

Test Deckblatt

Projektarbeit auf dem Gebiet des Flugzeugbaus und Leichtbaus

Bearbeitungsdauer: 13 Wochen

Brack Tristan
Golombek Hannes
Kammler Hendrik
Scholz Ole

Matr.-Nr.
Matr.-Nr.
Matr.-Nr.
Matr.-Nr.

Ausgegeben am: 15.10.2020

Abgegeben am:

Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund -Holm-Bauweise

1. Einleitung

Im Rahmen dieser Projektarbeit soll der Flügel des LF1 „Zaunkönig“ (siehe Abbildung 1) im Modellmaßstab 1:4,7, d.h. die Halbspannweite beträgt ca. 848 mm, ausgelegt werden. Aus der Auslegung des Gesamtflugzeuges resultieren entsprechende Anforderungen an den Flügel, welche im Zuge der Auslegung und Fertigung berücksichtigt werden müssen. Sowohl die konstruktiven als auch die strukturmechanischen Maßnahmen sollen mit Hilfe geeigneter Ingenieursmethoden erfolgen und begründet werden.

Zur Überprüfung der Auslegung sollen die Ergebnisse der Berechnungen mit Messergebnissen aus vorangegangenen Tests verglichen werden.



Abbildung 1: Seitenansicht LF1 "Zaunkönig"

2. Anforderungen/Vorgaben

2.1. Geometrische Vorgaben des Flügels

Bei dem Flügel des Zaunkönigs handelt es sich um einen Rechteckflügel (Zuspitzung $\tau = 0$, Pfeilung $\phi = 0^\circ$). Vorflügel und Hochauftriebsklappen erstrecken sich über die gesamte Spannweite und sind jeweils an der Flügelwurzel, -mitte und -spitze mit dem Hauptflügel verbunden (bei $\eta = \{0,0; 0,5; 1,0\}$). Darüber hinaus ist der Hauptflügel gegenüber dem Rumpf mit Verstrebungen am Punkt ($\eta = 0,50$; $\xi = 0,25$) abgestützt. Die Maße des Gesamtflügels sind Abbildung 2 sowie den beigefügten Anlagen zu entnehmen. Im Gegensatz zu dem originalen, abgestrebten Flügel des Zaunkönigs soll eine alternative Bauweise ohne Streben umgesetzt werden.



Abbildung 2: Bemaßte Front- und Draufsicht des LF1 "Zaunkönig"

2.2. Strukturmechanische Anforderungen

Für die strukturmechanischen Tests soll das Modell eines Halbflügels in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise gebaut werden, der bei einer möglichst geringen Eigenmasse eine Prüfkraft von 500 N ohne Bruch erträgt. Dabei soll der Flügel sowohl auf Festigkeit als auch auf Steifigkeit ausgelegt werden. Eine hinreichende Steifigkeit ist gegeben, wenn sich der Flügel bei einer senkrechten Belastung von $F_{\text{Prüf}} = 100 \text{ N}$ an der Flügelspitze (L/4-Punkt) um nicht mehr als $z_{100\text{N}} = 22 \text{ mm}$ durchbiegt. Um die Hautdicke ausschließlich auf Festigkeit zu dimensionieren, aber frühzeitiges Beulen der Haut zu vermeiden, kann ein Sandwich-Aufbau an kritischen Bereichen und/oder Rippen gewählt werden. Es sind geeignete konstruktive Mittel zu überlegen um diese Vorgaben zu erreichen. Die Einhaltung der Anforderungen ist rechnerisch nachzuweisen.

Darüber hinaus soll der Torsionswinkel der Flügelaußenkante in Abhängigkeit einer exzentrischen, senkrechten Prüflast mit Hilfe der Theorie nach St. Venant berechnet werden.

2.3. Konstruktive Anforderungen

Der Hauptflügel des Zaunkönigs ist als Modellflügel in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise umzusetzen. Vorflügel und Hochauftriebsklappen sind nicht auszuführen. Das aerodynamische Profil des Hauptflügels ist zu bewahren. Die V-Stellung des Flügels ist zu vernachlässigen. Als Kernmaterial steht Styrodur und Depron zur Verfügung. Die Faserorientierung der Gewebe ist im Einklang mit den durchgeführten Rechnungen belastungsgerecht zu wählen.

