G}_{xy} = \frac{1}{A_{66}^{-1} \cdot t}; \hat{\nu}_{xy} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{22}^{-1}}; \hat{\nu}_{yx} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{11}^{-1}} \quad (3.15)$$

Die Spannungen lassen sich jetzt durch Gleichung 3.10 errechnen.

Bei den Elastizitätsmoduln ist darauf zu achten, dass es sich um Moduln ohne Querkontraktionsbehinderung handelt [Sch05].

### 3.5.2 Plattenelement

Um ein Plattenelement zu Berechnen werden zusätzliche Beziehungen benötigt, da nun ein zweiachsiger Spannungszustand vorliegt. Zu Gleichung 3.14 kommen nun noch 2 weitere Gleichungen (siehe Glg.3.16/3.17) hinzu.  $|z_k|$  ist der Abstand zwischen den Schichten. Bei  $t_k$  handelt es sich dabei um die jeweilige Plattendicke, bei  $z_k$  um die maximale Entfernung

vom gesetzten Kordinatensystem.

$$B_{ij} = \cdot \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij,k} \cdot t_k \cdot \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right) \quad (3.16)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij,k} \cdot \left( \frac{t_k^3}{12} + t_k \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right)^2 \right) \quad (3.17)$$

Nun lässt sich die Scheiben-Platten-Beziehung als Gleichung 3.18 schreiben.[Sch05]

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.6 Einführung in die Mischungsregel (H.G.)

Um die Materialkonstanten des FKV zu ermitteln kann die Mischungsregel verwendet werden. Darin werden die Materialkonstanten der Fasern und der Matrix im Verhältnis zu ihrem Massenanteil zu einer FKV-Materialkonstante zusammengestellt.

Die Dichte des FKV lässt sich aus der Dichte der einzelnen Komponenten errechnen (siehe Glg. 3.19).

$$\rho = \rho_F \cdot \varphi + \rho_M \cdot (1 - \varphi) \quad (3.19)$$

Der E-Modul parallel (siehe Glg. 3.20) und orthogonal (siehe Glg. 3.21) kann mit den E-Modulen von Faser und Matrix, sowie dem Faservolumenanteil  $\varphi$  errechnet werden. Zu betonen ist hierbei, dass auf eine Querkontraktionsbehinderung der Matrix durch die Fasern nicht eingegangen wird. In diesem Fall wären die resultierenden Steifigkeiten größer. Um sicher konservativ rechnen zu können, wird demnach die vereinfachte Rechnung benutzt. Aus selbigem Grund wird daher auch auf höhere Mischungsregeln, wie z.B. nach Puck, verzichtet.

$$E_{\parallel} = E_{f\parallel} \cdot \varphi + E_m \cdot (1 - \varphi) \quad (3.20)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_m}{(1 - \varphi) \cdot \frac{E_m}{E_{f\perp}} \cdot \varphi} \quad (3.21)$$

Der Schubmodul in Faser-Quer-Längs-Richtung kann ebenfalls durch die Schubmodule der Fasern und der Matrix ermittelt werden.

$$G_{\perp\parallel} = G_m \frac{1}{(1 - \varphi) + \frac{G_m}{G_{f\perp\parallel}} \cdot \varphi} \quad (3.22)$$

Außerdem lassen sich die Querkontraktionszahlen berechnen.

$$\nu_{\perp\parallel} = \varphi \cdot \nu_{f\perp\parallel} + (1 - \varphi) \cdot \nu_m \quad (3.23)$$

Aus diesen Werten lassen sich alle weiteren durch die Beziehungen zwischen den Materialkonstanten berechnen.[Sch05]

### 3.7 Einführung in das Versagenskriterium nach Puck (O.S.)

Da für einen anisotropen FKV nicht das Versagen mittels einer allgemeinen resultierenden Spannung für jeden Lastfall ermittelt werden kann, müssen Versagenskriterien für die speziellen Beanspruchungsmodi definiert werden. Für die in dieser Projektarbeit durchgeführten Auslegungen wurden die Festigkeitskriterien von Puck verwendet. Hierbei werden die einzelnen UD-Schichten des Laminats getrennt betrachtet. Auch wenn diese Betrachtungen physikalisch begründet sind (vgl. [Hor20a]), hat dies zur Folge, dass Effekte wie Delamination nicht berücksichtigt werden.

#### 3.7.1 Definitionen

Zunächst sind einige Begriffe zu definieren. An einer UD-Schicht können zwei verschiedene Normalspannungen wirken, die sich, je nachdem, ob es sich um Druck- oder Zugbelastung handelt, unterschiedlich auf das Versagen auswirken: die Längsbeanspruchung  $\sigma_{\parallel}$  parallel und die Querbeanspruchung  $\sigma_{\perp}$  orthogonal zur Faserrichtung. Auch bei der Schubspannung muss zwischen der Quer-/Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\perp}$  und der Längs-/Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\parallel\perp}$  unterschieden werden. Wegen des durch die Fasern bedingten stark anisotropen Aufbaus muss zwischen zwei grundlegenden Versagensarten unterschieden werden: dem Faserbruch (Fb) und dem Zwischenfaserbruch (Zfb). Der Begriff Bruch ist hier bewusst als Schadensbezeichnung gewählt, da bei beiden Fällen kein plastisches Verhalten auftritt und es sich um einen Sprödbruch ohne nennenswertes Fließen handelt. Für das Versagenskriterium wird die genaue Definition der Anstrengung  $f_E$  gesucht. Diese ist abhängig vom Spannungszustand und immer so definiert, dass bei  $f_E = 1$  das Versagen eintritt, sie also bei Belastungen, die das Material, aushält Werte kleiner als 1 und bei überkritischen Lasten größer 1 annimmt.

Beim Zfb stimmt die Bruchebene nicht unbedingt mit der Wirkebene, der Ebene mit der höchsten Beanspruchung, überein. Auf anderen Ebenen können andere Festigkeiten herrschen, die früher überschritten werden. Generell gilt für sie, dass die Bruchebene immer parallel zu den Fasern sein muss. Puck führt analog zur Festigkeit den Bruchwiderstand der Wirkebene  $R^A$ , der als "derjenige Widerstand [definiert ist], den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen in ihr wirkenden Beanspruchung (bei Zfb:  $\sigma_{\perp}^+$  oder  $\tau_{\perp\perp}$  oder  $\tau_{\parallel\perp}$ ) entgegengesetzt"[Sch05].

#### 3.7.2 Zwischenfaserbruch ohne Längsspannung

Ignoriert man die Längsspannung  $\sigma_1$ , da diese erst bei sehr hohen Werten Einfluss auf einen Zfb hat, ergibt sich ein Spannungszustand aus den beiden übrigen Normalspannungen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  orthogonal zu den Fasern und den Schubspannungen  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  und  $\tau_{31}$ . Um nun die Bruchebene bestimmen zu können, muss der Spannungszustand in dieser Ebene

mittels der Matrix aus Gleichung 3.24 transformiert werden. Aus der Bedingung, dass die Bruchebene parallel zu den Fasern liegen muss, ergibt sich eine Drehung um die  $x_1$ -Achse, die in Faserrichtung zeigt, mit dem Winkel  $\theta$ . In der Bruchebene liegen dann nur noch die beiden Schubspannungen  $\tau_{nt}$  normal und tangential zur Ebene,  $\tau_{n1}$  normal in Faserrichtung und die Normalspannung  $\sigma_n$  senkrecht auf der Bruchebene.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ -cs & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Mit

$$c = \cos\theta \quad (3.25)$$

und

$$s = \sin\theta. \quad (3.26)$$

Mit diesen Werten definiert Puck seine Bruchbedingungen aus der Mohrschen Bruchhypothese [Sch05], wobei er zwischen  $\sigma_n < 0$ :

$$f_{E,\text{Zfb}} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_\perp^+} - \frac{p_{\perp\psi}^+}{R_{\perp\psi}^A}\right)\sigma_n\right]^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^+}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n \quad (3.27)$$

und  $\sigma_n \geq 0$

$$f_{E,\text{Zfb}} = \sqrt{\left(\frac{p_{\perp\psi}^-}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^-}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n \quad (3.28)$$

unterscheidet. Mit den experimentell ermittelten Bruchwiderständen  $R$  und Steigungsparametern  $p_{\perp\perp}^\pm$  lassen sich aus der Bedingung, dass der Bruchkörper, welcher sich aus  $f_{E,\text{Zfb}} = 1$  ergibt, sprung- und knickfrei sein muss, somit die Neigungsparameter  $p_{\perp\psi}^\pm$  bestimmen. Nun lässt sich die Anstrengung in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\theta$  errechnen. Für die meisten Fälle ist dies jedoch nicht analytisch möglich, sodass die Werte numerisch bestimmt werden müssen. In der Ebene mit der höchsten Anstrengung kann es am ehesten zum Bruch kommen. Der Reservefaktor ist als der Kehrwert der Anstrengung definiert und ist ein Maß für die Sicherheit gegen das Versagen. Falls die Anstrengung den Wert von 1 überschreitet, wird die Ebene der UD-Schicht zur Bruchebene, wo der Reservefaktor zuerst null wird. Es kommt zum Zwischenfaserbruch.

### 3.7.3 Einfluss der Längsspannung

In diesen Betrachtungen wurde bisher der Einfluss der Spannung in Faserrichtung  $\sigma_1$  vernachlässigt. Jedoch treten bei höheren Spannungen Effekte auf, die sich auch auf den Zfb auswirken und die Bruchwiderstände senken. Zum einen wird durch starke Dehnung in Faserrichtung die Matrix überproportional beansprucht und Poren werden verstärkt geöffnet, zum anderen kann es auch, bevor Faserbruch eintritt, zum Bruch einzelner Filamente kommen, die Risse in der Matrix begünstigen. Außerdem können sich durch Druckspannungen in Faserrichtung leicht wellen, was zusätzliche  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung in das Material einträgt.

Puck berücksichtigt diese Senkung der Bruchwiderstände durch einen Schwächungsfaktor  $\eta_w < 1$ . Um die Einbeziehung dieses Faktors besser handhabbar zu machen, wird er für alle Bruchwiderstände gleich gewählt. Somit lässt er sich sowohl aus Gleichung 3.27, als auch 3.28 ausklammern. Es lässt sich also die Bruchbedingung unter Einbezug der Längsspannung  $f_{E1} = 1$  als

$$f_{E1} = \frac{f_{E0}}{\eta_w} = 1 \quad (3.29)$$

schreiben, wobei der Index 0 für die Anstrengung ohne  $\sigma_1$  steht. Durch die gleich starke Absenkung aller Bruchwiderstände bleibt auch der Bruchwinkel erhalten. Für die Abhängigkeit des Schwächungsfaktors von  $\sigma_1$  wird eine Ellipsenbeziehung gewählt, wobei wieder zwischen Druck- und Zugspannung unterschieden wird, da die Zugspannung einen stärkeren Einfluss auf den Zfb hat. Dadurch ergibt sich für den Bruchkörper eine Zigarrenform. Auch wenn Zwischenfaserbrüche nicht unbedingt zum Totalversagen des Laminats führen, sind sie hier trotzdem als Auslegungskriterium zu sehen, da sie negative Auswirkungen auf die Festigkeiten, Lebensdauer und Sicherheit haben. Die Risse in der Matrix können Delamination auslösen oder auch durch Kerbwirkung anliegende Schichten schwächen. Sowohl der Quer-Längs-Schubmodul als auch die Bruchfestigkeit  $R_{\parallel}^-$  nehmen ab. Des Weiteren können durch die Risse korrosive Medien an die Fasern gelangen und diese schädigen.

### 3.7.4 Faserbruch

Ein viel kritischerer Fall tritt ein, wenn beim Faserbruch die Fasern reißen oder brechen. Als Versagen gilt hier nicht der Bruch einzelner Fasern, sondern ganzer Bündel. Dies ist unter allen Umständen zu vermeiden, da die hohen Spannungen, bei denen das Material versagt, meist nicht über andere Lastpfade kompensiert werden können. Während die Spannung in Faserrichtung  $\sigma_{\parallel}$  für den Zfb nur eine zweitrangige Rolle spielt, ist sie für den Fb maßgebend.

**Zugspannung  $\sigma_{\parallel}^+$** 

Der Bruchwiderstand in Faserrichtung bei Zugbeanspruchung  $R_{\parallel}^+$  wird in der Regel rechnerisch und nicht experimentell bestimmt. Der genaue Wert für die Festigkeit wird meistens nicht benötigt, weil bei FKV viel schneller durchs Versagen der Matrix ein Zfb auftreten kann und die Konstruktionen bei schwingender Beanspruchung durch Ermüdung versagen. Außerdem ist die Bestimmung des Wertes im Versuch möglich, weil es wegen der hohen Bruchspannungen an den Einspannungen zu mehrachsigen Spannungszuständen kommt. Da die Fasern quasi die gesamte Spannung aufnehmen und die Matrix dem gegenüber vernachlässigbar ist, lässt sich die Festigkeit des Laminats rein aus der der Fasern  $R_{f\parallel}^+$  und des Faservolumenanteils  $\varphi$  bestimmen:

$$R_{\parallel}^+ = R_{f\parallel}^+ \varphi \quad (3.30)$$

Hieran lässt sich auch erkennen, dass die Spannungen, die in den Fasern herrschen, antiproportional mit dem Faservolumenanteil steigen. Jedoch kann man diesen Wert nicht ohne weiteres verwenden, sondern muss ihn durch einen Abminderungsfaktor korrigieren, da die wahre Festigkeit durch einige Effekte gesenkt wird.

Schon in der Fertigung und Verarbeitung können Schädigungen an einzelnen Filamenten entstehen, sodass diese früher versagen und benachbarte Fasern einer erhöhten Belastung ausgesetzt sind. Auch eine leicht unterschiedliche Ausrichtung oder Vorspannung kann zu einer unterschiedlichen Spannungsverteilung führen, die das vorzeitige Versagen bewirkt. Die örtliche Streuung der Festigkeit sorgt dafür, dass einige Fasern zuerst brechen und anliegende ihr Last zusätzlich tragen müssen. Auch wenn dadurch die Gesamtfestigkeit des FKVs gesenkt wird, ermöglicht dies das vorzeitige Erkennen des Versagens, was erwünscht ist.

**Druckspannung  $\sigma_{\parallel}^-$** 

Bei hohen Druckspannungen, besonders bei dünnen Bauteilen des Leichtbaus, muss es nicht zum Versagen des Materials in Folge vom Erreichen der Fließgrenze oder Schubbelastung spröder Werkstoffe kommen. Es handelt sich stattdessen um ein Stabilitätsproblem, bei dem die Fasern einer UD-Schicht knicken. Jedoch kommt es nur in einem nie wirklich erreichbaren idealen Laminat zu einem Verzweigungsproblem, wie es beim Eulerknicken zu beobachten ist. Bei realen Laminaten gibt es immer Imperfektionen, bei denen die Fasern durch Welligkeiten lokal eine variierende Orientierung haben, die das sogenannte Schubknicken auslösen. Schon ohne Lastangriff liegt also eine Orientierungsabweichung mit dem Winkel  $\phi_0$  vor. Da trotzdem an jeder Stelle das Momentengleichgewicht herrschen muss, aber es an diesem Ort nicht mehr nur durch die Druckspannungen erfüllt ist, entstehen Schubspannungen  $\tau_{\perp\parallel}$ . Aus dem Momentengleichgewicht in Abbildung 3.3 lässt

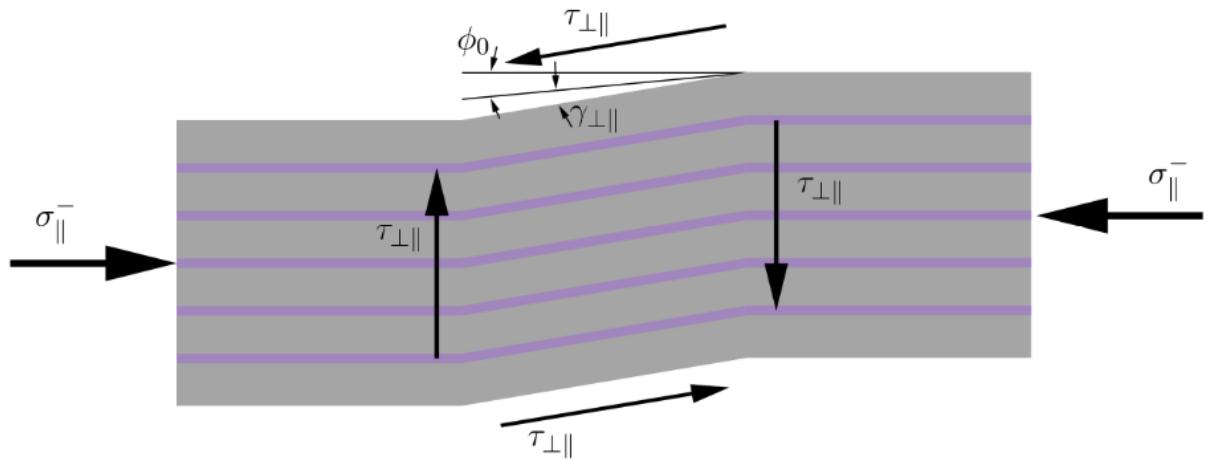


Abbildung 3.3: Kräfte beim Schubknicken von VFK

sich der Zusammenhang

$$\sigma_{\parallel}^- = \frac{\tau_{\perp\parallel}}{\phi_0 + \gamma_{\perp\parallel}} \quad (3.31)$$

erkennen. Mit steigender Druckspannung steigt auch der Schiebewinkel  $\gamma_{\perp\parallel}$ . Bei dieser Betrachtung wurde aber noch die Biegesteifigkeit der Fasern außer Acht gelassen, die dem Schubknicken entgegenwirken. Auch die benachbarten Fasern stützen die knickenden Schichten und tragen somit zu einer erhöhten Stabilität bei. Des Weiteren ist zu beachten, dass die Schubspannung  $\tau_{\perp\parallel}$  stark nichtlinear von dem Schubwinkel  $\gamma_{\perp\parallel}$  abhängt. Die Längs-Druckfestigkeit  $R_{\parallel}^-$  lässt sich aus der Extremwertbetrachtung von Gleichung 3.31 als der Maximalwert von  $\sigma_{\parallel}^-$  zu

$$R_{\parallel}^- = \frac{d\tau_{\perp\parallel}}{d\gamma_{\perp\parallel}} = G_{\perp\parallel,T}(\gamma_{\perp\parallel}) \quad (3.32)$$

bestimmen.  $G_{\perp\parallel,T}(\gamma_{\perp\parallel})$  ist der Tangenten-Schubmodul beim Schubknicken. Wird dieser Wert überschritten, wächst der Schiebewinkel unkontrolliert an und es kommt zum lokalen Knicken, was nicht selten zum Gesamtversagen führen kann.

Häufig kommt es aber gar nicht zur Überschreitung dieser Festigkeit. Lokale Spannungsmaxima können schon vorher zum Versagen durch Zfb führen, bevor es zum Schubknicken kommt. In dem zu konstruierenden Flügel soll sich ein Holm befinden, in dessen Gurten es durch ihre relativ hohe Dicke jedoch trotzdem vorkommen kann. Somit ist dieser Fall für diese Projektarbeit nicht vernachlässigbar.

Sowohl die Längs-Druckfestigkeit  $R_{\parallel}^-$  als auch die Längs-Zugfestigkeit  $R_{\parallel}^+$  sind als Materialkennwerte der UD-Schicht im Rahmen der Aufgabenstellung gegeben und ergänzen die Pucksche Zigarre, indem der Bruchkörper durch diese beiden Festigkeiten in die  $\sigma_1$ -Richtung beschränkt wird.

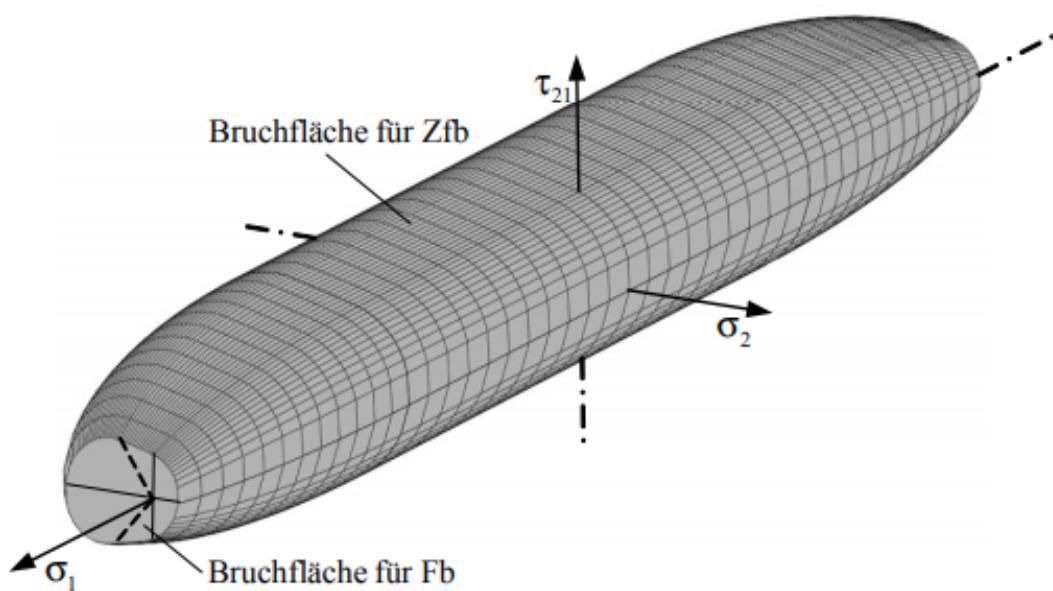


Abbildung 3.4: Pucksche Zigarre aus [Sch05]

### 3.8 Einführung in Stabilitäts-Überprüfungen (T.B.)

Neben der Festigkeit und Steifigkeit ist es bei einer Konstruktion dünnwandiger Bauteile notwendig, sie auf Versagen durch mangelnde statische Stabilität zu überprüfen. Stabilität bedeutet, dass ein System bestimmte maximale Lasten erträgt, es bei schon kleinen Erhöhungen jedoch zu drastischen Systemänderungen, wie z.B. in der Tragfähigkeit, kommen wird. Bemerkbar ist dieses auch in Veränderungen der Bauteilgeometrie [Ost18].

Typische Versagensarten aufgrund zu hoher Druckbeanspruchungen bilden dabei das Knicken (eindimensionale Formänderung) und das Beulen (zweidimensionale Formänderung). Bei Letzterem haben auch Schubbeanspruchungen Einfluss darauf. Dabei entstehen wellenförmige Ausprägungen des Bauteils (in entsprechend vielen Dimensionen). Sie können mit unendlich vielen Eigenwerten beliebig viele Ausprägungen, einer Sinus-Funktion mit unterschiedlichen Frequenzen entsprechend, im Bauteil bilden. Die kritische Last wird für eine einfache Ausprägung definiert, da dieser Fall meistens zuerst eintreten wird. Die Verformungen können auch plastisch auftreten, sodass nach Entlastung des Bauteils irreparable Schäden bleiben. Inwiefern ein Bauteil im geknickten bzw. gebeulten Zustand seine Eigenschaften beibehält, lässt sich kaum vorhersagen [Ost18].

Die Beulsicherheit der Tragflügel-Bauteile erfolgt nach Hertel [Her60]. Dabei handelt es sich um Theorien isotroper Stoffe. Dennoch werden sie hier für FKV angewendet, da im Orthotropie-Achsensystem gleiche Verhaltensweisen wie isotroper Stoffe gelten. Die Orthotropie ist in nachfolgenden Bauteilen hinreichend durch gewählte Belastungsrichtungen und Lagenaufbauten gegeben (siehe Kapitel 4 und 5). Diese Annahme hat sich bei bisherigen Flugzeug-Konstruktionen und deren Zulassungen bewährt [Ron99].

In der Hautebene eines dünnwandigen Bauteils wird zwischen beulkritischen Spannungen unterschieden, die aus reiner Biegung, Druck und Biegung, oder reinem Schub (Indizes  $b/d/s$ ) resultieren. Sofern Normal- und Schubspannungen gleichzeitig vorliegen, kann lediglich eine kombinierte Belastung als über- oder unterkritisch eingestuft werden. Die Spannungen und Beulausprägungen sind von folgenden Parametern abhängig [Her60]:

- Seitenverhältnis  $\frac{a}{b}$ . Für einen Betrag gleich Null wird das Hautfeld „Streifen“ genannt.
- Randbedingungen an den Rändern des Hautfelds. Ränder können frei (alle Freiheitsgrade), gestützt (rotatorischer Freiheitsgrade) und fest (keine Freiheitsgrade) gelagert werden.
- relative Hautstärke  $\frac{s}{b}$ .
- Elastizitätsmodul  $E$ .

Dabei stehen  $a$  und  $b$  für die lange bzw. die kurze Seite des Hautfelds und  $s$  für dessen Hautstärke. Mit dem Seitenverhältnis und den Randbedingungen ergibt sich ein Beulfaktor  $k$ , der, je nach vorherrschender Beanspruchung, in den Abbildungen 12.17, 12.18 und 12.19 ermittelt wird.

Die beulkritischen Normal- und Schubspannungen lassen sich nach

$$\sigma_{k\text{rit}} = k \cdot E \cdot \left(\frac{s}{b}\right)^2 \quad (3.33)$$

$$\tau_{k\text{rit}} = k \cdot E \cdot \left(\frac{s}{b}\right)^2 \quad (3.34)$$

berechnen. Die Sicherheit gegen Beulen ergibt sich aus dem Verhältnis zur tatsächlich anliegenden Spannung  $\sigma_{max}$  bzw.  $\tau_{max}$ :

$$j = \frac{\sigma_{k\text{rit}}}{\sigma_{max}}; j = \frac{\tau_{k\text{rit}}}{\tau_{max}} \quad (3.35)$$

Falls beide Spannungstypen gleichzeitig anliegen sollten, kann mit der Gleichung

$$\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{k\text{rit}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{k\text{rit}}}\right)^2 = 1^2 = \frac{1}{j^2} \quad (3.36)$$

in Abbildung 12.20 herausgefunden werden, ob es sich um einen überkritischen Zustand handelt [Her60].

Generell werden Krümmungen und Versteifungen nachfolgend vernachlässigt. Allerdings sind für Sandwich-Bauteile Anpassungen durchzuführen:

Die Dicke  $d$  beinhaltet neben den FKV-Lagen die Schaumstoffdicke. Dadurch, dass diese Lagen nun an den Außenseiten konzentriert sind, kann das Trägheitsmoment mit einem Faktor  $\kappa$  bis auf das Dreifache maximal erhöht werden. Dieser wird jedoch wieder minimiert, sofern der Lagenaufbau unsymmetrisch und somit das Dickenverhältnis ungleich eins ist. Exakte Beträge können der Abbildung 12.21 entnommen werden. Die beulkritischen Spannungen berechnen sich somit nach [Her60] zu

$$\sigma_{k\text{rit}} = \kappa \cdot k \cdot E \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 \quad (3.37)$$

$$\tau_{k\text{rit}} = \kappa \cdot k \cdot E \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 \quad (3.38)$$

### 3.9 Einführung in den Kraftfluss dünnwandiger Profile (O.S.)

Im Leichtbau ist es wichtig geeignete Konstruktionen zu entwerfen, um Eigenschaften der Werkstoffe ideal nutzen zu können. Das Gesamtbauteil ist dann meist so kompliziert, dass sich die für das Bauteil zu lösenden Differenzialgleichungen, wie zum Beispiel die der Elastostatik, keine geschlossenen Lösungen finden lassen. Das Ziel ist es nun durch Annahmen und Vereinfachungen ein sinnvolles und lösbares Ingenieursmodell zu finden. Alternativ könnten auch Lösungen mittels numerischer Methoden ermittelt werden, hierzu mehr in Kapitel 3.10.

#### Zylindrische, dünnwandige Profile

Häufig werden zylindrische, dünnwandige Profil genutzt, da sie bei vergleichsweiser niedriger Masse noch immer gute Werte bei zum Beispiel der Biegesteifigkeit liefern. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie deutlich höhere Ausmaße in x-Richtung haben, als in jede andere (zylindrisch). Eine Laufvariable  $s$  verläuft in der y-z-Ebene durch die Mitte der Profildicke  $t(s)$ . Die Dicke ist nicht zwangsläufig über  $s$  konstant, muss aber deutlich kleiner als alle anderen Abmessungen sein (dünnwandig) [Hor20c]. Man kann vereinfacht annehmen

$$\iint dA = \int t(s)ds. \quad (3.39)$$

Der Querschnitt muss in x-Richtung konstant sein und auch bei Belastung seine Gestalt beibehalten. Der Schubfluss im Profil ist als

$$q = \tau t(s) \quad (3.40)$$

und der Normalkraftfluss als

$$n_x = \sigma_x t(s) \quad (3.41)$$

definiert. Für diese Kraftflüsse gilt das hydrodynamische Analogon. Das heißt, mit einer Änderung der Dicke muss der Kraftfluss antiproportional ab- bzw. zunehmen, damit das Kräftegleichgewicht erfüllt bleibt. Für Knotenpunkte muss auch gelten, dass der Betrag der Kraftflüsse in den Knoten hinein denen aus ihm heraus gleicht. Des Weiteren lässt sich noch zwischen offenen und geschlossenen Profilen unterscheiden, wobei es sich bei zweiterem um Ein- oder Mehrzeller handeln kann [Hor20c].

#### Koordinatensysteme

Bei den Berechnungen kann viel Arbeit gespart werden, indem das Koordinatensystem mit Ursprung und Achsenausrichtung klug gewählt wird. Das allgemeine Koordinatensystem, das unabhängig vom betrachteten Profil ist, bietet hierbei die wenigsten, wenn nicht sogar keine Vorteile. Verschiebt man seinen Ursprung in den Schwerpunkt, erhält man das

Schwerpunkt-Koordinatensystem. Es wird mit einem Querstrich über den Koordinaten gekennzeichnet ( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ). Es ist sinnvoll aus dieser Perspektive den Schubfluss zu betrachten. Aus dem Kräftegleichgewicht in  $x$ - und  $s$ -Richtung an einem infinitesimalen Volumen des

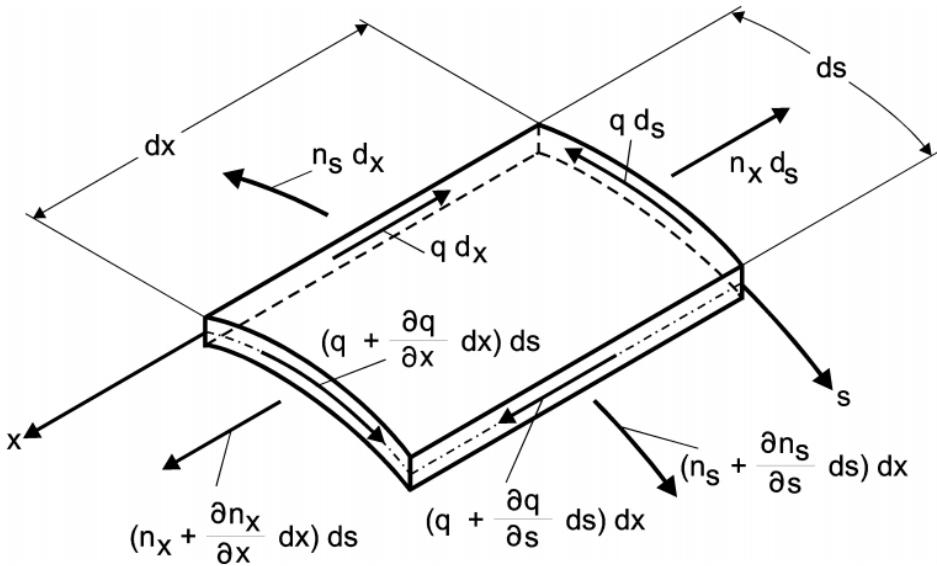


Abbildung 3.5: Infinitesimales Profilelement aus [Hor20c]

dünnwandigen Profils ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Kraftflüssen zu

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial n_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

Da jedoch eine Krümmung in  $s$ -Richtung vorliegen kann, zeigt die Resultierende des Normalkraftflusses  $n_s$  aus der Ebene heraus. Da bei dünnen Scheibenelementen ein ebener Spannungszustand herrscht, darf dies nicht sein. Daraus folgt, dass beide Terme in Gleichung 3.43 gleich null sein müssen. Der Schubfluss ist also in  $x$ -Richtung konstant und lässt sich somit zu

$$q(s) = - \int \frac{\partial n_x(x, s)}{\partial x} ds + q_0. \quad (3.44)$$

integrieren. Wird nun der Normalkraftfluss in Abhängigkeit von der Querkraft  $Q$  gesetzt, ergibt sich die  $Q$ -SInen-Formel nach [Hor20c]:

$$q(s) = -(Q_{\bar{z}} \frac{S_{\bar{y}}(s)I_{\bar{z}} - S_{\bar{z}}(s)I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} + Q_{\bar{y}} \frac{S_{\bar{z}}(s)I_{\bar{y}} - S_{\bar{y}}(s)I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2}) + q_0 \quad (3.45)$$

mit den Flächenträgheitsmomenten

$$I_y = \int_A z^2 dA , \quad (3.46)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (3.47)$$

und

$$I_{yz} = \int_A zy dA . \quad (3.48)$$

Spätestens hier zeigt sich, dass für dieses Modell das Superpositionsprinzip anwendbar ist und man die Kräfte  $Q_y$  und  $Q_z$  getrennt betrachten kann. Hier lässt sich direkt erkennen, wie diese Formel durch die Wahl eines besseren Koordinatensystems vereinfacht werden kann. Für das Hauptachsen-Koordinatensystem bleibt der Schwerpunkt weiterhin der Ursprung, jedoch werden die Achsen so um die x-Achse gedreht, dass die Deviationsmomente  $I_{yz}$  verschwinden. Es wird mit einem Dach über den Koordinaten gekennzeichnet  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Die Integrationskonstante

$$q_0 = q_{0b} + q_{0T} \quad (3.49)$$

ist nur bei geschlossenen Profilen ungleich null. Sie sich aus einem Teil, der aus der Biegung entsteht,  $q_{0b}$ , und einem aus der Torsion,  $q_{0T}$ , zusammen. Es gibt einen Punkt in der y-z-Ebene für jedes Profil, wo eine angreifende Kraft keine Torsion verursacht. Dieser Punkt ist von hoher Bedeutung und wird Schubmittelpunkt genannt.

### 3.10 Einführung in die Finite Elemente Methode (O.S.)

#### 3.10.1 Schwache Lösung der Elastostatik

Für die Berechnung der Elastostatik sind die Gleichgewichtsbedingung (3.50), Verzerrungs-Verschiebungsbedingung (3.51) und das Stoffgesetz (3.52) auch bei der Finiten Elemente Methode (FEM) ausschlaggebend

$$\underline{0} = \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{D}}^T \underline{\sigma} \quad (3.50)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{\underline{D}} \underline{u} \quad (3.51)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \underline{\epsilon} \quad (3.52)$$

[Hor20b]. Wobei  $\underline{\underline{X}}$  der Vektor der Volumenkräfte,  $\underline{\underline{E}}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\underline{\epsilon}$  der Verzerrungsvektor,  $\underline{u}$  der Verschiebungsvektor und  $\underline{\underline{D}}$  die Operatormatrix ist.

Um einer aufwendigen Bestimmung der analytischen Lösung zu entgehen, bedient sich die FEM dem Prinzip der *schwachen Lösung*. Hierbei hat man eine Differenzialgleichung, die in dem betrachteten Gebiet gleich null ist. Für die Elastostatik kann man hierbei die Gleichgewichtsbedingung verwenden. Diese kann man mit der virtuellen Verschiebung  $\delta \underline{u}$  multiplizieren und über das Gebiet integrieren, sodass man

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\sigma} dV + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{X}} dV = 0 \quad (3.53)$$

erhält. Umgeformt ergibt sich das zu

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{D} \underline{u} dV = \int_{O_p} \delta \underline{u}^T p dO_p + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{X}} dV \quad (3.54)$$

wobei die Terme auf der rechten Seite den Lasten entsprechen, die auf das Volumen  $V$  und die mit  $p$  belastete Oberfläche  $O_p$  wirken. Die schwierig zu lösende Differenzialgleichung hat sich nun schon zu einem Integrationsproblem vereinfacht. Daraus kann die Verschiebung bestimmt werden, weswegen man dies auch die Weggrößenmethode nennt. Die Verzerrungen und Spannungen erhält man aus Nachrechnungen, die mit den Gleichungen (3.51) und (3.52) berechnet werden. Diese Gleichung ist noch ganz allgemein für das Kontinuum gültig. Im nächsten Schritt wird das Gebiet in eine finite Menge von Elementen zerteilt.

#### 3.10.2 Diskretisierung

Die Werte der Verschiebung  $\underline{u}$  werden nur an Aufpunkten, den sogenannten Knoten, bestimmt. Mittels einer von der Laufvariablen  $\underline{x}$  abhängigen Formfunktion  $\underline{\underline{N}}$  wird der Verlauf von einem Knoten zu seinen Nachbarn definiert, um wieder einen kontinuierlichen

Verlauf zu erhalten. Hierbei muss die Formfunktion an dem Knoten, von dem sie ausgeht, den Wert 1 und bei jedem anderen den Wert 0 annehmen. Allgemein ergibt sich somit

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{N}}(\underline{x}) \underline{u}^{(e)} \quad (3.55)$$

wobei  $\underline{u}^{(e)}$  der Vektor der Verschiebungen eines Elementes  $e$  ist. Wenn man nun diese Gleichung in die Gleichung der schwachen Lösung (3.54) einsetzt, lässt sich  $\delta(\underline{u}^{(e)})^T$  aus den Integralen raus ziehen und kürzen, da es von  $\underline{x}$  unabhängig ist.

$$\int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} dV \underline{u}^{(e)} = \int_{O_p} \underline{\underline{N}}^T \underline{p} dO_p + \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{X}} dV \quad (3.56)$$

Wobei sich das linke Integral zu der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}^{(e)}$  ergibt.

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} = \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} dV \quad (3.57)$$

Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen lassen sich zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammenfassen, mit der dann die Lösung berechnet wird.

### 3.11 Einführung zu Verklebungen (T.B.)

Der Tragflügel wird aus verschiedenen Bauteilen gefertigt, die miteinander verbunden werden müssen. Unterschieden werden kann beim Fügen zwischen kraftschlüssiger Verbindung (z.B. Schrauben), formschlüssiger Verbindung (z.B. Schnapphaken) und stoffschlüssiger Verbindung (z.B. Löten oder Kleben) [SiV19]. FKV werden meistens miteinander verklebt, dabei muss man auf drei Varianten zurückgreifen [Wit14][FrV19]:

- Nass-Nass-Verklebung: Zwei Laminate werden im nicht ausgehärteten Zustand, also während ihrer Fertigung, gefügt.
- Trocken-Nass-Verklebung: Obwohl ein Laminat schon gehärtet ist, kann es dennoch mit einem zweiten, nicht gehärteten Laminat gefügt werden. Bei dem gehärteten Laminat muss eine geforderte Rauheit garantiert werden.
- Trocken-Trocken-Verklebung: Um hierbei eine Verbindung zweier gehärteten Laminate zu schaffen, wird ein Fügestoff genutzt. Dieser wird durch das verwendete Harzsystem mit einer Beimischung von Aerosil oder Baumwollflocken zur Andickung gebildet. Beide Bauteile müssen eine Mindestrauheit in der Klebefläche aufweisen können.

In der folgenden Dimensionierungsmethode für Klebeflächen wird lediglich auf Schubspannungen in deren Flächen-Ebene eingegangen. Normale Spannungen, aber auch Schälen oder senkrechte Spannungen dazu sind somit ausgeschlossen. Außerdem soll nur mit einfachen Klebeverbindungen von aufeinander liegenden Bauteilen gerechnet werden, da ein Anschrägen bzw. Schäften an Bauteilen solch kleiner Abmessungen teilweise ausgeschlossen werden muss. Mit diesen Annahmen kann folgende Gleichung genutzt werden [SiV19]:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (3.58)$$

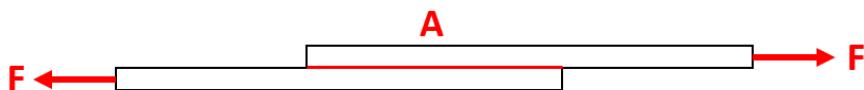


Abbildung 3.6: Vereinfachte Verklebung zweier Bauteile

### 3.12 Einführung in Bauweisen (O.S.)

In der Aufgabenstellung wird gefordert, dass der Flügel in der Holm-Bauweise konstruiert wird. Ein Holm besteht aus zwei parallelen Gurten, die durch einen oder mehrere Stege miteinander verbunden werden. Dabei sind verschiedene Varianten möglich. Abbildung 3.7 veranschaulicht Konstruktionsmöglichkeiten. Neben der Festigkeit ist die Steifigkeit die einzige strukturmechanische Anforderung. Somit lässt sich das Problem als Biegebalken betrachten, der bei der vorgegebenen Prüflast  $F_{pruef} = 100\text{N}$  am freien Ende die vorgegebene Durchbiegung  $w(100\text{N}) = 22\text{mm}$  einhält. Das entstehende Biegemoment wird hauptsächlich von den Gurten getragen, weswegen man sich bei der Wahl des Steges auf andere Kriterien konzentrieren kann. Da kein maximaler Drillwinkel vorgegeben ist und die Torsionssteifigkeit fast ausschließlich von der Haut bewirkt wird, führen mehrere Stege, wie man sie bei einem geschlossenen Profil hat, nur zu unerwünschter Gewichtszunahme. Nach diesen Überlegungen wurde der I-Holm ausgewählt, da dieser bei einfacher Fertigung die gewünschten Eigenschaften mit sich bringt.

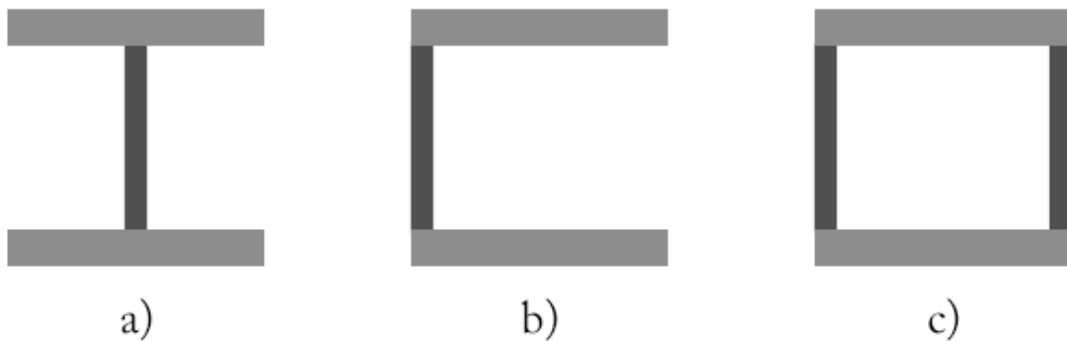


Abbildung 3.7: Holmarten: a) I-Holm b) C-Holm c) Kastenholm

Das aerodynamische Profil des Flügels wird durch die Schale erreicht. Hierbei wird eine dünne Haut nur an kritischen Stellen mit der Sandwichbauweise oder Rippen verstärkt, um Beulen zu verhindern. Die Schale trägt dabei so gut wie gar nicht die Last des Flügels, jedoch ist sie für die Torsionssteifigkeit entscheidend.