Die rumpfseitigen Einspannverhältnisse sind wie in Anlage C ausgeführt. Diese sehen eine wie bei Klein- und Segelflugzeugen übliche Konstruktion vor: Der Holm wird dabei im Rumpf mit der anderen Flügelhälfte verstiftet und jede Flügelhälfte stützt sich gegen den Rumpf wobei die Torsion mit Querkraftbolzen aufgenommen wird. Für den Flügelbau bedeutet dies, dass der Holm entsprechend Anlage C aus dem Flügel herausgezogen werden muss. Es sollte außerdem berücksichtigt werden, dass der Holm geeignet getapert wird, um Versagen im Einspannungsbereich zu vermeiden. An der freien Flügelspitze ist zur Lasteinleitung eine Endrippe vorzusehen, die die lösbare Montage der Endscheibe aus Anlage D erlaubt.

Der Flügel darf ein maximales Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten. Auf eine fertigungsgerechte Konstruktion ist zu achten.

3. Bewertungskriterien

Das Hauptaugenmerk der Konstruktion sollte, unter Einhaltung der zuvor genannten Randbedingungen, auf einem möglichst geringen Eigengewicht des Flügels liegen. Ein Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gruppen untereinander soll anhand der Masse $m_{\text{Flügel}}$ entsprechend des gewichtsnormalisierten Festigkeitskriteriums $m_{\text{Belastung,max}}/m_{\text{Flügel}}$ erfolgen, welches die ertragene Bruchlast mit dem Eigengewicht der Konstruktion ins Verhältnis setzt.

4. Aufgabenstellung

Um die oben beschriebenen Anforderungen zu erfüllen, sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

1. Einarbeitung in die Fragen der Anforderungen
2. Entwicklung konstruktiver und strukturmechanischer Lösungsansätze für die Faserverbund-Bauweise
3. Festlegung einer konstruktiven Lösungsvariante
4. Dimensionierung und Nachweis der gewählten Lösungsvariante mittels
 - a. Handbuchmethoden, sowie
 - b. Numerischer Methoden
5. Detailentwurf der dimensionierten Lösungsvariante
6. Auswertung, Vergleich und Diskussion der berechneten Daten (Biegung, Torsion, max. Bruchlast, Schubmittelpunkt)
7. Vergleich mit im Strukturtest ermittelten Daten und denen anderer Gruppen
8. Diskussion der Ergebnisse
9. Bewertung der eigenen Konstruktion und Diskussion einer Optimierung

Arbeitsteilung und -ablauf ist durch die Gruppe selbstständig zu organisieren. Theoretische Hintergründe, erstellte Modelle, sowie Vorgehensweisen, Entscheidungskriterien und gewonnene Ergebnisse sind sorgfältig zu dokumentieren. Die Verfasser der einzelnen Abschnitte des Abschlussberichtes sind zu kennzeichnen.

5. Literatur

- [A] Horst, P., (2013) 'Leichtbau I – Ingenieurtheorien des Leichtbaus' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [B] Ostermeyer, G.-P. (2010) 'Mechanik I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Dynamik und Schwingungen
- [C] Horst, P., (2013) 'Finite Elemente Methoden I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [D] Schürmann, H., (2007) 'Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden' Springer-Verlag Berlin Heidelberg

6. Anlagen

- [A] Merkblatt für die Anfertigung studentisch-wissenschaftlicher Arbeiten
- [B] Flügelkontur, Technische Zeichnung
- [C] Einspannung, Technische Zeichnung
- [D] Endscheibe, Technische Zeichnung

(Ort, Datum)

(Prof. Dr.-Ing. P. Horst)

Inhaltsverzeichnis

1	Bezeichnungen	6
2	Hauptteil	7
3	Grundlagen	7
3.1	Glasfaser	7
4	Modellierung des Holms	7
4.1	Annahmen zur Modellierung (T.B.)	7
4.2	Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)	8
4.3	Analyse der Modellierung (T.B.)	11
5	Auslegung des Holms nach VDI 2013	13
5.1	Dimensionierung der Gurte	13
5.2	Nachrechnung der angepassten Gurte	16
5.3	Bestimmung der Lagenanzahl des Steges	17
6	Beulabschätzung des Holms	19
6.1	Beulsicherheit der Gurte (T.B.)	19
6.2	Beulsicherheit des Steges (T.B.)	20
7	Auslegung der Verklebungen	22
8	CAD-Modell	22
9	Zusammenfassung	22
10	FEM	23
10.1	Warum FEM?	23
10.2	Wie funktioniert FEM?	23
10.2.1	Schwache Lösung der Elastostatik	23
10.2.2	Diskretisierung	24
11	Quellenverzeichnis	24
12	Abbildungsverzeichnis	24
13	Anhang	24

1 Bezeichnungen

Alphabetische Ordnung!