## 4 Auslegung des Holms nach Handbuchmethoden

### 4.1 Modellierung des Holms (T.B.)

#### 4.1.1 Annahmen zur Modellierung

Im Folgenden soll das mechanische Verhalten des Holms unter einer angreifenden Querkraft untersucht werden. Dazu wird dieser nach Kapitel 3.3 als Balken modelliert.

Zur Vereinfachung aller analytischen Berechnungen soll anfangs eine wichtige Annahme getroffen werden: Der Holm wird lediglich auf Biegung durch eine Querkraft und die Flügelschale nur auf Torsion durch ein resultierendes Torsionsmoment beansprucht. Diese Annahme kann getroffen werden, da die jeweiligen Belastungsarten auf das entsprechend andere Bauteil eine sehr kleine relative Auswirkung gegenüber dem gesamten Flügel als Baugruppe haben. Diese Annahme ist auch bei Segelflugzeugen, wie z.B. der SB 14 der „Akademische[n] Fliegergruppe Braunschweig e.V.“ erfolgt und vom Luftfahrtbundesamt akzeptiert worden [Ron99].

Das Koordinatensystem des Flügels entspricht einem allgemeinen Flugzeug-Koordinaten- system, sodass die Flügellängskoordinate durch  $y$  definiert ist. Der Koordinatenursprung ist im Lager A positioniert, da es keinen allgemeinen Flugzeugschwerpunkt gibt.

Der Holm inklusive des Holmstummels wird für die Belastung durch eine Prüfkraft  $F_{pruef}$  in negative z-Richtung als Biegebalken ausgelegt. Dafür ist er an zwei Stellen gelagert, am Lager A und am Lager B. Die Lager entsprechen den Verstiftungen (siehe Bauteil U-Profil der Aufgabenstellung). Um eine Überbestimmung des Systems zu vermeiden, wird das Lager B als Loslager angenommen. Die Querkraftbolzen werden nicht durch ein Lager, sondern durch eine zusätzlich angreifende Kraft  $F_Q$  simuliert, da eine biegeweiche Wurzelrippe, an der die Querkraftbolzen die abgesetzte Kraft aufnehmen, eine nicht definierbare, unbekannte Absenkung erlaubt.

Als Randbedingungen der Modellierung sind die Halbspannweite  $s$  und die Absenkung  $w$  (bezogen auf KOS) gegeben. Für die Absenkung  $w$  soll eine Sicherheit  $j = 1,1$  gesetzt werden. Zwischen Lager A und B wird die Länge  $l_1$  angenommen, zwischen Lager B und der Wurzelrippe C die Länge  $l_2$ . Die verbleibende Länge bis zur Flügel spitze, an der die Prüfkraft  $F_{pruef}$  wirkt, wird  $l_3$  bezeichnet. Die Halbspannweite  $s$  wird, beginnend in der Mitte der Verstiftungen, bis zur Flügel spitze gemessen. Ausgehend von dem Holmstummelende bis zum Lager A wird  $l_0$  als Länge definiert. Diese Länge ist jedoch unerheblich für die Modellierung, sie wird erst für die Massenbestimmung benötigt.

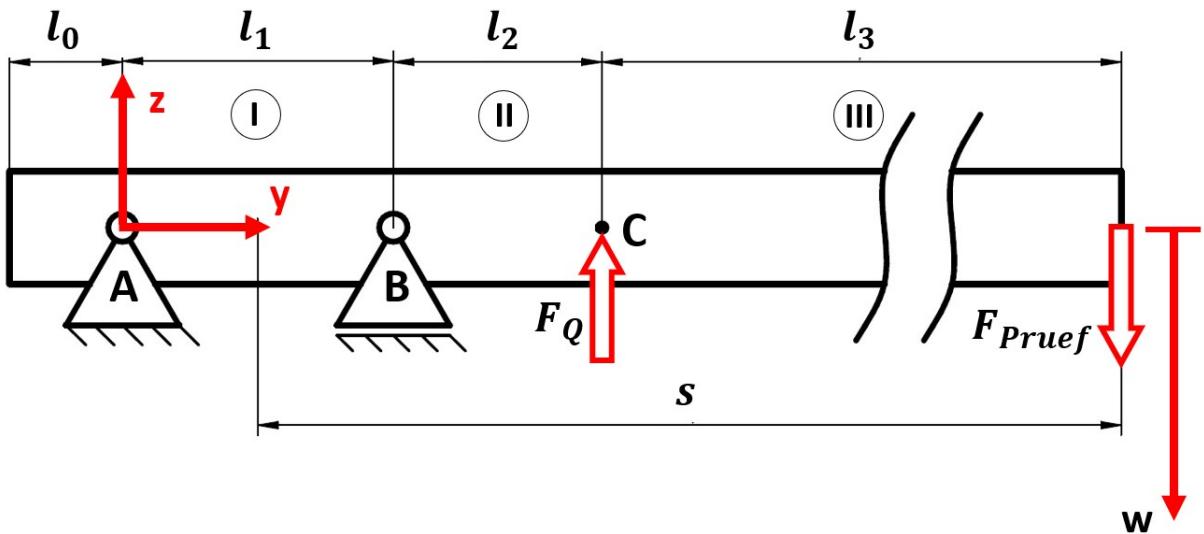


Abbildung 4.1: Modellierung des Holms als Biegebalken

Anhand der Randbedingungen und der Einspannvorrichtung für den Versuchsaufbau ergeben sich folgende Längen (ebenfalls in Abb. 4.1 dargestellt):

$$s = 0,848m \quad (4.1)$$

$$l_0 = 0,03m \quad (4.2)$$

$$l_1 = 0,076m \quad (4.3)$$

$$l_2 = 0,037m \quad (4.4)$$

$$l_3 = s - \frac{l_1}{2} - l_2 = 0,773m \quad (4.5)$$

$$w_{j=1,1} = \frac{1}{j} * w = \frac{1}{1,1} * 0,022m = 0,02m \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Analytisches Lösen der Modellierung

Um die Differentialgleichungen der Balkenbiegung lösen zu können, wird der Biegebalken vorerst in drei Teilbereiche *I*, *II* und *III* aufgeteilt, die sich vom Lager *A* zum *B*, vom Lager *B* zur Wurzelrippe *C* und von dort aus bis zur Flügelspitze erstrecken.

Dadurch ergeben sich folgende zwölf Differentialgleichungen [Ost18]:

$$EI_x \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \quad (4.7)$$

$$EI_x \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \cdot y + R_1 = -Q_I(y) \quad (4.8)$$

$$EI_x \cdot w_I''(y) = \frac{q_I(y)}{2} \cdot y^2 + R_1 \cdot y + R_2 = -M_I(y) \quad (4.9)$$

$$EI_x \cdot w_I'(y) = \frac{q_I(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_1}{2} \cdot y^2 + R_2 \cdot y + R_3 \quad (4.10)$$

$$EI_x \cdot w_I(y) = \frac{q_I(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_1}{6} \cdot y^3 + \frac{R_2}{2} \cdot y^2 + R_3 \cdot y + R_4 \quad (4.11)$$

$$EI_x \cdot w_{II}'''(y) = q_{II}(y) \quad (4.12)$$

$$EI_x \cdot w_{II}''(y) = q_{II}(y) \cdot y + R_5 = -Q_{II}(y) \quad (4.13)$$

$$EI_x \cdot w_{II}''(y) = \frac{q_{II}(y)}{2} \cdot y^2 + R_5 \cdot y + R_6 = -M_{II}(y) \quad (4.14)$$

$$EI_x \cdot w_{II}'(y) = \frac{q_{II}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_5}{2} \cdot y^2 + R_6 \cdot y + R_7 \quad (4.15)$$

$$EI_x \cdot w_{II}(y) = \frac{q_{II}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_5}{6} \cdot y^3 + \frac{R_6}{2} \cdot y^2 + R_7 \cdot y + R_8 \quad (4.16)$$

$$EI_x \cdot w_{III}'''(y) = q_{III}(y) \quad (4.17)$$

$$EI_x \cdot w_{III}''(y) = q_{III}(y) \cdot y + R_9 = -Q_{III}(y) \quad (4.18)$$

$$EI_x \cdot w_{III}''(y) = \frac{q_{III}(y)}{2} \cdot y^2 + R_9 \cdot y + R_{10} = -M_{III}(y) \quad (4.19)$$

$$EI_x \cdot w_{III}'(y) = \frac{q_{III}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_9}{2} \cdot y^2 + R_{10} \cdot y + R_{11} \quad (4.20)$$

$$EI_x \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{III}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_9}{6} \cdot y^3 + \frac{R_{10}}{2} \cdot y^2 + R_{11} \cdot y + R_{12} \quad (4.21)$$

Die Rand- und Übergangsbedingungen der Modellierung ergeben sich folgend nach gegebenen Definitionen von Lagern und angreifenden Kräften [Ost18]:

$$w_I(y=0) = 0 \quad (4.22)$$

$$M_I(y=0) = 0 \quad (4.23)$$

$$w_I(y = l_1) = 0 \quad (4.24)$$

$$w_{II}(y = l_1) = 0 \quad (4.25)$$

$$w'_I(y = l_1) = w'_{II}(y = l_1) \quad (4.26)$$

$$M_I(y = l_1) = M_{II}(y = l_1) \quad (4.27)$$

$$w_{II}(y = l_1 + l_2) = w_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.28)$$

$$w'_{II}(y = l_1 + l_2) = w'_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.29)$$

$$M_{II}(y = l_1 + l_2) = M_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.30)$$

$$Q_{II}(y = l_1 + l_2) = Q_{III}(y = l_1 + l_2) + F_Q \quad (4.31)$$

$$M_{III}(y = l_1 + l_2 + l_3) = 0 \quad (4.32)$$

$$Q_{III}(y = l_1 + l_2 + l_3) = F_{pruef} \quad (4.33)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass  $q_I(y) = q_{II}(y) = q_{III}(y) = 0$  gilt, da keine Streckenlast angreift. Unter anderem bildet die Schwerkraft der Erde eine Streckenlast auf den Flügel, diese kann jedoch aufgrund ihres kleinen Einflusses auf die Absenkung gegenüber der Prüfkraft vernachlässigt werden. Ein weiteres Beispiel für eine Streckenlast bildet die Auftriebsverteilung eines Flügels während einer Anströmung. Jedoch wird genau auf diese im Versuchsstand verzichtet und durch die Prüfkraft repräsentiert.

Als Lösung dieser Differentialgleichungen lässt sich die Querkraft  $Q(y)$ , das Moment  $M(y)$  und die Biegelinie  $w(y)$  ermitteln:

$$Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} -F_{pruef} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} & , y \epsilon (0, l_1) \\ F_{pruef} + F_Q & , y \epsilon (l_1, l_1 + l_2) \\ F_{pruef} & , y \epsilon (l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.34)$$

$$M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} (-F_{pruef} \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1}) \cdot y & , y\epsilon(0, l_1) \\ F_{pruef} \cdot (y - (l_1 + l_2 + l_3)) + F_Q \cdot (y - (l_1 + l_2)) & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ F_{pruef} \cdot (y - (l_1 + l_2 + l_3)) & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 \\ & + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.35)$$

$$w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( (F_{pruef} \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} + F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1}) \cdot y^3 - ((l_2 + l_3) \cdot l_1 \cdot F_{pruef} \right. \\ \left. + l_1 \cdot l_2 \cdot F_Q) \cdot y \right), y\epsilon(0, l_1) \\ \frac{1}{EI_x} \cdot \left( \frac{(-F_{pruef} - F_Q)}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + F_Q \cdot (l_1 + l_2)}{2} \cdot y^2 \right. \\ \left. + (F_{pruef} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3) + \right. \\ \left. F_Q \cdot (-\frac{1}{2} l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2) \right) \cdot y + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) \\ \left. + F_Q \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2) \right), y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ \frac{1}{EI_x} \cdot \left( -\frac{F_{pruef}}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{2} \cdot y^2 + (F_{pruef} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3) + F_Q \cdot (\frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{3} \cdot l_1 \cdot l_2) \right) \cdot y \\ \left. + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot (-\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1) \right), y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.36)$$

Die Herleitung der Lösung kann im Kapitel 12.1 nachvollzogen werden.

Um nun für die später geforderte Biegesteifigkeit  $EI_x$  ein Ergebnis zu erhalten, wird die Gleichung  $w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$  nach  $EI_x(y, F_{pruef}, F_Q, w)$  umgestellt. Die eingesetzten Werte ergeben sich aus der Auslegung auf Steifigkeit. Über die Wurzelrippe werden Kräfte des Holms in die Querkraftbolzen abgesetzt. Aufgrund der biegeweichen Wurzelrippe als Verbindungselement zwischen Holm und den Querkraftbolzen darf die Absenkung des Holms dort nicht mit null angenommen werden. Vereinfacht wird definiert, dass die eingeleitete Prüfkraft  $F_{pruef}$  an den Querkraftbolzen um ihren Betrag abgesetzt wird, wie es tatsächlich an einem Flugzeugrumpf geschehen würde. Dieses entspricht sehr wahrschein-

lich jedoch nicht der tatsächlichen Kraftaufnahme im Versuchsaufbau.

$$\begin{aligned}
 EI_x(0.886m, 100N, -100N, 0.02m) = \\
 \frac{1}{w} \cdot \left( -\frac{F_{pruef}}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{2} \cdot y^2 + \left( F_{pruef} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + F_Q \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) = 962,552 Nm^2
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

#### 4.1.3 Analyse der Modellierung

In Abb. 4.2 werden der Querkraftverlauf  $Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$  als innere Schnittkraft, der Momentenverlauf  $M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$  als inneres Schnittmoment und die Biegelinie  $w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$  für den Nachweis der Steifigkeit graphisch dargestellt, über die gesamte Holmlänge und in einem vergrößerten Ausschnitt im Bereich der Lager.

Jedoch werden nicht bei dem Nachweis der Steifigkeit, sondern bei dem Nachweis der Festigkeit das maximale Schnittmoment und die maximale Schnittkraft erreicht. Bei diesem Nachweis beträgt die Prüfkraft  $F_{pruef} = 500N$  und somit auch  $|F_Q| = 500N$ . Diese Kraft wird bei der Berechnung von  $EI_x$  nicht beachtet, da bei dem Nachweis der Festigkeit die Absenkung  $w$  kein Rolle spielt. In Abb. 4.3 werden die genannten Verläufe nun für den Festigkeitsnachweis dargestellt.

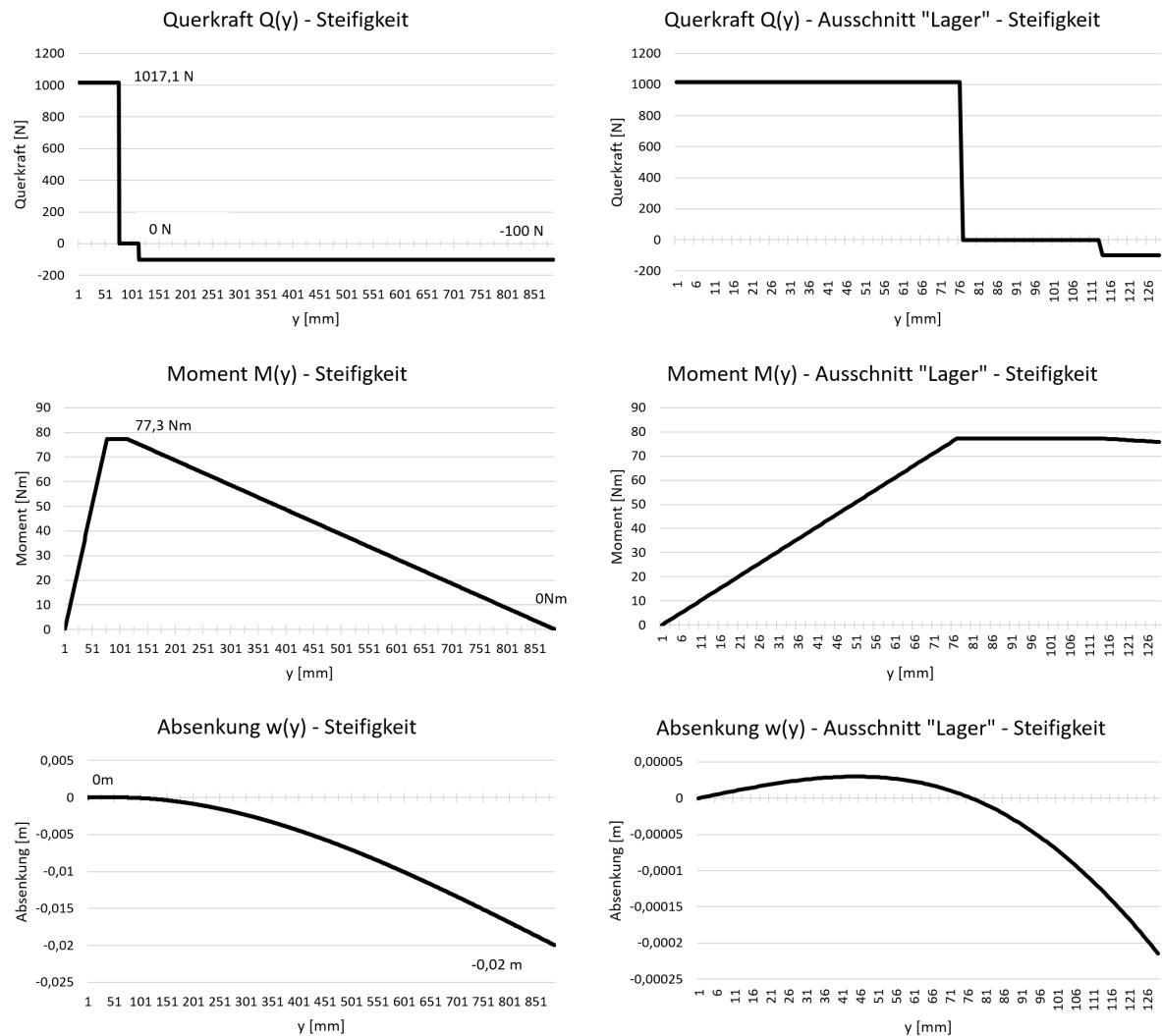


Abbildung 4.2: Verläufe der Steifigkeitsauslegung des Holms

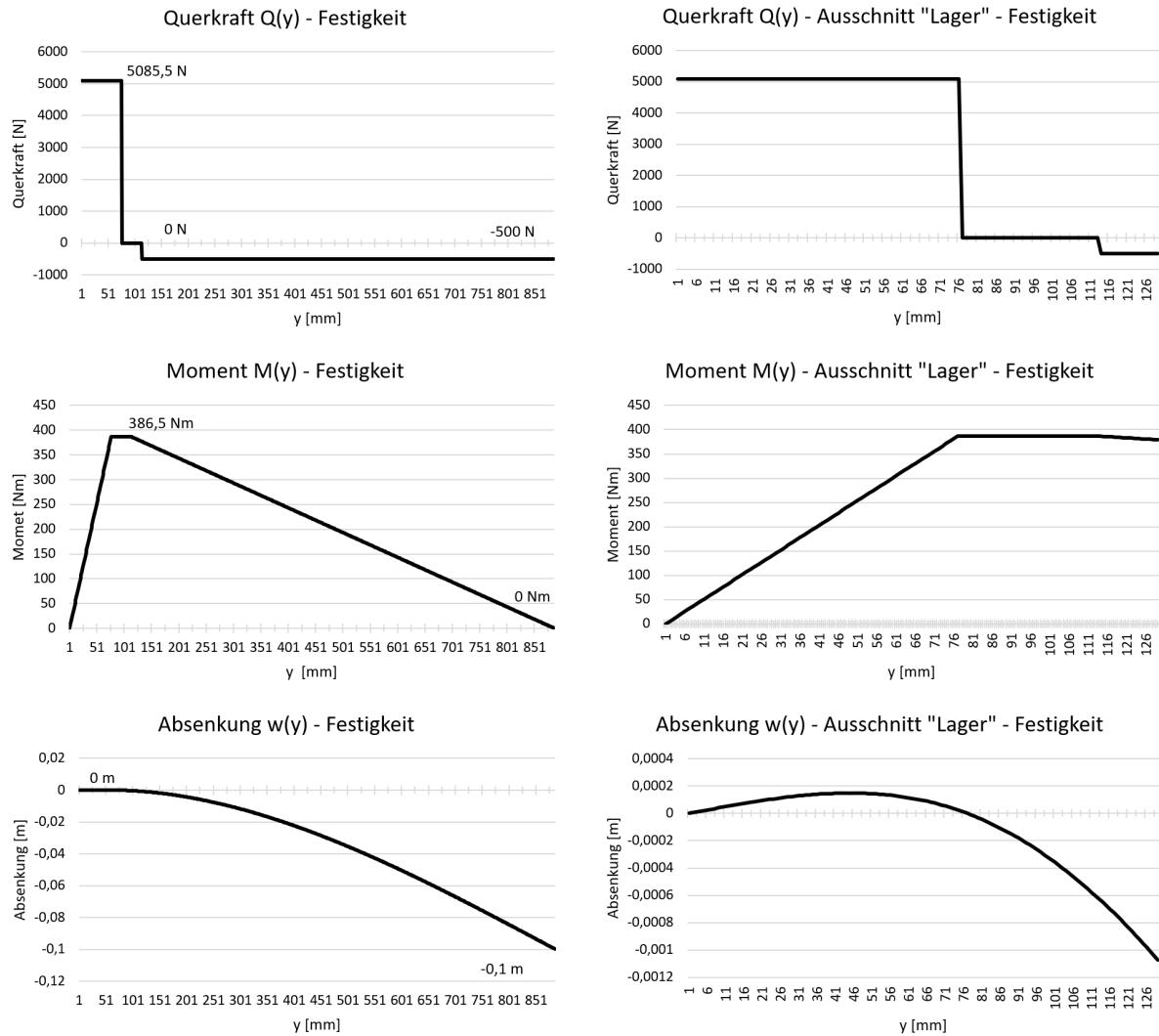


Abbildung 4.3: Verläufe der Festigkeitsauslegung des Holms

## 4.2 Auslegung des Holms nach VDI 2013 (H.K.)

### 4.2.1 Allgemeine Informationen zu der Richtlinie

Auf Basis der in der Balkenberechnung bestimmten Parameter Biegesteifigkeit, maximales Biegemoment und maximale Querkraft, werden die Gurte und der Steg dimensioniert. Die Vorauslegung erfolgt dabei anhand der VDI-Richtlinie 2013 [VDI70]. Diese behandelt die Dimensionierung von GFK-Teilen und enthält in einem Unterkapitel Informationen speziell zur Auslegung eines I-Trägers. Zur Festigkeitsauslegung werden die Gurte und der Steg getrennt voneinander betrachtet. Es wird die Annahme gemacht, dass der Gurt unter Vernachlässigung der Schubflussaufnahme das gesamte Biegemoment aufnehmen soll. Der Steg hingegen wird, neben einem über die Höhe konstanten Schubfluss, auch durch die aufgeprägte Deformation der Gurte beansprucht. Das orthotrope Werkstoffverhalten des Laminats, sowie die Festigkeitseigenschaften bei verschiedenen Beanspruchungen, werden in der Richtlinie allein durch die "charakteristischen K-Werte" [VDI70] berücksichtigt. Diese wurden in Untersuchungen an GFK-Proben für Rovings und Gewebe ermittelt und tabelliert. Sie beziehen die maximal ertragbare Kraft pro Roving oder Gewebebreite auf das Gewicht je Länge (bei Rovings), bzw. die Fläche der belasteten Fasern. Auf diese Weise erlauben die Berechnungen der Richtlinie keine Aussagen über resultierende Versagensformen in einzelnen Schichten [VDI70]. Die vorangestellte Auslegung der Gurte ist in dieser Form nicht Teil der Richtlinie. Um die Anforderungen an die Steifigkeit der Tragfläche zu erfüllen, ist die Analyse jedoch unumgänglich.

Zusätzlich sei angemerkt, dass kapitelübergreifend die gesamte Auslegung nur an ausgewählten und speziell gekennzeichneten Stellen Sicherheitsfaktoren ungleich eins berücksichtigt. Grund dafür ist die Annahme, dass in den bereitgestellten Materialkennwerten ausreichende Sicherheiten verrechnet worden sind. Die Vorauslegung hat den Anspruch, die Grundlagen für die aufbauende Berechnung mithilfe eines Laminatberechners zu legen.

### 4.2.2 Dimensionierung der Gurte mit rechteckigen Querschnitten

Im ersten Auslegungsschritt der schubstarren Gurte wird die Einhaltung der Anforderung an die Steifigkeit betrachtet. Die in der Balkenberechnung ermittelte Biegesteifigkeit  $EI_x = 962,552 \text{Nm}^2$  (vgl. Beziehung 4.37), die erforderlich ist, damit bei einer Kraft  $F_{\text{pruef}} = 100 \text{N}$  die Flügel spitze eine Absenkung von  $w_{j=1,1} = 20 \text{mm}$  erfährt, muss, wegen oben genannter Annahme, allein durch die Gurte aufgebracht werden. Im Sinne der kraftflussgerechten Gestaltung sollen die Glasfasern unidirektional in Längsrichtung des Gurtes angeordnet werden. Die Bezeichnungen der Längenangaben des Holms orientieren sich an Abbildung 4.4 .

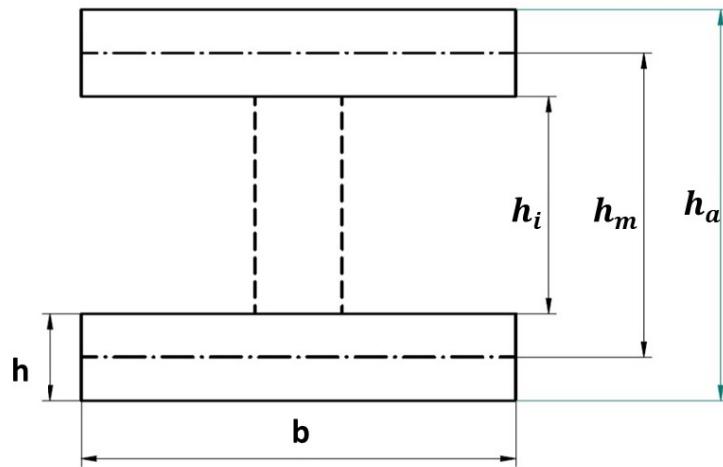


Abbildung 4.4: Bezeichnungen des I-Holms

Die Gurtquerschnitte werden zur Bestimmung der notwendigen Lagenanzahl als rechteckig angenommen, erst in einem späteren Schritt (4.2.3) soll die Form dem vorgegebenen Hautprofil angepasst werden. Die Maße sind über die gesamte Länge des Holms in y-Richtung als konstant anzusehen.

Zur Bestimmung des Flächenträgheitsmoments  $I_x$  wird der E-Modul in Längsrichtung der Fasern gemäß der Mischungsregel nach [Sch05] berechnet.

$$E_{\parallel} = \varphi \cdot E_f + (1 - \varphi) \cdot E_M \quad (4.38)$$

Mit den gegebenen Materialkennwerten  $E_f = 74000 MPa$ ,  $E_m = 3300 MPa$  und  $\varphi = 0,4$  bestimmt sich  $E_{\parallel} = 31580 MPa$ . Damit ergibt sich ein benötigtes Flächenträgheitsmoment von

$$I_{x,min} = \frac{962,552 Nm^2}{31580 \cdot 10^6 Pa} = 3,0479 \cdot 10^{-8} m^4 \quad (4.39)$$

Das Flächenträgheitsmoment der Gurte bestimmt sich aus den Flächenträgheitsmomenten der beiden Rechteckquerschnitte und ihren zugehörigen Steiner-Anteilen, die aus der Verschiebung der Gurte um jeweils  $\frac{h_m}{2}$  in z-Richtung resultieren. Da die Gurtdicke noch nicht bekannt ist, wird auf die Annahme der Gurte als "punktformige Flächen" [Hor20c] verzichtet und der Eigenanteil mitbetrachtet. Nach [Ost18] folgt:

$$I_x = 2 \cdot \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left( \frac{h_m}{2} \right)^2 \right) \quad (4.40)$$

Es wird nach einer Kombination aus Gurtbreite  $b$  und Gurthöhe  $h$  gesucht, die die Anforderungen an das Flächenträgheitsmoment erfüllt, aber dennoch zu einer möglichst geringen Gurtquerschnittsfläche und damit zu einer möglichst geringen Masse der Gurte führt. Um die Steiner-Anteile der Gurte zu maximieren, sollen die Gurte in einem möglichst großen Abstand zur neutralen Faser angeordnet werden. Gemäß der gegebenen technischen Zeichnung der Profilkontur, lässt sich das Profil von einem Rechteck der Höhe 37,5mm umrahmen. Dies entspricht jedoch nicht der Profildicke, da die Punkte mit dem größten Abstand zur Profilsehne auf der Ober- und Unterseite bei verschiedenen Flügeltiefen vorliegen. Zusätzlich muss auf der Außenseite der Gurte ein Freiraum für die umliegenden Haut berücksichtigt werden. Deshalb wird die gesamte Gurthöhe auf  $h_a = 36mm$  abgeschätzt. Die dadurch begrenzte Anzahl der Lagen in der Haut wird im Kapitel 7.1 weiter erläutert.

Die folgende Übersicht enthält Werte der Gurtquerschnittsflächen bei verschiedenen Kombinationen von  $b$  und  $h$ , die zum erforderlichen gesamten Flächenträgheitsmoment von  $I_{x,min}$  führen.

$h$	$b$	$2 \cdot b \cdot h$
1mm	49,7mm	99,4mm <sup>2</sup>
1,25mm	40,4mm	101mm <sup>2</sup>
1,5mm	34,12mm	102,36mm <sup>2</sup>
1,75mm	29,7mm	103,95mm <sup>2</sup>
2mm	26,3mm	105,2mm <sup>2</sup>

Den Daten ist zu entnehmen, dass breite Gurte geringer Dicke bei gleichem Flächenträgheitsmoment geringere Querschnittsflächen aufweisen. Aus diesem Grund werden die Gurte möglichst breit gewählt. Durch die vorgegebene Konstruktion der Platte zur Aufnahme der Tragfläche am Teststand ist die Breite der Gurte begrenzt. Die vorgesehene Aussparung weist eine Breite von 30mm auf. Für die weitere Berechnung soll  $b = 28mm$  gelten. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass die Fertigung des Holms im Bereich des Modellbaus von Hand erfolgen würde, womit nur grobe Toleranzen einhaltbar sind. Mithilfe eines Solvers bestimmt sich aus dem Flächenträgheitsmoment und der Gurtbreite  $b$  die Gurthöhe zu  $h = 1,866mm$ .

Im nächsten Schritt wird die zu stapelnde Lagenanzahl ermittelt. Als vorwiegend unidirektionales Material steht das Glasfasergewebe Interglas 92145 mit einem Flächengewicht von  $220\frac{g}{m^2}$  zur Verfügung. Laut Produktdatenblatt [Stö14] handelt es sich um eine Leinwandbindung, die eine nicht angegebene, da sehr kleine, Zugfestigkeit in Schussrichtung aufweist. Folgend wird das Gewebe deshalb als unidirektional behandelt. Nach [Sch05] berechnet sich die Lagenanzahl  $n$  für eine Dicke des Verbundes  $t_{soll}$  zu:

$$n = t_{soll} \cdot \frac{\varphi \cdot \rho_f}{\left(\frac{m_f}{L \cdot b}\right)}. \quad (4.41)$$

Mit  $\left(\frac{m_f}{L \cdot b}\right) = 220 \frac{g}{m^2}$ ,  $t_{soll} = h$  und  $\rho_f = 2550 \frac{kg}{m^3}$  ergibt sich  $n = 8,653$ . Es sind also 9 Lagen des Gewebes 92145 für jeden Gurt vorzusehen. Die sich aus 9 Lagen ergebende Gurthöhe kann durch Umstellen von Gleichung 4.41 zu  $\tilde{h} = 1,941mm$  bestimmt werden. Für den zunächst angenommenen Fall von Gurten mit rechteckigen Querschnitten ist die Auslegung zur Einhaltung der Anforderungen an die Steifigkeit damit abgeschlossen.

#### 4.2.3 Nachrechnung der angepassten Gurte

Die Modellierung der Haut und der Holmgurte in einem CAD-Programm zeigt, dass die Gurte mit den berechneten Bemaßungen nicht innerhalb des Profils mit einer vorläufigen, als  $0,75mm$  dick angenommenen Haut liegen. Die Anpassung der Gurte erfolgt so, dass die Gurtaußenseiten an der Innenseite der Haut anliegt (vgl. Abschnitt 7.1.1). Die Gesamtbreite von  $28mm$ , sowie die Gurtdicke  $\tilde{h}$  bleiben dabei erhalten. Die Gesamthöhe  $h_a$  muss auf  $\tilde{h}_a = 35,8mm$  leicht verringert werden. Abbildung 4.5 veranschaulicht die gekrümmte Form des oberen Holmgurtes.

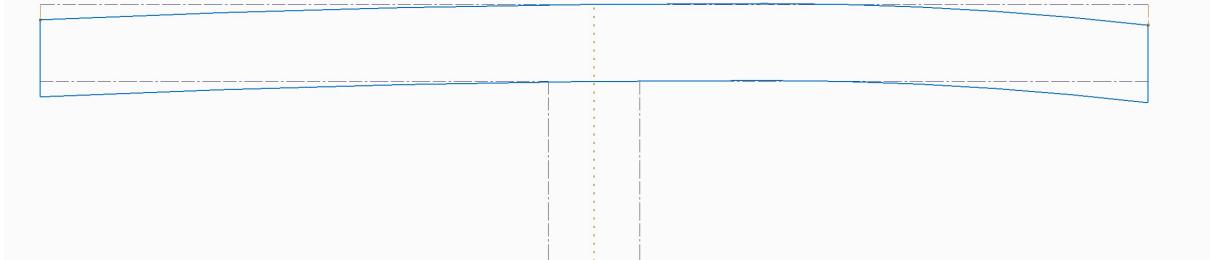


Abbildung 4.5: Angepasste gekrümmte Gurtkontur

Die angepasste Krümmung der Gurte führt zu einem veränderten Flächenträgheitsmoment  $\tilde{I}_x$  des Balkens, dass mithilfe des CAD-Programms zu  $\tilde{I}_x = 3,075406 \cdot 10^{-8}m^4$  bestimmt werden kann. Da

$$\tilde{I}_x = 3,075406 \cdot 10^{-8}m^4 > I_{x,min} = 3,0479 \cdot 10^{-8}m^4 \quad (4.42)$$

gilt, genügen auch die veränderten Gurte der Steifigkeitsanforderung.

Abschließend wird gezeigt, dass die Festigkeit der Gurte für eine Belastung der Flügelspitze durch  $F_{pruef} = 500N$  ausreichend ist. Die aus der Biegung resultierenden und

betragmäßig gleichen Zug- und Druckspannungen werden dazu mit den gegebenen UD-Festigkeitskennwerten des Handlaminats verglichen. Die Resultate der Balkenberechnungen zeigen, dass das maximale Biegemoment im Holm an Punkt C auftritt und  $M_b = 500N \cdot 0,773m = 386,5Nm$  beträgt. In den Randfasern der Gurte resultieren Normalspannungen, die sich gemäß [Hor20c] zu

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot \tilde{h}_a}{\tilde{I}_x \cdot 2} = 224,96 MPa \quad (4.43)$$

berechnen. Da

$$\sigma_b < R_{\parallel}^{(+)} = 597,9 MPa < |R_{\parallel}^{(-)}| = 650,0 MPa \quad (4.44)$$

gilt, ist der Festigkeitsnachweis erbracht. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Gurte bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  nicht versagen. Der Sicherheitsfaktor beträgt  $j = 2,66$ .

#### 4.2.4 Bestimmung der Lagenanzahl des Steges

Bei der Auslegung des Steges muss beachtet werden, dass der Steg sowohl durch Schubkräfte als auch durch Normalkräfte senkrecht und parallel zu den Gurten Belastungen erfährt. Die Dehnungen der Gurtinnenseiten werden dem Steg aufgeprägt, da beide Bauteile stoffschlüssig miteinander verbunden sind. Anders als in der VDI 2013 wird jedoch nicht die Bruchdehnung in der Gurtmittelebene betrachtet, sondern die Dehnungen der Innenseiten bei einer Prüfkraft von 500N. So soll die Dimensionierung des Steges auf die Anforderungen an die Festigkeit angepasst werden, um eine Überdimensionierung zu vermeiden. Im Folgenden bezeichnen  $n_e$ ,  $n_A$  und  $q_s$  Kraftflüsse,  $n$ , ohne einen Index, die Lagenanzahl und  $\bar{q}$  das Flächengewicht (hier in Newton) des trockenen Gewebes.

Die größte Längsdehnung der Gurte tritt an der Stelle C auf, da dort das größte Biegemoment wirkt. Sie lässt sich für die Innenseiten der Gurte nach [Ost18] durch

$$\epsilon_{Gurt} = \frac{\sigma_{innen}}{E_{\parallel}} = \frac{\frac{F_{pruef} \cdot l_3 \cdot h_i}{\tilde{I}_x \cdot 2}}{E_{\parallel}} \quad (4.45)$$

zu  $\epsilon_{Gurt} = 6,351 \cdot 10^{-3}$  berechnen. Auf der Zugseite ist die Dehnung positiv, auf der Druckseite negativ, betragmäßig stimmen beide überein. Die dem Steg aufgeprägte Dehnung führt in Längsrichtung des Steges zu einem Normalkraftfluss, der sich nach VDI 2013 mit

$$n_e = n \cdot \bar{q} \cdot K_{E\#} \cdot \epsilon_{Gurt} \quad (4.46)$$

ermitteln lässt.  $K_{E\#}$  ist die Dehnsteifigkeit, ein verallgemeinerter Dimensionierungskenn-

wert, der Tafel 3 der VDI 2013 zu  $K_{E\#} = 1150 \cdot 10^3 m$  entnommen wird. Die Dehnsteifigkeit bezieht die Lagen-Elastizitätsgröße  $\bar{E}_{\#} = \bar{\sigma}/\epsilon$ , die unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Fadenrichtung den Zusammenhang von Spannungen und Dehnungen in einer Laminatschicht beschreibt, auf das Flächengewicht  $\bar{q}$ . Es ist zu beachten, dass in der VDI mit veralteten Einheiten, wie dem Kilopond, gerechnet wird. Flächengewichte  $\bar{q}$  sind durch Multiplikation der auf die Fläche bezogenen Masse ( $\frac{m_f}{L \cdot b}$ ) mit der Norm des Erdbeschleunigungsvektors  $\vec{g}$  zu ermitteln. Zur Berechnung von Hand wurden alle Kennwerte auf die SI-Einheiten zurückgeführt und werden in der vorliegenden Arbeit so verwendet.

Zur kraftflussgerechten Gestaltung des Steges werden die Gewebelagen unter einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Holmgurten angeordnet [VDI70]. Es ist jedoch anzumerken, dass die im Allgemeinen verschiedenen großen Normalkraftflüsse, die neben dem Schub auf den Steg wirken, zu Hauptspannungsrichtungen  $\neq \pm 45^\circ$  führen (vgl. Abschnitt 4.2.5). Die Gefahr eines Zwischenfaserbruchs kann dann durch die Anpassung der Gewebeausrichtung vermindert. Um weiterhin mit der Dehnsteifigkeit  $K_{E\#}$  rechnen zu können wird dennoch eine Ausrichtung in  $\pm 45^\circ$  zu den Gurten angenommen. Das mögliche Auftreten eines Zwischenfaserbruchs wird in einem späteren Schritt durch die Wahl von  $K_{\sigma d}$  berücksichtigt. Die Belastung parallel zu den Faserrichtungen wird mithilfe einer Transformationsformel berechnet.

$$n_{\epsilon\parallel} = n_{\epsilon} \cdot \cos^2(45^\circ) = n_{\epsilon} \cdot 0,5 \quad (4.47)$$

Die Normalkräfte in Längsrichtung an den Gurten bilden im Allgemeinen einen Winkel  $\neq 180^\circ$  zueinander, da der Holm eine Absenkung erfährt. Daraus resultiert eine Druckkraft auf den Steg, die senkrecht zu den Gurten steht und als Abtriebskraft bezeichnet wird. Abbildung 4.6 veranschaulicht die Entstehung der Abtriebskraft  $F_A$ . Der resultierende Kraftfluss berechnet sich nach [VDI70] zu:

$$n_A = \frac{2 \cdot F_{pruef} \cdot l_3 \cdot \epsilon_{Gurt}}{h_m^2} \quad (4.48)$$

Mit der oben genannten Transformationsformel ergibt sich die Belastung in Faserrichtung.

$$n_{A\parallel} = n_A \cdot \cos^2(45^\circ) \quad (4.49)$$

Darüber hinaus erfährt der Steg einen Schubkraftfluss durch die Querkraft. Wegen der vernachlässigbaren Längskraftaufnahme des Steges im Vergleich zu den Gurten, kann der Schubfluss über die Höhe des Steges als konstant angenommen werden. Die VDI-Richtlinie orientiert sich hier an den Idealisierungen der Schubfeldtheorie, wie sie im entsprechenden Kapitel in [Hor20c] ausgeführt wird. Es muss berücksichtigt werden, dass die Modellierung des Holmes als Balken, der an zwei Punkten gelagert ist und durch die Querkraftbolzen eine weitere Kraft erfährt, zu einem anderen Querkraftverlauf führt als dem konstanten,

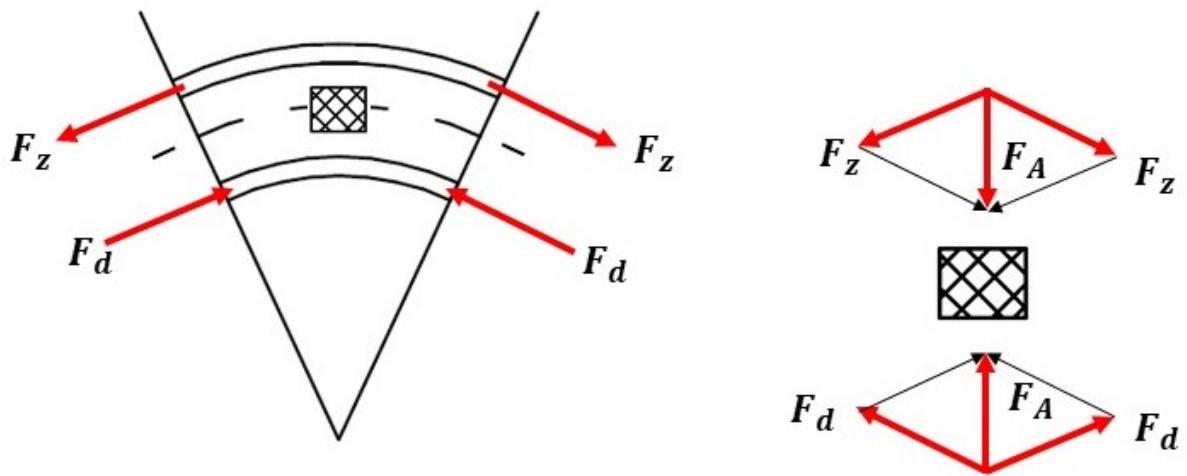


Abbildung 4.6: Prinzip der Druckkraft auf den Steg

der in der Richtlinie für den Kragbalken angenommen wurde. Den Berechnungen des Holms als Biegebalken kann für eine Kraft  $F_{pruef} = 500N$  eine maximale Querkraft von  $Q_I = 5085,5N$  im Bereich I und eine betragsmäßig maximale Querkraft von  $Q_{III} = 500N$  im Bereich III entnommen werden (vgl. Abb. 4.3). Mit dem Ziel, im langen Bereich III Gewicht einzusparen, ist es vorteilhaft diesen Bereich geringer Querkraft getrennt von dem höher beanspruchten Bereich I auszulegen. Der resultierende Schubfluss berechnet sich mithilfe der folgenden Formel:

$$q_{s\parallel} = q_s = \frac{Q}{h_i} \quad (4.50)$$

Der gesamte Kraftfluss, der durch den Steg aufgenommen werden muss, ergibt sich dann aus der Überlagerung der drei Kraftflüsse  $q_{s\parallel}, n_{A\parallel}, n_{\epsilon\parallel}$ .

$$n \cdot \bar{q} \cdot K_{\sigma d} \cdot k_{\parallel} = q_{s\parallel} + n_{A\parallel} + n_{\epsilon\parallel} \quad (4.51)$$

Die Tragfähigkeit einer Schicht des Verbundes unter Druckbeanspruchung wird durch  $K_{\sigma d}$  charakterisiert und kann ebenfalls Tafel 3 der VDI entnommen werden. An dieser Stelle geht die Richtlinie davon aus, dass die Druckfestigkeit des Laminats im Allgemeinen geringer ist als die Zugfestigkeit. Im vorliegenden Fall zeigen die gegebenen Materialkennwerte des Laminats, dass die Druckfestigkeiten  $R_{\parallel}^-$  und  $R_{\perp}^-$  deutlich größer als die Zugfestigkeiten  $R_{\parallel}^+$ , bzw.  $R_{\perp}^+$  sind. Dies begründet die Vermutung, dass die vorgestellten Dimensionierungswerte nur für die Vorauslegung auf den vorliegenden Fall übertragbar sind. Da ein Teil der Schubbeanspruchung durch die Matrix geleitet wird, besteht die Gefahr eines Zwischenfaserbruchs. VDI 2013 schlägt deshalb die Verwendung von  $K_{\sigma d} = 30 * 10^3 m$  vor. Zusätzlich muss der Anteil der Glasmengen in Kette und Schuh durch den Faktor  $k_{\parallel}$  berücksichtigt werden. Das zur Verfügung stehende Gewebe Interglas 90070 hat annä-

hernd gleiche Fadenanzahlen und Garnarten in Kette- und Schufrichtung ([Stö15]), damit ist  $k_{\parallel} = 0,5$ . Die Anzahl der notwendigen Gewebelagen  $n$  im Steg lässt sich nun durch Umstellen der Gleichungen und Einsetzen der bekannten Werte ermitteln:

$$n = \frac{\frac{2 \cdot F_{Pruef} \cdot l_3 \cdot \epsilon_{Gurt}}{h_m^2 \cdot 2} + \frac{Q}{h_i}}{\bar{q} \cdot (k_{\parallel} \cdot K_{\sigma d} - K_{E\#} \cdot \epsilon_{Gurt} \cdot 0,5)} \quad (4.52)$$

Damit ergibt sich die Lagenanzahl bei einer Prüfkraft  $F_{pruef} = 500N$  von  $n(500N) = 1,99$  für den Bereich *III* und  $n(5085,5N) = 18,13$  für den Bereich *I*. Bereich *II* erfährt eine Querkraft von  $Q_{II} = 0N$ . Da dieser Bereich sehr kurz ist, wird er so wie Bereich *I* belegt. Um einen symmetrischen Lagenaufbau im Falle einer Sandwichkonstruktion zu ermöglichen, sind also 2 Lagen für den Bereich *III* und 20 Lagen für die Bereiche *I* und *II* vorzusehen.

Es ist zu betonen, dass diese Lagenanzahlen maßgeblich durch die Annahmen der Dimensionierungskennwerte  $K_{E\#}$  und  $K_{\sigma d}$  beeinflusst werden. Da sie als nur beschränkt gültig für den vorliegenden Fall angenommen werden, bedarf es einer aufbauenden Berechnung, die unter anderem die Sicherheiten gegen Zwischenfaserbruch bestimmen kann. Im Kapitel 4.3 wird die hier ermittelte Lagenanzahl mit tatsächlichen Laminatkennwerten und einem Laminatrechner überprüft und angepasst.

#### 4.2.5 Überprüfung der Faserausrichtung

Im vorangegangenen Abschnitt 4.2.4 wurde zur Bestimmung der Belegung des Stegs angenommen, dass die Fadenrichtungen in  $\pm 45^\circ$ -Richtung zur Holmlängsachse ausgerichtet sind. Für den Fall, dass der Steg allein durch den Querkraftschub beansprucht wird, stimmen diese Richtungen mit denen der Hauptspannungen überein [Ost18]. Die Belastung wird in diesem Fall folglich allein durch die Fasern getragen. Die Kenntnis der Lagenanzahlen erlaubt, mithilfe der oben genannten Gleichungen 4.46, 4.48 und 4.50 auf die Spannungen zurückzuschließen. Auf diese Weise kann, über die Auslegungsschritte der VDI 2013 hinaus, geprüft werden, inwiefern die überlagerten Spannungen im Steg die Hauptspannungsrichtung verändern. Im Folgenden geschieht dies anhand eines infinitesimalen Stegelements (Abbildung 4.7), dessen Oberkante parallel zum oberen Gurt ausgerichtet sei. Zur Analyse des ebenen Spannungszustands werden für diese Berechnungen die Koordinaten  $x$  und  $y$  verwendet. Die  $x$ -Richtung verläuft parallel zur Holmlängsachse, die  $y$ -Richtung senkrecht zu den Holmgurten. Die Dicke des Stegs liegt folglich in  $z$ -Richtung und ist konstant.

Zunächst werden die Spannungen am infinitesimalen Element aus den Kraftflüssen und der Dicke des Stegs bestimmt. Es wird die am höchsten beanspruchte Stelle, Punkt C,

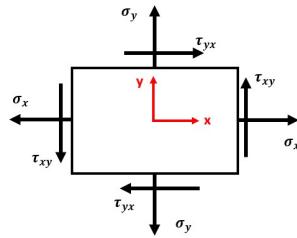


Abbildung 4.7: Element des Stegs

betrachtet. Für diesen Bereich wurden  $n = 20$  Lagen ermittelt. Gemäß der Beziehung 4.41 ergibt sich eine Dicke des GFK von  $t = 1,57\text{mm}$ . Der Schubfluss  $q_s$  und der Normalkraftfluss senkrecht zu den Gurten  $n_A$  sind über die Höhe des Stegs (y-Richtung) konstant. Aus dem Schubfluss lässt sich auf die Schubspannung schließen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q_s}{h_i \cdot t} = 102,1\text{MPa} \quad (4.53)$$

Mit Gleichung 4.48 ergibt sich die Normalspannung  $\sigma_y$  unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens aus der Druckkraft:

$$\sigma_y = \frac{-2 \cdot F_{pruef} \cdot l_3 \cdot \epsilon_{Gurt}}{(h_m)^2 \cdot t} = (-2,73\text{MPa}) \quad (4.54)$$

Die Spannung  $\sigma_x$  ist abhängig von der Gurthöhe. Am oberen Zuggurt ist sie maximal, an der neutralen Faser ist wegen fehlender Dehnung  $\sigma_{x,m} = 0$  und am unteren Druckgurt nimmt  $\sigma_{x,u}$  den gleichen Betrag wie am oberen Gurt an, jedoch mit negativem Vorzeichen. Am oberen Gurt gilt:

$$\sigma_{x,o} = \frac{n \cdot \bar{q} \cdot K_{E\#} \cdot \epsilon_{Gurt}}{t} = 73,1\text{MPa} \quad (4.55)$$

Analog folgt:

$$\sigma_{x,u} = \frac{n \cdot \bar{q} \cdot K_{E\#} \cdot (-\epsilon_{Gurt})}{t} = (-73,1\text{MPa}) \quad (4.56)$$

Die Spannungen lassen sich in Mohrsche Spannungskreise eintragen, um die Lage der Hauptspannungsrichtungen zu veranschaulichen. Abbildung 4.8 enthält von links die Spannungskreise für den oberen Bereich des Stegs, den mittleren und den unteren. Die Hauptspannungen liegen unter den Winkeln  $\psi$  und  $\psi \pm 90^\circ$ . Für den Winkel  $\psi$  gilt nach [Ost18] folgende Beziehung, die sich aus den Seitenverhältnissen des rechtwinkligen Dreiecks zwischen den zwei roten Markierungen und einer Parallelen zur  $\tau$ -Achse ergibt:

$$\tan 2\psi = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.57)$$

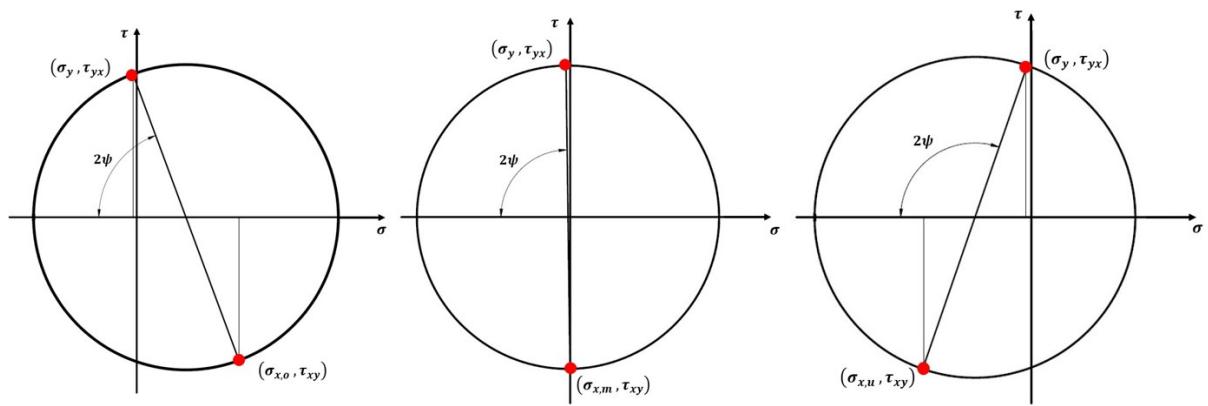


Abbildung 4.8: Mohrsche Spannungskreise für den oberen, mittleren und unteren Bereich

Die Umformung nach  $\psi$  und das Einsetzen der Werte für jeden betrachteten Bereich ergibt folgende Hauptspannungsrichtungen:

$$\psi_o = 34,8^\circ \quad (4.58)$$

$$\psi_m = 44,6^\circ \quad (4.59)$$

$$\psi_u = (-35,5^\circ) \hat{=} 54,5^\circ \quad (4.60)$$

Für den mittleren Bereich des Stegs ist die Wahl einer  $\pm 45^\circ$  Ausrichtung der Gewebelagen besonders günstig. Die verhältnismäßig geringe Spannung aus der Abtriebskraft verschiebt die Hauptspannungsrichtung nur leicht, sodass die Fasern in diesem Bereich die nahezu komplette Last aufnehmen. Die Hauptspannungsrichtungen im oberen und unteren Bereich werden stärker durch die Normalspannung  $\sigma_x$  beeinflusst, sie weichen um ca.  $-10^\circ$ , bzw.  $+10^\circ$  von denen im mittleren Bereich ab. Diese Ergebnisse belegen, dass die Gewebeausrichtung von  $\pm 45^\circ$  zur Holmlängsachse einen sinnvollen Mittelwert darstellt. Dennoch ist davon auszugehen, dass in den äußeren Bereichen auch die Matrix beansprucht wird. Die Verwendung eines niedrigen  $K_{\sigma d}$ , wie von der Richtlinie vorgeschlagen, ist vor diesem Hintergrund gerechtfertigt.

### 4.3 Auslegung des Holms nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)

#### 4.3.1 Beispielrechnung nach Klassischer Laminattheorie

Nachdem im Kapitel 3.5 eine Einführung in die klassische Laminattheorie gegeben wurde, wird im Folgenden eine Beispiel-Berechnung eines Lagenaufbaus vorgestellt. Diese beginnt mit den Materialdaten der verwendeten Faser und Matrix und führt bis zu den resultierenden Ingenieurskonstanten. Als repräsentatives Beispiel wird ein Laminat aus zwei Lagen Interglas 92145 mit einer Faserwinkeldifferenz von  $\Delta\alpha = 90^\circ$  gewählt. Wie zuvor wird auch hier der Faservolumengehalt  $\varphi = 40\%$  genutzt, sodass die Gesamtdicke sich zu  $t = 2 \cdot 0,216mm = 0,432mm$  nach den Formel 4.41 ergibt [VDI70][Sch05].

Anhand der Aufgabenstellung sind Materialdaten der Fasern und der Matrix gegeben, die nachfolgend benötigt werden:

Fasermaterial	Matrixmaterial
$\rho_f$	$2,55 \frac{g}{cm^3}$
$E_{f,\parallel}$	$74000 MPa$
$E_{f,\perp\perp}$	$74000 MPa$
$G_{f,\parallel\perp}$	$30800 MPa$
$\nu_{f,\perp\parallel}$	$0,2$
	$\rho_m$ $1,18 \frac{g}{cm^3}$
	$E_m$ $3300 MPa$
	-
	-
	$\nu_m$ $0,35$

Da es sich dabei nur um rein isotrope Materialien handelt, gelten  $\nu_{f,\perp\parallel} = \nu_{f,\parallel\perp}$  und  $G_{f,\parallel\perp} = G_{f,\perp\parallel}$  [Hor20c]. Der Schubmodul der Matrix berechnet sich zu

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} = 1222 MPa \quad (4.61)$$

Nun werden anhand der Mischungsregel, jedoch ohne eine Beachtung von Querkontraktionsbehinderungen der Matrix durch die Fasern, Kennwerte einer einzelnen Lage Interglas 92145 bestimmt [Sch05]:

$$\rho = \rho_F \cdot \varphi + \rho_M \cdot (1 - \varphi) = 1,728 \frac{g}{cm^3} \quad (4.62)$$

$$E_{\parallel} = E_{f,\parallel} \cdot \varphi + E_m \cdot (1 - \varphi) = 31580 MPa \quad (4.63)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_{f,\perp} \cdot E_m}{E_m \cdot \varphi + E_{f,\perp} \cdot (1 - \varphi)} = 5341 MPa \quad (4.64)$$

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_{f,\perp\parallel} \cdot \varphi + \nu_m \cdot (1 - \varphi) = 0,29 \quad (4.65)$$

$$\nu_{\parallel\perp} = \nu_{\perp\parallel} \cdot \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = 0,049 \quad (4.66)$$

Mit diesen Moduln und Querkontraktionszahlen wird im weiteren die Steifigkeitsmatrix des gesamten Laminats, transformiert in Koordinatensystem-Hauptrichtungen  $x$  und  $y$ , bestimmt. Begonnen wird mit der Steifigkeitsmatrix einer einzelnen Gewebelage, bezogen wird sich auf dessen Faserrichtung. Damit kann

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\epsilon} \quad (4.67)$$

aufgestellt werden. Bei der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{Q}}$  handelt es sich um Scheiben-Steifigkeiten [Sch05].

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\parallel\perp}\cdot E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel}\cdot E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32035 & 1570 & 0 \\ 1570 & 5418 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa] \quad (4.68)$$

Bevor die einzelnen Lagen in ihrer Wirkung zusammengefasst werden können, müssen sie der Ausrichtung entsprechend um den Faserwinkel rotiert werden:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ 0,5 \cdot \sin 2\alpha & -0,5 \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Somit lauten die neuen Steifigkeitsmatrizen nach

$$\overline{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (4.70)$$

$$\overline{\underline{\underline{Q}}}_{k=1} = \begin{bmatrix} 32035 & 1570 & 0 \\ 1570 & 5418 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa], \alpha = 0 \quad (4.71)$$

$$\overline{\underline{\underline{Q}}}_{k=2} = \begin{bmatrix} 5418 & 1570 & 0 \\ 1570 & 32035 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa], \alpha = 90 \quad (4.72)$$

Mittels dessen einzelnen Werten  $\overline{Q}_{ij,k}$  lassen sich der Scheiben-, der Koppel- und der Plattenquadrant des Mehrschichtverbundes berechnen. In diesem können die Berechnungen teilweise vereinfacht werden, da die beiden Lagendicken  $t_k$  dem Betrag der Abstände  $|z_k|$

entspricht [Sch05].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^2 \bar{Q}_{ij,k} \cdot t_k \quad (4.73)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 8090,1 & 678,8 & 0 \\ 678,8 & 8090,1 & 0 \\ 0 & 0 & 857,3 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{mm} \right] \quad (4.74)$$

$$B_{ij} = \cdot \sum_{k=1}^2 \bar{Q}_{ij,k} \cdot t_k \cdot \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right) \quad (4.75)$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 620,9 & 0 & 0 \\ 0 & -620,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [N] \quad (4.76)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^2 \bar{Q}_{ij,k} \cdot \left( \frac{t_k^3}{12} + t_k \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right)^2 \right) \quad (4.77)$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 125,8 & 10,6 & 0 \\ 10,6 & 125,8 & 0 \\ 0 & 0 & 13,3 \end{bmatrix} [Nm] \quad (4.78)$$

Aus diesen Matrizen lässt sich nun das *Elastizitätsgesetz des kombinierten Scheiben-Plattenelements* anwenden [Sch05]:

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Damit kann für jede einzelne Lage das Festigkeitskriterium nach Puck überprüft werden. Eine Fortsetzung der Beispielrechnung mittels dieses Festigkeitskriteriums wird ab dieser Stelle nicht mehr durchgeführt, da sie bis auf wenige Ausnahmen nicht mehr analytisch zu lösen ist [Sch05].

Mit der Inversen der Scheibenmatrix  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  werden abschließend die Ingenieurskonstanten des Mehrschichtverbundes ohne Querkontraktionsbehinderung ermittelt [Sch05]:

$$\hat{E}_x = \frac{1}{\underline{\underline{A}}_{11}^{-1} \cdot t} = 18727 MPa \quad (4.80)$$

$$\hat{E}_y = \frac{1}{A_{22}^{-1} \cdot t} = 18727 MPa \quad (4.81)$$

$$\hat{G}_{xy} = \frac{1}{A_{66}^{-1} \cdot t} = 1984,5 MPa \quad (4.82)$$

$$\hat{\nu}_{xy} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{22}^{-1}} = 0,084 \quad (4.83)$$

$$\hat{\nu}_{yx} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = 0,084 \quad (4.84)$$

#### 4.3.2 eLamX<sup>2</sup>

*eLamX<sup>2</sup>* ist ein Laminat-Berechnungsprogramm der TU Dresden. Es kann anhand der klassischen Laminattheorie mit unterschiedlichen Versagenskriterien berechnen, inwiefern ein gewählter Lagenaufbau den Festigkeitskriterien gerecht wird. Zusätzlich sind weitere Funktionen, wie zum Beispiel Beulberechnungen, Optimierungen etc. nutzbar und andere Einflüsse, z.B. Temperatureinflüsse anwendbar, jedoch für diese Auslegung irrelevant [Hau21][Sch05].

Auch hier wurden vorerst die gegeben Materialeigenschaften der Aufgabenstellung als Fasermaterial, Matrixmaterial und UD-Festigkeitskennwerte definiert (Anmerkung: In *eLamX<sup>2</sup>* wird bei der Indizierung die Notierung „Ursache - Wirkung“ statt „Wirkung - Ursache“ verwendet). [Hau21]

Fasermaterial	Matrixmaterial	UD-Festigkeitskennwerte
$\rho_f$ 2,55 $\frac{g}{cm^3}$	$\rho_m$ 1,18 $\frac{g}{cm^3}$	$R_{  }^+$ 597,9 MPa
$E_{f,  }$ 74000 MPa	$E_m$ 3300 MPa	$R_{  }^-$ 650,0 MPa
$E_{f,\perp\perp}$ 74000 MPa		$R_{\perp}^+$ 37,7 MPa
$G_{f,  \perp}$ 30800 MPa	$G_m$ 1222 MPa	$R_{\perp}^{+-}$ 130,0 MPa
$\nu_{f,\perp  }$ 0,2	$\nu_M$ 0,35	$R_{  \perp}$ 37,5 MPa

Mit einem Faservolumenanteil  $\varphi = 0,4$  ergeben sich folgende weitere Materialeigenschaften:

Materialeigenschaften	
$\rho$	1,728 $\frac{g}{cm^3}$
$E_{  }$	31580 MPa
$E_{\perp}$	5341,2 MPa
$\nu_{  \perp}$	0,29
$G_{  \perp}$	1984,5 MPa

Anschließend werden die nach Kapitel 4.2 berechneten Laminate bzw. Schichtverbunde aus mehreren Gewebe-Lagen zusammengesetzt. Eine bidirektionale Gewebelage wird dabei durch zwei einzelne Materiallagen mit einem Winkel von  $90^\circ$  zueinander simuliert, sodass sich die doppelte Anzahl des Materials gegenüber der Gewebeanzahl ergibt. Für die Holmgurte ergibt sich ein Lagenaufbau nach Abbildung 12.1 und für den dünnen Steg nach Abbildung 12.2. Für den dicken Steg ergibt sich der gleiche Aufbau wie bei dem dünnen Steg, allerdings mit 24 Materiallagen (siehe Abb. 12.3). Weshalb sich die Anzahl der Gewebelagen gegenüber der Auslegung nach VDI 2013 unterscheidet, wird im Weiteren beschrieben. Es sei zudem angemerkt, dass der Schaum im Lagenaufbau nicht betrachtet wird, da vorerst nur die Gewebelagen alleine den Belastungen standhalten sollen.

Nun werden die nach VDI 2013 im Kapitel 4.2 errechneten Normalkraft- und Schubflüsse bzw. Dehnungen eingegeben, sodass nun die Sicherheiten nach den Versagenskriterien von Puck ermittelt werden können. Dabei handelt es sich um leicht abweichende Flüsse bzw. Dehnungen gegenüber der Realität. Diese Werte stammen aus der Auslegung nach VDI 2013, in der teilweise die Lagenanzahl, wie bereits beschrieben, geringer ist. Zu beachten ist außerdem, dass die Flüsse und Dehnungen auf das allgemeine Koordinatensystem und nicht auf die der einzelnen Lagen bezogen werden. Es wird automatisch die niedrigste Sicherheit mit der jeweiligen Versagensart ausgegeben. Auch muss berücksichtigt werden, dass für die komplette Überprüfung der Auslegung ebenfalls  $\epsilon_x$  negativ angenommen werden muss, um den gegenüberliegenden Gurt mit Druckbelastungen zu betrachten. Dabei ergeben sich jedoch stets höhere Sicherheiten [Hau21][Sch05].

Um immer eine Sicherheit von  $j > 1$  zu garantieren, müssen im Steg nachträglich noch weitere Lagen zu der ursprünglich berechneten Anzahl hinzugefügt werden, sodass sich eine Gesamt-Lagenanzahl von 4 und 24 statt 2 und 20 ergibt. Diese Abweichung kann u.a. daran liegen, dass die VDI 2013 mit Konstanten rechnet, die nur beispielhaft an einem Gewebe ermittelt wurden und somit nicht exakt für die gegebenen Gewebe der Aufgabenstellung gelten können. Außerdem kann der Einfluss, dass lediglich mit der einfachen Mischungsregel ohne Querkontraktionsbehinderung der Matrix gerechnet wurde, eine leichte Abweichung gegenüber anderen Berechnungsmethoden verursachen. Dargestellt sind die Rechnungen in Abb. 12.5, Abb. 12.6 und Abb. 12.7 [Sch05][VDI70].

Als nächstes können die Ingenieurskonstanten (E-Moduln des gesamten Laminats in Hauptachsenrichtungen) ermittelt werden, welche für die spätere Stabilitätsabschätzung benötigt werden (siehe Abb. 12.9, Abb. 12.11 und Abb. 12.10).

Der Übersichtlichkeit halber werden die Abbildungen im Kapitel 12.3 dargestellt. Zusam-

menfassend werden jedoch nun vorab die wichtigsten Erkenntnisse vorgestellt:

Laminat	Lagenaufbau	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{G}_{xy}$
Holmgurt	$9 \cdot [0^\circ]$	31580 MPa	5341,2 MPa	1984,5 MPa
Steg Bereich <i>I&amp;II</i>	$12 \cdot [-45^\circ]$ (sym.)	6639,8 MPa	6639,8 MPa	8577,8 MPa
Steg Bereich <i>III</i>	$4 \cdot [-45^\circ]$ (sym.)	6639,8 MPa	6639,8 MPa	8577,8 MPa
$\nu_{xy}$		$\nu_{yx}$	Sicherheit nach Puck	Versagensart
0,29		0,045	2,657	Faserbruch
0,673		0,673	1,027	Zwischenfaserbruch
0,673		0,673	1,186	Zwischenfaserbruch

## 4.4 Beulabschätzung des Holms (T.B.)

Nachdem der Holm auf Steifigkeit und Festigkeit ausgelegt wurde, soll er nun fortführend auf Stabilität überprüft werden. Dabei werden sowohl die Gurte als auch der Steg betrachtet, gerechnet wird nach den Verfahren des Kapitels 3.8.

### 4.4.1 Beulsicherheit der Gurte

Für die Auslegung der Holmgurte werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Gurte werden als ebene, unendlich lange Streifen betrachtet.
2. Da die Mitte der Holmgurte in  $x$ -Richtung mit dem Holmsteg verklebt ist, kann diese Klebelinie als freie Lagerung gesehen werden. Somit halbiert sich die angenommene Holmgurtbreite.
3. Die äußeren Kanten in  $x$ -Richtung sind frei und nicht gelagert.
4. Die äußeren Kanten in  $y$ -Richtung werden an den jeweiligen Rippen gestützt.
5. Der Druckgurt wird nur durch Druckspannungen beansprucht. Die Schubspannungen werden durch das hohe Verhältnis von Länge zu Höhe vernachlässigt. Der auf Zug beanspruchte Gurt wird nicht beulen.
6. Als größtmögliche Länge bei höchster Biegespannung wird  $l_3$  bestimmt.

Das Seitenverhältnis beträgt

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{28mm}{2}}{773mm} = 0,018 \approx 0 \quad (4.85)$$

Es ergibt sich:

$$k_d = 0,4 \quad (4.86)$$

und somit die kritische Spannung mit  $\hat{E}_{xx} = 31580MPa$ ,  $d = 1,941mm$  und  $b = 14mm$ :

$$\sigma_{krit,d} = k_d \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left( \frac{d}{b} \right)^2 = 242,82MPa \quad (4.87)$$

Im Vergleich zu der tatsächlich maximal auftretenden Randfaser spannung der Gurte (siehe Kapitel 4.2.3 ) ergibt sich die Sicherheit gegen Beulen zu

$$j_{Gurt} = \frac{\sigma_{krit,d}}{\sigma_b} = \frac{242,81MPa}{224,96MPa} = 1,08 \quad (4.88)$$

#### 4.4.2 Beulsicherheit des Steges

Ebenfalls muss der Holmsteg nach der Auslegung hinsichtlich der Sicherheit gegen Beulen überprüft werden. Folgende Annahmen werden dafür getroffen:

1. Der Steg wird teilweise für einzelne lange Bereiche als nahezu ebener, unendlich langer Streifen betrachtet.
2. Die Verklebung des Steges wird als gestützte gelenkige Lagerung an allen vier Kanten angenommen.
3. Der Steg wird durch Biegung und Schubspannung beansprucht.

Für den Steg müssen alle drei Bereiche der Holmauslegung auf die Beulsicherheit geprüft werden.

Im Folgenden wird die Beulsicherheit des Bereichs  $I$  berechnet:

Das Seitenverhältnis ergibt sich zu

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm}{76mm} = 0,042 \quad (4.89)$$

Dadurch lässt sich mit

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1 \quad (4.90)$$

(symmetrische Spannungsverteilung über Höhe) der Beulfaktor ermitteln zu

$$k_b = 21,8 \quad (4.91)$$

Da das Dickenverhältnis von Steglagen zu Schaumkern sehr klein ausgelegt werden soll, wird sicherheitshalber

$$\kappa = 1 \quad (4.92)$$

definiert. Dadurch ergibt sich die kritische Biegespannung mit  $\hat{E}_{xx} = 6639,8MPa$ ,  $d = 1,882mm$  und  $b = 35,8mm - 2 \cdot 1,941mm$  zu

$$\sigma_{krit,b} = \kappa \cdot k_b \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 = 503,24MPa \quad (4.93)$$

Mit

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot h_i}{\tilde{I}_x \cdot 2} = \frac{0,773m \cdot 500N \cdot (35,8mm - 2 \cdot 1,941mm)}{2 \cdot 3,075406 \cdot 10^{-8}m^4} = 200,56MPa \quad (4.94)$$

ist das Verhältnis der vorhandenen Biegespannung zur kritischen

$$j_1 = \frac{503,24MPa}{200,56MPa} = 2,512. \quad (4.95)$$

Für den Schub wird der Beulfaktor zu

$$k_s = 5,5 \quad (4.96)$$

Damit wird die kritische Schubspannung mit  $\hat{G}_{xy} = 8577,8 MPa$  zu

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k_s \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 = 164,02 MPa \quad (4.97)$$

Die tatsächlich auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{h_i \cdot s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5085,5 N}{1,882 mm \cdot (35,8 mm - 2 \cdot 1,941 mm)} = 126,99 MPa \quad (4.98)$$

sodass das Verhältnis der vorhandenen Schubspannung zur kritischen

$$j_2 = \frac{164,02 MPa}{126,99 MPa} = 1,292 \quad (4.99)$$

ergibt. Die Gesamtsicherheit beträgt

$$j = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{j_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{j_2}\right)^2}} = 1,148 \quad (4.100)$$

Somit kann rückgeschlossen werden, dass dieser Bereich des Holmsteges schon ohne zusätzlichen Schaumkern sicher gegen Beulen ist.

Nun wird der Bereich *II* betrachtet:

Da keine innere Querkraft herrscht, kann die Sicherheit durch Biegung außer Acht gelassen werden. Die Sicherheit gegen Beulen ist demnach nur von dem Schub abhängig. Das Seitenverhältnis beträgt

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8 mm - 2 \cdot 1,941 mm}{37 mm} = 0,863 \quad (4.101)$$

Damit ergibt sich der Beulfaktor zu

$$k_s = 6,8 \quad (4.102)$$

und weiterhin wird mit

$$\kappa = 1 \quad (4.103)$$

gerechnet. Damit lässt sich

$$\tau_{krit} = k_s \cdot \kappa \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left(\frac{1,882 mm}{35,8 mm - 2 \cdot 1,941 mm}\right)^2 = 202,79 MPa \quad (4.104)$$

berechnen. Mit dem gleichen maximalen Schub

$$\tau = 126,99 \text{ MPa} \quad (4.105)$$

wie in Bereich *I* kann somit die Sicherheit zu

$$j = \frac{202,79 \text{ MPa}}{126,99 \text{ MPa}} = 1,59 \quad (4.106)$$

bestimmt werden. Auch dieser Stegbereich *II* ist ohne Schaumstoff gegen Beulen sicher.

Abschließend wird der verbliebene Bereich *III* überprüft:

Erneut wird das Seitenverhältnis ermittelt zu

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8 \text{ mm} - 2 \cdot 1,941 \text{ mm}}{773 \text{ mm}} = 0,041 \approx 0 \quad (4.107)$$

Dadurch ist

$$k_d = 21,8 \quad (4.108)$$

für

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1 \quad (4.109)$$

(symmetrische Spannungsverteilung über die Steghöhe) und

$$k_s = 4,8 \quad (4.110)$$

Für die Belastung auf Druck durch Biegung wirkt maximal die Spannung

$$\sigma_b = \frac{500 \text{ N} \cdot 0,773 \text{ m}}{3,075406 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,0358 \text{ m} - 2 \cdot 1,941 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} = 200,56 \text{ MPa} \quad (4.111)$$

Für den Schub wirkt die maximale Schubspannung von

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{500 \text{ N}}{0,313 \text{ mm} \cdot (35,8 \text{ mm} - 2 \cdot 1,941 \text{ mm})} = 75,07 \text{ MPa} \quad (4.112)$$

Die Sicherheit gegen Beulen berechnet sich nun zu

$$j = \sqrt{\frac{1}{(\frac{\sigma}{\sigma_{krit}})^2 + (\frac{\tau}{\tau_{krit}})^2}} \quad (4.113)$$

mit

$$\sigma_{krit} = \kappa \cdot k \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left( \frac{0,313 \text{ mm} + x}{35,8 \text{ mm} - 2 \cdot 1,941 \text{ mm}} \right)^2 \quad (4.114)$$

und

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k_s \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left( \frac{0,313mm + x}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 \quad (4.115)$$

Dieses mal kann  $\kappa = 3$  genutzt werden, sofern eine ausreichende Schaumstoff-Dicke  $x$  auftritt, dessen Lösung analytisch herausgefunden wird. Dabei wird eine Mindestdicke von

$$x = 0,569mm \quad (4.116)$$

ermittelt. Allerdings soll ein Schaum der Dicke  $x = 2mm$  verbaut werden, um das exakte Anpassen der Bauteilmaße während der Fertigung zu vereinfachen. Damit ergibt sich eine Beulsicherheit im Bereich *III* von

$$j = 6,88 \quad (4.117)$$

Damit die äußeren Steg-Gewebelagen eine konstante Stegdicke bilden, soll in den Bereichen *I* und *II* dennoch eine Schaumdicke von  $x = 0,431mm$  verbaut werden. Der in Form geschliffene Schaum erhöht zudem in diesen Bereichen die Beulsicherheit, obwohl kein zusätzlicher Schaum benötigt wäre. Der Übergang der beiden Schaumdicken soll zudem nicht direkt an der Wurzelrippe beginnen, sondern erst  $23mm$  zur Flügelspitze versetzt erfolgen, um direkt an dem Kraftangriffspunkt *C* die Sicherheit zusätzlich zu erhöhen.

## 4.5 Dimensionierung der Klebeverbindungen (T.B.)

Als letzte analytische Auslegung des Holms sollen zwei bedeutende Klebeflächen des Stegs den Rippen bzw. zu den Gurten nach Kapitel 3.11 berechnet werden.

### 4.5.1 Klebeverbindung Steg - Gurt

Die Klebverbindung wird ähnlich der VDI 2013 ausgelegt, sodass nur die Abtriebskraft des Holms und die übertragene Querkraft den Schubfluss für die Belastung definieren [SiV19][VDI70]:

$$p = \sqrt{p_A^2 + p_s^2} \quad (4.118)$$

Die Länge ergibt sich aus

$$l = \frac{p}{\tau_{zul}} \quad (4.119)$$

wobei die zulässige Klebeschubspannung

$$\tau_{zul} = 10 MPa \quad (4.120)$$

nach Angaben der Aufgabenstellung der Schubspannung für Mumpe entsprechen soll. Die Verklebung muss wegen Fertigungsmöglichkeiten kleiner Bauteilmaße „Trocken-Trocken“ erfolgen.

Bereich I und II werden, ähnlich der Beulberechnung, zusammen mit den kritischsten aller Werte ausgelegt, sodass

$$l = \frac{\sqrt{(4282, 26 \frac{N}{m})^2 + (159330, 16 \frac{N}{m})^2}}{10^7 \frac{N}{m^2}} = 15,9 mm \quad (4.121)$$

als Klebebreite benötigt werden. Für den Bereich III ergibt sich

$$l = \frac{\sqrt{(4282, 26 \frac{N}{m})^2 + (15665, 14 \frac{N}{m})^2}}{10^7 \frac{N}{m^2}} = 1,62 mm \quad (4.122)$$

Die eingesetzten Werte ergeben sich nach Gleichung 4.48 und 4.50. Beide Klebebreiten passen auf die verbleibenden inneren Holmgurtflächen und sollen durch Mumpe ohne zusätzliche Gewebelagen realisiert werden. Die Querschnittsfläche der Mumpe sollte somit idealerweise einem gleichseitigem Dreieck nachempfunden werden.

#### 4.5.2 Klebeverbindung Holm - Rippen

Die vergrößerten Klebeflächen der Rippen gegenüber dem Holm sollen durch Holzklötze ermöglicht werden, die auf beide Seiten des Stegs zwischen die Holmgurte geklebt werden. Die Breite dieser Klötze errechnet sich aus

$$A = b \cdot h = \frac{F}{\tau_{zul}} \quad (4.123)$$

mit der maximal abgesetzten Kraft von  $F = 500N$ . Die Kraft wird in der Realität kleiner sein, da sie über zwei Querkraftbolzen auf zwei Rippenhälften aufgeteilt wird. Somit haben die Holzklötze eine Breite von

$$b = 1,56mm \quad (4.124)$$

bei einer Höhe von  $35,8mm - 2 \cdot 1,941mm$ .

## 4.6 Bolzenauslegung (H.G.)

### 4.6.1 Bolzenberechnung

Zunächst muss eine Auslegung für die Flächenpressung erfolgen. Dabei ist für die Buche  $\sigma_{p,zul} = 60 \frac{N}{mm^2}$ . Die projizierte Fläche ist  $A = a * d$ , d ist hierbei der Durchmesser des Bolzens und a die Länge des Lochs im Steg.

Die Flächenpressung ist nun:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{5085,5N}{a * 8mm} \quad (4.125)$$

Mit der zulässigen Flächenpressung für Buchenholz lässt sich die Gleichung nun nach a auflösen (siehe Glg. 4.126).

$$a = \frac{F}{\sigma_{p,zul} * d} = \frac{5085,5N}{60 \frac{N}{mm^2} * 8mm} = 10,59mm \quad (4.126)$$

Somit muss die Holzverstärkung des Stegs an der Stelle der Lager mindestens eine Breite von 10,59mm aufweisen. Im Weiteren wird eine Breite von 11mm angenommen.

Nun werden die Bolzen, die den Holm im für den Versuchsaufbau vorgegebenen U-Profil fixieren, ausgelegt. Die Bolzen sind auf Biegung belastet, wodurch Gleichung 4.127 angenommen wird.

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (4.127)$$

$$W_{Kreis} = \frac{\pi * d^3}{32} \quad (4.128)$$

$$M_b = F * l \quad (4.129)$$

Mit Gleichung 4.128 und Gleichung 4.129 ergibt sich die Biegespannung zu Gleichung 4.130.

$$\sigma_b = F * \frac{32 * l}{\pi * d^3} \quad (4.130)$$

Die zu ertragende Kraft ist 5085,5N. Diese lässt sich jetzt noch halbieren, da mit der oben genannten Annahme nur die Hälfte des Bolzens betrachtet wird. Damit ergibt sich die gesuchte Kraft (siehe Glg. 4.131).

$$F_{bel} = \frac{F}{2} = 2542,75N \quad (4.131)$$

Nun kann mit  $d = 8mm$  und  $l = 8,559mm$  ein passendes Material gesucht werden. Für Stahl gilt  $\sigma_{b,F} \approx 1,2 * R_e$ , somit wird  $R_e$  wie in Gleichung 4.132 berechnet.

$$F * \frac{32 * l}{1,2 * \pi * d^3} = 360,8MPa \leq R_e \quad (4.132)$$

Mit den getroffenen Annahmen ist S620Q mit einer Streckgrenze von  $R_e = 620 \frac{N}{mm^2}$  ein geeigneter Stahl, mit dem eine ausreichende Sicherheit gegeben ist.

Für die Querkraftbolzen wird ebenfalls S620Q verwendet. Die aufzunehmenden Kräfte lassen sich aus dem Kräftegleichgewicht ermitteln.  $Q_1$  ist die Kraft des Bolzens vor dem Holm und  $Q_2$  die Kraft des Bolzens hinter (in Flugrichtung betrachtet) dem Holm. Damit ergeben sich bei einer Prüfkraft von 500N folgende Kräfte:

$$Q_1 = 409,85N$$

$$Q_2 = 90,15N$$

Für den benötigten Durchmesser lässt sich nun Gleichung 4.130 nach d umstellen.

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 * F * l}{1,2 * \pi * R_e}} \quad (4.133)$$

Mit einem Hebelarm l von 10mm ergibt sich:

$$d = 3,82mm \quad (4.134)$$

Da die Querkraftbolzen auf keinen Fall versagen dürfen und in der Massenbilanz nicht relevant sind, werden sie mit einem Durchmesser von 8mm bemessen [GKM14].

## 5 Auslegung der Flügelschale nach Handbuchmethoden

### 5.1 Schubfluss

#### 5.1.1 Idealisierung(H.G.)

Für die Berechnung des Schubmittelpunkts wird das Flügelprofil als vereinfachter Mehrzeller angenommen. Dabei wird der Ursprung des Koordinatensystems am unteren rechten Rand gesetzt. Das Modell wird in 10 Teilstrecken  $s_i$  aufgeteilt. Die Dicke  $t$  wird über die Schale konstant angenommen. Der Schaum wird in allen Abschnitten der Schale und im Holm vernachlässigt, da seine Hauptaufgabe der Beulsteifigkeit gilt und er bei der Schubaufnahme im Vergleich zum Laminat nur eine unbedeutende Rolle spielt. Der Steg ist in 2 Abschnitte unterteilt. Für die maximale Belastung und somit für die Auslegung relevant ist nur der Teil mit dem dünneren Gewebe, sodass hier für die Dicke des Stegs  $t_1 = 0,314\text{mm}$  angenommen wird. Für die Gurte gilt, dass alle Fasern parallel in x-Richtung ausgerichtet sind. Sie werden in dieser Rechnung ignoriert, da sie folglich im Gegensatz zum  $\pm 45^\circ$ -Gewebe vernachlässigbare Schubkräfte aufnehmen können ( $D = t$ ). Außerdem würde ein über die Dicke variable Schubmodul die Rechnung unnötig verkomplizieren, da die uns bekannten Methoden zur Schubflussberechnung nur für homogene Werkstoffe gültig sind [Hor20c].

Diese Annahmen bezüglich des Schaums und der Gurte sind unproblematisch, da sie so getroffen wurden, dass der Flügel sogar noch höheren Belastungen als errechnet standhalten könnte. Als einziges ist zu betrachten, dass durch das Wegfallen des Schaums in der Schale die GFK-Schichten des Sandwichs aufeinander fallen und ihre Position somit um wenige Millimeter ungenau ist. Da die genau errechnete Dicke auf eine Lagenschicht aufgerundet werden muss, ist dies vermutlich kompensierbar, sollte jedoch im Hinterkopf behalten werden.