Lateinisch vor griechisch, jeweils Groß- vor Kleinbuchstaben

(lat. Großbuchstaben)

A : Festlager

B : Loslager

E_{11} : Elastizitätsmodul des Verbundes in Faserlängsrichtung $E_{f,11}$: Elastizitätsmodul der Fasern in Faserlängsrichtung

$E_{f,22}$: Elastizitätsmodul der Fasern in Faserquerrichtung

E_M : Elastizitätsmodul der Matrix

F_{pruef} : Prüfkraft an der Flügelspitze

F_Q : Kraftaufnahme der Querkraftbolzen

$R_{||}^{(+)}$: Zugfestigkeit parallel zur Faserrichtung des UD-Handlaminats $R_{||}^{(-)}$: Druckfestigkeit parallel zur Faserrichtung des UD-Handlaminats

(lat. Kleinbuchstaben)

l_0 : Länge des freien Endes

l_1 : Abstand der Lager A und B

l_2 : Abstand zwischen Lager B und den Querkraftbolzen

l_3 : Abstand zwischen den Querkraftbolzen und der Flügelspitze

s : Halbspannweite

w : Absenkung der Flügelspitze in negative z-Richtung

(griechische Kleinbuchstaben)

ϕ : Faservolumengehalt ρ_f : Dichte der Fasern ρ_m : Dichte der Matrix

2 Hauptteil

TEst Hauptteil

3 Grundlagen

3.1 Glasfaser

Test

4 Modellierung des Holms

4.1 Annahmen zur Modellierung (T.B.)

Das Koordinatensystem des Flügels entspricht dem Flugzeugkoordinatensystem, sodass die Flügellängskoordinate durch y definiert ist. Der Koordinatenursprung ist im Lager A positioniert.

Der Holm inkl. des Holmstummels wird für die Belastung durch eine Prüfkraft F_{pruef} in negative z-Richtung als Biegebalken ausgelegt. Dafür ist er an zwei Stellen gelagert, dem Lager

A und Lager B , dabei repräsentieren sie die Verstiftungen (siehe Bauteil Ü-Profil"). Um eine Überbestimmung des Systems zu vermeiden, wird das Lager B als Loslager angenommen. Die Querkraftbolzen werden nicht durch ein Lager, sondern durch eine zusätzlich angreifende Kraft F_Q simuliert, da keine Absenkung, sondern lediglich eine Kraftaufnahme der Wurzelrippen möglich ist.

Als Randbedingungen der Modellierung sind die Halbspannweite s und die Absenkung w gegeben. Für die Absenkung w soll eine Sicherheit $j = 1,1$ gesetzt werden. Zwischen Lager A und B wird die Länge l_1 angenommen, zwischen Lager B und der Wurzelrippe C die Länge l_2 . Die verbleibende Länge bis zur Flügelspitze, an der die Prüfkraft F_{pruef} wirkt, wird l_3 bezeichnet. Die Halbspannweite s wird beginnend in der Mitte der Verstiftungen bis zur Flügelspitze gemessen. Das Holmstummelende wird ab dem Lager A mit l_0 als Länge definiert. Diese Länge ist jedoch unerheblich für die Modellierung, sondern wird erst für die Massenbestimmung benötigt.

Anhand der Randbedingungen und der Einspannvorrichtung für den Versuchsaufbau ergeben sich folgende Längen (ebenfalls in Abb. 1 dargestellt):

$$s = 0,848m \quad (1)$$

$$l_0 = 0,03m \quad (2)$$

$$l_1 = 0,076m \quad (3)$$

$$l_2 = 0,037m \quad (4)$$

$$l_3 = s - \frac{l_1}{2} - l_2 = 0,773m \quad (5)$$

$$w_{j=1,1} = \frac{1}{j} * w = \frac{1}{1,1} * 0,022m = 0,02m \quad (6)$$

4.2 Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)

Um die der Differentialgleichungen der Balkenbiegung lösen zu können, wird das System vorerst in drei Teilbereiche I , II , und III aufgeteilt, die sich von Lager A nach B , von Lager B zur Wurzelrippe C und von dort us bis zur Flügelspitze.