Abbildung 5.1 zeigt, dass das Profil durch vier gerade Strecken und einen Viertelkreis modelliert wurde. Die Längen der einzelnen Teilabschnitte lassen sich im Anhang der Abbildung 12.22 entnehmen. Im Folgenden werden die wichtigsten Rechenschritte und Ergebnisse dargelegt, detailliertere Berechnungen lassen sich im Anhang unter Kapitel 12.2 finden.

#### 5.1.2 Schwerpunktkoordinaten(H.G.)

Zunächst wird von einer Dicke  $t = 0,2\text{mm}$  ausgegangen und die statischen Momente in den einzelnen Teilstücken berechnet.

$$S_z = \int_A ydA = t \int_s yds \quad (5.1)$$

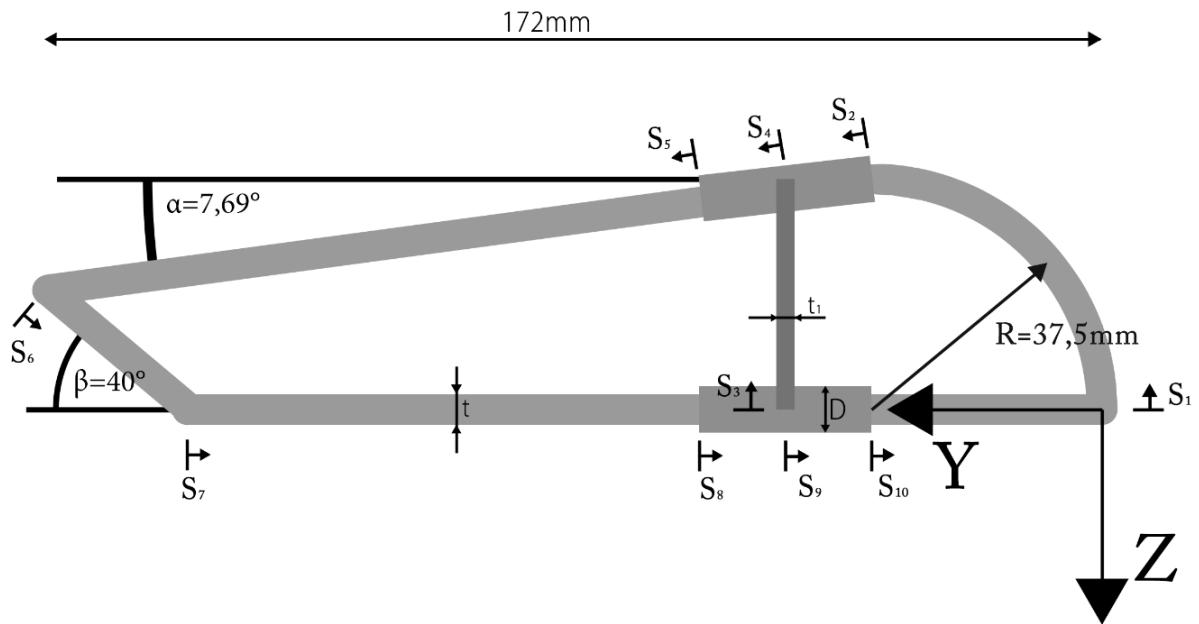


Abbildung 5.1: Vereinfachtes Modell für Schubflussberechnung

$$S_y = \int_A z dA = t \int_s z ds \quad (5.2)$$

Damit ergeben sich für die statischen Momente in  $\text{mm}^3$ :

Bauteilabschnitt	$S_y/\text{mm}^3$	$S_z/\text{mm}^3$
1	-281,25	160,54
2	-120,382	124,42
3	-220,78	605,24
4	-97,13	163,27
5	-571,91	2555,63
6	-58,13	965,14
7	0	1789,88
8	0	163,80
9	0	124,60
10	0	140,63

Nun kann aus den statischen Momenten der Schwerpunkt bestimmt werden, indem die statischen Momente über alle Flächen summiert werden:

$$y_0 = \frac{\int_s t(s)y ds}{\int_s t(s)ds} = \frac{S_z}{A} \quad (5.3)$$

$$z_0 = \frac{\int_s t(s)z ds}{\int_s t(s)ds} = \frac{S_y}{A} \quad (5.4)$$

Mit einer Dicke von  $t = 0,2\text{mm}$  ergibt sich die Lage der Schwerpunktkoordinaten zu:

$$y_0 = 78,53\text{mm}$$

$$z_0 = -15,39\text{mm}$$

Damit können nun mit

$$S_{\bar{y}} = S_y - z_0 A \quad (5.5)$$

$$S_{\bar{z}} = S_z - y_0 A \quad (5.6)$$

die Verläufe der statischen Momente in Bezug auf den Schwerpunkt ermittelt werden, wobei die Endwerte der vorherigen Verläufe nach dem hydrodynamischen Analogon den Anfangswert  $s_0$  des folgenden Bereichs bestimmen. Dabei ergeben sich folgende Endwerte nach [WNB16] in  $\text{mm}^3$ :

Bauteilabschnitt	$S_{\bar{y}}/\text{mm}^3$	$S_{\bar{z}}/\text{mm}^3$
1	-99,91	-764,60
2	-159,18	-860,06
3	-39,53	-319,43
4	-252,75	-1236,10
5	-493,03	-372,27
6	-458,59	120,60
7	-201,65	599,69
8	-158,55	543,61
9	-155,45	448,34
10	0	0

Für ein offenes Profil muss gelten, dass an den freien Rändern der Schubfluss 0 ist, was automatisch dadurch erfüllt ist, dass beide statischen Momente ungefähr null sind. Das Profil wird in diesem Fall an den Stellen 1 und 3 geschnitten.

Nun werden die Flächenträgheitsmomente nach Gleichungen 3.46-3.48 zuerst aus ihrem eigenen Schwerpunkt errechnet, sodass die auf den Gesamtschwerpunkt bezogenen Flächenträgheitsmomente  $I_{\bar{y}}$ ,  $I_{\bar{z}}$  und  $I_{\bar{y}\bar{z}}$  mit Hilfe des Steinerschen Satzes

$$I_{\bar{y}} = I_y + z^2 A \quad (5.7)$$

$$I_{\bar{z}} = I_z + y^2 A \quad (5.8)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + zyA \quad (5.9)$$

ermittelt werden können. Es ergibt sich:

Bauteilabschnitt	$I_y/\text{mm}^4$	$I_z/\text{mm}^4$	$I_{zy}/\text{mm}^4$	$I_{\bar{y}}/\text{mm}^4$	$I_{\bar{z}}/\text{mm}^4$	$I_{\bar{y}\bar{z}}/\text{mm}^4$
1	2857,61	2857,61	140,63	5649,01	22688,56	-7299,54
2	0,83	44,91	6,06	1255,75	3299,07	2026,88
3	1379,88	0,10	0	1512,59	8665,70	1072,37
4	0,83	44,91	6,06	1043,48	1189,34	1098,42
5	373,09	20459,31	2762,56	3053,01	55094,88	-6871,78
6	187,25	265,93	-223,13	284,51	20659,15	2599,67
7	0,06	9689,11	0	3955,08	23439,99	7374,62
8	0,01	45,731	0	663,45	1168,88	-863,21
9	0,01	45,731	0	663,45	3287,88	-1466,61
10	0,03	878,91	0	1777,09	27679,54	-6901,18
$\sum$	-	-	-	19957,41	187173,00	-9230,37

Es kann sofort erkannt werden, dass  $I_{\bar{y}\bar{z}} \neq 0$  ist und es sich somit nicht um ein Hauptachsensystem handelt. Das Deviationsmoment  $I_{\bar{y}\bar{z}}$  ist jedoch im Vergleich zu den anderen Flächenträgheitsmomenten sehr niedrig. Aus dem Zusammenhang

$$\tan(\varphi) = \frac{2I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}} \quad (5.10)$$

nach [Hor20c] lässt sich erkennen, dass der Winkel ( $\varphi = -3,15^\circ$ ) zwischen dem Hauptachsen- und Schwerpunkt-Koordinatensystem nur sehr gering ist. Im Folgenden finden alle Beobachtungen trotzdem weiterhin mit den Koordinatenachsen in dieser Ausrichtung statt.

### 5.1.3 Schubmittelpunkt (H.G.)

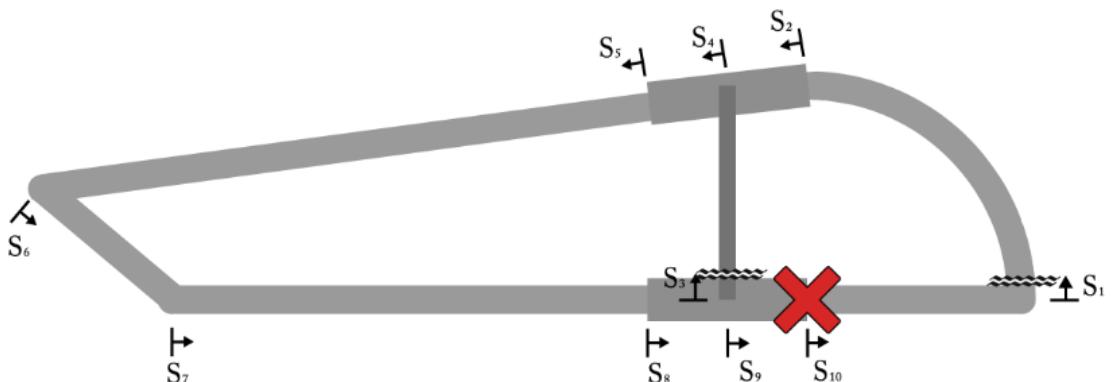


Abbildung 5.2: Offenes Profil mit Pol

Nun ist es von Interesse, und im Rahmen der Aufgabenstellung auch gefordert, den

Schubmittelpunkt, an dem eine angreifende Kraft reine Biegung ohne Torsion bewirkt, zu bestimmen. Zunächst wird der Schubmittelpunkt des wie in Abschnitt 5.1.2 aufgeschnittenen Profils betrachtet (siehe Abb. 5.2). Es wird die Kraft  $Q$ , die im Schubmittelpunkt angreift und äquivalent zu  $q(s)$  nach

$$Q = \int_s q(s)ds \quad (5.11)$$

ist, betrachtet. Gleichzeitig muss aus der Momentenäquivalenz gelten:

$$Qr = \int_s q(s)r(s)ds \quad (5.12)$$

wobei  $r$  der jeweilige Hebelarm zu einem beliebigen Pol ist. Unter Anwendung des Superpositionsprinzips lässt sich die Querkraft  $Q$  in ihre Komponenten der Koordinatenrichtungen zerlegen und jeweils eine gleich null setzen. Zusammen mit Gleichung (4.50) erhält man dadurch die folgenden Gleichungen zur Bestimmung des Schubmittelpunkts beim offenen Profil nach [Hor20c]:

$$y_M = \frac{-I_{\bar{z}} \int S_{\bar{y}}(s)r_t ds + I_{\bar{y}z} \int S_{\bar{z}}(s)r_t ds}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}z}^2} \quad (5.13)$$

$$z_M = \frac{-I_{\bar{y}z} \int S_{\bar{y}}(s)r_t ds + I_{\bar{y}} \int S_{\bar{z}}(s)r_t ds}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}z}^2} \quad (5.14)$$

Daraus folgt:

$$y_M = 207,60\text{mm}$$

$$z_M = -41,35\text{mm}$$

Im nächsten Schritt wird das Profil geschlossen, sodass ein Zweizeller entsteht. An den vorher noch geschnittenen Kanten kann nun ein Schubfluss herrschen. Dies wird durch die Konstanten  $q_{0b,1}$  und  $q_{0b,2}$  in der jeweiligen Zelle erreicht. Da die Verwindung  $\vartheta$  für beide Zellen gleich und im Falle der weiterhin reinen Biegung null sein muss, erhält man für jede Koordinatenrichtung zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \quad (5.15)$$

Nach [Hor20c]:

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \oint \frac{q(s)}{t(s)}ds \quad (5.16)$$

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \left( \oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)}ds + q_{0b,i} \oint \frac{1}{t(s)}ds - q_{0b,i\pm 1} \int \frac{1}{t(s)}ds \right) \quad (5.17)$$

Die Kreisintegrale gehen jeweils über die betrachtete Zelle und das einfache Integral über

den Teil des Profils, den die beiden sich teilen. Die Verwindung ist als spezifischer Drillwinkel mit

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.18)$$

definiert, wobei  $\varphi$  den Drillwinkel angibt. Mit den Werten für die umschlossenen Flächen

$$A_{01} = 3087,57 \text{ mm}^2$$

$$A_{02} = 1616,41 \text{ mm}^2$$

ergeben sich die Konstanten:

$$q_{0b,1\bar{z}} = -1,82 \cdot 10^{-2} \text{ mm} Q_{\bar{z}}$$

$$q_{0b,2\bar{z}} = -5,63 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{z}}$$

$$q_{0b,1\bar{y}} = -2,61 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{y}}$$

$$q_{0b,2\bar{y}} = -1,14 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{y}}$$

Mit dem Schubfluss des geschlossenen Profils in die Momentenäquivalenz eingesetzt, ergibt sich der Schubmittelpunkt  $(y_{Mg}, z_{Mg})$  zu:

$$Q_{\bar{z}}(y_{Mg} - y_M) = \sum_{i=0}^2 q_{0b,i\bar{z}} 2A_{0,i} \quad (5.19)$$

$$Q_{\bar{y}}(z_{Mg} - z_M) = \sum_{i=0}^2 q_{0b,i\bar{y}} 2A_{0,i} \quad (5.20)$$

$$y_{Mg} = 76,78 \text{ mm}$$

$$z_{Mg} = -21,56 \text{ mm}$$

#### 5.1.4 Torsion (O.S.)

In den bisherigen Berechnungen wurde immer davon ausgegangen, dass die Kraft im Schubmittelpunkt angreift. Durch den Versuchsaufbau ist jedoch vorgegeben, dass eine Prüflast in z-Richtung an der  $l/4$ -Linie aufgebracht wird. Mit dem errechneten Schubmittelpunkt lässt sich erkennen, dass ein Torsionsmoment

$$M_{xT} = (y_{l/4} - y_0) \cdot F \quad (5.21)$$

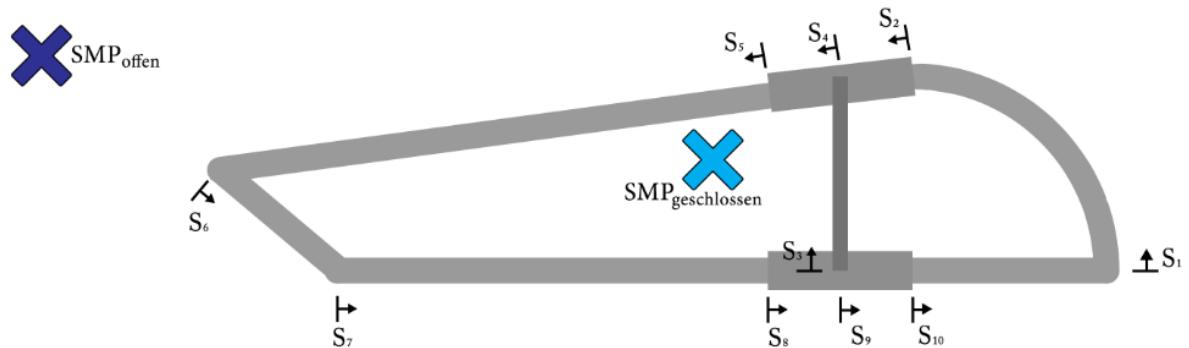


Abbildung 5.3: Schubmittelpunkt des geschlossenen und offenen Profils

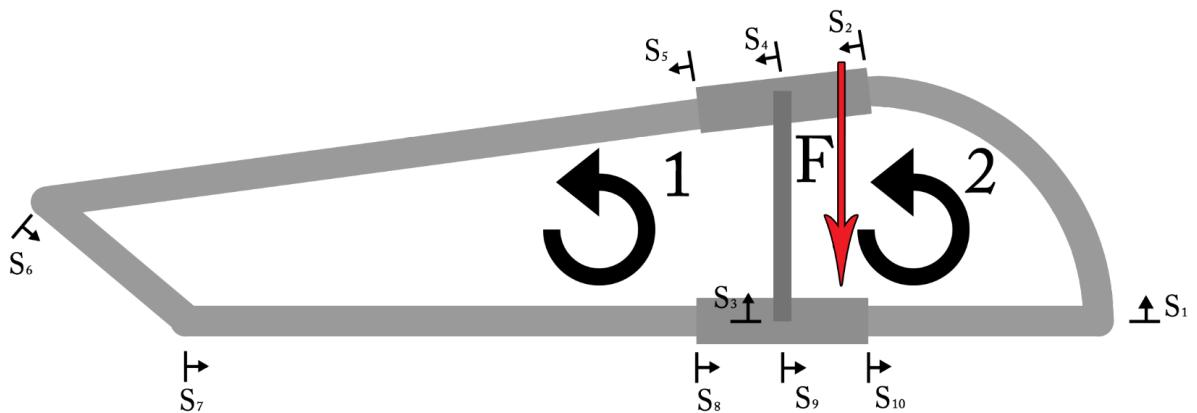


Abbildung 5.4: Angreifende Kraft und positive Drehrichtung am geschlossenen Profil

entsteht, das noch zusätzlichen Schubfluss und eine Verwindung  $\vartheta$  bewirkt. Genauer gesagt wird hier die St. Vernatsche Torsion behandelt, bei der zwar Verwölbung auftritt, diese aber nicht behindert wird [Hor20c]. Wieder können die konstanten Schubanteile  $q_{0T,i}$  aus der Momentenäquivalenz und der Verwindung bestimmt werden. Wobei zu beachten ist, dass die Verwindung hier nicht mehr wie bei der reinen Biegung null ist, aber über die Verträglichkeitsbedingung weiterhin gelten muss

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta. \quad (5.22)$$

Da die bisherigen Anteile des Schubflusses definitionsgemäß weder Verwindung verursachen, noch bezüglich des Schubmittelpunkts ein Moment kompensieren, fallen sie aus den Gleichungen raus. Es bleiben nur noch die Konstanten  $q_{0T,i}$  übrig. Damit ergeben sich die vereinfachten Formeln für die Verwindung und die Momentenäquivalenz:

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \left( q_{0T,i} \oint \frac{1}{t(s)} ds - q_{0T,i\pm 1} \int \frac{1}{t(s)} ds \right) \quad (5.23)$$

$$M_{xT} = 2 \sum q_{0T,i} \cdot A_{0i} \quad (5.24)$$

Für eine maximale Prüflast von  $F = 500\text{N}$ , die der Flügel aushalten muss, erhält man

$$q_{0T,1} = -1,80\text{N/mm}$$

$$q_{0T,2} = -1,87\text{N/mm}.$$

Setzt man nun diese Werte in Gleichung (5.23) erhält man für beide Zellen eine Verwindung von

$$\vartheta = -0,00242^\circ.$$

Integriert man diesen konstanten Wert über die gesamte Länge des Flügels, erhält man den Drillwinkel am Ende mit  $\varphi = -1,87^\circ$ .

### 5.1.5 Schubspannung (O.S.)

Das Ziel dieser Berechnung war nicht nur den Schubmittelpunkt und den Drillinkel zu bestimmen, sondern hauptsächlich die Schubspannung in der Haut zu erhalten, um diese auslegen zu können. Da die Hautdicke auf dem gesamten Umfang konstant bleiben soll, ist an dieser Stelle nur die maximale Schubspannung für alle Bereiche der Haut  $\tau_{max}$ , die sich einfach aus Gleichung (3.40) ermitteln lässt, interessant. Die Dicke  $t$  ist jedoch nicht einfach aus den gesamten Rechnungen rausziehbar, weil es auch Anteile wie zum Beispiel den Holm gibt, die von  $t$  unabhängig sind. Deswegen wird iterativ vorgegangen, wobei zuerst mit einer zufällig gewählten Dicke die Rechenschritte durchgeführt werden, in dem in diesem Kapitel gezeigten Fall mit  $t = 0,2\text{mm}$ . Am Ende der Berechnung wird aus den maximalen Schubfluss die minimale Dicke

$$t_{min} = \frac{q_{max}}{R_\tau}. \quad (5.25)$$

bestimmt. Die Festigkeit bei reiner Schubbeanspruchung  $R_\tau = 166,67\text{N/mm}^2$  wurde mittels ELamX bestimmt. Diese Dicke kann jedoch nicht einfach so als Ergebnis genommen werden, da sich der Schubfluss bei variabler Dicke mit verändert. Die Rechnung muss mit dem neuen Wert erneut durchgeführt werden. Somit nähert man sich Schritt für Schritt dem Idealwert, bei dem die vorliegende Dicke der minimalen Dicke entspricht.

Nach einigen Iterationen bildet sich der Wert  $t = 0,03\text{mm}$  als Grenzwert heraus. Da dies ungefähr 0,4 Lagen bei einer Dicke  $0,0783\text{mm}$  des  $\pm 45^\circ$ -Gewebes entspricht, muss für die Fertigung des Flügels auf eine ganzzahlige Lagenanzahl aufgerundet werden. Hier wurde eine Dicke von

$$t = 0,1566\text{mm} \quad (5.26)$$

gewählt, was 2 Lagen entspricht. Dies macht einen symmetrischen Aufbau der Haut mög-

lich und gewährleistet die beste Beulsteifigkeit. Außerdem ist eine ausreichende Sicherheit in Folge der getroffenen Vereinfachungen gewährleistet.

Mit dieser Dicke verändern sich die Werte des endgültigen Flügels im Vergleich zu den bisher in diesem Kapitel mit  $t = 0,2\text{mm}$  durchgeföhrten Berechnungen. Der Schubmittelpunkt verschiebt sich minimal zu

$$y_{M_g} = 75,72\text{mm}$$

$$z_{M_g} = -21,31\text{mm}.$$

Auch der Drillwinkel vergrößert sich leicht durch die gesenkten dünnere Haut Steifigkeit zu

$$\varphi = -2,32^\circ.$$

Aus den Verläufen der Schubflüsse, wie sie in Abbildung 12.23 - 12.32 zu sehen, erkennt man, dass die betragsmäßig maximale Schubspannung am Endpunkt des Bereichs 8 auftritt.

$$|\tau_{max}| = \tau(s_8 = 14) = 47,52\text{N/mm}^2 \leq R_\tau$$

Im Steg (Bereich 3) tritt zwar ein deutlich höherer Schubfluss auf, jedoch ergibt sich durch die ebenfalls deutlich höhere Dicke eine geringere Spannung.

## 5.2 Auslegung der Flügelschale nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)

### 5.2.1 eLamX<sup>2</sup>

Auch hier wird die Rechnung nach Handbuch-Methoden mittels *eLamX<sup>2</sup>* überprüft (siehe Kapitel 4.3.2) [Hau21][Sch05].

Der Lagenaufbau ähnelt dem des Steges, lediglich die Anzahl der Lagen wird auf zwei reduziert und die Dicke des Schaumstoffs erhöht (siehe Abbildung 12.4). Auch hierbei ergibt sich eine Sicherheit der Festigkeit  $> 1$ , wie der Abbildung 12.8 im Kapitel 12.3 zu entnehmen ist. Ebenfalls werden die Ingenieurskonstanten der Flügelhaut mit dieser Software ermittelt, wie in Abbildung 12.12 dargestellt wird.

Ähnlich dem Kapitel 4.3.2 werden die Abbildungen im Anhang dargestellt, obwohl auch hier die wichtigsten Erkenntnisse vorab vorgestellt werden:

Laminat	Lagenaufbau	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{G}_{xy}$
Flügelschale	$1 \cdot [45^\circ](sym.)$	6639,8 MPa	6639,8 MPa	8577,8 MPa
	$\nu_{xy}$	$\nu_{yx}$	Sicherheit nach Puck	Versagensart
	0,673	0,673	3,995	Zwischenfaserbruch

### 5.3 Beulabschätzung der Flügelschale (T.B.)

Nachdem die Flügelhaut auf Festigkeit ausgelegt worden ist, muss überprüft werden, ob der Effekt des Beulens auftritt [Her60].

Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Flügelschale wird als nahezu ebener, unendlicher Streifen betrachtet. Die tatsächliche Krümmung und die Knicke erhöhen die Stabilität deutlich, sodass durch diese konservative Rechnung die Sicherheit gewährleistet bleibt.
2. Es tritt die ermittelte Schubspannung in der Schale und eine aufgeprägte Druckspannung des Holms auf. Vernachlässigt wird, nach anfangs erwähnten Annahmen, eine Druckspannung durch die angreifende Prüfkraft selbst.
3. Die Flügelschale wird als an beiden Rippen fest gelagert betrachtet. Eine Verformung der Rippen wird außer Acht gelassen.
4. Die Flügelnase und Klappenkante werden als stützende Lager angenommen, da diese einen engen Krümmungsradius aufweisen, welcher stabile und steife Strukturen hervorbringt.
5. Der Holmsteg wird ebenfalls an seinen beiden Enden, verbunden mit der Flügelschale über die Holmgurte, als stützendes Lager angenommen.
6. Dadurch ergibt sich die maximale Breite eines Streifens zu 124,5mm - von der Endleiste zum oberen Steg-Lager.

Die Berechnung erfolgt nach den gleichen Formeln der Berechnung des Kapitels 4.4.2.

Das Seitenverhältnis beträgt für die maximale Streifenbreite

$$\frac{b}{a} = \frac{124,5\text{mm}}{773\text{mm}} = 0,16 \quad (5.27)$$

und somit wird der Beulfaktor zu

$$k_s = 5 \quad (5.28)$$

ermittelt. Auch hier beträgt die Steifigkeitserhöhung  $\kappa = 3$  und der Schubmodul  $\hat{G}_{xy} = 8577,8\text{MPa}$ . Dadurch lässt sich die zulässige Schubspannung ermitteln:

$$\tau_{krit} = 3 \cdot 5 \cdot 8577,8\text{MPa} \cdot \left( \frac{2 \cdot 0,078\text{mm} + 3\text{mm}}{124,5\text{mm}} \right)^2 = 82,68\text{MPa} \quad (5.29)$$

Die Schaumdicke wird durch konstruktive Vorgaben auf  $3mm$  gesetzt. Die maximal auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau = 42,346 MPa \quad (5.30)$$

(im Bereich der unteren Steg-Lagerung), sodass die Sicherheit gegen Schubbeanspruchung

$$j_1 = 1,95 \quad (5.31)$$

beträgt. Der Beulfaktor bei Druckbeanspruchung beträgt

$$k_d = 4,9 \quad (5.32)$$

Mit dem E-Modul  $\hat{E}_{Flügelschale} = 6639,8 MPa$  kann die kritische Druckspannung zu

$$\sigma_{krit} = 3 \cdot 4,9 \cdot 6639,8 MPa \cdot \left( \frac{2 \cdot 0,078 mm + 3 mm}{124,5 mm} \right)^2 = 62,72 MPa \quad (5.33)$$

bestimmt werden. Es wird angenommen, dass die Flügelschale eine Druckspannung durch die aufgeprägte Dehnung des Gurtes erfährt, die wiederum aus der maximalen Biegespannung im Holm erfolgt:

$$\sigma_{d,Flügelschale} = \hat{E}_{Flügelschale} \cdot \frac{\sigma_{b,Gurt}}{\hat{E}_{Gurt}} = 6639,8 MPa \cdot \frac{224,96 MPa}{31580 MPa} = 47,29 MPa \quad (5.34)$$

Dadurch, dass die Sicherheit gegen Druckbeanspruchung

$$j_2 = 1,32 \quad (5.35)$$

beträgt, resultiert eine Gesamtsicherheit gegenüber einer Beulerscheinung

$$j = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{1,952} + \frac{1}{1,32}}} = 1,09 \quad (5.36)$$

Dieses stellt jedoch eine theoretische Sicherheit dar, da die maximale Streifenbreite und die größte Schubspannung nicht im selben Bauteil-Bereich liegen. Die Sicherheit ist in der Realität somit höher, ebenfalls wird sie durch den tatsächlich gekrümmten Verlauf erhöht.

## 6 Numerische Berechnung

### 6.1 Vorteile der Finiten Element Methode (O.S.)

Nachdem der Flügel nun analytisch ausgelegt wurde, stellt sich die Frage, ob eine numerische Herangehensweise hier überhaupt noch sinnvoll ist. In den vorherigen Kapiteln wurden viele Vereinfachungen angenommen, um die Berechnungen mit verhältnismäßigen Aufwand zu bewältigen. Je komplexer ein Bauteil ist, desto unwirtschaftlicher wird es, dieses in seiner Fülle analytisch zu berechnen oder gar unmöglich, wenn keine geschlossenen Lösungen bekannt sind. Im Leichtbau werden diese Details benutzt, um Bauteile an den Stellen zu verstärken, wo besonders große Lasten auftreten (z.B. Rippen). Wenn diese nun für eine einfachere Berechnung wegfallen, muss das restliche Bauteil robuster ausgelegt werden, was zu einer vermeidbaren Gewichtszunahme führt. Auch wenn es sich bei numerischen Lösungen nur um Annäherungen an den wahren Zustand handelt, kann durch einen hohen Vernetzungsgrad ein präziseres Ergebnis erzielt werden als das vereinfachte analytische. Somit übernimmt die numerische Berechnung auch eine Kontrollfunktion.

## 6.2 ABAQUS Analyse (H.G.)

### 6.2.1 Modell

Die numerische Analyse findet mit Hilfe des Programms ABAQUS des Anbieters Dassault Systemes statt. Das Programm ist für Studenten kostenlos erhältlich, jedoch ist diese Version auf eine Anzahl von 1000 Knoten beim Vernetzen des Bauteils beschränkt.

Das zuvor erstellte CAD-Modell wird zunächst in ABAQUS importiert. Da es sich nun noch um ein Bauteil aus Vollmaterialien handelt und für eine möglichst genaue Analyse ein Schalenmodell verwendet werden soll, muss das Modell zunächst umgewandelt werden. Dafür werden die Volumenkörper des Modells in zweidimensionale Flächen umgewandelt, denen im Folgenden dann eine Dicke zugeordnet werden kann (siehe Abb.6.1).

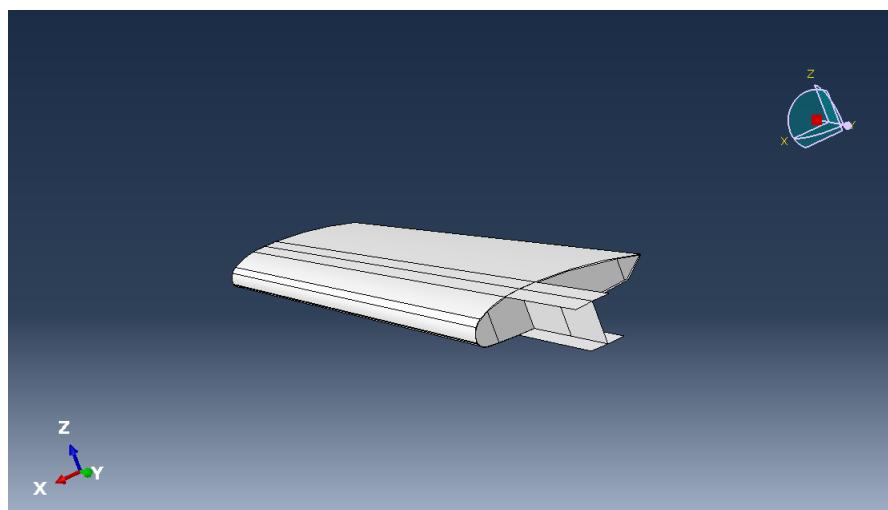


Abbildung 6.1: Schalenmodell

Daraufhin werden die Kennwerte der Materialien in das Programm integriert. Hierbei werden die Werte für GFK, den Schaum und die Rippen eingetragen (siehe Abb.12.33). Diese wurden in Kapitel 4.3.2 mit Hilfe von *elamX<sup>2</sup>* festgelegt. Für GFK wird das Material als Laminat erstellt, wodurch der E-Modul parallel und senkrecht zur Faser, sowie die Schubmoduln definiert werden können.

Nun wird das Schalenmodell in die verschiedenen Segmente unterteilt, denen dann Materialien und deren entsprechende Dicken und Anzahl von Schichten zugeordnet werden. Hierbei wird das Bauteil in den dicken und den dünnen Teil des Stegs, die Gurte, die Haut, sowie die Rippen unterteilt. Für die Bauteile aus GFK werden erst zwei zum Flügelkoordinatensystem um 45 und -45 Grad gedrehte GFK-Schichten definiert (siehe Abb. 12.6), dann der Schaum und daraufhin erneut zwei versetzte GFK-Schichten. Eine Schicht hat hierbei ein Viertel der zuvor berechneten Dicke ohne den Schaum. Für die Rippen wird eine Dicke von 3mm angenommen.

Als nächstes werden die Randbedingungen und angreifenden Kräfte festgelegt. Der Holm

ist in der Einspannung fest gelagert. Daher wird an der Stelle der Lager A und B eine feste Einspannung angenommen. Die aufgenommenen Kräfte durch die Querkraftbolzen werden als Kräfte angebracht. Die Prüfkraft wird am Ende des Flügels an der L/4-Linie eingeleitet.

Daraufhin wird das Bauteil vernetzt. Hierbei wird eine Anzahl an Knoten pro Längeneinheit eingegeben und das Programm verbindet diese zu einem Netz aus Flächen. Durch die Begrenzung auf 1000 Knoten ist das Netz jedoch recht grob, wodurch die Berechnung ebenfalls eine gewisse Ungenauigkeit aufweisen kann.

### 6.2.2 Analyse

Zunächst wird eine Prüfkraft von 100N angelegt, um die maximale Absenkung zu ermitteln. Hierbei ergibt sich für die Absenkung  $z_{max} = 17,34mm$ , welche erwartungsgemäß an der Spitze des Flügels auftritt. Dies ist weniger als die geforderte Absenkung von  $z_{max} = 20mm$ , auf die der Flügel in den vorherigen Kapiteln ausgelegt wurde, und somit kann dieses Aufgabenkriterium als erfüllt angesehen werden (siehe Abb.6.2). Die Abweichung von diesem Wert lässt sich dadurch begründen, dass die vorherigen Berechnungen davon ausgegangen sind, dass nur der Holm die Biegung trägt. Auch wenn dies eine gute Näherung ist und für die Auslegung auch sinnvoll, trägt in Realität auch die Schale einen kleinen Anteil zur Biegesteifigkeit bei. Um herauszufinden, ob der Flügel eine hinreichen-

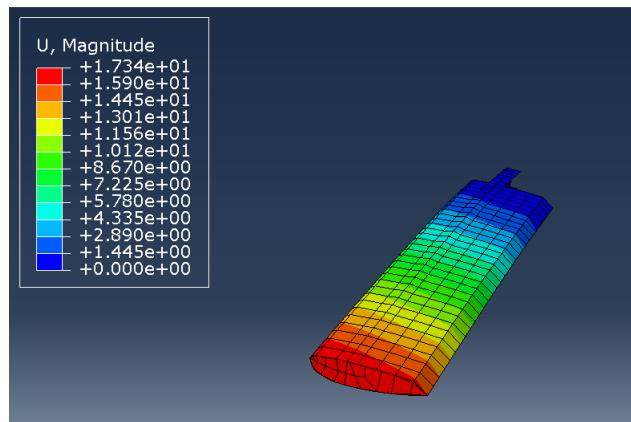


Abbildung 6.2: Absenkung bei einer Belastung von 100N

de Festigkeit aufweist, wird die Prüfkraft auf 500N erhöht. Nun müssen die maximalen Spannungen im Bauteil mit den Kennwerten verglichen werden. Das Modell zeigt nun maximale Spannungen an der Stelle des Lagers B an. Da sich dort allerdings noch eine nicht modellierte Verstärkung durch Holzblöcke befindet, sind diese Werte deutlich höher als in der Realität. Daher werden nur die Werte betrachtet, die sich ab der Wurzelrippe ergeben.

Die maximale Vergleichsspannung (Mises) ergibt sich im Steg des Holms. Diese wir hier

nicht weiter behandelt, da bei ihr die Information über den Spannungszustand verloren geht und dieser für einen isotropen Stoff ausschlaggebend ist. Die Normalspannung in  $x_1$ -Richtung ist im vorderen Teil des Stegs am höchsten und beträgt beim Maximum  $85,63 \frac{N}{mm^2}$ .

Die Normalspannung in  $x_2$ -Richtung ist im Gurt der Unterseite des Flügels am höchsten (im Versuchsaufbau Oberseite) und beträgt maximal  $14,25 \frac{N}{mm^2}$ . Die Spannung in  $x_3$ -Richtung ist überall 0, da bei den Schalenelementen von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen wird.

Die Schubspannung ist in der Schale auf der Unterseite am höchsten. Hier ergibt sich ein Maximalwert von  $16,72 \frac{N}{mm^2}$ .

Das angenommene Koordinatensystem bezieht sich auf die oberste Schicht des Laminats. Daher sind  $x_1$  und  $x_2$  immer in Richtung der Faser oder orthogonal dazu.

Da die Spannungen nicht in allen Schichten gleich sein müssen, haben sie allerdings eine geringe Aussagekraft. Eine bessere Aussage lässt sich durch die maximalen Dehnungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen treffen. Durch die Annahme, dass die Dehnung in allen Schichten gleich ist, kann diese in elamX eingegeben werden und so eine Sicherheit gegen Bruch ermittelt werden (siehe Abb. 12.13 - 12.16).

Richtung	Gurt oben	Gurt unten	Steg	Haut
$\varepsilon_x$	-0,00142	0,00206	0,00276	-0,00107
$\varepsilon_y$	-0,0015	0,00226	-0,00275	-0,000664
$\gamma_{xy}$	-0,00754	0,00843	0,00523	-0,00754
minimale Sicherheit	2,332	1,31	2,32	2,785

Die geringste Sicherheit ergibt sich im unteren Gurt mit 1,31. Dies ist hinreichend, um die Festigkeit des Flügels zu bestätigen.

Die Werte sind durch das Zusammenspiel aller Bauteile sehr viel kleiner als in den vorherigen Berechnungen. Dadurch bestätigt das FEM- Modell die vorangegangenen Berechnungen.

### 6.2.3 Beulanalyse

Da der Holmstummel bis zur Wurzelrippe C nicht ausreichend modelliert werden konnte und die Holzklötze in der Holmwurzel jegliches Beulen stark behindern, wird für die Beulauslegung eine feste Einspannung am Lager C angenommen (siehe Abb.6.3).

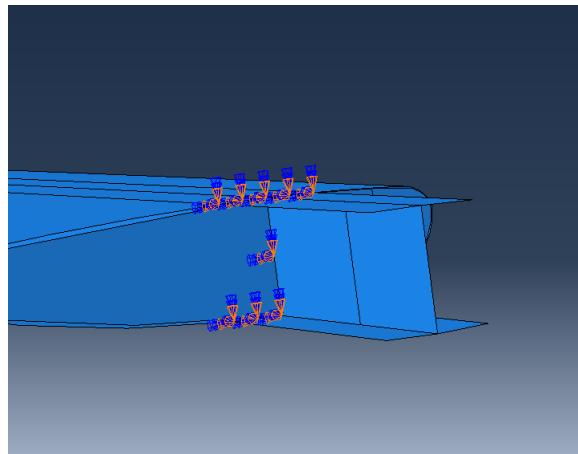


Abbildung 6.3: Einspannung am Lager C

Nun können die Eigenwerte für die Belastung von 100N, 500N und 1000N abgelesen werden.

Prüfkraft	Beulfaktor
100N	10,253
500N	2,0506
1000N	1,0253

Diese Werte sind alle größer als 1 und ändern sich antiproportional zur Kraft, damit ist der Flügel für alle drei Belastungsfälle ausreichend gegen das Beulen dimensioniert. Das Programm ermöglicht außerdem die Ausgabe möglicher Beulformen. Ein Beispiel ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Haut würde nah am Holmstummel beulen.

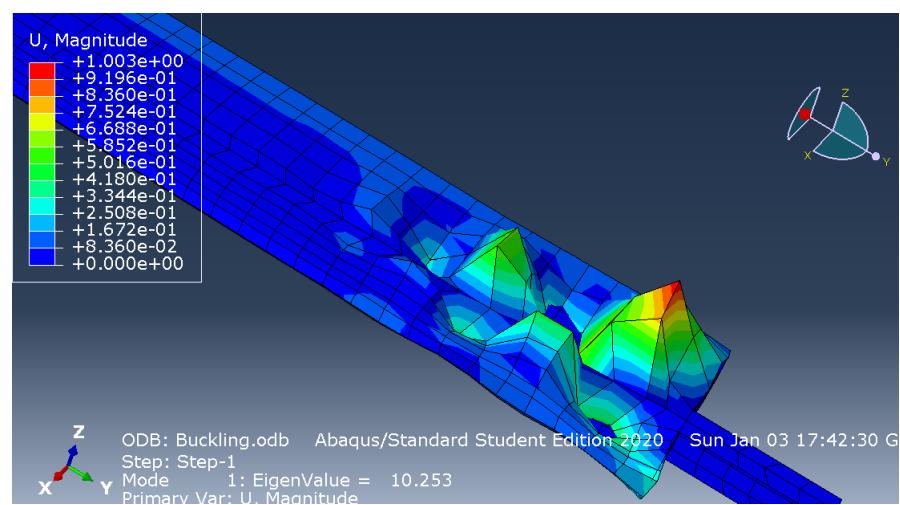


Abbildung 6.4: Beispiel Beulform

## 7 Konstruktion und Fertigung des Flügels

### 7.1 CAD-Konstruktion des Flügels (H.K.)

Auf Basis der dimensionierten Haut und des Holms wird ein CAD-Modell des Flügels erstellt werden. Zur Konstruktion wird das CAD-Programm Solid Edge in der Studentenversion verwendet. Als Grundlage dient eine gegebene unvollständig bemaßte technische Zeichnung der Profilkontur, aus der exakt entnommen werden kann, dass das Profil ohne die Hochauftriebselemente oder Querruder von einem Rechteck der Kantenlängen  $172\text{mm}$ , dies entspricht der Profiltiefe, und  $37,5\text{mm}$  gerade umschlossen wird. Aus den bekannten Längenangaben kann der Maßstab der gedruckten Zeichnung bezüglich des Modellmaßstabs zu  $1 : 1,039$  berechnet werden. Markante Punkte entlang der Kontur können in der Zeichnung vermessen werden und mithilfe des Maßstabs auf Punkte im CAD-Modell umgerechnet werden. Im CAD-Programm werden Tangentenbögen von Punkt zu Punkt gelegt, um die Kontur hinreichend glatt anzunähern. Die verwendeten Punkte werden durch die im Anhang befindliche technische Zeichnung der Profilkontur illustriert.

#### 7.1.1 Konstruktion der Gurte

In den Bereichen oberhalb und unterhalb des Holms soll die Haut nicht in Sandwich-Bauweise ausgeführt sein. Für die Auslegung des Holms wurde davon ausgegangen, dass eine Dicke des Verbundmaterials der Haut von  $0,75\text{mm}$  ausreichend ist, die nach Gleichung 4.41 9 Lagen des Interglas 90070 Gewebes entspricht. Die genauere Auslegung der Haut hat gezeigt, dass nur zwei Lagen des Gewebes notwendig sind. Der entstehende Freiraum  $t_{frei} = 0,75\text{mm} - 2 \cdot 0,078\text{mm} = 0,594\text{mm}$  zwischen der Haut und den weiter innen liegenden Gurten kann bei der Fertigung mit Harz aufgefüllt werden.

Der zu Beginn des Abschnitts 4.2.2 dimensionierte Holm mit rechteckigen Gurtquerschnitten,  $b = 28\text{mm}$  und  $h_a = 36\text{mm}$ , wird nun so auf die Kontur des Profils gelegt, dass die Überdeckung der Gurte mit der umgebenden Haut möglichst gering ausfällt. Dann wird die Höhe  $h_a$  an den örtlichen inneren Abstand der oberen und unteren Haut auf  $\tilde{h}_a = 35,8\text{mm}$  angepasst. Der rechteckige Querschnitt der Gurte wird mithilfe eines Offsets von  $h = 1,941\text{mm}$  der Hautkrümmung angepasst. Diese Anpassungsmaßnahmen senken das Flächenträgheitsmoment leicht. Das resultierende Flächenträgheitsmoment  $\tilde{I}_x$  lässt sich aufgrund der komplexen Querschnittsgeometrie der Gurte nur mit dem CAD-Programm exakt bestimmen. Der Vergleich mit dem erforderlichen Flächenträgheitsmoment zeigt, dass die angepasste Geometrie der Gurte die Steifigkeitsbedingung (vgl. Beziehung 4.42) erfüllt. Die Haut konstanter Dicke und die Gurte im ersten Schritt der Konstruktion werden durch Abbildung 7.1 veranschaulicht. Zusätzlich zeigt die Abbildung die ungefähre Lage der L/4-Linie. Diese wurde mithilfe einer vorhandenen Hilfsansicht

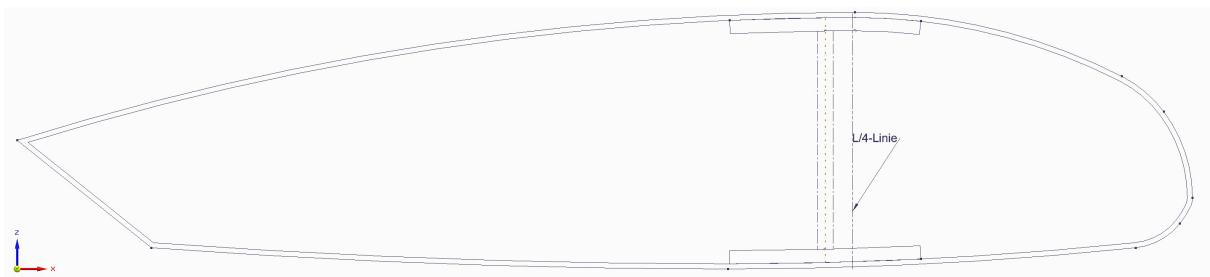


Abbildung 7.1: Haut und Gurte nach dem ersten Schritt der Konstruktion

der Tragfläche inklusive der Hinterkantenklappen und des Vorflügels, beide im eingefahrenen Zustand, ermittelt. In der Hilfsansicht wird die abgebildete Länge des mittleren auszulegenden Teils der Tragfläche gemessen. Der Maßstab der ausgedruckten Hilfsansicht bezüglich des Modellmaßstabes wird zu 1:2,529 berechnet. Diese Kenntnis ermöglicht die Berechnung des Abstandes der L/4-Linie zur Vorderkante der Haupttragfläche, der 42,4mm beträgt und besonders für die Berechnung der Torsion ausschlaggebend ist.

### 7.1.2 Konstruktion des Stegs

Im nächsten Schritt werden die beiden Stegseiten und der in der Mitte liegende Schaum konstruiert. Im CAD-Programm erfolgt dies mithilfe von nur einer Skizze, die der Extrusion der Einzelteile zugrunde liegt. So kann sichergestellt werden, dass in jeder Komponente der Bezug auf die angrenzenden Gurte und die unterschiedlichen Krümmungsradien der Seitenkanten gewahrt bleibt. Die Konstruktionen des Steges und des Schaumes erfordern auch die Berücksichtigung der verschieden belegten Unterteilungen des Steges. Der innere Teil wird ab dem Holmstummelende bis 23mm hinter die Querkraftbolzen mit 24 Lagen belegt. Von dort an verlaufen nur noch 4 Lagen bis zur Endrippe. Es bietet sich an, die vier Lagen des äußeren Bereichs über die gesamte Holmlänge zu erstrecken. Die inneren 20 verstärkenden Lagen enden 23mm hinter Punkt C in einem sanften Übergang mit einer Länge von 30mm. Der dünn belegte Teil wird durch einen 2mm breiten Schaumkern vor dem Beulen geschützt, der zum dick belegten Teil hin entsprechend schmäler wird. Das innere Holmstummel-Ende wird auf eine Länge von  $l_0 = 30mm$  im Abstand vom Mittelpunkt des Lagers A abgeschätzt. Abbildung 7.2 veranschaulicht den prinzipiellen Aufbau in der Draufsicht. Eine technische Zeichnung im Anhang illustriert die Konstruktion von Gurten und Steg. Sie gibt außerdem Aufschluss über die wichtigsten Maße und stellt die unterschiedlichen Wandstärken des Schaumkerns und des Faserverbundanteils im Steg für die verschiedene Bereiche im Querschnitt grafisch dar.

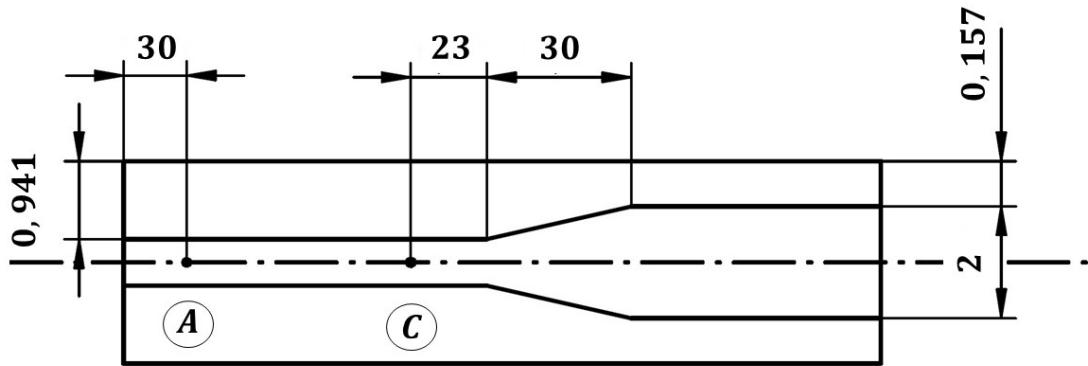


Abbildung 7.2: Draufsicht: Prinzipskizze der Sandwichstruktur im Steg

### 7.1.3 Konstruktion der Haut und der Rippen

Um die Haut vor Beulerscheinungen zu schützen, soll ein Schaumkern zwischen die innere und äußere Hautschicht gelegt werden. Der Beulberechnung ist zu entnehmen, dass mit einem 3mm dicken Kern ausreichende Sicherheit gegen Beulen gegeben ist (Gl. 5.36). Ein Schaumkern dieser Stärke ist darüber hinaus gut handhabbar und kann mithilfe eines heißen Drahtes einfach und kostengünstig aus einem Styrodurklotz ausgeschnitten werden. Um die Höhe  $h_a$  der Gurte möglichst nicht durch die Haut einzuschränken, soll der Schaumkern zu den Gurten hin über 5mm in einem sanften Übergang auslaufen, sodass nur das Laminat über dem oberen und unter dem unteren Gurt hergeführt werden muss. Abbildung 7.3 veranschaulicht die prinzipielle Gestaltung der Haut im Bereich des oberen Gurtes, der grau dargestellt ist.

Der Freiraum zwischen den Gurten, den Steglagen und der inneren Hautlage kann nun für die Vorder- und Hinterseite des Steges umrandet werden. Die darauf basierende Skizze ist die Grundlage der Konstruktion der zweigeteilten Wurzel- und Endrippe. Die Rippen werden in ihrer Dimensionierung als gegeben angenommen, eine Auslegung erfolgte im Rahmen dieser Projektarbeit nicht. Ein Belastungstest der Tragfläche würde in der Realität durch eine an der Endrippe angreifende Last erfolgen. Damit die Last angeschlagen werden kann, müssen zwei Bohrungen in der Endrippe vorgesehen werden, deren Abstand durch das gegebene Bauteil Endscheibe bestimmt wird. Zur einfachen Montage der Prü-

feinheit werden zwei Gewindegürtel konstruiert, die in die Bohrungen eingefügt werden.

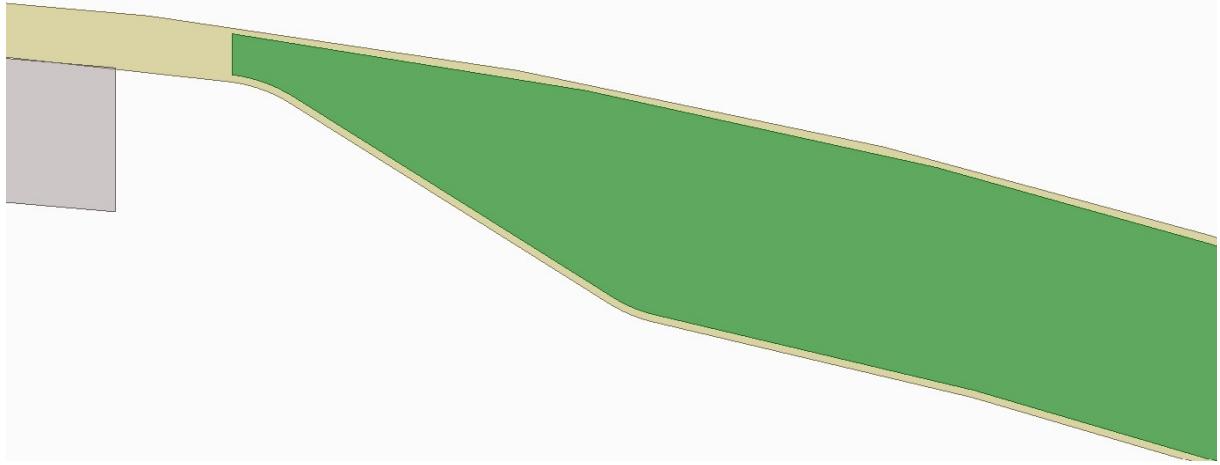


Abbildung 7.3: Hautsandwich am Übergang zum Gurt

#### 7.1.4 Konstruktion unterstützender Bauteile des Holms

Die Kraftaufnahme der als Fest- und Loslager modellierten Punkte A und B erfolgt durch zwei Hauptbolzen, die im Flugzeug die Tragflächen miteinander verbinden. In diesem Fall werden die Lagerkräfte von maximal  $5085,5\text{N}$  an den Teststand übertragen. Damit bei der Krafteinleitung in den Holm Spannungsspitzen vermieden werden, soll die Auflagefläche der Bolzen vergrößert werden. Dies geschieht, indem eine Holzkonstruktion für Vorder- und Rückseite des Holms erstellt wird, die der Kontur der Gurte angepasst ist und Bohrungen für die Bolzen enthält. Diese Klötze werden auf ihrer jeweiligen Stegseite mit den Gurten und dem Steg verklebt. Da der Abstand der Bohrungen mit  $76\text{mm}$  gering ist, wird ein längerer Holzklotz für beide Bohrungen konstruiert. Aussparungen an den Seiten und zwischen den Bohrungen sollen das Gewicht der Klötze reduzieren. Zum Schutz der Hauptbolzen werden zwei Messinghülsen konstruiert und in die Bohrungen eingefügt. So kann verhindert werden, dass die gefetteten Bolzen bei Montage und Demontage Späne aus dem Steg lösen oder sich verkanten. Die Messinghülsen weisen eine Wandstärke von  $0,5\text{mm}$  und einen Innendurchmesser von  $8\text{mm}$  auf. In der Fertigung kann auf kostengünstige Messingrohre zurückgegriffen werden. Die Konstruktion wird durch Abbildung 7.4 veranschaulicht. Eine technische Zeichnung des vorderen Holzklotzes mit Angaben zu den Hauptabmessungen befindet sich im Anhang.

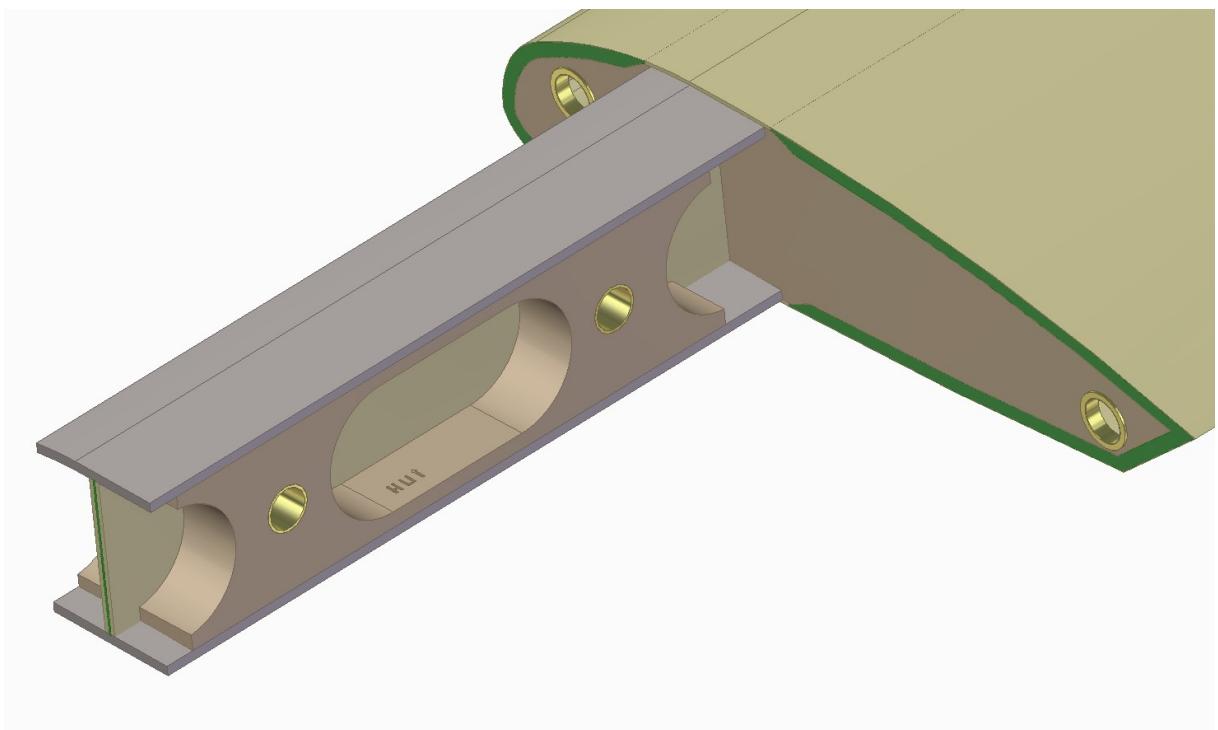


Abbildung 7.4: Holzklötze und Hülsen

### 7.1.5 Querkraftbolzen und Montage auf dem Teststand

Die Prüfung, ob die gesamte Auslegung der Tragfläche den Bestimmungen der Aufgabenstellung gerecht wird, erfolgt anhand einer FEM-Berechnung, anstelle der tatsächlichen Fertigung des Flügels und des Bruchtests. Dennoch kann mithilfe gegebener Zeichnungen der Teststandelemente geprüft werden, ob die konstruierte Tragfläche in der Realität auf dem Teststand montierbar wäre. Der Abstand der Hauptbolzen zueinander wurde bereits in der frühen Modellierung des Holms als Biegebalken berücksichtigt. Für die Positionierung der Bohrungen und Hülsen der Querkraftbolzen wird der Abstand zwischen den Langlöchern und der Aussparung für den Holm in der Montageplatte gemessen. An der gegenüberliegenden Wurzelrippe können so die Bohrungen festgelegt werden. Bei Verwendung der Maße aus der gegebenen technischen Zeichnung der Montageplatte, fällt auf, dass das Langloch zur Aufnahme des in Flugrichtung hinteren Querkraftbolzens für diese Konstruktion ungeeignet ist. Es liegt außerhalb des Bereichs der Wurzelrippe. Dies wird auf die Anordnung des Holms in der Tragfläche zurückgeführt, die die Position der Flügelkontur bezüglich der Montageplatte festlegt. Sie kann nachträglich nicht ohne größere Änderungen des Holmquerschnitts und eine damit verbundene Neuauslegung verändert werden. Abbildung 12.36 des Anhangs veranschaulicht die ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs. Um eine grundsätzlich neue Dimensionierung aller Komponenten zu vermeiden, wurde die Position des Langlochs angepasst. Da die Querkraftbolzen einen großen

Abstand zueinander aufweisen (vgl. Abb. 7.4), müssen zur Aufnahme der Torsionsmomente nur kleine zusätzliche Kräfte aufgenommen werden. Die Radien der Langlöcher in der Montageplatte begrenzen den Durchmesser der Querkraftbolzen auf maximal  $8,5\text{mm}$ . Gemäß 4.6.1 ist bereits ein Durchmesser von  $8\text{mm}$  mit großer Sicherheit ausreichend. Auch für die Querkraftbolzen werden Hülsen konstruiert, die die Wurzelrippe schützen und die Montage erleichtern. Sie sind in Abbildung 7.4 ebenfalls dargestellt.

Alle Komponenten der Tragfläche und ihre Positionen sind im Anhang auf einer Explosionszeichnung ersichtlich. Eine Grafik des gesamten CAD-Modells und der Bauteile des Teststandes ist ebenfalls im Anhang enthalten (Abb. 12.35). Abbildung 12.37 zeigt die auf der Montageplatte positionierte Tragfläche unter Verwendung des angepassten Langlochs.

## 7.2 Massenabschätzung (H.K.)

Auf Basis der Dimensionierung der einzelnen Komponenten kann die Masse der Tragfläche abgeschätzt werden. Im Folgenden werden die Volumina bestimmt, um mithilfe der Dichten des jeweiligen Werkstoffes auf die Masse zu schließen. Mithilfe des CAD-Programms können die Volumina zeitsparend und exakt bestimmt werden. Dies ist besonders für komplizierte Geometrien, zum Beispiel für den Schaumkern der Haut hilfreich.

### 7.2.1 Masse der Gurte

Für den oberen und unteren Gurt ergeben sich folgende Werte:

$$V_{Gurt,o} = A_{Gurt,o} \cdot (l_0 + l_1 + l_2 + l_3) = 4,983 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.1)$$

$$V_{Gurt,u} = A_{Gurt,u} \cdot (l_0 + l_1 + l_2 + l_3) = 4,98 \cdot 10^{-5} m^3. \quad (7.2)$$

Im nächsten Schritt wird die Dichte der Faserverbundbauteile bestimmt. Sie errechnet sich gemäß der Mischungsregel nach [Sch05] zu

$$\rho_{Verbund} = \varphi \cdot \rho_f + (1 - \varphi) \cdot \rho_m = 1728 \frac{kg}{m^3}. \quad (7.3)$$

Gemäß dieser Formel sind die Dichten der Verbundbauteile unabhängig von den verwendeten Geweben und ihren Flächengewichten, solange das gleiche Fasermaterial und der gleiche Faservolumengehalt vorliegen. Damit ergeben sich die Massen der Gurte zu

$$m_{Gurt,o} = V_{Gurt,o} \cdot \rho_{Verbund} = 0,0861 kg \quad (7.4)$$

$$m_{Gurt,u} = V_{Gurt,u} \cdot \rho_{Verbund} = 0,086 kg. \quad (7.5)$$

### 7.2.2 Masse des Stegs

Unterteilt in den Anteil des Schaums und den des Verbundmaterials, ergeben sich für den Steg folgende Volumina:

$$V_{Steg,Verb} = 1,813 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.6)$$

$$V_{Steg,Schaum} = 4,953 \cdot 10^{-5} m^3. \quad (7.7)$$

Für die jeweiligen Volumina folgt mit der Dichte  $\rho_{Verbund}$  und der Dichte des Schaums  $\rho_{Schaum} = 35 \frac{kg}{m^3}$ :

$$m_{Steg,Verb} = V_{Steg,Verb} \cdot \rho_{Verbund} = 0,031 kg \quad (7.8)$$

$$m_{Steg,Schaum} = V_{Steg,Schaum} \cdot \rho_{Schaum} = 0,002 kg \quad (7.9)$$

Als Werkstoff für den Schaum steht Styrodur zur Verfügung. Laut Trendbericht aus dem Magazin *Kunststoffe* beträgt die Dichte von extrudiertem Polystyrol-Hartschaumstoff (XPS)  $25 \frac{kg}{m^3}$  bis  $45 \frac{kg}{m^3}$ . Für die Massenabschätzung wurde der Mittelwert angenommen.

### 7.2.3 Masse der Haut

Das Volumen des Schaumkerns der Haut beträgt

$$V_{Haut,Schaum} = A_{Haut,Schaum} \cdot l_3 = 6,143 \cdot 10^{-4} m^3. \quad (7.10)$$

Mit der Dichte  $\rho_{Schaum}$  beträgt die Masse des Kerns

$$m_{Haut,Schaum} = V_{Haut,Schaum} \cdot \rho_{Schaum} = 0,022 kg. \quad (7.11)$$

Zur Bestimmung der Masse des Faserverbundanteils in der Haut wird die Länge der abgewickelten Hautschichten mit dem CAD-Programm bestimmt. Für die innere und die äußere Schicht ergeben sich:

$$l_{Haut,innen} = 346,46 mm \quad (7.12)$$

$$l_{Haut,aussen} = 367,83 mm \quad (7.13)$$

Die Dicke einer Schicht des Interglas 90070 Gewebes mit einer flächenbezogenen Masse von  $(\frac{m}{Lb}) = 80 \frac{g}{m^2}$  berechnet sich nach [Sch05] mit der Formel:

$$t = n \cdot \frac{m}{Lb} \cdot \frac{1}{\varphi \cdot \rho_f}. \quad (7.14)$$

Für eine Schicht,  $\varphi = 0,4$  und  $\rho_f = 2550 \frac{kg}{m^3}$  ist  $t_{Haut} = 0,078 mm$ . Die Breite entspricht Länge  $l_3$ , damit ergibt sich das Volumen der inneren und äußeren Hautschicht zu:

$$V_{Haut,innen} = l_{Haut,innen} \cdot l_3 \cdot t_{Haut} = 2,089 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.15)$$

$$V_{Haut,aussen} = l_{Haut,aussen} \cdot l_3 \cdot t_{Haut} = 2,218 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.16)$$

und für die Massen folgt:

$$m_{Haut,innen} = V_{Haut,innen} \cdot \rho_{Verbund} = 0,036 kg \quad (7.17)$$

$$m_{Haut,aussen} = V_{Haut,aussen} \cdot \rho_{Verbund} = 0,038 kg. \quad (7.18)$$

Für die Gesamtdicke des Verbundanteils der Haut wurde in der Auslegung  $0,75 mm$  vorgesehen. Aus der geringeren tatsächlichen Dicke ergeben sich ober- und unterhalb der Gurte Freiräume mit einer Dicke von  $t_{frei} = 0,75 mm - 2 \cdot 0,078 mm = 0,594 mm$ . Dieser Freiraum wird mit Harz ausgefüllt und muss zusätzlich berechnet werden. Die Länge des

Bereichs, in dem kein Schaumkern die innere und äußere Lage trennt und in der folglich dieser Freiraum auftritt, wird im CAD-Programm für die Oberseite zu  $l_{frei,o} = 31,18\text{mm}$  und für die Unterseite zu  $l_{frei,u} = 32,1\text{mm}$  bestimmt. Die Krümmung in diesem Bereich kann wegen des großen Krümmungsradius und der kleinen Länge vernachlässigt werden. Es ergeben sich die Querschnittsflächen der Freiräume:

$$\begin{aligned} A_{frei,o} &= l_{frei,o} \cdot t_{frei} = 18,52\text{mm}^2 \\ A_{frei,u} &= l_{frei,u} \cdot t_{frei} = 19,07\text{mm}^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Über die Extrusionslänge der Tragfläche  $l_3$  folgt für das Volumen der Freiräume:

$$\begin{aligned} V_{frei,o} &= A_{frei,o} \cdot l_3 = 1,432 \cdot 10^{-5}\text{m}^3 \\ V_{frei,u} &= A_{frei,u} \cdot l_3 = 1,474 \cdot 10^{-5}\text{m}^3 \end{aligned} \quad (7.20)$$

und mit der Dichte  $\rho_m = 1180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ :

$$\begin{aligned} m_{frei,o} &= V_{frei,o} \cdot \rho_m = 0,017\text{kg} \\ m_{frei,u} &= V_{frei,u} \cdot \rho_m = 0,018\text{kg}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

#### 7.2.4 Masse der Holzklötze und Rippen

Da die Holzklötze ebenfalls eine komplizierte Geometrie aufweisen, wird auch ihre Masse der Einfachheit halber mit dem CAD-Programm berechnet. Als Material wurde in der Bolzenauslegung Buchenholz gewählt, das nach [Win20] eine Dichte von  $\rho_{Buche} = 610 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  aufweist. Die Masse eines jeden Holzklotzes wird damit zu  $m_{Klotz} = 0,016\text{kg}$  bestimmt. Auf die gleiche Weise wird zur Bestimmung der Massen der Rippen verfahren. Die Wurzelrippe und die Endrippe bestehen jeweils aus zwei Teilen, die Masse einer Rippe wird mithilfe des Programms für Buchenholz zu  $m_{Rippe} = 0,004\text{kg}$  bestimmt. Darüber hinaus müssen die Massen der Hülsen ermittelt werden. Als Werkstoff ist Messing vorgesehen, dessen Dichte gemäß [MMH20] zu  $\rho_{Messing} = 8400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  angenommen wird. Die beiden Hülsen der Hauptbolzen wiegen damit jeweils  $m_{Haupthuelle} = 0,003\text{kg}$  und die der Querkraftbolzen jeweils  $m_{Querhuele} = 0,001\text{kg}$ . Die beiden zur Verbindung mit der Belastungseinheit des Teststandes erforderlichen Gewindegürtel der Endrippe werden aus Stahl gefertigt. Ihre Masse beträgt jeweils  $m_{Endhuele} = 0,001\text{kg}$ .

#### 7.2.5 Abschätzung der Verklebungen und der Gesamtmasse

Einen weiteren Anteil an der Gesamtmasse liefern die Klebeverbindungen. Zur Verklebung der Rippen mit dem Holm sind Holzklötze vorgesehen, die an die Vorder- und Hinterseite des Stegs geklebt werden und dadurch eine ausreichend große Klebefläche zur Verfügung stellen. Die Breite der Klötze wurde im Abschnitt 8.2 zu  $1,56\text{mm}$  berechnet. Zur einfachen

Fertigung können Holzleisten mit einem quadratischen Querschnitt von  $2mm \cdot 2mm$  gewählt werden. Bei einer Länge von  $\tilde{h}_i$  beträgt die Masse jeder Leiste weniger als  $0,1g$ . Da nur vier Leisten vorgesehen sind, kann die Masse vernachlässigt werden. Die Verklebungen von Steg und Gurt, sowie die Klebestellen zwischen den Halbschalen, sollen mit Mumpe und ohne den Einsatz zusätzlicher Gewebelagen oder Leisten erfolgen. Es wird angenommen, dass die Massen der Klebestellen, die allein an der Kontaktfläche zweier Bauteile liegen, vernachlässigbar sind. Lediglich die Klebebreite zwischen den Gurten und dem Steg in den Bereichen  $I$  und  $II$  ist breiter als der Steg selbst (Gl. ??), sodass von außen zusätzlich Mumpe aufgetragen werden muss. Es wird ein Dreiecksquerschnitt der Klebefuge angenommen, der in Abbildung 7.5 für den oberen Gurt dargestellt wird. Die Länge der Fuge beträgt  $l_0 + l_1 + l_2 = 0,143m$  in Holmlängsrichtung. Mit  $\rho_M = 1180 \frac{kg}{m^3}$  als angenommene Dichte der Mumpe ergibt sich die Masse der Verklebung zu  $m_{Kleber} = 0,015kg$ .

Fertigungsbedingt müssen die Halbschalen der Haut getrennt voneinander laminiert und anschließend verklebt werden. Dabei wird die notwendige Klebebreite durch einen schmalen Bereich, in dem sich die Hautlagen überlappen, erreicht. Auf die Auslegung wurde in dieser Projektarbeit verzichtet. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, dass zur Verklebung eine sehr dünne Harzsicht im Bereich der Überlappung aufgetragen wird, deren Einfluss auf die Massenbilanz als sehr gering eingeschätzt wird.

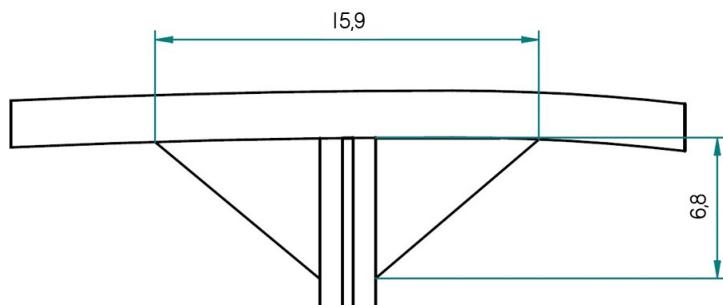


Abbildung 7.5: Verklebung von Steg und Gurt

Abschließend wird die Gesamtmasse aus der Summe der einzelnen Massen berechnet. Sie ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 m_{ges} &= m_{Gurt,o} + m_{Gurt,u} + m_{Steg,Verb} + m_{Steg,Schaum} \\
 &+ m_{Haut,Schaum} + m_{Haut,innen} + m_{Haut,aussen} \\
 &+ 2 \cdot m_{Rippe} + 2 \cdot m_{Klotz} \\
 &+ 2 \cdot m_{Haupthuelle} + 2 \cdot m_{Querhuele} + 2 \cdot m_{Endhuele} \\
 &+ m_{frei,o} + m_{frei,u} + m_{Kleber} \\
 &= 0,366kg
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Die Gewichtslimitierung von  $0,75kg$  wird eingehalten.

### 7.3 Bauanleitung für die Fertigung (T.B.)

Nach beendeter Auslegung, Dimensionierung und Konstruktion des Tragflügels erfolgt, die Entwicklungsphase abschließend, der Bau eines Prototyps. Versuchsbauten werden, neben der Erprobung der Fertigung und Funktion, hauptsächlich für Strukturtests zum Nachweis der erfolgten Rechnungen genutzt. Um den Modellflügel des Zaunkönigs fertigen zu können, wird im Folgenden eine grobstrukturierte Anleitung gestellt. Dabei werden jedoch nicht alle notwendigen Nebenschritte genannt, sondern von erfahrenen Handwerkern als bekannt vorausgesetzt. Ebenfalls wird nicht auf eine vorherige Fertigung kleinerer Teile eingegangen.

Der Bau des Flügels erfolgt in drei Abschnitten. Zuerst soll der Holm gebaut werden, danach die Flügelschale und abschließend erfolgt die Verklebung der Bauteile. Es werden beide Negativformen der Profilform zur Verfügung gestellt, verbaut werden die Gewebe Interglas 90070 (bidirektional) und 92145 (annähernd unidirektional), das Epoxidharz L385 inkl. Härter H386, Aerosil oder Baumwollflocken zum Andicken des Harze (ugs. Mumpe), Messing und Buchenholz. Zur Positionierung von Bauteilen und zum eigenen Formenbau sollen Strangprofile genutzt werden.

#### 1. Holm:

- (a) Jeweils zwei Strangprofile werden als Formwände für die Holmgurte in beiden Profilformen positioniert. Dadurch wird die Breite garantiert, während die Profilform die Wölbung schafft. Die Flügelform wird durch gefräste Profile verlängert, um den Holmstummel ebenfalls in gewölbter Geometrie bauen zu können.
- (b) Anschließend werden je 9 Lagen Interglas 92145 in diesen Formen laminiert.  
(Belegung nach Kapitel 4.3)
- (c) Nach dem Aushärten werden sowohl die Gurte als auch die Profile wieder aus der Profilform entnommen.
- (d) Die Gurte werden an den Enden auf die passende Länge geschliffen.
- (e) Der Schaumstoff wird zugeschnitten und die Abstufung geschliffen.
- (f) Der Schaumstoff wird nun mit angedicktem Harz (Harz vermischt mit Microballoons) „abgespachtelt“, um ein Vollsaugen der Poren mit nicht-gehärtetem Harz zu vermeiden. Der folgende Schritt muss so zeitnah erfolgen, dass die Härtung noch nicht erfolgt ist. Dadurch wird eine Nass-Nass-Verklebung des Schaumstoffs mit Geweben garantiert.
- (g) Es werden Lagen Interglas 90700 auf einer ebenen Fläche laminiert. Dabei muss auf die Abstufung von 12 auf 2 Gewebelagen und auf die 45°-Ausrichtung geachtet werden. Danach wird der Schaum positioniert und anschließend wieder

mit 12 bis 2 Lagen in umgekehrter Reihenfolge der Abstufung belegt (Belegung nach Kapitel 4.3).

- (h) Nach dem Härteten des Steg-Sandwichs wird dieser auf das Endmaß geschliffen.
- (i) Mittels kleiner Holz-Klebewinkel wird der Steg auf einem Holmgurt positioniert und mit Harz verklebt.
- (j) Nun werden die Holzklötze für die Bolzenaufnahmen, die Wurzlrippe und die Endrippe eingeklebt. An den verbleibenden Kanten der Verklebung des Steges mit dem Gurt wird mit Mumpe die nötige Klebefläche geschaffen.
- (k) Sobald die Mumpe gehärtet ist, wird der andere Gurt auf den Steg, die Rippen und die Holzklötze geklebt und die Klebekanten werden ebenfalls mit Mumpe ausgefüllt.
- (l) Abschließend werden in den Steg an den entsprechenden Stellen Löcher gebohrt und die Messinghülsen eingesetzt. Dabei kann die exakte Ausrichtung der Buchsen durch eine gleichzeitige Verbindung des Teststands mit Bolzen/Stiften erfolgen.

## 2. Flügelschale:

- (a) Anhand der Profilformen wird der Schaumstoff zugeschnitten und die Schrägen werden geschliffen.
- (b) Der Schaumstoff wird auch hierbei mit angedicktem Harz „abgespachtelt“, um ein Vollsaugen der Poren mit nicht-gehärtetem Harz zu vermeiden. Der folgende Schritt muss wiederum so zeitnah erfolgen, dass die Härtung noch nicht erfolgt ist. Dadurch wird eine Nass-Nass-Verklebung des Schaumstoffs mit Geweben garantiert.
- (c) In beide Profilschalen wird die äußere Lage Interglas 90070 laminiert, anschließend wird der Schaumstoff positioniert und die innere Lage folgt (Belegung nach Kapitel 4.4).

## 3. Verklebung:

- (a) Nun wird der Holm inkl. der Rippen in die untere Schale mit Mumpe geklebt. Entsprechende Hohlräume sollten mit Mumpe aufgefüllt werden, um eine durchgehend stoffschlüssige Verbindung zu schaffen.
- (b) Darauf wird die obere Flügelschale verklebt, dabei wird diese sowohl mit dem Holm, als auch mit der unteren Schale verklebt. Da es sich hierbei um eine Blind-Verklebung handelt, ist es zu empfehlen, etwas überschüssig Mumpe aufzubringen.
- (c) Die äußeren Klebekanten beider Flügelschalen werden in Form geschliffen.

- (d) Der Flügel ist nun fertiggestellt, abschließend könnte dieser gespachtelt und lackiert werden. Darauf wird jedoch aus Gewichtsgründen verzichtet. Um dabei nicht die äußere Gewebelage zu beschädigen, wäre es dafür angebracht, eine Schutz-Gewebelage zusätzlich in den Lagenaufbau einzuplanen.

Als grundlegendes Fertigungsverfahren steht das Handlaminier-Verfahren zur Verfügung. Neben diesem steht außerdem das Vakuumpressen und die Vakuuminjektion zur Auswahl. Ersteres Herstellungsverfahren beruht darauf, dass Gewebe- bzw. Gelegelagen manuell mit Pinseln und Schaum-Rollen mit Harz getränkt, per Hand ausgerichtet und anschließend mit diesen Werkzeugen entlüftet werden. Dieses bringt einen niedrigen Faservolumengehalt, jedoch auch eine individuellere Gestaltung eines Bauteils in offenen Formen mit sich.

Beim Vakuumpressen handelt sich um eine Weiterentwicklung dieses Verfahrens. Nach dem eigentlichen Laminieren wird das Bauteil zusätzlich mit einer Folie abgedichtet, sodass die eingeschlossene Luft entzogen werden kann und die Folie somit einen zusätzlichen Druck auf das Bauteil ausübt. Dadurch kann überschüssiges Harz von einem aufgebrachten Fließ aufgenommen werden, sodass der Faservolumenanteil steigt. Es muss jedoch in Erfahrung gebracht werden, ob bei Sandwich-Laminaten der Stützstoff dem Flächendruck standhalten kann.

Der Faservolumenanteil kann weiter gesteigert werden, in dem das Harz nicht während der Belegung eingebracht, sondern nach dem Vakuumieren mittels Unterdruck in das Gewebe gesaugt wird. Hierbei ist jedoch Erfahrung nötig, ob das Harz die geforderte Zähigkeit aufweist, um alle Fasern tränken zu können. Der hohe Faservolumengehalt (ca. 50%) ist auch mit einem höherem Arbeitsaufwand verbunden. [Wit14]

Es erscheint sinnvoll, den Tragflügel im Handlaminat herzustellen. Für die Gewichtseinsparung und Steifigkeitserhöhung durch einen höheren Faservolumengehalt (Mischungsregel) wären die beiden anderen Verfahren vorteilhafter, dieses würde aber nicht den zusätzlichen Arbeitsaufwand und die nicht zwingend erforderlichen Gewichtersparnisse rechtfertigen. Außerdem können so kurzfristig kleinere Anpassungen der Formgestaltung während der Fertigung einfach durchgeführt werden, was sich für einen Prototypen als unabdingbar gestaltet. Zusätzlich werden durch die Wahl der Fertigung ein geringerer Erfahrungsschatz und weniger Halb- und Werkzeuge für die Fertigung benötigt.

## 8 Begutachtung der erarbeiteten Ergebnisse

### 8.1 Gewichtsnormalisiertes Festigkeitskriterium (O.S.)

Um eine Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Flügeln zu schaffen wird die gewichtsnormalisierte Festigkeit

$$P = \frac{m_{\text{Belastung,max}}}{m_{\text{Fluegel}}} \quad (8.1)$$

definiert. Es wird also die Gewichtskraft als Masse  $m_{\text{Belastung,max}}$ , die der Flügel im Testaufbau maximal aushält, ins Verhältnis mit der Flügelmasse  $m_{\text{Fluegel}}$  gesetzt. Auch wenn das Ziel war, einen möglichst leichten Flügel, der den in der Aufgabenstellung formulierten Anforderungen entspricht, zu konstruieren, wird somit berücksichtigt, dass mehr Material zwar eine höhere Masse mit sich bringt, aber er wahrscheinlich auch größere Lasten aushalten kann. Üblicher Weise würde man die Bruchlast im Teststand ermitteln, aber auf Grund der COVID-19 Pandemie ist es uns nicht möglich den Flügel zu bauen, geschweige denn zu testen.

Eine Möglichkeit wäre es 500 Newton als Bruchlast anzunehmen, da wir im Rahmen der Projektarbeit nachgewiesen haben, dass unsere Konstruktion dies aushält. Da jedoch immer eher vorsichtige Annahmen getroffen und die errechneten Werte dann meist noch aufgerundet wurden, wäre die gewichtsnormalisierten Festigkeit weit unter dem voraussichtlich im Teststand ermittelten Wert. Somit wäre der Aussagewert sehr gering. Eine bessere Möglichkeit bietet hier das FE-Modell. Dies ist zwar auch nicht perfekt, da zum einen die Einspannung auf Grund der Holzblöcke nicht perfekt realistisch modelliert werden kann. Die kritischste Stelle liegt nach Überlegungen und durch ABAQUS bestätigt am Ansatz des Holmstummels, also dem Flügelende, dass am Rumpf anliegt, bzw. an der Stelle, wo der GFK im Steg dicker wird. Diese Stellen liegen weit genug von der Einspannung entfernt, sodass die Werte als plausibel angenommen werden können. Zum anderen ist durch die Studentenversion von ABAQUS der Idealisierungsgrad auf 1000 Knoten und somit auch die Genauigkeit der Ergebnisse beschränkt. Trotzdem ist dies mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der beste Ansatz um die Bruchlast zu ermitteln, da hier als Einziges der Flügel als Ganzes modelliert wird.

Da nicht bekannt ist, in welchem Bereich das Material zuerst versagt, wird in Gurt, Steg und Schale jeweils der Ort der höchsten Belastung einzeln betrachtet. Da nur ein einheitlicher Wert für die Spannung der Elemente gegeben wird, diese in Realität aber nicht über alle Schichten konstant ist, wird die Dehnung betrachtet, da sie für alle identisch ist. Wird nun die Dehnung in die beiden Achsenrichtungen und der Schubwinkel in *elamX<sup>2</sup>* eingegeben, erhält man sofort die Sicherheit gegen den Bruch. Die Ergebnisse sind in Abbildung 12.13 bis 12.16 zu erkennen, wobei es zwei verschiedene Werte für den Holm gibt, da er auf der einen Seite auf Druck und auf der anderen auf Zug beansprucht wird. Der

untere Gurt hat demnach die geringste Sicherheit von 1,31. Da die Belastungen im Flügel linear mit der anliegenden Kraft steigen, lässt sich der Faktor direkt auf die aufgebrachte Last von 500N übertragen. Somit ergibt sich eine Bruchlast von 650N oder mit einer Erdbeschleunigung von  $9,81 \frac{m}{s^2}$

$$m_{\text{Belastung,max}} = 66,26 \text{ kg}.$$

Eine erneute FEM-Berechnung mit der gesteigerten Kraft liefert neue Dehnungen, die im Gurt wie erwartet eine Sicherheit von ungefähr 1 ergeben. Da der kleinste Beulfaktor deutlich höher als diese Sicherheit ist, kommt es auch nicht bei der erhöhten Last zum Beulen. Für das gewichtsnormalisierte Festigkeitskriterium ergibt sich nun also mit  $m_{\text{Flügel}}$  aus der Massenabschätzung ungefähr ein Wert von

$$P = 181,04.$$

## 8.2 Diskussion der Ergebnisse (H.G.)

Die Ergebnisse der Messwerte sollen nun mit den Werten anderer Gruppen verglichen werden. Dafür wurde uns eine Excel-Tabelle eines vor einigen Jahren durchgeföhrten Versuchs zur Verfügung gestellt, sowie die Daten einer Parallelgruppe.

Ein Aufgabenkriterium ist die Absenkung der Flügel spitze bei einer Belastung von 100N. Unser Flügel erreichte dabei eine Absenkung von 17,34mm. Aus den Daten der uns zur Verfügung stehenden Testreihe geht eine Absenkung von 40,833 mm bei einer Last von 100N hervor.

Ein weiteres Vergleichskriterium ist die Bruchlast, die bei unserem Flügel 650N beträgt. Die Bruchlast der Testreihe beträgt nur 434,63N. Da jedoch nicht nur die maximal ertragbare Last, sondern auch das Gewicht eine große Rolle spielt, wird das gewichtsnormalisierte Festigkeitskriterium herangezogen (Glg. 8.1). Für unseren Flügel ergibt sich dort ein Wert von  $P = 181,04$ . Für den Vergleichsflügel ergibt sich mit  $m_{\text{Last,max}} = 44,305 \text{ kg}$  und  $m_{\text{ges}} = 0,699 \text{ kg}$  ein Wert von  $P = 66,38$ .

Zusätzlich kann der maximal auftretende Torsionswinkel verglichen werden. Unser Flügel weist bei einer Belastung von 650N einen Torsionswinkel von 3,01 Grad auf. Der Winkel des Vergleichsobjektes beträgt bei 434,63N 1,5 Grad. Diese Werte sind aufgrund der verschiedenen Kräfte jedoch nur schwer vergleichbar.

Allgemein lässt sich sagen, dass unser Flügel in fast allen Kategorien besser abschneidet. Jedoch kann dies auch durch zwangsläufige Ungenauigkeiten in der Herstellung verursacht sein, die in unserem theoretischen Modell nicht berücksichtigt werden können.

Etwas aussagekräftiger ist der Vergleich mit der Parallelgruppe, die die gleiche Aufgabenstellung bekommen hat.

Die Absenkung bei einer Last von 100N beträgt dort  $Z_{100N} = 12,91 \text{ mm}$ . Ein Bruch ergibt

sich voraussichtlich bei  $500N$ , wodurch sich zusammen mit der Masse von  $m = 0,44375kg$  ein Wert von  $P = 112,68$  berechnen lässt. Alles in Allem kann man direkt erkennen, dass dieser Flügel zwar eine höhere Steifigkeit, aber eine niedrigere Festigkeit aufweist.

Kategorie	Eigene Ergebnisse	Parallelgruppe	Praxisgruppe
Absenkung 100N	17,34mm	12,91mm	40,83mm
Bruchlast	650N	500N	434,63N
Masse	366g	443,75g	699g
$P$	181,04	112,68	66,38
max. Torsionswinkel	3,01°	-	1,5°

### 8.3 Ausblick auf Optimierungen der Berechnungen (H.G.)

Da für die Auslegung viele Annahmen und Vereinfachungen getroffen wurden, lassen sich einige Optimierungsmöglichkeiten für das Projekt nennen.

Zunächst ließe sich die Dicke der Gurte über die Holmlänge als nicht konstant annehmen um zusätzlich das Gewicht zu verringern. Da dies jedoch schwer bis nicht analytisch zu lösen wäre und einen signifikanten Mehraufwand für eine relativ kleine Gewichtsänderung mit sich gebracht hätte, wurde in dieser Arbeit davon abgesehen.

Die Wurzelrippe wurde mit einer definierten Dicke als gegeben angesehen. Hier wäre ebenfalls eine Möglichkeit, um evtl. Gewicht einzusparen und die Absenkung zusätzlich zu verringern. Da dies jedoch zusätzliche Einarbeitung in die Holztechnik und deutlich mehr Zeitaufwand mit sich bringen würde, wurde hier davon abgesehen.

Die Berechnung des FKV wurde mittels der Mischungsregel durchgeführt. In alternativer Literatur wurde dies beispielsweise nach Puck berechnet. Dadurch könnten sich genauere Materialkennwerte ergeben, was zu einer möglichen Verringerung der GFK-Schichten und somit des Gewichts führen könnte. Dies würde aber wiederum zu einer deutlich aufwändigeren Rechnung führen, deren Ertrag zu gering ist, um dies zu rechtfertigen.

In mehreren Berechnungen wurden schwächere Annahmen getroffen, als die Realität widerspiegelt. So wurde in der Auslegung des Holms und der Haut die Steifigkeit des Schaums nicht mit eingerechnet, wodurch etwas Leichtbaupotential verschenkt wurden.

Es wurde in vielen Fällen mit einer Sicherheit gerechnet. Da in den Annahmen und in den Materialkennwerten schon eine gewisse Ungenauigkeit und diese oft kleiner als in der Realität sind, können die Sicherheitswerte herabgesetzt, oder sogar gleich 1 gesetzt werden.

Die FEM-Modellierung ist ebenfalls in vielerlei Hinsicht optimierbar. Durch die Studentenversion kann das Bauteil nicht so genau vernetzt werden, wie es für eine genaue Auswertung nötig wäre. Zusätzlich sind die Holzblöcke am Holmstummel nicht modelliert worden, da dies sehr aufwändig gewesen wäre.

## 9 Zusammenfassung

### 9.1 Die Berechnungen im Überblick (H.K.)

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Auslegungsschritte und Berechnungen zusammengefasst und die wichtigsten Aspekte herausgestellt.

Die gesamte Auslegung folgte übergeordneten *Zielsetzungen*, die das mechanische Verhalten bei quasistatischer Belastung an der Endrippe vorgeben. Bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 100N$  darf sich die Flügelspitze um höchstens  $w(100N) = 22mm$  absenken. Um diese Bedingung sicher zu erfüllen wurde ein Sicherheitsfaktor von  $j = 1,1$  festgelegt, der die zulässige Absenkung auf  $w_{j=1,1}(100N) = 20mm$  verringert. Bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  darf die Tragfläche nicht versagen und Beulerscheinungen dürfen nicht auftreten. Zusätzlich sollte ein Hauptaugenmerk auf das möglichst geringe Gewicht der Konstruktion gerichtet sein.

Der Auslegung des Holms ging die *Modellierung als Biegebalken* voraus, der mit der schubstarren Balkentheorie nach Bernoulli berechnet wurde. Zur Modellierung wurden die Hauptbolzen als Lager interpretiert, die Querkraftbolzen und die Prüfkraft als äußere Lasten. Vorgegebene Längenangaben des Teststandes und der Tragfläche bestimmen die Maße der einzelnen Bereiche. Für jeden Bereich wurden die Differentialgleichungen des Biegebalkens aufgestellt und gelöst. Die zentralen Ergebnisse sind die Kenntnisse der Schnittkraft- und -momentenverläufe, sowie die erforderliche Biegesteifigkeit von  $EI_x = 962,552Nm^2$  zur Einhaltung der maximalen Absenkung  $w_{j=1,1}(100N)$ . Zur Einhaltung der Anforderungen an die Festigkeit sind die Querkräfte  $Q_1(500N) = 5085,5N$  in Bereich I,  $Q_2(500N) = 0N$  in Bereich II und  $Q_3(500N) = -500N$  in Bereich III relevant.

Die *Holmgurte* nehmen das Biegemoment auf und sind damit Hauptbestandteil der Auslegung zur Einhaltung des Steifigkeitskriteriums. Um das erforderliche Flächenträgheitsmoment der Rechteckquerschnitte bei einer möglichst kleinen und damit gewichtsoptimierten Querschnittsfläche zu erreichen, wurden die Gurte in z-Richtung möglichst weit auseinander gelegt und möglichst breit in x-Richtung gestaltet. Die resultierende Gurtdicke wurde mit  $n = 9$  Lagen des annähernd unidirektionalen Gewebes Interglas 92145 erreicht und beträgt damit  $\tilde{h} = 1,941mm$ . Die Anpassung der rechteckigen Gurtquerschnitte an die gekrümmte Profilkontur der Tragfläche verringerte das Flächenträgheitsmoment leicht, dennoch ist das dadurch entstandene  $\tilde{I}_x > I_{min}$  und maximale Randfaserspannung an der Stelle weniger als halb so groß, wie die zulässige Spannung des unidirektionalen Handlaminate.

Der *Holmsteg* wird durch drei Kraftflüsse beansprucht. Durch die stoffschlüssige Verbindung von Gurten und Steg wird die Längsdehnung  $\epsilon_{Gurt}$  dem Steg aufgeprägt und führt zu einem Normalkraftfluss  $n_e$  parallel zu den Gurten. Aufgrund der Absenkung des Holms entstehen Druckkräfte, die einen zu den Gurten senkrechten Kraftfluss  $n_A$  erzeugen. Zusätzlich wirkt ein Schubfluss  $q_s$ . Zur Vorauslegung wurde der Glasfaserverbund durch allgemeine Dimensionierungskennwerte charakterisiert, bezüglich der Steifigkeitseigenschaften mit  $K_{E\#}$  und mit  $K_{\sigma d}$  für die Festigkeitseigenschaften. Mithilfe der VDI 2013 konnten auf diese Weise die Lagenanzahlen zu  $n = 20$  für die Bereiche *I* und *II* und  $n = 2$  für den Bereich *III* bestimmt werden.

Der Tatsache, dass die Auslegung des Holmstege nach dieser Richtlinie nur überschlägig erfolgt ist, wurde in der detaillierteren Dimensionierung mit der *CLT* Rechnung getragen. Diese berücksichtigt die gegebenen Materialkennwerte des Laminats. Die aus der Balkenanalyse und Schubflussberechnung hervorgehenden Beanspruchungen, sowie die Lagenanzahlen der Vorauslegung wurden als Grundlage für das Festigkeitskriterium nach Puck verwendet. Mithilfe des Laminatrechners ließen sich die Lagenanzahlen und Beanspruchungen variieren und Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch bestimmen. Die Analyse hat gezeigt, dass die Lagenanzahlen erhöht werden mussten, auf  $n = 24$  in den Bereichen *I* und *II*, sowie  $n = 4$  im Bereich *III*.

Um die *Sicherheit gegen Beulen* für den Holm zu prüfen, wurden anschließend der auf Druck beanspruchte Gurt und der Steg mithilfe der Berechnungsmethoden nach Hertel analysiert. Für den Druckgurt konnte unter Verwendung des E-Moduls und der Gurdicke die Sicherheit gegen Beulen zu  $j_{Gurt} = 1,08$  bestimmt werden. Der Steg wurde bereichsweise mit den jeweils vorliegenden Biege- und Schubbeanspruchungen untersucht. Die Bereiche *I* und *II* sind mit Sicherheiten von  $j_I = 1,148$ , bzw.  $j_{II} = 1,59$  schon ohne die Verwendung eines Schaumkerns sicher gegen Beulen. Für den Bereich *III* ist eine Sandwichkonstruktion zur Gewährleistung der Beulsicherheit notwendig. Ein 2mm starker Schaumkern wurde gewählt, um die Fertigung zu vereinfachen. Damit ergibt sich eine Beulsicherheit von  $j_{III} = 6,88$  im Bereich *III* und eine zusätzliche Sicherheit für die Bereiche *I* und *II*.

Die *Klebeverbindungen* zwischen dem Steg und den Gurten werden durch das Aufbringen von Mumpe hergestellt. Mit der gegebenen Schubfestigkeit  $\tau_{Mumpe} = 10MPa$  wird eine Kleebreite von  $l = 15,9mm$  in den Bereichen *I* und *II* benötigt, für den schwächer beanspruchten Bereich *III* reichen  $l = 1,62mm$ . Bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  wird gemäß der grundlegenden Annahme  $F_Q = F_{pruef}$  eine ebenso große Kraft über die Wurzelrippe abgesetzt. Eine schmale Holzleiste mit einer Breite von 1,56mm kann auf

jeder Seite des Stegs die Klebefläche zwischen Wurzelrippe und Steg bereitstellen.

Als Verbindung der Tragfläche zum Teststand sind zwei *Hauptbolzen* und zwei Querkraftbolzen vorgesehen, deren Durchmesser bereits durch die Bohrungen im Teststand festgelegt ist. Beide Hauptbolzen werden bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500N$  durch eine  $5085,5N$  beansprucht. Unter Berücksichtigung der Bolzenlänge wurde eine Mindeststreckgrenze des Bolzenwerkstoffes von  $R_e = 360,8MPa$  ermittelt. Als Werkstoff für alle Bolzen wurde daraufhin S620Q gewählt. Diese Wahl gewährleistet auch, dass die Querkraftbolzen mit einem Durchmesser von  $d = 8mm$  sicher ausgelegt sind.

Die im Allgemeinen außerhalb des Schubmittelpunkts der Tragfläche angreifende Belastung, führt zu einem Torsionsmoment und einer Biegebelastung des Flügels. Letztere wird durch den Holm aufgenommen, der unter dieser Annahme bereits dimensioniert wurde, ersteres muss durch die Flügelschale aufgenommen werden und darf hier nicht zu Beulerscheinungen führen. Zur Bestimmung des Schubflusses in der Schale, wurde die Profilkontur durch zehn Abschnitte angenähert und der Schaum der Sandwichkonstruktion vernachlässigt. Für die erste Berechnung wurde die Hautdicke zu  $t = 0,2mm = konst.$  angenommen. Bezüglich der vordersten Kante und der speziell definierten Koordinatenrichtungen des angenäherten Profils liegt der Schwerpunkt bei  $y_0 = 78,53mm$  und  $z_0 = -15,39mm$ . Über die Flächenträgheits-, Deviations- und statischen Momente wurde die Lage des Schubmittelpunkts im Falle des offenen Profils lokalisiert, der bei  $y_M = 207,60mm$  und  $z_M = -41,35mm$  und damit, wie erwartet, außerhalb des Profils liegt. Die Kontur wurde geschlossen und über die Momentenäquivalenz die Lage des Schubmittelpunktes zu  $y_{Mg} = 76,78mm$ ,  $z_{Mg} = -21,56mm$  berechnet. Für den entstandenen Zweizeller wurde unter Annahme gleicher Verwindung beider Zellen der Drillwinkel bei einer Belastung von  $F_{pruef} = 500N$  im 1/4-Punkt zu  $\varphi = -1,87^\circ$  ermittelt. Darüber hinaus konnte mit den Kenntnissen auftretender Schubflüsse die maximale Schubspannung ermittelt werden. Zur Dimensionierung der Hautstärke wurde die Berechnung der Schubflüsse für mehrere Hautstärken  $t$  vorgenommen. Die so bestimmten maximalen Schubflüsse wurden mit den zugehörigen Lagenaufbauten in den Laminatrechner *eLamX<sup>2</sup>* eingegeben, um die Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch zu ermitteln.  $n = 2$  Lagen ermöglichen eine Sandwichkonstruktion und sichern die Auslegung gegenüber den Vereinfachungen ab. Daraus ergab sich ein Drillwinkel für die neue Dicke von  $\varphi(500N) = -2,32^\circ$ .

Die Auslegung nach Handbuchmethoden wurde durch die *Beulabschätzung der Flügelschale* abgeschlossen. Dazu wurde der gefährdetste Profilabschnitt betrachtet, dessen Krümmung vernachlässigt wurde, um die Sicherheit zu erhöhen und um die Rechnung zu vereinfachen. Weiterhin wurde mit der größten auftretenden Schubspannung gerechnet, obwohl diese nicht im betrachteten Bereich vorliegt. Bei Verwendung eines 3mm dicken Schaum-

kerns ergibt sich eine Sicherheit gegen Beulen von  $j = 1,09$ .

## 9.2 Die Konstruktion und FEM-Analyse im Überblick (H.K.)

Als *Grundlage der FEM-Analyse* und zur Veranschaulichung der vorangegangenen Auslegung nach Handbuchmethoden, wurde ein Modell der Tragfläche im CAD-Programm erstellt. Es berücksichtigt alle bisherigen geometrischen Größen. Des Weiteren wurden zusätzliche Bauteile und Details erstellt. Für die Sandwichkonstruktion der Flügelschale wurde eine Lösung gefunden, bei der der Schaumkern die beulgefährdeten Bereiche schützt, im Bereich der Gurte jedoch ausläuft, um die Höhe  $\tilde{h}_a$  des Holms nicht weiter einzuschränken. Es wurden Wurzel- und Endrippe konstruiert, in denen Bohrungen zur Aufnahme der Querkraftbolzen und zur Verschraubung der Endplatte vorgesehen sind. Messinghülsen wurden für die Bohrungen der Bolzen erstellt, um die betreffenden Bereiche zu schützen und die Montage zu erleichtern. Auch die Holzklötze, die die Auflagefläche der Hauptbolzen am Steg vergrößern, wurden konstruiert. Alle Bauteile wurden zum Schluss im CAD-Programm zusammengebaut. Die jeweiligen Dichten wurden den Komponenten zugeordnet und ermöglichen eine Massenabschätzung des Tragflügels zu  $m_{ges} = 0,366\text{kg}$ .

Der im CAD-Programm zusammengebaute Tragflügel wurde zur *FEM-Analyse in Abaqus* importiert. Die Analyse dünnwandiger Bauteile wird durch die Verwendung von Schalenmodellen erleichtert, sodass der Volumenkörper im ersten Schritt in Flächen umgewandelt wurde. Die Materialkennwerte für Styrodur und GFK wurden in das Programm integriert und das Laminat zusammengestellt. Anschließend wurde den einzelnen Flächen die Dicke des zugehörigen Bauteils, bei GFK-Teilen die jeweilige Lagenzahl zugeordnet. Lager A und B wurden als feste Einspannung modelliert, die Querkraftbolzen und Prüfkraft als äußere Lasten, letztere mit Angriffspunkt im 1/4-Punkt. Die Analyse hat gezeigt, dass sich die Flügelspitze bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 100\text{N}$  um  $w(100\text{N}) = 17,34\text{mm}$  absenkt. Dieses Ergebnis bestätigt die Einhaltung der Anforderung an die Steifigkeit die eine Absenkung von  $w_{zul} = 20\text{mm}$  erlaubt. Um die Einhaltung der Festigkeitsanforderungen zu prüfen, wurde ein Prüfkraft von 500N eingestellt. Spannungsspitzen ergaben sich im Bereich der Hauptbolzen, die jedoch durch die nicht modellierten Holzklötze gemildert würden. Genauere Aussagen zur Ertragbarkeit der Belastungen, lieferte die Analyse der größten aufgetretenen Dehnungen im Faserkoordinatensystem, die als für alle Lagen gleich angenommen wurden. Die Dehnungen konnten in *elamX<sup>2</sup>* übertragen werden, um auf diese Weise die Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch an einer kritischen Stelle zu ermitteln. Bei einer Prüfkraft von  $F_{pruef} = 500\text{N}$  ergaben sich die kleinsten Sicherheiten gegen Zfb im Steg zu  $j_{min} = 2,32$ , in der Haut zu  $j_{min} = 2,785$ , am oberen Gurt zu  $j_{min} = 2,332$  und am unteren Gurt zu  $j_{min} = 1,312$ . Es wird vermutet, dass diese, gegenüber der beabsichtigten Auslegung, großen Sicherheiten auf die konservativen

Annahmen der einzelnen Auslegungsschritte zurückzuführen sind. Die gegenseitige Stützung der Komponenten untereinander, die in der Auslegung nach Handbuchmethoden nicht berücksichtigt werden konnten, wurde so deutlich.

Mithilfe des FEM-Programms wurde auch eine *Beulanalyse* durchgeführt. Da der Holmstummel nicht genau genug modelliert werden konnte, wurde vereinfachend eine Einspannung an den Querkraftbolzen angenommen. Nahe dieser Einspannung tritt das Beulen am ehesten auf. Der Beulfaktor entspricht dem Sicherheitsfaktor bzgl. einer Beulform. Selbst bei  $F_{pruef} = 1000N$  beträgt er noch 1,0253, damit wird die Konstruktion als sicher gegen Beulen im beabsichtigten Bereich der Prüfkraft angenommen.

Abschließend wurde das *gewichtsnormalisierte Festigkeitskriterium* eingeführt, dass die Güte der Konstruktion hinsichtlich Belastbarkeit in nur einem Wert zusammenfasst. Zur Ermittlung dieses Wertes wird die maximal ertragbare Belastung in Kilogramm durch die Flügelmasse geteilt. Das Kriterium eignet sich besonders zum Vergleich verschiedener konstruktiver Lösungen. Die maximale Belastbarkeit des in dieser Arbeit vorgestellten Flügels wurde mithilfe von ABAQUS und *eLamX<sup>2</sup>* ermittelt. Die Dehnungen bei  $F_{pruef} = 500N$  wurden an kritischen Stellen der einzelnen Komponenten bestimmt und in *eLamX<sup>2</sup>* übertragen. Die geringste Sicherheit gegen Zwischenfaserbruch wurde im unteren Gurt lokalisiert. Sie beträgt  $j_{min} = 1,31$ . Die Anpassung der Prüfkraft auf  $F_{pruef} = 500N \cdot 1,3 = 650N$  senkte diese Sicherheit auf ca. 1, sodass  $650N = 66,26kg \cdot |\vec{g}|$  als maximale Belastbarkeit angenommen wurde. Das gewichtsnormalisierte Festigkeitskriterium lieferte damit einen Wert von  $P = 181,04$ . Diese Ergebnisse wurden als Diskussionsgrundlage zum Vergleich mit zwei anderen Tragflächen verwendet. Es stellte sich heraus, dass die in dieser Arbeit behandelte Tragfläche im Vergleich zu einer anderen Lösung mit den gleichen Anforderungen um ca. 17% leichter ist und dennoch 30% größere Lasten erträgt. Auch wurde ein Vergleich zu einer im Teststand erprobten Tragfläche gezogen. Diese erreichte ein  $P = 66,38$  und wog 90% mehr als der Gegenstand dieser Arbeit. Trotz der guten Ergebnisse im Vergleich zu anderen Arbeiten, wurden für diese Tragfläche mehrere Optimierungsmöglichkeiten identifiziert, die einerseits Leichtbaupotentiale in der analytischen Auslegung, andererseits in der numerischen Strategie eröffnen.

## 10 Quellenverzeichnis

- [FrV19] Frerichs, L; Vietor, T.: „*Grundlagen komplexer Maschinenelemente und Antriebe - Vorlesungsskript*“; TU Braunschweig - IMN, IK, Braunschweig, 2019/20
- [GKM14] Gomeringer, R.; Kilgus, R., Menges, V.; Oesterle, S.; Rapp, T.; Scholer, C.; Stenzel, A.; Stephan, A.; Wieneke, F.: „*Tabellenbuch Metall*“; 47. Auflage, Europa Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2014
- [Gle08] Glenz, W.: „*Kunststoffe*“; 10. Auflage, Hanser, 2008
- [Hau21] Hauffe, A.: „*expandable Laminate eXplorer - eLamX*“; TU Dresden - ilr; <https://bugs.elamx.de/projects/expandable-laminate-explorer-elamx>, 01.01.2021
- [Her60] Hertel, H.: „*Leichtbau: Bauelemente, Bemessungen und Konstruktionen von Flugzeugen u.a.*“; Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- [Hor20a] Horst, P.: „*Elemente des Leichtbaus, Vorlesungsskript*“; IfL, TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [Hor20b] Horst, P.: „*Finite Elemente 1, Vorlesungsskript*“; IfL, TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [Hor20c] Horst, P.: „*Ingenieurtheorien des Leichtbaus, Vorlesungsskript*“; TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [LiN15] Linke, M.; Nast, E.: „*Festigkeitslehre für den Leichtbau, Ein Lehrbuch zur Technischen Mechanik*“; 1. Auflage, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2015
- [Mis36] Mises, R. V.: „*Fluglehre: Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung*“; 5. Auflage, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1936
- [MMH20] Mittelrheinische Metallgießerei Heinrich Beyer GmbH: „*Produktkatalog 2020*“; 2020
- [Ost18] Ostermeyer, G.-P.: „*Mechanik 1 - Vorlesungsskript*“; 7. Auflage, Technische Universität Braunschweig - IDS, Braunschweig, 2018
- [Ron99] Ronig, S.: „*Festigkeitsnachweis der Flügelstruktur für das Segelflugzeug SB 14*“; Akademische Fliegergruppe e.V., Braunschweig, 1999
- [Sch05] Schürmann, H.: „*Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*“; 2. Auflage, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2005
- [SiV19] Sinapius, M.; Vietor, T.: „*Grundlagen des Konstruierens - Vorlesungsskript*“; TU Braunschweig - ehem. IAF, IK, Braunschweig, 2019

- [Stö14] Stöferle: „*Glasfilamentgewebe für die Kunststoffverstärkung, Produktspezifikation 92145*“; Porcher Industries Germany GmbH, 2014
- [Stö15] Stöferle: „*Glasfilamentgewebe für die Kunststoffverstärkung, Produktspezifikation 90070*“; Porcher Industries Germany GmbH, 2015
- [VDI06] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 3, Entwicklung von Bauteilen aus -Faser-Kunststoff-Verbund, Berechnungen*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, 2006
- [VDI70] VDI-Gesellschaft Materials Engineering: „*VDI 2013 (Blatt 1)-Dimensionierung von Bauteilen aus GFK (Glasfaser verstärkte Kunststoffe)*“; VDI-Gesellschaft Materials Engineering, 1970
- [VDI89] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 1, Entwicklung von Bauteilen aus -Faser-Kunststoff-Verbund, Grundlagen*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, 1989
- [VDI93] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 2, Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund, Konzeption und Gestaltung*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, 1993
- [Win20] Winter, H.: „*Specific gravity of inner and outer beech bark*“; European Journal of Wood and Wood Products, 2020
- [Wit14] Witten, E.: „*Handbuch Faserverbundkunststoffe/Composites: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen*“; 4. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014
- [WNB16] Wriggers, P.; Nackenhorst, U.; Beuermann, S.; Spiess, H.; Löhner, S.: „*Technische Mechanik kompakt*“; 2. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006
- [HUM10] Hummel, D.: „*Braunschweigerische Luftfahrtgeschichte*“; 1. Auflage, Appelhans Verlag, Braunschweig, 2010

## 11 Abbildungsverzeichnis

3.1	Lagerarten mit ihren Freiheitsgradbeschränkungen (2D) . . . . .	12
3.2	Schnittkräfte und -momente in einem Balkenschnitt (2D) . . . . .	12
3.3	Kräfte beim Schubknicken von VFK . . . . .	22
3.4	Pucksche Zigarre aus [Sch05] . . . . .	23
3.5	Infinitesimales Profilelement aus [Hor20c] . . . . .	27
3.6	Vereinfachte Verklebung zweier Bauteile . . . . .	31
3.7	Holmarten: a) I-Holm b) C-Holm c) Kastenholm . . . . .	32
4.1	Modellierung des Holms als Biegebalken . . . . .	34
4.2	Verläufe der Steifigkeitsauslegung des Holms . . . . .	39
4.3	Verläufe der Festigkeitsauslegung des Holms . . . . .	40
4.4	Bezeichnungen des I-Holms . . . . .	42
4.5	Angepasste gekrümmte Gurtkontur . . . . .	44
4.6	Prinzip der Druckkraft auf den Steg . . . . .	47
4.7	Element des Stegs . . . . .	49
4.8	Mohrsche Spannungskreise für den oberen, mittleren und unteren Bereich	50
5.1	Vereinfachtes Modell für Schubflussberechnung . . . . .	67
5.2	Offenes Profil mit Pol . . . . .	69
5.3	Schubmittelpunkt des geschlossenen und offenen Profils . . . . .	72
5.4	Angreifende Kraft und positive Drehrichtung am geschlossenen Profil . .	72
6.1	Schalenmodell . . . . .	79
6.2	Absenkung bei einer Belastung von 100N . . . . .	80
6.3	Einspannung am Lager C . . . . .	82
6.4	Beispiel Beulform . . . . .	83
7.1	Haut und Gurte nach dem ersten Schritt der Konstruktion . . . . .	85
7.2	Draufsicht: Prinzipskizze der Sandwichstruktur im Steg . . . . .	86
7.3	Hautsandwich am Übergang zum Gurt . . . . .	87
7.4	Holzklötze und Hülsen . . . . .	88
7.5	Verklebung von Steg und Gurt . . . . .	93
12.1	Lagenaufbau Holmgurte nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	120
12.2	Lagenaufbau Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	120
12.3	Lagenaufbau Steg Bereich <i>I&amp;II</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	121
12.4	Lagenaufbau Flügelschale nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	122
12.5	Berechnung Holmgurte nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	122
12.6	Berechnung Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	122
12.7	Berechnung Steg Bereich <i>I&amp;II</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	123
12.8	Berechnung Flügelschale nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	124
12.9	Ingenieurskonstanten Holmgurte nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	124

12.10	Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	125
12.11	Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich <i>I&amp;II</i> nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	125
12.12	Ingenieurskonstanten Berechnung Flügelschale nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	126
12.13	Sicherheit im Steg bei 500N nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	126
12.14	Sicherheit in der Haut bei 500N nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	127
12.15	Sicherheit am Gurt oben bei 500N nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	127
12.16	Sicherheit am Gurt unten bei 500N nach <i>eLamX<sup>2</sup></i> . . . . .	128
12.17	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Druck ohne Versteifungen; nach [Her60] . . .	129
12.18	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Biegung und Druck, ohne Versteifungen; nach [Her60] . . . . .	130
12.19	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Schub, ohne Versteifungen; nach [Her60] . . .	131
12.20	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, Ränder einseitig gestützt, für Überlagerungen, ohne Versteifungen; nach [Her60]	132
12.21	Sandwichplatte mit unterschiedlichen Hautstärken, Beulsteifigkeit, für Steifigkeits-Erhöhungsfaktor; nach [Her60] . . . . .	132
12.22	Wertebereich der Laufvariablen $s_i$ . . . . .	133
12.23	Schubfluss Bereich 1 . . . . .	133
12.24	Schubfluss Bereich 2 . . . . .	134
12.25	Schubfluss Bereich 3 . . . . .	134
12.26	Schubfluss Bereich 4 . . . . .	135
12.27	Schubfluss Bereich 5 . . . . .	135
12.28	Schubfluss Bereich 6 . . . . .	136
12.29	Schubfluss Bereich 7 . . . . .	136
12.30	Schubfluss Bereich 8 . . . . .	137
12.31	Schubfluss Bereich 9 . . . . .	137
12.32	Schubfluss Bereich 10 . . . . .	138
12.33	ABAQUS Material Beispiel GFK . . . . .	139
12.34	ABAQUS Section Beispiel:Steg . . . . .	140
12.35	CAD-Modell der Tragfläche und des Teststandes . . . . .	141
12.36	Ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs der Querkraftbolzen . . . . .	142
12.37	Montage der Tragfläche auf dem Teststand . . . . .	142

## 12 Anhang

### 12.1 Berechnung: Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen 4.34, 4.35 und 4.36 hergeleitet [Ost18][LiN15]:

- Aus Gleichung 4.11 und 4.22 ergibt sich:

$$R_4 = 0 \quad (12.1)$$

- Aus Gleichung 4.9 und 4.23 ergibt sich:

$$R_2 = 0 \quad (12.2)$$

- Aus Gleichung 4.18 und 4.33 ergibt sich:

$$R_9 = -F_{pruef} \quad (12.3)$$

- Aus Gleichung 4.13, 4.18, 4.33 und 12.3 ergibt sich:

$$R_5 = -F_{pruef} - F_Q \quad (12.4)$$

- Aus Gleichung 4.19, 4.32 und 12.3 ergibt sich:

$$R_{10} = F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \quad (12.5)$$

- Aus Gleichung 4.14, 4.19, 4.30, 12.3, 12.4 und 12.5 ergibt sich:

$$R_6 = F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + F_Q \cdot (l_1 + l_2) \quad (12.6)$$

- Aus Gleichung 4.9, 4.14, 4.27, 12.4 und 12.6 ergibt sich:

$$R_1 = F_{pruef} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} + F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \quad (12.7)$$

- Aus Gleichung 4.11, 4.24 und 12.7 ergibt sich:

$$R_3 = -\frac{1}{6} \cdot F_{pruef} \cdot (l_2 + l_3) \cdot l_1 - \frac{1}{6} \cdot F_Q \cdot l_2 \cdot l_1 \quad (12.8)$$

- Aus Gleichung 4.10, 4.15, 4.26, 12.4, 12.6, 12.7 und 12.8 ergibt sich:

$$R_7 = F_{pruef} \cdot \left( -\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 - \frac{2}{3}l_1l_3 \right) + F_Q \cdot \left( -\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 \right) \quad (12.9)$$

- Aus Gleichung 4.16, 4.25, 12.4, 12.6 und 12.9 ergibt sich:

$$R_8 = F_{pruef} \cdot \left( \frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 + \frac{1}{6}l_1^2l_3 \right) + F_Q \cdot \left( \frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 \right) \quad (12.10)$$

- Aus Gleichung 4.15, 4.20, 4.29, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6 und 12.9 ergibt sich:

$$R_{11} = F_{pruef} \cdot \left( -\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 - \frac{2}{3}l_1l_3 \right) + F_Q \cdot \left( \frac{1}{2}l_2^2 + \frac{1}{3}l_1l_2 \right) \quad (12.11)$$

- Aus Gleichung 4.16, 4.21, 4.28, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6, 12.9, 12.10 und 12.11 ergibt sich:

$$R_{12} = F_{pruef} \cdot \left( \frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 + \frac{1}{6}l_1^2l_3 \right) + F_Q \cdot \left( -\frac{1}{6}l_2^3 - \frac{1}{3}l_1^2l_2 - \frac{1}{2}l_2^2l_1 \right) \quad (12.12)$$

- Nun können die Gleichungen 12.3, 12.4, und 12.7 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.34 ergibt:

$$Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} -R_1 & , y\epsilon(0, l_1) \\ -R_5 & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ -R_9 & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (12.13)$$

- Nun können die Gleichungen 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6 und 12.7 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.35 ergibt:

$$M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} -R_1 \cdot y - R_2 & , y\epsilon(0, l_1) \\ -R_5 \cdot y - R_6 & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ -R_9 \cdot y - R_{10} & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (12.14)$$

- Nun können die Gleichungen 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6, 12.7, 12.8, 12.9, 12.9, 12.11 und 12.12 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.36 ergibt:

$$w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{R_1 \cdot y^3}{6} + \frac{R_2 \cdot y^2}{2} + R_3 \cdot y + R_4 \right) & , y\epsilon(0, l_1) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{R_5 \cdot y^3}{6} + \frac{R_6 \cdot y^2}{2} + R_7 \cdot y + R_8 \right) & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{R_9 \cdot y^3}{6} + \frac{R_{10} \cdot y^2}{2} + R_{11} \cdot y + R_{12} \right) & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (12.15)$$

## 12.2 Berechnung: Schubfluss und Schubmittelpunkt (O.S.)

- Wertebereich der Laufvariable

$i$	$s_i \in (0, \dots)$
1	58,90
2	14,00
3	37,50
4	14,00
5	107,72
6	30,07
7	83,46
8	14
9	14
10	37,5

- Statische Momente im allgemeinen Koordinatensystem mit  $s_0$ : (Werte sind aus Abb. 5.1 zu entnehmen)

$$S_{z,1}(s_1) = t \int_0^{s_1} R \left( 1 - \cos \left( \frac{s}{R} \right) \right) ds = t R^2 \left[ \frac{s}{R} - \sin \left( \frac{s}{R} \right) \right]_{s=0}^{s_1} = t R^2 \cdot \left( \frac{s_1}{R} - \sin \left( \frac{s_1}{R} \right) \right) \quad (12.16)$$

$$S_{y,1}(s_1) = t \int_0^{s_1} -R \sin \left( \frac{s}{R} \right) ds_1 = t \left[ R^2 \cos \left( \frac{s}{R} \right) \right]_{s=0}^{s_1} = t R^2 \cdot \left( \cos \left( \frac{s_1}{R} \right) - 1 \right) \quad (12.17)$$

$$\begin{aligned} S_{z,2}(s_2) &= t \int_0^{s_2} \left( 37,5 \text{mm} + \cos(\alpha) \cdot s \right) ds + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \left[ 37,5 \text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_2} + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( 37,5 \text{mm} \cdot s_2 + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$\begin{aligned} S_{y,2}(s_2) &= t \int_0^{s_2} \left( -37,5 \text{mm} + \sin(\alpha) \cdot s \right) ds + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \left[ -37,5 \text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_2} + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( -37,5 \text{mm} \cdot s_2 + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.19)$$

$$S_{z,3}(s_3) = t_1 \int_0^{s_3} \left( 37,5\text{mm} + 14\text{mm} \right) ds = t_1 \left[ 51,5\text{mm} \cdot s \right]_{s=0}^{s_3} = t_1 \cdot \left( 51,5\text{mm} \cdot s_3 \right) \quad (12.20)$$

$$S_{y,3}(s_3) = t_1 \int_0^{s_3} -s \, ds = t_1 \left[ -\frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_3} = t_1 \cdot \left( -\frac{1}{2}s_3^2 \right) \quad (12.21)$$

$$\begin{aligned} S_{z,4} &= t \int_0^{s_4} \left( 37,5\text{mm} + \cos(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}}) \\ &= t \left[ 51,37\text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_4} + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( 51,37\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\cos(\alpha)}{2}s_4^2 \right) + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.22)$$

$$\begin{aligned} S_{y,4} &= t \int_0^{s_4} \left( -37,5\text{mm} + \sin(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}}) \\ &= t \left[ -35,63\text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_4} + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( -35,62\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\sin(\alpha)}{2}s_4^2 \right) + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.23)$$

$$\begin{aligned} S_{z,5} &= t \int_0^{s_5} \left( 37,5\text{mm} + \cos(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s_{4,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}}) \\ &= t \left[ 65,25\text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_5} + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( 65,25\text{mm} \cdot s_5 + \frac{\cos(\alpha)}{2}s_5^2 \right) + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.24)$$

$$\begin{aligned} S_{y,5} &= t \int_0^{s_5} \left( -37,5\text{mm} + \sin(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s_{4,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}}) \\ &= t \left[ -33,75\text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_5} + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left( -33,75\text{mm} \cdot s_5 + \frac{\sin(\alpha)}{2}s_5^2 \right) + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (12.25)$$

$$\begin{aligned}
S_{z,6} &= t \int_0^{s_6} \left( 172\text{mm} - \cos(\beta) \cdot s \right) ds + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \left[ 172\text{mm} \cdot s - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_6} + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( 172\text{mm} \cdot s_6 - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.26}$$

$$\begin{aligned}
S_{y,6} &= t \int_0^{s_6} \left( \sin(\beta) \cdot (s - s_{6,\text{ende}}) \right) ds + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \left[ -19,33\text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_6} + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( -19,33\text{mm} \cdot s_6 + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.27}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,7} &= t \int_0^{s_7} \left( 172\text{mm} - \cos(\beta) s_{6,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}}) \\
&= t \left[ 148,96\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s_7} + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( 148,96\text{mm} \cdot s_7 - \frac{1}{2} s_7^2 \right) + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.28}$$

$$S_{y,7} = t \int_0^{s_7} 0 \, ds + S_{y,6}(s_{6,\text{ende}}) = S_{y,6}(s_{6,\text{ende}}) \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,8} &= t \int_0^{s_8} \left( 172\text{mm} - \cos(\beta) s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}}) \\
&= t \left[ 65,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s_8} + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( 65,5\text{mm} \cdot s_8 - \frac{1}{2} s_8^2 \right) + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.30}$$

$$S_{y,8} = t \int_0^{s_8} 0 \, ds + S_{y,7}(s_{7,\text{ende}}) = S_{y,7}(s_{7,\text{ende}}) \tag{12.31}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,9} &= t \int_0^{s_9} \left( 172\text{mm} - \cos(\beta) s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s_{8,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}}) \\
&= t \left[ 51,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_9} + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( 51,5\text{mm} \cdot s_9 - \frac{1}{2}s_9^2 \right) + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.32}$$

$$S_{y,9} = t \int_0^{s_9} 0 \, ds + S_{y,8}(s_{8,\text{ende}}) = S_{y,8}(s_{8,\text{ende}}) \tag{12.33}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,10} &= t \int_0^{s_{10}} \left( 172\text{mm} - \cos(\beta) s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s_{8,\text{ende}} - s_{9,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \\
&= t \left[ 37,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_{10}} + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left( 37,5\text{mm} \cdot s_{10} - \frac{1}{2}s_{10}^2 \right) + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{12.34}$$

$$S_{y,10} = t \int_0^{s_{10}} 0 \, ds + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) = S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \tag{12.35}$$

- Integrale über Statische Momente mit  $t = 0,2\text{mm}$

$$S_{\bar{z}}(s) = S_z(s) - y_0 ts \tag{12.36}$$

$$S_{\bar{y}}(s) = S_y(s) - z_0 ts \tag{12.37}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{1,\text{ende}}} S_{\bar{z},1} \, ds_1 &= \int_0^{s_{1,\text{ende}}} t R^2 \cdot \left( \frac{s_1}{R} - \sin\left(\frac{s_1}{R}\right) - \frac{y_0 s_1}{R^2} \right) \, ds_1 \\
&= t R^3 \left[ \frac{s_1^2}{2R^2} \left( 1 - \frac{y_0}{R} \right) + \cos\left(\frac{s_1}{R}\right) \right]_{s_1=0}^{s_{1,\text{ende}}} = -24781,04\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.38}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{1,\text{ende}}} S_{\bar{y},1} \, ds_1 &= \int_0^{s_{1,\text{ende}}} tR^2 \cdot \left( \cos\left(\frac{s_1}{R}\right) - 1 - \frac{z_0 s_1}{R^2} \right) \, ds_1 \\ &= tR^3 \left[ \sin\left(\frac{s_1}{R}\right) - \frac{s_1}{R} - \frac{z_0 s_1^2}{2R^3} \right]_{s_1=0}^{s_{1,\text{ende}}} = -679,64 \text{mm}^4 \end{aligned} \quad (12.39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{2,\text{ende}}} S_{\bar{z},2} \, ds_2 &= \int_0^{s_{2,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 37,5 \text{mm} \cdot s_2 + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{\bar{z},1}(s_{1,\text{ende}}) - y_0 t s_2 \right) \, ds_2 \\ &= \left[ t \left( s_2^2 \frac{37,5 \text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} \cdot s_2^3 \right) + S_{\bar{z},1}(s_{1,\text{ende}}) s_2 \right]_{s_2=0}^{s_{2,\text{ende}}} \\ &= -11417,94 \text{mm}^4 \end{aligned} \quad (12.40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{2,\text{ende}}} S_{\bar{y},2} \, ds_2 &= \int_0^{s_{2,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( -37,5 \text{mm} \cdot s_2 + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{\bar{y},1}(s_{1,\text{ende}}) - z_0 t s_2 \right) \, ds_2 \\ &= \left[ t \left( -s_2^2 \frac{37,5 \text{mm} + z_0}{2} + \frac{\sin(\alpha)}{6} s_2^3 \right) + S_{\bar{y},1}(s_{1,\text{ende}}) s_2 \right]_{s_2=0}^{s_{2,\text{ende}}} \\ &= -1819,86 \text{mm}^4 \end{aligned} \quad (12.41)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{3,\text{ende}}} S_{\bar{z},3} \, ds_3 &= \int_0^{s_{3,\text{ende}}} \left( t_1 \cdot \left( 51,5 \text{mm} \cdot s_3 \right) - y_0 t_1 s_3 \right) \, ds_3 \\ &= t_1 \left[ \frac{51,5 \text{mm} - y_0}{2} s_3^2 \right]_{s_3=0}^{s_{3,\text{ende}}} \\ &= -5967,72 \text{mm}^4 \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{3,\text{ende}}} S_{\bar{y},3} \, ds_3 &= \int_0^{s_{3,\text{ende}}} t_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} s_3^2 - z_0 s_3 \right) \, ds_3 \\ &= t_1 \left[ -\frac{s_3^3}{6} - \frac{z_0}{2} s_3^2 \right]_{s_3=0}^{s_{3,\text{ende}}} \\ &= 638,06 \text{mm}^4 \end{aligned} \quad (12.43)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{4,\text{ende}}} S_{\bar{z},4} \, ds_4 &= \int_0^{s_{4,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 51,37 \text{mm} \cdot s_4 + \frac{\cos(\alpha)}{2} s_4^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + S_{\bar{z},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{z},3}(s_{3,\text{ende}}) - y_0 t s_4 \right) \, ds_4 \\
&= \left[ t \left( s_4^2 \frac{51,37 \text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} s_4^3 \right) \right. \\
&\quad \left. + s_4 \left( S_{\bar{z},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{z},3}(s_{3,\text{ende}}) \right) \right]_{s_4=0}^{s_{4,\text{ende}}} \\
&= -16954,55 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.44}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{4,\text{ende}}} S_{\bar{y},4} \, ds_4 &= \int_0^{s_{4,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( -35,62 \text{mm} \cdot s_4 + \frac{\sin(\alpha)}{2} s_4^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + S_{\bar{y},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{y},3}(s_{3,\text{ende}}) - t z_0 s_4 \right) \, ds_4 \\
&= \left[ t \left( -s_4^2 \frac{35,62 \text{mm} + z_0}{2} + s_4^3 \frac{\sin(\alpha)}{6} \right) \right. \\
&\quad \left. + s_4 \left( S_{\bar{y},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{y},3}(s_{3,\text{ende}}) \right) \right]_{s_4=0}^{s_{4,\text{ende}}} \\
&= -3166,21 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.45}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{5,\text{ende}}} S_{\bar{z},5} \, ds_5 &= \int_0^{s_{5,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 65,25 \text{mm} \cdot s_5 + \frac{\cos(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{\bar{z},4}(s_{4,\text{ende}}) - t y_0 s_5 \right) \, ds_5 \\
&= \left[ t \left( s_5^2 \frac{65,25 \text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} s_5^3 \right) + s_5 S_{\bar{z},4}(s_{4,\text{ende}}) \right]_{s_5=0}^{s_{5,\text{ende}}} \\
&= -107261,55 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.46}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{5,\text{ende}}} S_{\bar{y},5} \, ds_5 &= \int_0^{s_{5,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( -33,75 \text{mm} \cdot s_5 + \frac{\sin(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{\bar{y},4}(s_{4,\text{ende}}) - t z_0 s_5 \right) \, ds_5 \\
&= \left[ t \left( -s_5^2 \frac{33,75 \text{mm} + z_0}{2} + s_5^3 \frac{\sin(\alpha)}{6} \right) + s_5 S_{\bar{y},4}(s_{4,\text{ende}}) \right]_{s_5=0}^{s_{5,\text{ende}}} \\
&= -42977,28 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.47}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{6,\text{ende}}} S_{\bar{z},6} \, ds_6 &= \int_0^{s_{6,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 172\text{mm} \cdot s_6 - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{\bar{z},5}(s_{5,\text{ende}}) - ty_0 s_6 \right) \, ds_6 \\
&= \left[ t \left( s_6^2 \frac{172\text{mm} - y_0}{2} - s_6^3 \frac{\cos(\beta)}{6} \right) + s_6 S_{\bar{z},5}(s_{5,\text{ende}}) \right]_{s_6=0}^{s_{6,\text{ende}}} \\
&= -3426,83\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.48}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{6,\text{ende}}} S_{\bar{y},6} \, ds_6 &= \int_0^{s_{6,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( -19,33\text{mm} \cdot s_6 + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{\bar{y},5}(s_{5,\text{ende}}) - tz_0 s_6 \right) \, ds_6 \\
&= \left[ t \left( -s_6^2 \frac{19,33\text{mm} + z_0}{2} + s_6^3 \frac{\sin(\beta)}{6} \right) + s_6 S_{\bar{y},5}(s_{5,\text{ende}}) \right]_{s_6=0}^{s_{6,\text{ende}}} \\
&= -14579,38\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.49}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{7,\text{ende}}} S_{\bar{z},7} \, ds_7 &= \int_0^{s_{7,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 148,96\text{mm} \cdot s_7 - \frac{1}{2}s_7^2 \right) + S_{\bar{z},6}(s_{6,\text{ende}}) - ty_o s_7 \right) \, ds_7 \\
&= \left[ t \left( s_7^2 \frac{148,96\text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_7^3}{6} \right) + s_7 S_{\bar{z},6}(s_{6,\text{ende}}) \right]_{s_7=0}^{s_{7,\text{ende}}} \\
&= 39745,58\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.50}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{7,\text{ende}}} S_{\bar{y},7} \, ds_7 &= \int_0^{s_{7,\text{ende}}} \left( S_{\bar{y},6}(s_{6,\text{ende}}) - tz_0 s_7 \right) \, ds_7 \\
&= \left[ -s_7^2 \frac{tz_0}{2} + s_7 S_{\bar{y},6}(s_{6,\text{ende}}) \right]_{s_7=0}^{s_{7,\text{ende}}} \\
&= -27553,07\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.51}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{8,\text{ende}}} S_{\bar{z},8} \, ds_8 &= \int_0^{s_{8,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 65,5\text{mm} \cdot s_8 - \frac{1}{2}s_8^2 \right) + S_{\bar{z},7}(s_{7,\text{ende}}) - ty_0 s_8 \right) \, ds_8 \\
&= \left[ t \left( s_8^2 \frac{65,5\text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_8^3}{6} \right) + s_8 S_{\bar{z},7}(s_{7,\text{ende}}) \right]_{s_8=0}^{s_{8,\text{ende}}} \\
&= 8048,81\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.52}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{8,\text{ende}}} S_{\bar{y},8} \, ds_8 &= \int_0^{s_{8,\text{ende}}} \left( S_{\bar{y},7}(s_{7,\text{ende}}) - tz_0 s_8 \right) \, ds_8 \\
&= \left[ -s_8^2 \frac{tz_0}{2} + s_8 S_{\bar{y},7}(s_{7,\text{ende}}) \right]_{s_8=0}^{s_{8,\text{ende}}} \\
&= -2521,46 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.53}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{9,\text{ende}}} S_{\bar{z},9} \, ds_9 &= \int_0^{s_{9,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 51,5 \text{mm} \cdot s_9 - \frac{1}{2} s_9^2 \right) + S_{\bar{z},8}(s_{8,\text{ende}}) - ty_0 s_9 \right) \, ds_9 \\
&= \left[ t \left( s_9^2 \frac{51,5 \text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_9^3}{6} \right) + s_9 S_{\bar{z},8}(s_{8,\text{ende}}) \right]_{s_9=0}^{s_{9,\text{ende}}} \\
&= 6989,29 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.54}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{9,\text{ende}}} S_{\bar{y},9} \, ds_9 &= \int_0^{s_{9,\text{ende}}} \left( S_{\bar{y},8}(s_{8,\text{ende}}) - tz_0 s_9 \right) \, ds_9 \\
&= \left[ -s_9^2 \frac{tz_0}{2} + s_9 S_{\bar{y},8}(s_{8,\text{ende}}) \right]_{s_9=0}^{s_{9,\text{ende}}} \\
&= -1918,06 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.55}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{10,\text{ende}}} S_{\bar{z},10} \, ds_{10} &= \int_0^{s_{10,\text{ende}}} \left( t \cdot \left( 37,5 \text{mm} \cdot s_{10} - \frac{1}{2} s_{10}^2 \right) + S_{\bar{z},9}(s_{9,\text{ende}}) - ty_0 s_{10} \right) \, ds_{10} \\
&= \left[ t \left( s_{10}^2 \frac{37,5 \text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_{10}^3}{6} \right) + s_{10} S_{\bar{z},9}(s_{9,\text{ende}}) \right]_{s_{10}=0}^{s_{10,\text{ende}}} \\
&= 9285,09 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.56}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{10,\text{ende}}} S_{\bar{y},10} \, ds_{10} &= \int_0^{s_{10,\text{ende}}} \left( S_{\bar{y},9}(s_{9,\text{ende}}) - tz_0 s_{10} \right) \, ds_{10} \\
&= \left[ -s_{10}^2 \frac{tz_0}{2} + s_{10} S_{\bar{y},9}(s_{9,\text{ende}}) \right]_{s_{10}=0}^{s_{10,\text{ende}}} \\
&= -2165,16 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{12.57}$$

- Hebelarme um den Pol unter Berücksichtigung des positiven Drehsinnes

$i$	$r_i/\text{mm}$	$\int S_{\bar{z},i}/\text{mm}^4$	$\int S_{\bar{y},i}/\text{mm}^4$
1	37,5	-24781,04	-679, 64
2	37,16	-11417,94	-1819,86
3	-14	-5967,72	638,06
4	37,16	-16954,55	-3166,21
5	37,16	-107261,55	-42977,28
6	81,97	-3426,83	-14579,38
7	0	39745,58	-27553,07
8	0	8048,81	-2521,46
9	0	6989,29	-1918,06
10	0	9285,09	-2165, 16

- Umformung von Formel (5.17)

$$0 = \frac{1}{2A_{01}G} \left( \underbrace{\oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)} ds}_A + q_{0b,1} \underbrace{\oint \frac{1}{t(s)} ds}_B - q_{0b,2} \underbrace{\int \frac{1}{t(s)} ds}_C \right) \\ = A + q_{0b,1}B - q_{0b,2}C \quad (12.58)$$

$$q_{0b,2}C = A + q_{0b,1}B$$

$$q_{0b,2} = \frac{A + q_{0b,1}B}{C}$$

$$0 = \frac{1}{2A_{01}G} \left( \underbrace{\oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)} ds}_D + q_{0b,2} \underbrace{\oint \frac{1}{t(s)} ds}_E - q_{0b,2} \underbrace{\int \frac{1}{t(s)} ds}_F \right) \\ = D + q_{0b,2}E - q_{0b,1}F \\ = D + \frac{A + q_{0b,1}B}{C}E - q_{0b,1}F \\ = D + \frac{AE}{C} + q_{0b,1} \left( \frac{BE}{C} - F \right) \quad (12.59) \\ - \left( D + \frac{AE}{C} \right) = q_{0b,1} \left( \frac{BE}{C} - F \right) \\ q_{0b,1} = - \frac{D + \frac{AE}{C}}{\frac{BE}{C} - F} = \frac{DC + AE}{BE - FC}$$

### 12.3 Abbildungen: eLamX<sup>2</sup>

Lagenaufbau					
Nummer	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
2	Lage 2	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
3	Lage 3	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
4	Lage 4	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
5	Lage 5	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
6	Lage 6	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
7	Lage 7	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
8	Lage 8	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
9	Lage 9	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck

Abbildung 12.1: Lagenaufbau Holmgurte nach eLamX<sup>2</sup>

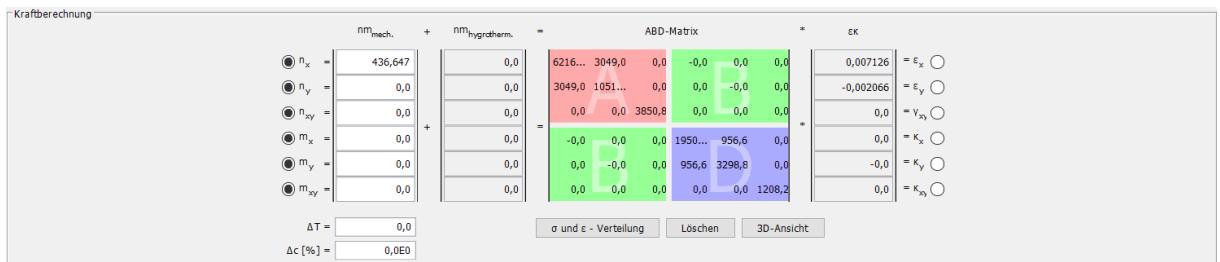
Lagenaufbau					
Nummer	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
5	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
6	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
7	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
8	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck

Abbildung 12.2: Lagenaufbau Steg Bereich III nach eLamX<sup>2</sup>

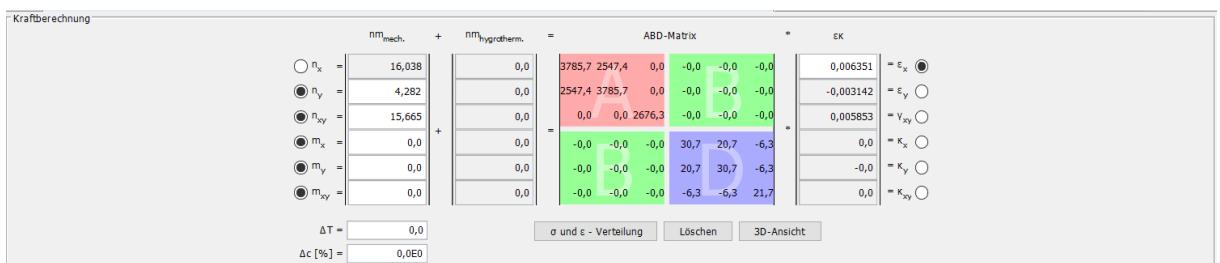
Lagenaufbau					
Nummer	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
5	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
6	Lage 3 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
7	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
8	Lage 4 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
9	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
10	Lage 5 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
11	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
12	Lage 6 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
13	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
14	Lage 7 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
15	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
16	Lage 8 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
17	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
18	Lage 9 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
19	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
20	Lage 10 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
21	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
22	Lage 11 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
23	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
24	Lage 12 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
25	Lage 12 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
26	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
27	Lage 11 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
28	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
29	Lage 10 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
30	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
31	Lage 9 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
32	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
33	Lage 8 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
34	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
35	Lage 7 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
36	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
37	Lage 6 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
38	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
39	Lage 5 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
40	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
41	Lage 4 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
42	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
43	Lage 3 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
44	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
45	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
46	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
47	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
48	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck

Abbildung 12.3: Lagenaufbau Steg Bereich I&II nach eLamX<sup>2</sup>

Lagenaufbau					
Nummer	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
2	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
3	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck
4	Lage 1 (1/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkönig	Puck

Abbildung 12.4: Lagenaufbau Flügelschale nach eLamX<sup>2</sup>

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem											
<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen											
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$\tau_{  \perp}$	Versagenskriterium	$R_F_{min}$	Versagensmodus	
1	Lage 1	0,0	0,862	0,97	225,029	-0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
2	Lage 2	0,0	0,647	0,755	225,029	-0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
3	Lage 3	0,0	0,431	0,539	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
4	Lage 4	0,0	0,216	0,323	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
5	Lage 5	0,0	0,0	0,108	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
6	Lage 6	0,0	-0,216	-0,108	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
7	Lage 7	0,0	-0,431	-0,323	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
8	Lage 8	0,0	-0,647	-0,539	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	
9	Lage 9	0,0	-0,862	-0,755	225,029	0,0	0,0	Puck	2,657	Faserbruch Zug	

Abbildung 12.5: Berechnung Holmgurte nach eLamX<sup>2</sup>

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem											
<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen											
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$\tau_{  \perp}$	Versagenskriterium	$R_F_{min}$	Versagensmodus	
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,137	0,156	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...	
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,097	0,117	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...	
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,058	0,078	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,992	Zwischenfaserbruc...	
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,019	0,039	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,992	Zwischenfaserbruc...	
5	Lage 2 (2/2)	45,0	-0,02	-0,0	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,992	Zwischenfaserbruc...	
6	Lage 2 (1/2)	-45,0	-0,059	-0,039	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,992	Zwischenfaserbruc...	
7	Lage 1 (2/2)	45,0	-0,098	-0,078	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...	
8	Lage 1 (1/2)	-45,0	-0,137	-0,117	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,992	Zwischenfaserbruc...	
				-0,156	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...	

Abbildung 12.6: Berechnung Steg Bereich III nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftverteilung									
Nr.	Name	Vinkel	$\sigma_m$	$\epsilon_i$	$\sigma_{ij}$	$\epsilon_{ij}$	$\tau_{14}$	$R_{\text{min}}$	Vergleichskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,916	0,936	-113,062	27,005	20,711	20,711	Zwischenbruch Modus A
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,827	0,897	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,838	0,858	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,799	0,819	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
5	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,76	0,78	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
6	Lage 3 (2/2)	45,0	0,721	0,741	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
7	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,682	0,702	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
8	Lage 4 (2/2)	45,0	0,643	0,663	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
9	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,604	0,624	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
10	Lage 5 (2/2)	45,0	0,565	0,585	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
11	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,526	0,546	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
12	Lage 6 (2/2)	45,0	0,487	0,507	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
13	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,448	0,468	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
14	Lage 7 (2/2)	45,0	0,409	0,429	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
15	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,37	0,39	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
16	Lage 8 (2/2)	45,0	0,331	0,351	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
17	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,292	0,312	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
18	Lage 9 (2/2)	45,0	0,253	0,273	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
19	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,214	0,234	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
20	Lage 10 (2/2)	45,0	0,175	0,195	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
21	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,136	0,156	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
22	Lage 11 (2/2)	45,0	0,097	0,117	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
23	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,058	0,078	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
24	Lage 12 (2/2)	45,0	0,019	0,039	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B

Sichtlinien im lokalen Koordinatensystem									
Kraftverteilung									
Nr.	Name	Vinkel	$\sigma_m$	$\epsilon_i$	$\sigma_{ij}$	$\epsilon_{ij}$	$\tau_{14}$	$R_{\text{min}}$	Vergleichskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,916	0,936	-113,062	27,005	20,711	20,711	Zwischenbruch Modus A
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,827	0,897	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,838	0,858	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,799	0,819	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
5	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,76	0,78	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
6	Lage 3 (2/2)	45,0	0,721	0,741	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
7	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,682	0,702	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus B
8	Lage 4 (2/2)	45,0	0,643	0,663	189,216	-113,062	27,005	20,711	Zwischenbruch Modus A
9	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,604	0,624	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
10	Lage 5 (2/2)	45,0	0,565	0,585	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
11	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,526	0,546	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
12	Lage 6 (2/2)	45,0	0,487	0,507	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
13	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,448	0,468	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
14	Lage 7 (2/2)	45,0	0,409	0,429	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
15	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,37	0,39	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
16	Lage 8 (2/2)	45,0	0,331	0,351	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
17	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,292	0,312	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
18	Lage 9 (2/2)	45,0	0,253	0,273	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
19	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,214	0,234	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
20	Lage 10 (2/2)	45,0	0,175	0,195	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
21	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,136	0,156	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
22	Lage 11 (2/2)	45,0	0,097	0,117	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A
23	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,058	0,078	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus B
24	Lage 12 (2/2)	45,0	0,019	0,039	189,216	-113,062	-11,166	20,711	Zwischenbruch Modus A

Abbildung 12.7: Berechnung Steg Bereich I&II nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftberechnung

$n_x =$	0,0	+	$nm_{hygotherm.} =$	0,0	=	ABD-Matrix	*	$\varepsilon_k$	= $\varepsilon_x \bigcirc$
$n_y =$	0,0			0,0		189... 127... 0,0 0,0 0,0 0,0		0,0	= $\varepsilon_y \bigcirc$
$n_{xy} =$	6,631			0,0		127... 189... 0,0 0,0 0,0 0,0		-0,0	= $\gamma_{xy} \bigcirc$
$m_x =$	0,0			0,0		0,0 0,0 133... 0,0 0,0 0,0		0,004955	
$m_y =$	0,0			0,0		0,0 0,0 0,0 3,8 2,6 1,6		-0,0	= $\kappa_x \bigcirc$
$m_{xy} =$	0,0			0,0		0,0 0,0 0,0 2,6 3,8 1,6		0,0	= $\kappa_y \bigcirc$
						0,0 0,0 0,0 1,6 1,6 2,7		0,0	= $\kappa_{xy} \bigcirc$
$\Delta T =$	0,0								
$\Delta c [\%] =$	0,0E0								

$\sigma$  und  $\varepsilon$  - Verteilung   Löschen   3D-Ansicht

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem

<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Versagenskriterium	$R_f \min$	Versagensmode
1	Lage 1 (1/2)	45,0	0,058	0,078	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729	Zwischenfaserbruc...
				0,039	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729	Zwischenfaserbruc...
2	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,019	0,039	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955	Zwischenfaserbruc...
				0,0	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955	Zwischenfaserbruc...
3	Lage 1 (2/2)	-45,0	-0,019	0,0	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955	Zwischenfaserbruc...
				-0,039	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955	Zwischenfaserbruc...
4	Lage 1 (1/2)	45,0	-0,058	-0,039	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729	Zwischenfaserbruc...
				-0,078	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729	Zwischenfaserbruc...

Abbildung 12.8: Berechnung Flügelschale nach eLamX<sup>2</sup>

ABD-Matrix

62162,0	3049,0	0,0	-0,0	0,0	0,0
3049,0	10513,6	0,0	0,0	-0,0	0,0
0,0	0,0	3850,8	0,0	0,0	0,0
-0,0	0,0	0,0	19504,1	956,6	0,0
0,0	-0,0	0,0	956,6	3298,8	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1208,2

Inverse ABD-Matrix

1,6319E-5	-4,7325E-6	0,0E0	8,0805E-22	-6,7864E-22	0,0E0
-4,7325E-6	9,6487E-5	0,0E0	-6,7864E-22	3,6036E-21	0,0E0
0,0E0	0,0E0	2,5969E-4	0,0E0	0,0E0	0,0E0
8,0805E-22	-6,7864E-22	0,0E0	5,2011E-5	-1,5083E-5	0,0E0
-6,7864E-22	3,6036E-21	0,0E0	-1,5083E-5	3,0752E-4	0,0E0
0,0E0	0,0E0	0,0E0	0,0E0	0,0E0	8,2765E-4

Ingenieurkonstanten

		mit QKB		ohne QKB	
		Membran	Biegung	Membran	Biegung
$E_x$	=	32035,7	32035,7	31580,0	31580,0
$E_y$	=	5418,3	5418,3	5341,2	5341,2
$G_{xy}$	=	1984,5	1984,5	1984,5	1984,5
$v_{xy}$	=	-	-	0,290	0,290
$v_{yx}$	=	-	-	0,049	0,049
$t_{ges}$	=		1,94		
Flächengewicht	=		3,353E-9		

Abbildung 12.9: Ingenieurkonstanten Holmgurte nach eLamX<sup>2</sup>

ABD-Matrix						
3785,7	2547,4	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
2547,4	3785,7	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
0,0	0,0	2676,3	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
-0,0	-0,0	-0,0	30,7	20,7	20,7	-6,3
-0,0	-0,0	-0,0	20,7	30,7	30,7	-6,3
-0,0	-0,0	-0,0	-6,3	-6,3	-6,3	21,7

Inverse ABD-Matrix						
4,8271E-4	-3,2481E-4	2,6375E-36	6,9563E-19	-4,4673E-19	1,2409E-19	
-3,2481E-4	4,8271E-4	2,6375E-36	-4,4673E-19	6,9563E-19	1,2409E-19	
2,6375E-36	2,6375E-36	3,7365E-4	1,5281E-19	1,5281E-19	8,2266E-19	
6,9563E-19	-4,4673E-19	1,5281E-19	6,0256E-2	-3,9291E-2	6,0988E-3	
-4,4673E-19	6,9563E-19	1,5281E-19	-3,9291E-2	6,0256E-2	6,0988E-3	
1,2409E-19	1,2409E-19	8,2266E-19	6,0988E-3	6,0988E-3	4,961E-2	

Ingenieurkonstanten						
mit QKB						ohne QKB
$E_x$	=	12133,7	12133,7	6639,8	6557,2	Membran
$E_y$	=	12133,7	12133,7	6639,8	6557,2	Biegung
$G_{xy}$	=	8577,8	8577,8	8577,8	7964,3	Membran
$v_{xy}$	=	-	-	0,673	0,652	Biegung
$v_{yx}$	=	-	-	0,673	0,652	
$t_{ges}$	=		0,312			
Flächengewicht =						5,3914E-10

Abbildung 12.10: Ingenieurkonstanten Berechnung Steg Bereich III nach eLamX<sup>2</sup>

ABD-Matrix						
22714,2	15284,1	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
15284,1	22714,2	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
0,0	0,0	16057,7	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
-0,0	-0,0	-0,0	6633,3	4463,5	-227,	
-0,0	-0,0	-0,0	4463,5	6633,3	-227,	
-0,0	-0,0	-0,0	-227,4	-227,4	4689,	

Inverse ABD-Matrix						
8,0452E-5	-5,4135E-5	5,084E-36	2,6365E-19	-1,6991E-19	4,8639E-2	
-5,4135E-5	8,0452E-5	4,5564E-36	-1,6992E-19	2,533E-19	4,3615E-2	
5,084E-36	4,5564E-36	6,2275E-5	4,5971E-21	4,5971E-21	2,0879E-1	
2,6365E-19	-1,6992E-19	4,5971E-21	2,7558E-4	-1,8529E-4	4,378E-	
-1,6991E-19	2,533E-19	4,5971E-21	-1,8529E-4	2,7558E-4	4,378E-	
4,8639E-21	4,3615E-21	2,0879E-19	4,378E-6	4,378E-6	2,1367E-	

Ingenieurkonstanten						
mit QKB						ohne QKB
$E_x$	=	12133,7	12133,7	6639,8	6637,7	Membran
$E_y$	=	12133,7	12133,7	6639,8	6637,7	Biegung
$G_{xy}$	=	8577,8	8577,8	8577,8	8560,8	Membran
$v_{xy}$	=	-	-	0,673	0,672	Biegung
$v_{yx}$	=	-	-	0,673	0,672	
$t_{ges}$	=		1,872			
Flächengewicht =						3,2348E-9

Abbildung 12.11: Ingenieurkonstanten Berechnung Steg Bereich I&II nach eLamX<sup>2</sup>

- ABD-Matrix						
1892,9	1273,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1273,7	1892,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	1338,1	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	3,8	2,6	1,6	
0,0	0,0	0,0	2,6	3,8	1,6	
0,0	0,0	0,0	1,6	1,6	2,7	

- Inverse ABD-Matrix						
9,6543E-4	-6,4962E-4	2,0207E-36	-1,5222E-18	1,2093E-18	-4,4991E-19	
-6,4962E-4	9,6543E-4	-1,3597E-36	1,0243E-18	-8,1373E-19	3,0274E-19	
2,0207E-36	-1,3597E-36	7,473E-4	-6,7337E-19	3,8381E-19	1,6847E-19	
-1,5222E-18	1,0243E-18	-6,7337E-19	5,0725E-1	-2,8912E-1	-1,2691E-1	
1,2093E-18	-8,1373E-19	3,8381E-19	-2,8912E-1	5,0725E-1	-1,2691E-1	
-4,4991E-19	3,0274E-19	1,6847E-19	-1,2691E-1	-1,2691E-1	5,1617E-1	

- Ingenieurskonstanten						
mit QKB		ohne QKB				
Membran			Membran			
Biegung			Biegung			
$E_x$			12133,7 12133,7			
$E_y$			6639,8 6231,4			
$G_{xy}$			8577,8 8577,8			
$V_{xy}$			-			
$V_{yx}$			0,673 0,570			
$t_{ges}$			-			
Flächengewicht			0,156			
			2,6957E-10			

Abbildung 12.12: Ingenieurskonstanten Berechnung Flügelschale nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftberechnung																		
nm <sub>mech.</sub>			nm <sub>hyd/therm.</sub>			ABD-Matrix			EK									
<input type="radio"/> n <sub>x</sub> =	88,668			0,0		35056,9 2941,5 0,0 -0,0 -0,0 0,0		0,00276	= ε <sub>x</sub> <input checked="" type="radio"/>									
<input type="radio"/> n <sub>y</sub> =	-88,288			0,0		2941,5 35056,9 0,0 -0,0 -0,0 0,0		-0,00275	= ε <sub>y</sub> <input checked="" type="radio"/>									
<input type="radio"/> n <sub>xy</sub> =	19,43			0,0		0,0 0,0 3715,1 -0,0 -0,0 0,0		0,00523	= V <sub>xy</sub> <input checked="" type="radio"/>									
<input checked="" type="radio"/> m <sub>x</sub> =	0,0			0,0		-0,0 -0,0 -0,0 10692,5 859,0 0,0		0,0	= τ <sub>x</sub> <input type="radio"/>									
<input checked="" type="radio"/> m <sub>y</sub> =	0,0			0,0		-0,0 -0,0 -0,0 859,0 9783,0 0,0		-0,0	= τ <sub>y</sub> <input type="radio"/>									
<input checked="" type="radio"/> m <sub>xy</sub> =	0,0			0,0		-0,0 -0,0 -0,0 0,0 0,0 1084,9		0,0	= κ <sub>xy</sub> <input type="radio"/>									
ΔT =			σ und ε - Verteilung			Löschen			3D-Ansicht									
Δc [%] =			0,0E0															
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem																		
(● Spannungen ○ Dehnungen)																		
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$\tau_{  \perp}$	Versagenskriterium	RF <sub>min</sub>	Versagensmode								
1	Lage 1 (1/2)	0,0	0,916	0,936	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
					0,897	84,097	-10,563	10,379	4,68	Zwischenfaserbruc...								
2	Lage 1 (2/2)	90,0	0,877	0,897	-83,761	10,633	-10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								
3	Lage 2 (1/2)	0,0	0,838	0,858	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
4	Lage 2 (2/2)	90,0	0,799	0,819	-83,761	10,633	-10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								
5	Lage 3 (1/2)	0,0	0,76	0,78	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
6	Lage 3 (2/2)	90,0	0,721	0,741	-83,761	10,633	-10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								
7	Lage 4 (1/2)	0,0	0,682	0,702	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
8	Lage 4 (2/2)	90,0	0,643	0,663	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
9	Lage 5 (1/2)	0,0	0,604	0,624	84,097	-10,563	10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								
10	Lage 5 (2/2)	90,0	0,565	0,585	84,097	-10,563	10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								
11	Lage 6 (1/2)	0,0	0,526	0,546	84,097	-10,563	10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...								
12	Lage 6 (2/2)	90,0	0,487	0,507	84,097	-10,563	10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...								

Abbildung 12.13: Sicherheit im Steg bei 500N nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftberechnung															
$\text{nm}_{\text{mech.}}$ + $\text{nm}_{\text{hydrotherm.}}$ = ABD-Matrix				* $\epsilon_{\text{K}}$											
<input type="radio"/> $n_x$ = -3,289	0,0	2921,4	245,1	0,0	0,0	-0,0	0,0	-0,00107	= $\epsilon_x$ <input checked="" type="radio"/>						
<input type="radio"/> $n_y$ = -2,202	0,0	245,1	2921,4	0,0	-0,0	-0,0	0,0	-0,000664	= $\epsilon_y$ <input checked="" type="radio"/>						
<input type="radio"/> $n_{xy}$ = -2,334	0,0	0,0	0,0	309,6	0,0	0,0	0,0	-0,00754	= $\gamma_{xy}$ <input checked="" type="radio"/>						
<input checked="" type="radio"/> $m_x$ = 0,0	0,0	0,0	-0,0	0,0	9,1	0,5	0,0	0,0	= $\kappa_x$ <input type="radio"/>						
<input checked="" type="radio"/> $m_y$ = 0,0	0,0	0,0	-0,0	0,0	0,5	2,8	0,0	0,0	= $\kappa_y$ <input type="radio"/>						
<input checked="" type="radio"/> $m_{xy}$ = 0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0	= $\kappa_{xy}$ <input type="radio"/>						
$\Delta T$ = 0,0				<input type="button" value="σ und ε - Verteilung"/> <input type="button" value="Löschen"/> <input type="button" value="3D-Ansicht"/>											
$\Delta c [\%]$ = 0,0E0															
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem															
<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen															
Nr.	Name	Winkel	$z_{\text{mu}}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Versagenskriterium	$R_F_{\min}$	Versagensmode					
1	Lage 1 (1/2)	0,0	0,058	0,078	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...					
2	Lage 1 (2/2)	90,0	0,019	0,039	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...					
3	Lage 1 (2/2)	90,0	-0,019	0,0	-22,953	-6,841	14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...					
4	Lage 1 (1/2)	0,0	-0,058	-0,039	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...					
				-0,078	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...					

Abbildung 12.14: Sicherheit in der Haut bei 500N nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftberechnung															
$\text{nm}_{\text{mech.}}$ + $\text{nm}_{\text{hydrotherm.}}$ = ABD-Matrix				* $\epsilon_{\text{K}}$											
<input type="radio"/> $n_x$ = -157,522	0,0	26509,3	16117,1	12936,1	-959,3	999,8	1099,0	-0,00142	= $\epsilon_x$ <input checked="" type="radio"/>						
<input type="radio"/> $n_y$ = -158,242	0,0	16117,1	26509,3	12936,1	999,8	-1040,2	1099,0	-0,0015	= $\epsilon_y$ <input checked="" type="radio"/>						
<input type="radio"/> $n_{xy}$ = -163,099	0,0	12936,1	12936,1	16984,9	1089,0	1009,0	999,8	-0,00754	= $\gamma_{xy}$ <input checked="" type="radio"/>						
<input checked="" type="radio"/> $m_x$ = 0,0	0,0	0,0	-999,3	999,8	1099,0	10259,3	5327,2	4152,6	0,000017	= $\kappa_x$ <input type="radio"/>					
<input checked="" type="radio"/> $m_y$ = 0,0	0,0	0,0	999,8	1040,2	1099,0	5327,2	10416,7	4152,6	-0,000038	= $\kappa_y$ <input type="radio"/>					
<input checked="" type="radio"/> $m_{xy}$ = 0,0	0,0	0,0	1099,0	1009,0	999,8	4152,6	4152,6	5646,4	0,001873	= $\kappa_{xy}$ <input type="radio"/>					
$\Delta T$ = 0,0				<input type="button" value="σ und ε - Verteilung"/> <input type="button" value="Löschen"/> <input type="button" value="3D-Ansicht"/>											
$\Delta c [\%]$ = 0,0E0															
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem															
<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen															
Nr.	Name	Winkel	$z_{\text{mu}}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Versagenskriterium	$R_F_{\min}$	Versagensmode					
1	Lage 1	45,0	0,942	1,05	-134,244	0,437	-0,724	Puck	4,638	Faserbruch Druck					
2	Lage 2	45,0	0,726	0,834	-140,207	1,231	-0,425	Puck	4,629	Faserbruch Druck					
3	Lage 3	45,0	0,51	0,618	-146,437	1,231	-0,225	Puck	4,629	Faserbruch Druck					
4	Lage 4	45,0	0,294	0,402	-146,511	2,026	-0,226	Puck	4,437	Faserbruch Druck					
5	Lage 5	45,0	0,078	0,186	-152,595	2,82	-0,293	Puck	4,26	Faserbruch Druck					
6	Lage 6	45,0	-0,138	-0,03	-164,762	4,409	-0,155	Puck	3,945	Faserbruch Druck					
7	Lage 7	45,0	-0,354	-0,246	-170,678	5,314	-0,179	Puck	4,096	Faserbruch Druck					
8	Lage 8	45,0	-0,57	-0,462	-176,309	5,997	-0,198	Puck	4,096	Faserbruch Druck					
9	Lage 9	45,0	-0,786	-0,678	-183,013	6,792	-0,085	Puck	3,397	Zwischenfaserbruch Modus A					
10	Lage 10 (1/2)	0,0	-0,913	-0,894	-189,096	7,586	-0,061	Puck	3,228	Zwischenfaserbruch Modus A					
11	Lage 10 (2/2)	90,0	-0,952	-0,933	-48,295	-10,19	-18,431	Puck	2,422	Zwischenfaserbruch Modus B					
12	Lage 11 (1/2)	0,0	-0,991	-0,972	-49,164	-10,08	-18,431	Puck	2,374	Zwischenfaserbruch Modus B					
13	Lage 11 (2/2)	90,0	-1,03	-1,011	-49,07	-10,082	-18,721	Puck	2,355	Zwischenfaserbruch Modus B					

Abbildung 12.15: Sicherheit am Gurt oben bei 500N nach eLamX<sup>2</sup>

Kraftberechnung

	$n_{\text{mech.}}$	$+ n_{\text{hydrotherm.}}$	$= \text{ABD-Matrix}$	$\times \epsilon_k$
<input type="radio"/> $n_x =$	197,773	0,0	26509,3 16117,1 12936,1 -999,3 999,8 1009,0	$\epsilon_x \bullet$
<input type="radio"/> $n_y =$	199,621	0,0	16117,1 26509,3 12936,1 999,8 -1040,2 1009,0	$\epsilon_y \bullet$
<input type="radio"/> $n_{xy} =$	196,854	0,0	12935,1 12836,1 16984,9 1009,0 1009,0 999,8	$\epsilon_{xy} \bullet$
<input checked="" type="radio"/> $m_x =$	0,0	0,0	-999,3 999,8 1009,0 10259,3 5327,2 4152,6	$\kappa_x \circ$
<input checked="" type="radio"/> $m_y =$	0,0	0,0	999,8 -1040,2 1009,0 5327,2 10416,7 4152,6	$\kappa_y \circ$
<input checked="" type="radio"/> $m_{xy} =$	0,0	0,0	1009,0 1009,0 999,8 4152,6 4152,6 5646,1	$\kappa_{xy} \circ$
$\Delta T =$	0,0			
$\Delta c (\%) =$	0,0E0			

$\sigma$  und  $\epsilon$  - Verteilung    Löschen    3D-Ansicht

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem

<input type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	$z_{\text{mJ}}$	$z_i$	$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Versagenskriterium	$RF_{mn}$	Versagensmode
1	Lage 1	45,0	0,942	1,05	165,882	4,426	0,63	Puck	3,604	Faserbruch Zug
2	Lage 2	45,0	0,726	0,834	173,106	3,285	0,582	Puck	3,454	Faserbruch Zug
3	Lage 3	45,0	0,51	0,618	180,33	2,145	0,534	Puck	3,454	Faserbruch Zug
4	Lage 4	45,0	0,294	0,402	187,554	1,005	0,486	Puck	3,316	Faserbruch Zug
5	Lage 5	45,0	0,078	0,186	194,778	-0,136	0,438	Puck	3,188	Faserbruch Zug
6	Lage 6	45,0	-0,138	-0,03	200,002	-1,276	0,39	Puck	2,96	Faserbruch Zug
7	Lage 7	45,0	-0,354	-0,246	209,226	-2,416	0,342	Puck	2,858	Faserbruch Zug
8	Lage 8	45,0	-0,57	-0,402	216,45	-3,556	0,294	Puck	2,762	Faserbruch Zug
9	Lage 9	45,0	-0,786	-0,678	223,673	-4,697	0,247	Puck	2,673	Faserbruch Zug
10	Lage 10 (1/2)	0,0	-0,913	-0,894	230,897	-5,837	0,199	Puck	2,589	Faserbruch Zug
11	Lage 10 (2/2)	90,0	-0,952	-0,933	68,243	14,703	20,993	Puck	1,331	Zwischenfaserbruch Modus A
12	Lage 11 (1/2)	0,0	-0,991	-0,972	68,129	14,635	21,179	Puck	1,326	Zwischenfaserbruch Modus A
13	Lage 11 (2/2)	90,0	-1,03	-1,011	68,072	14,601	21,551	Puck	1,334	Zwischenfaserbruch Modus A
				-1,05	70,533	14,249	-21,737	Puck	1,227	Zwischenfaserbruch Modus A
								Puck	1,317	Zwischenfaserbruch Modus A
								Puck	1,311	Zwischenfaserbruch Modus A
								Puck	1,319	Zwischenfaserbruch Modus A
								Puck	1,312	Zwischenfaserbruch Modus A

Abbildung 12.16: Sicherheit am Gurt unten bei 500N nach eLamX<sup>2</sup>

#### 12.4 Abbildungen: Beulberechnung

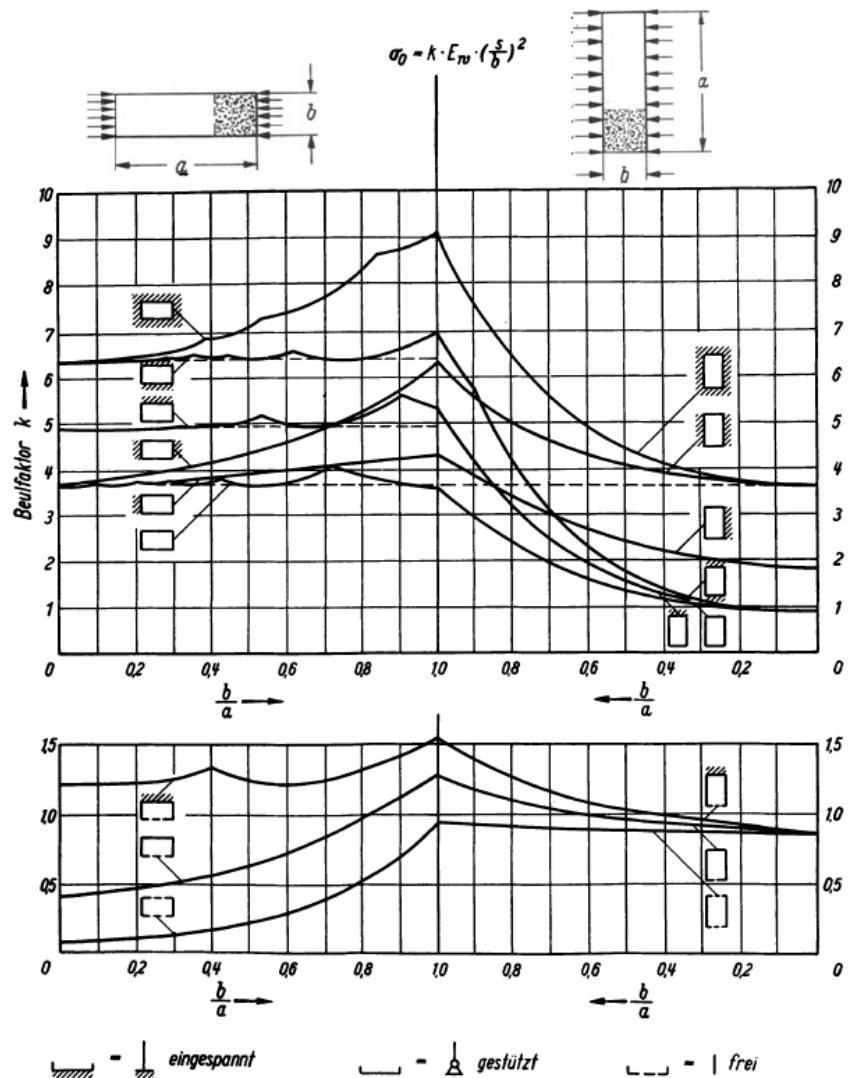


Abbildung 12.17: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Druck ohne Versteifungen; nach [Her60]

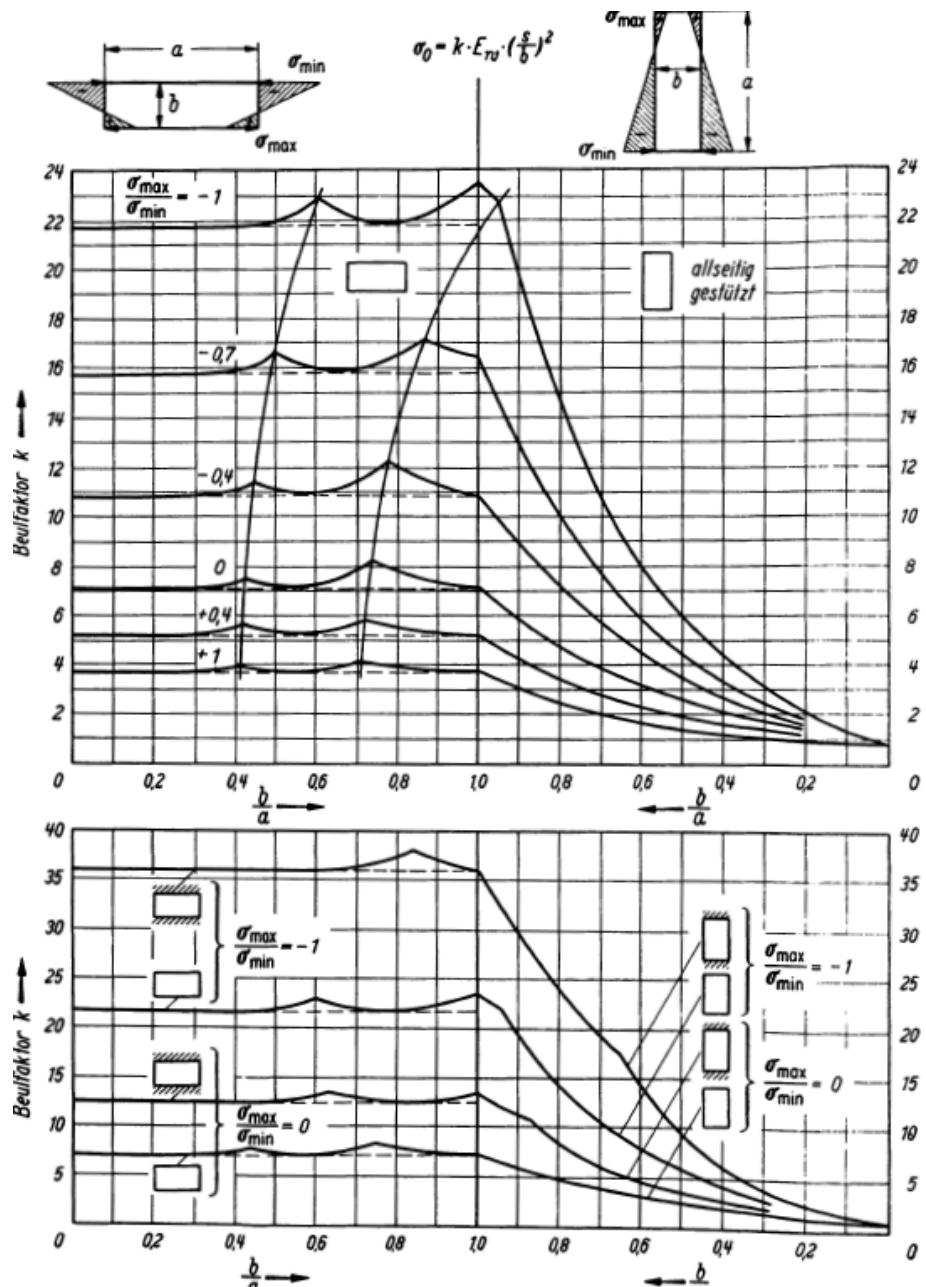


Abbildung 12.18: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Biegung und Druck, ohne Versteifungen; nach [Her60]

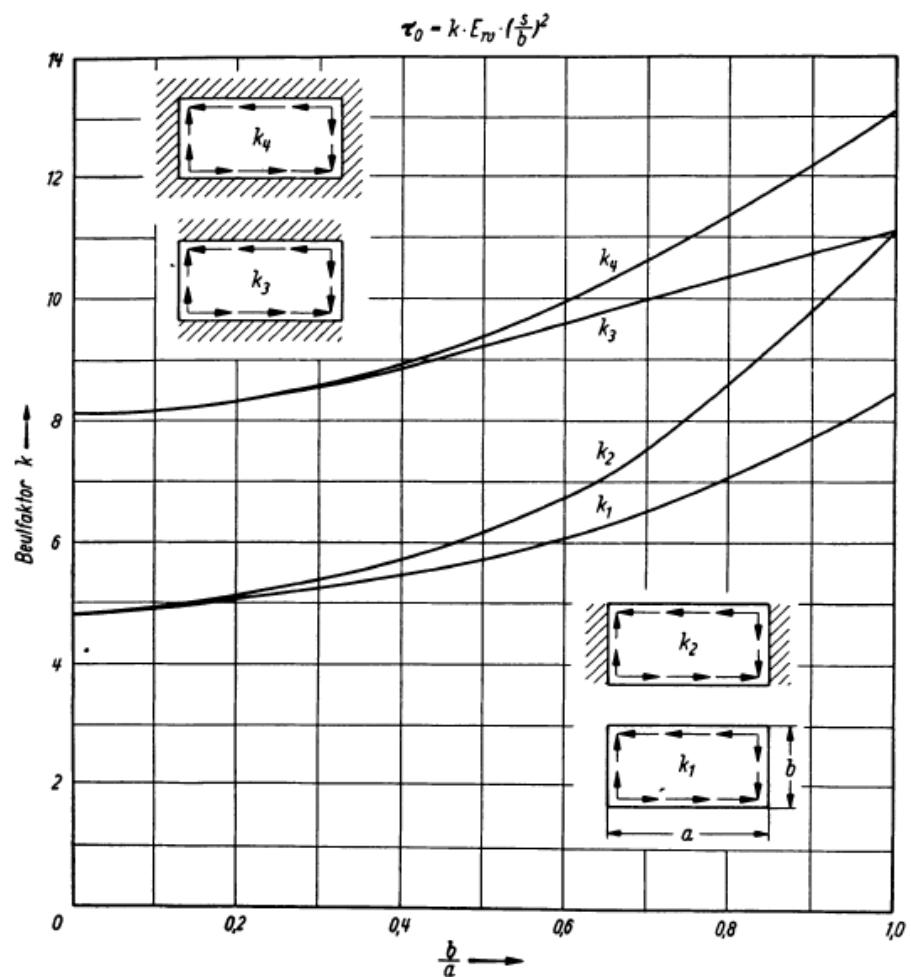


Abbildung 12.19: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Schub, ohne Versteifungen; nach [Her60]

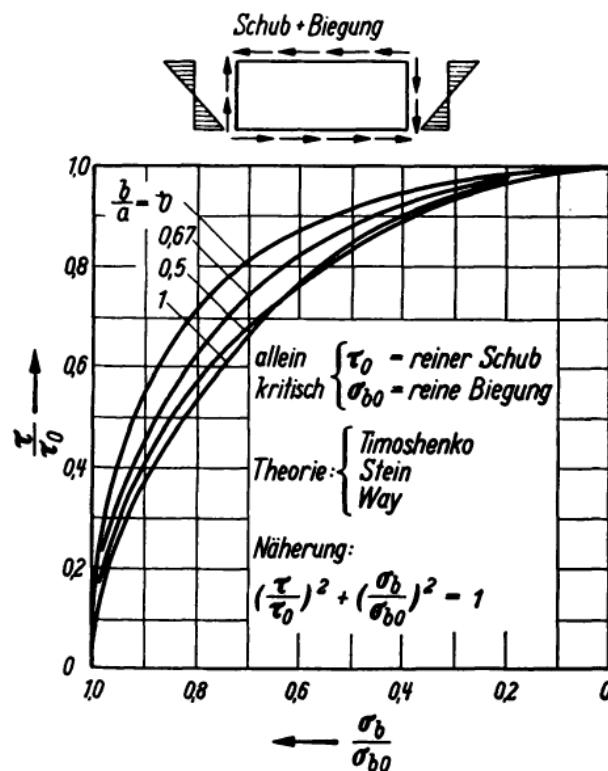


Abbildung 12.20: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, Ränder einseitig gestützt, für Überlagerungen, ohne Versteifungen; nach [Her60]

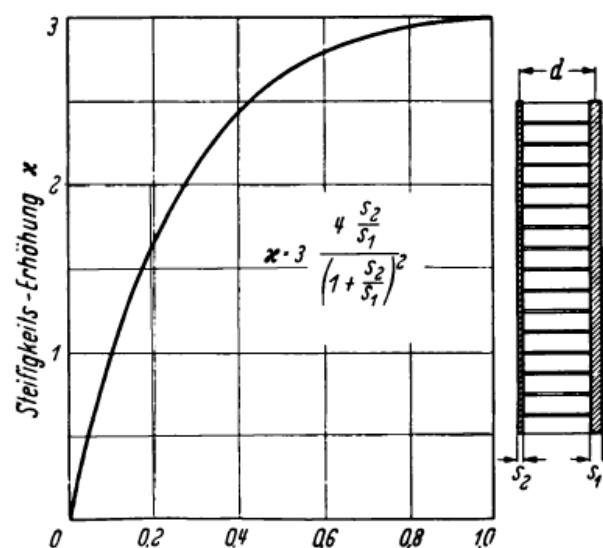


Abbildung 12.21: Sandwichplatte mit unterschiedlichen Hautstärken, Beulsteifigkeit, für Steifigkeits-Erhöhungsfaktor; nach [Her60]

## 12.5 Abbildungen: Schubfluss

$s$	$\in (0, \dots)$
1	58,90486225
2	14
3	37,5
4	14
5	107,72
6	30,07
7	83,46
8	14
9	14
10	37,5
$\Sigma$	411,1548623

Abbildung 12.22: Wertebereich der Laufvariablen  $s_i$

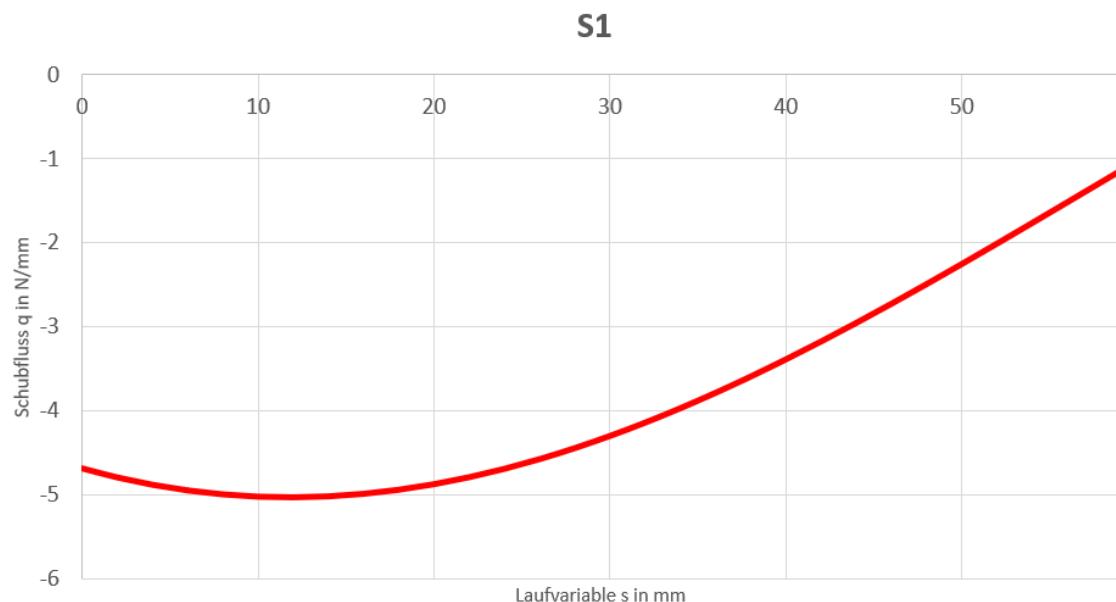


Abbildung 12.23: Schubfluss Bereich 1



Abbildung 12.24: Schubfluss Bereich 2

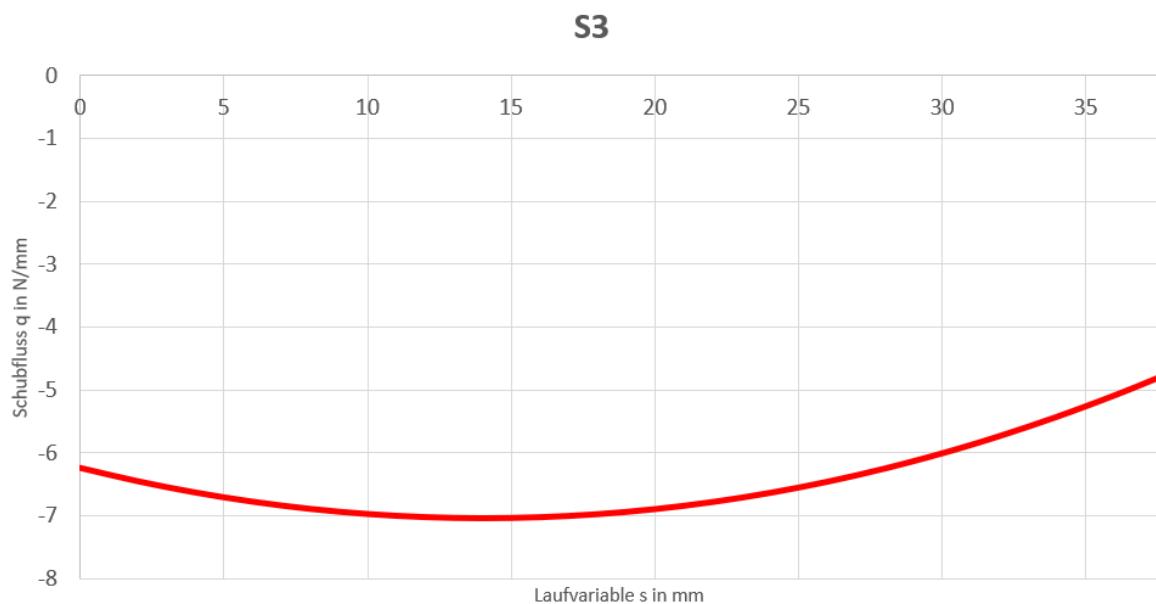


Abbildung 12.25: Schubfluss Bereich 3

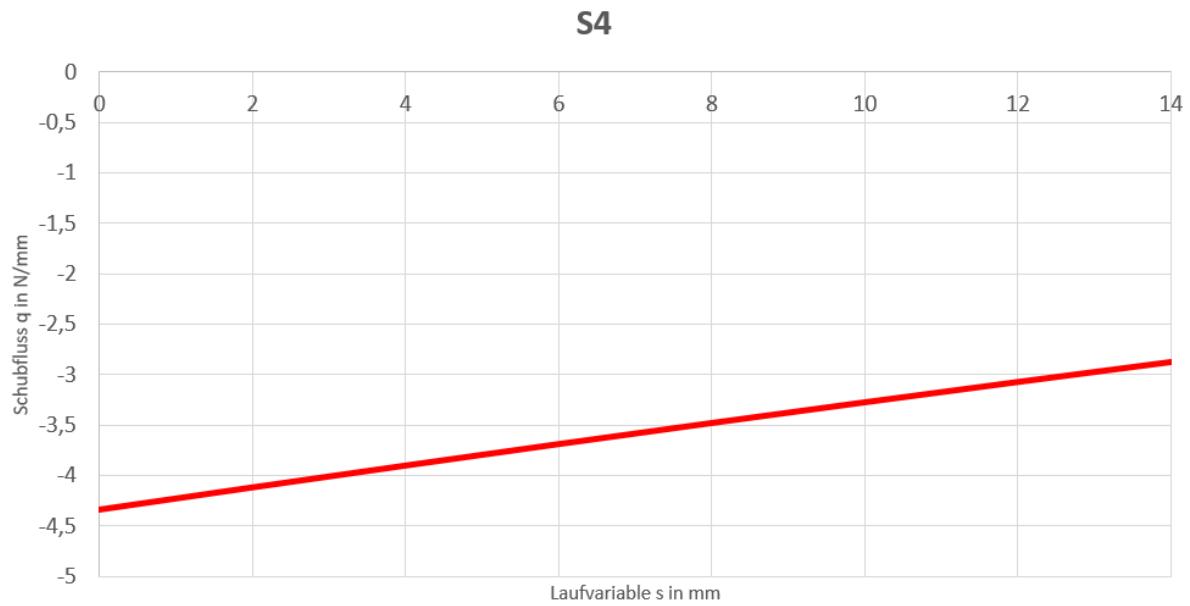


Abbildung 12.26: Schubfluss Bereich 4

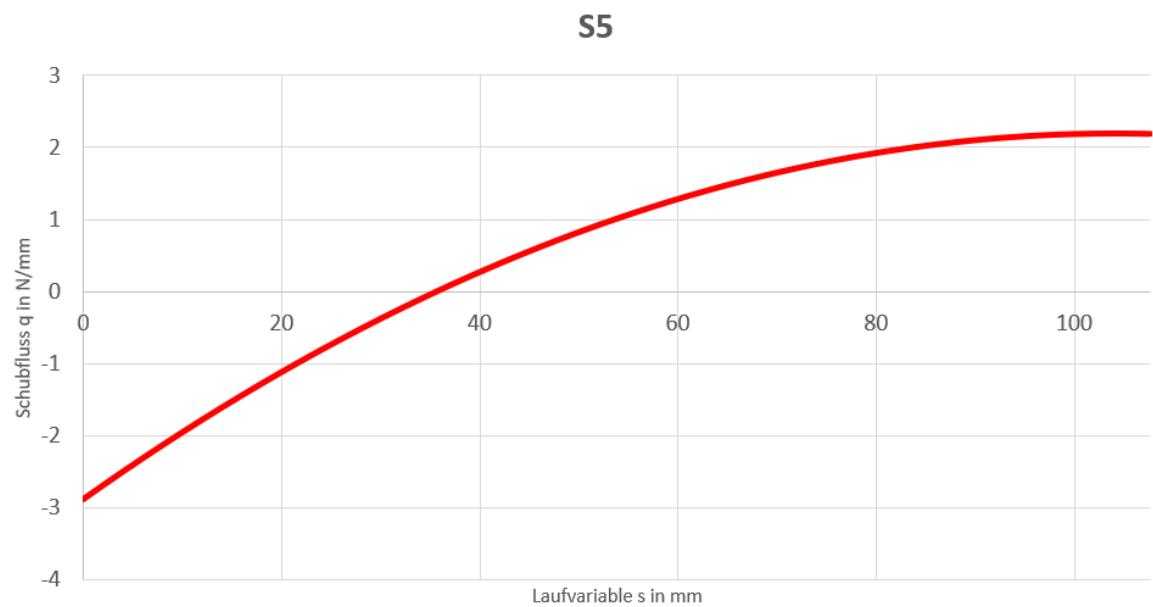


Abbildung 12.27: Schubfluss Bereich 5

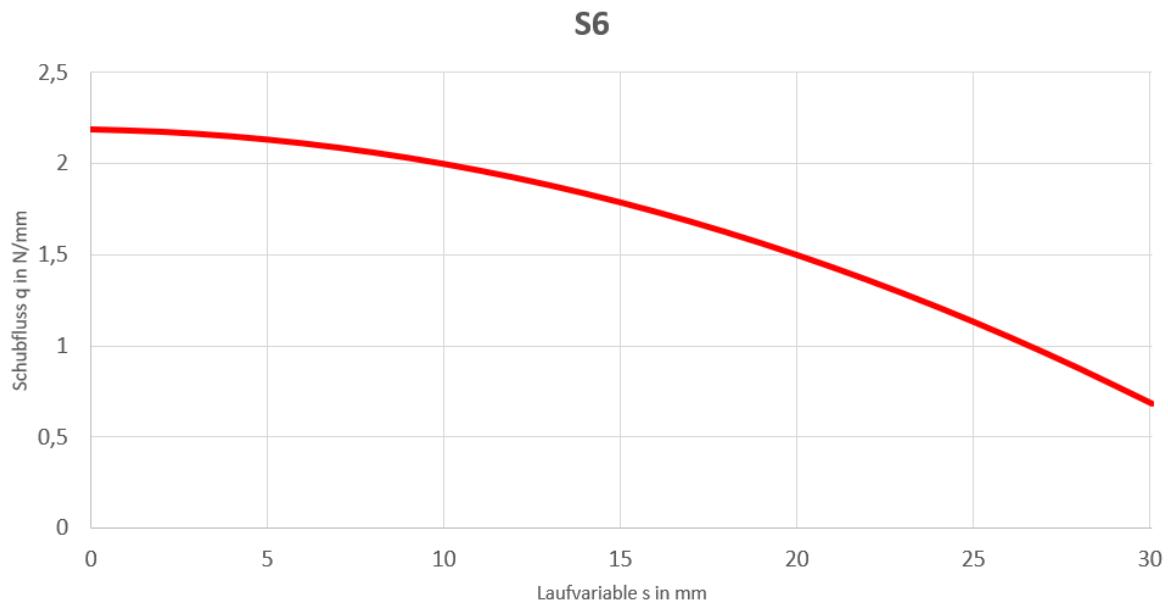


Abbildung 12.28: Schubfluss Bereich 6

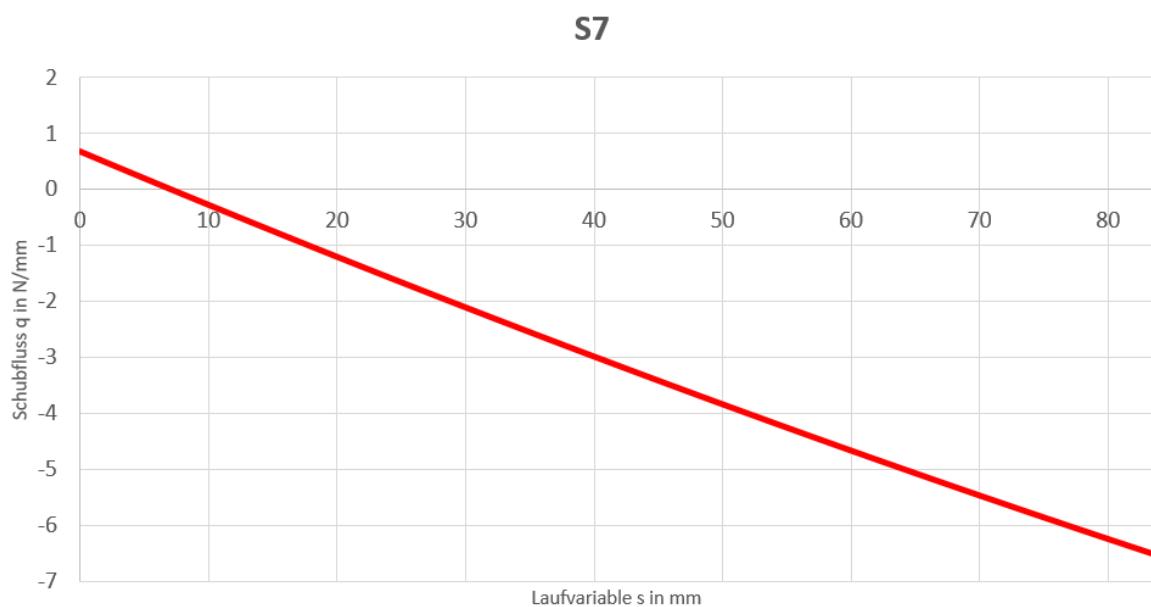


Abbildung 12.29: Schubfluss Bereich 7

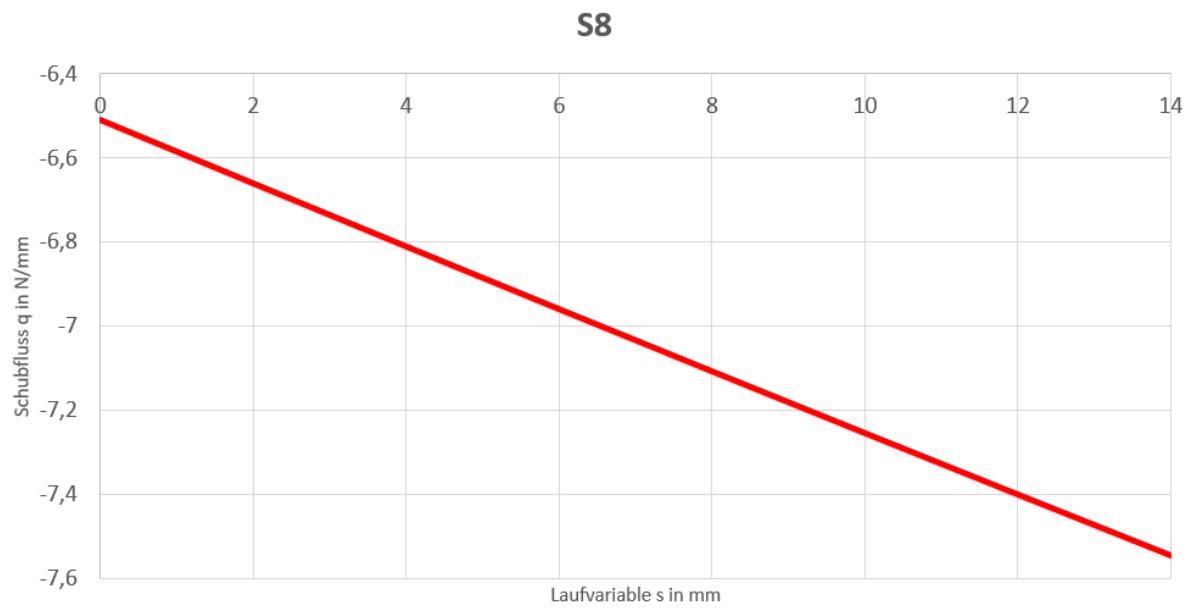


Abbildung 12.30: Schubfluss Bereich 8

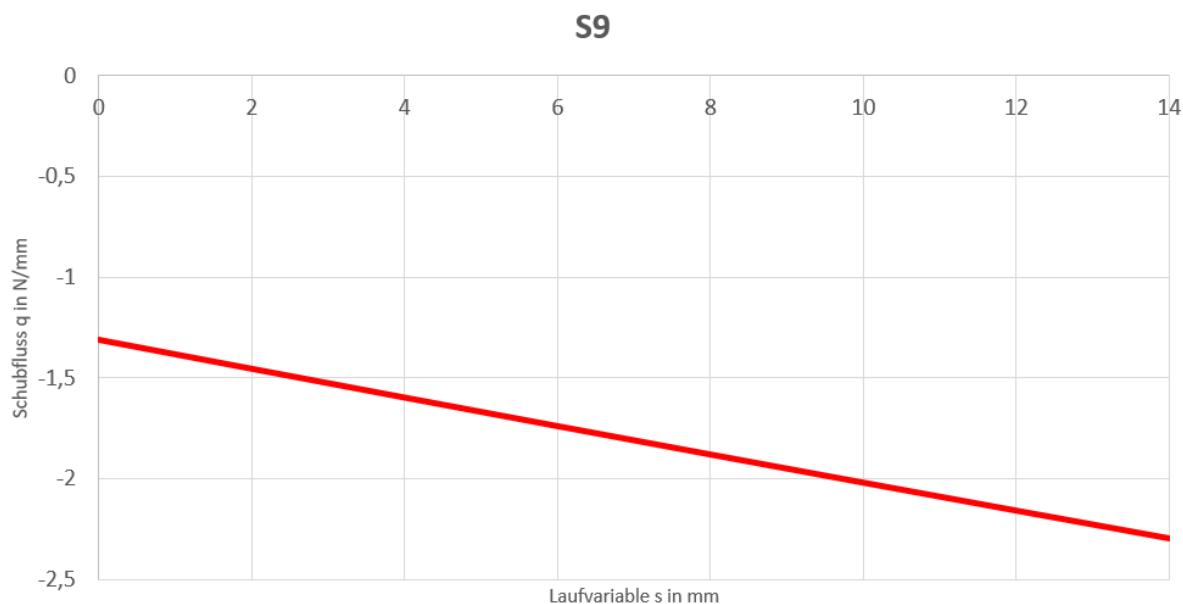


Abbildung 12.31: Schubfluss Bereich 9

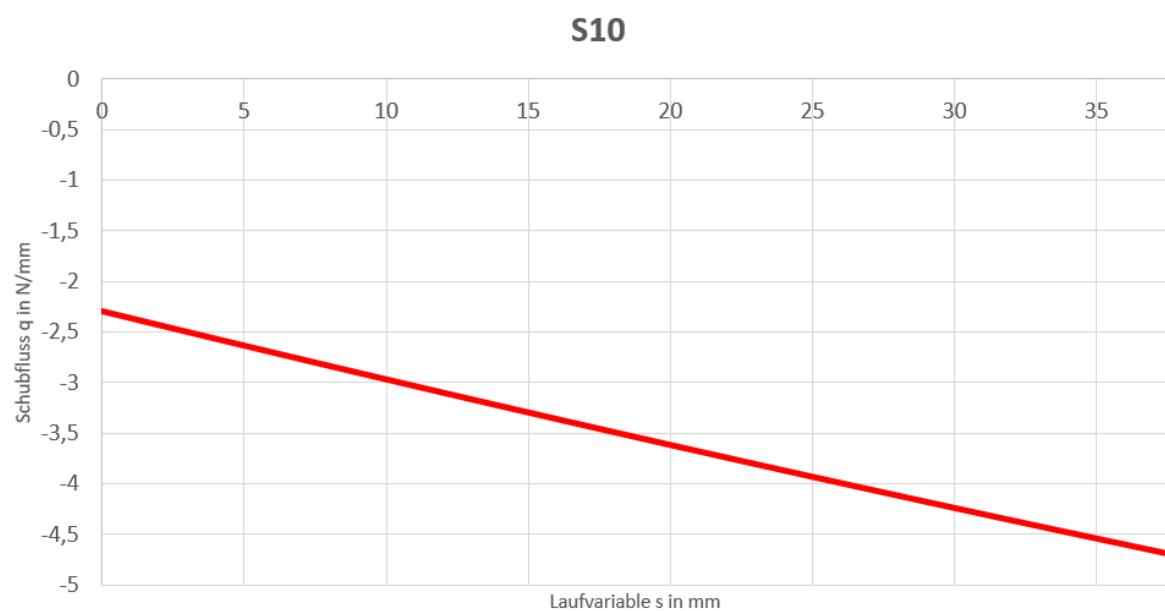


Abbildung 12.32: Schubfluss Bereich 10

## 12.6 Abbildungen: Numerische Berechnung

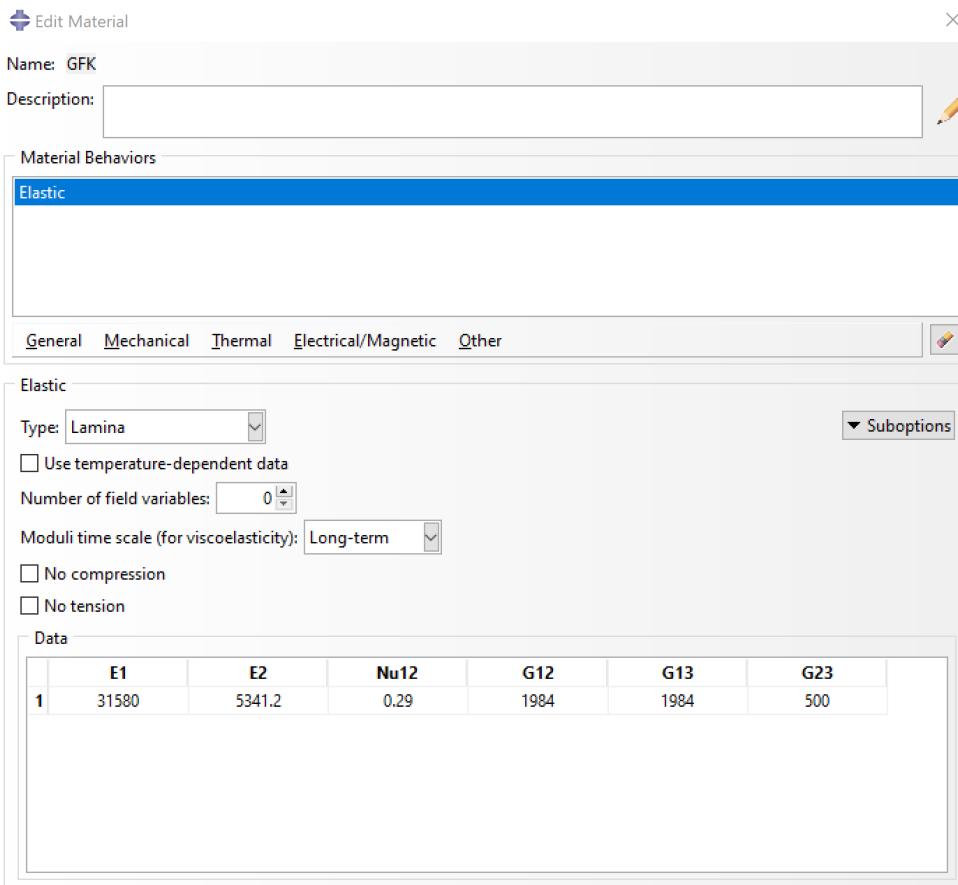


Abbildung 12.33: ABAQUS Material Beispiel GFK

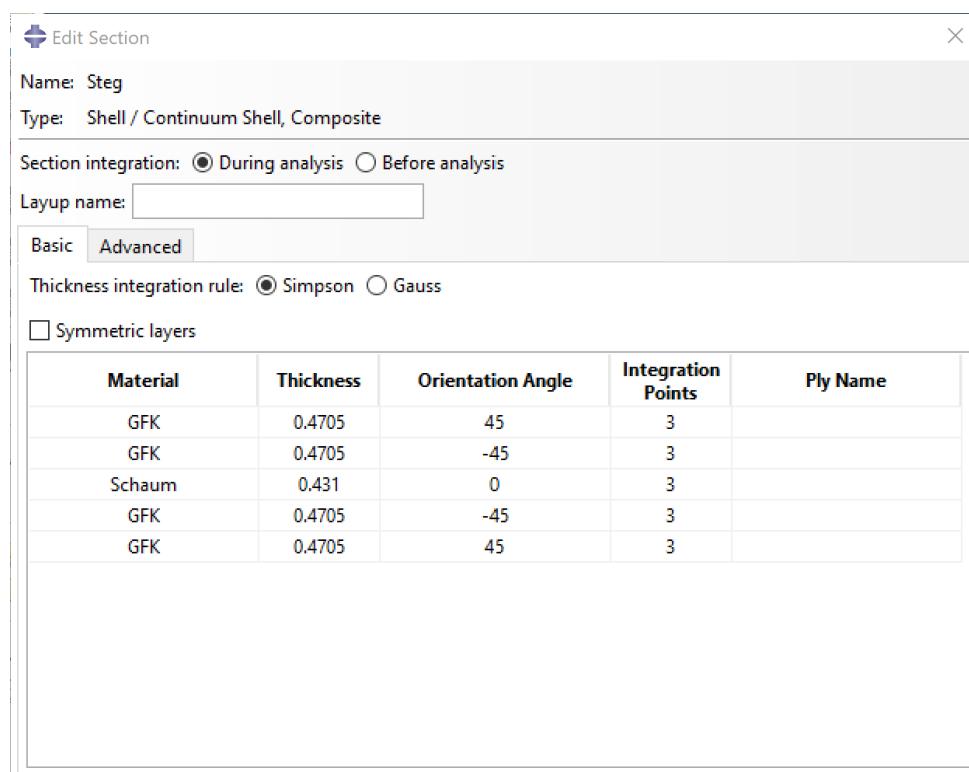


Abbildung 12.34: ABAQUS Section Beispiel:Steg

## 12.7 Abbildungen: Konstruktion und Fertigung

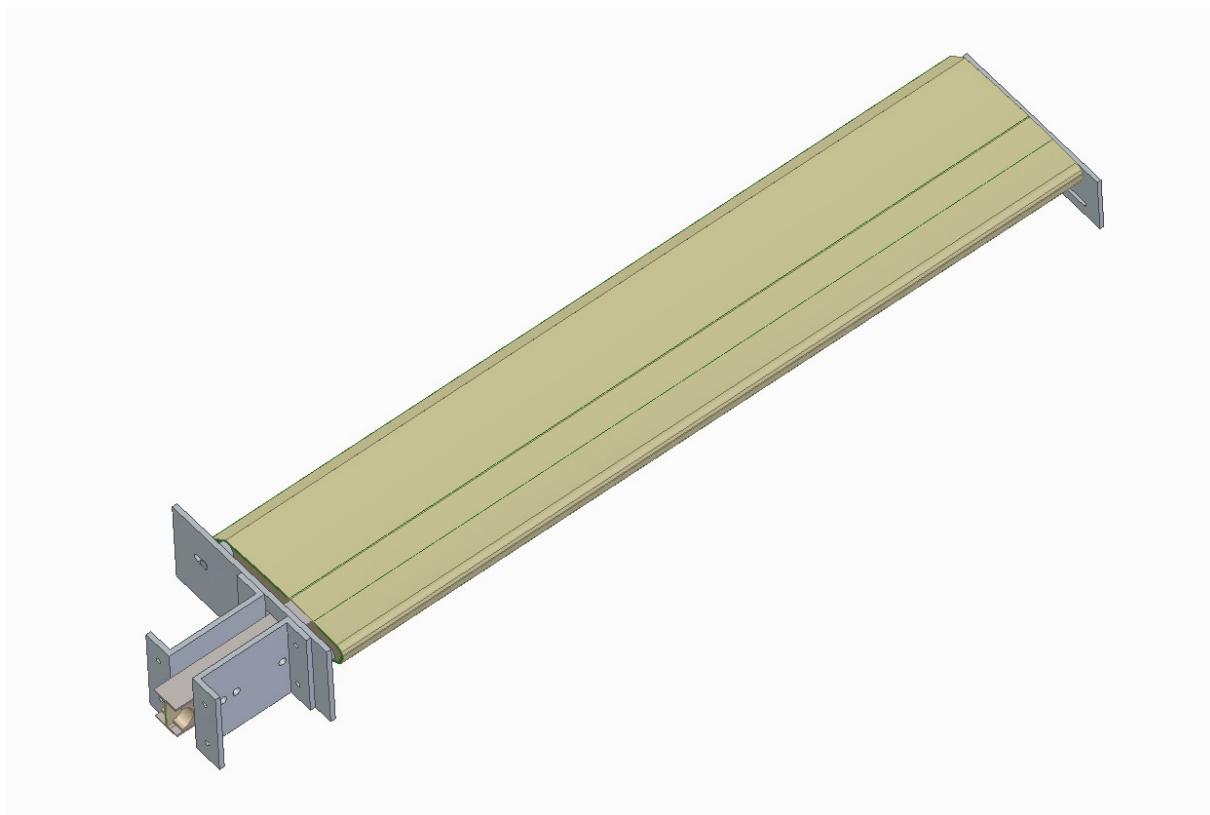


Abbildung 12.35: CAD-Modell der Tragfläche und des Teststandes

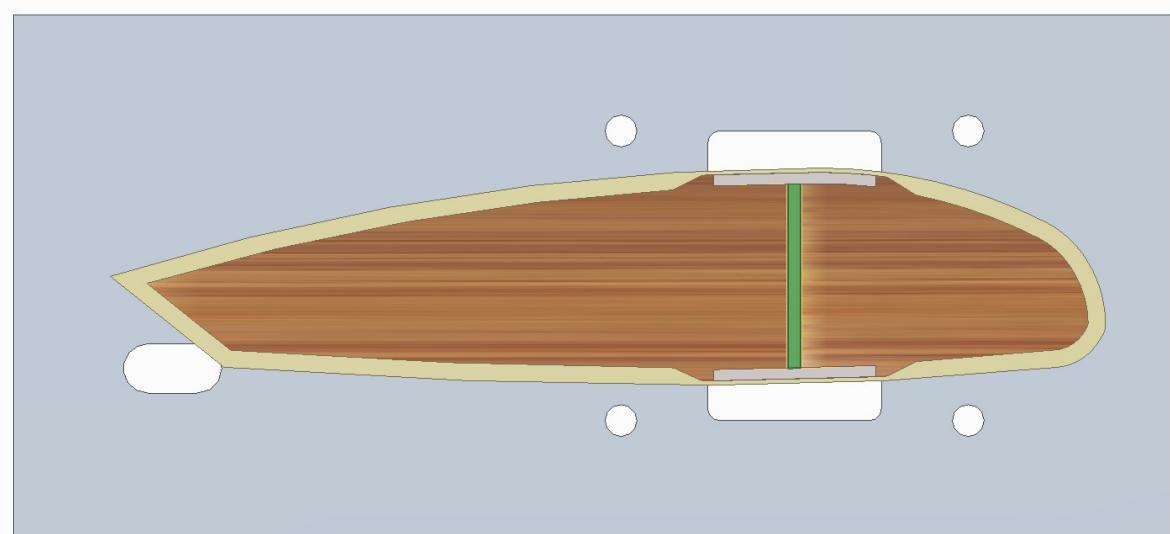


Abbildung 12.36: Ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs der Querkraftbolzen

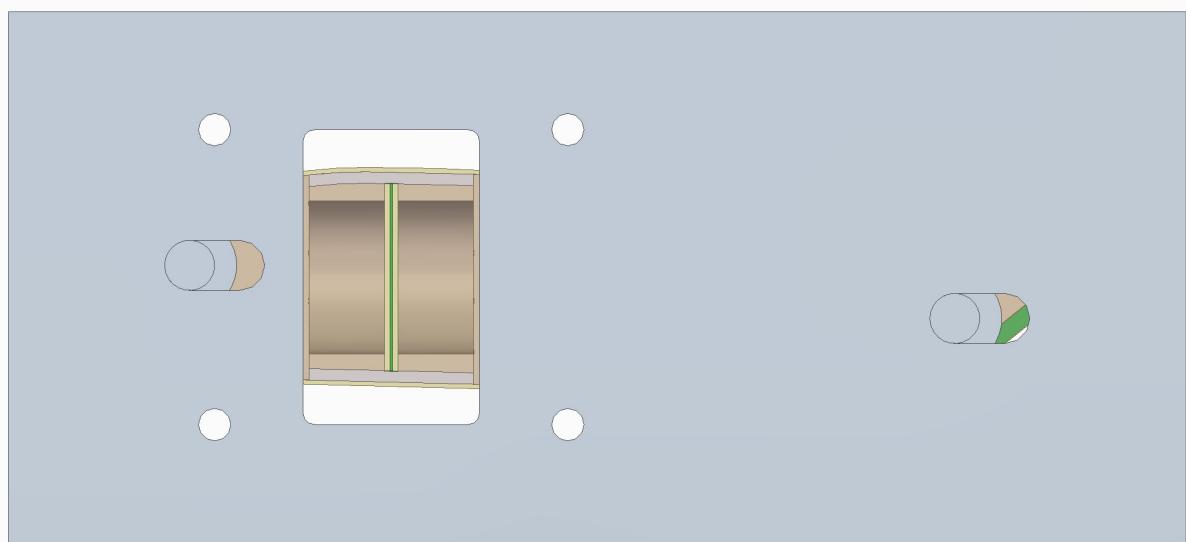


Abbildung 12.37: Montage der Tragfläche auf dem Teststand