Dadurch ergeben sich folgende zwölf Differentialgleichungen:

$$EI \cdot w_I''''(y) = q_I(y) \quad (7)$$

$$EI \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \cdot y + R_1 = -Q_I(y) \quad (8)$$

$$EI \cdot w_I''(y) = \frac{q_I(y)}{2} \cdot y^2 + R_1 \cdot y + R_2 = -M_I(y) \quad (9)$$

$$EI \cdot w_I'(y) = \frac{q_I(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_1}{2} \cdot y^2 + R_2 \cdot y + R_3 \quad (10)$$

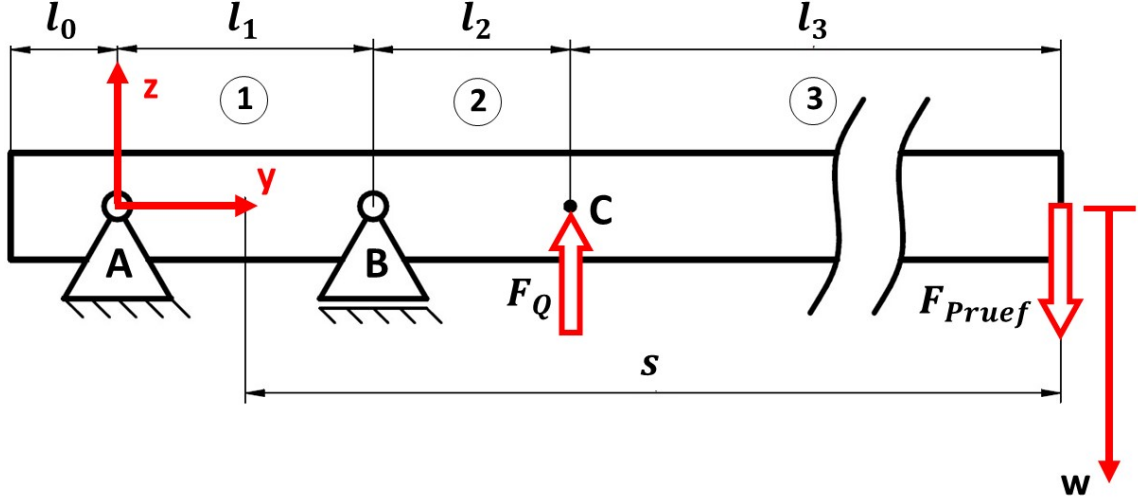


Abbildung 1: Modellierung des Holms

$$EI \cdot w_I(y) = \frac{q_I(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_1}{6} \cdot y^3 + \frac{R_3}{2} \cdot y^2 + R_3 \cdot y + R_4 \quad (11)$$

$$EI \cdot w_{II}'''(y) = q_{II}(y) \quad (12)$$

$$EI \cdot w_{II}''(y) = q_{II}(y) \cdot y + R_5 = -Q_{II}(y) \quad (13)$$

$$EI \cdot w_{II}'(y) = \frac{q_{II}(y)}{2} \cdot y^2 + R_5 \cdot y + R_6 = -M_{II}(y) \quad (14)$$

$$EI \cdot w_{II}(y) = \frac{q_{II}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_5}{2} \cdot y^2 + R_6 \cdot y + R_7 \quad (15)$$

$$EI \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{II}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_5}{6} \cdot y^3 + \frac{R_6}{2} \cdot y^2 + R_7 \cdot y + R_8 \quad (16)$$

$$EI \cdot w_{III}'''(y) = q_{III}(y) \quad (17)$$

$$EI \cdot w_{III}''(y) = q_{III}(y) \cdot y + R_9 = -Q_I(y) \quad (18)$$

$$EI \cdot w_{III}'(y) = \frac{q_{III}(y)}{2} \cdot y^2 + R_9 \cdot y + R_{10} = -M_I(y) \quad (19)$$

$$EI \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{III}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_9}{2} \cdot y^2 + R_{10} \cdot y + R_{11} \quad (20)$$

$$EI \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{III}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_9}{6} \cdot y^{10} + \frac{R_3}{2} \cdot y^2 + R_{11} \cdot y + R_{12} \quad (21)$$

Die Randbedingungen der Modellierung ergeben sich folgend:

$$w_I(l = 0) = 0 \quad (22)$$

$$M_I(l = 0) = 0 \quad (23)$$

$$w_I(l = l_1) = 0 \quad (24)$$

$$w_{II}(l = l_1) = 0 \quad (25)$$

$$w'_I(l = l_1) = w'_{II}(l = l_1) \quad (26)$$

$$M_I(l = l_1) = M_{II}(l = l_1) \quad (27)$$

$$w_{II}(l = l_1 + l_2) = w_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (28)$$

$$w'_{II}(l = l_1 + l_2) = w'_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (29)$$

$$M_{II}(l = l_1 + l_2) = M_{III}(l = l_1 + l_2) \quad (30)$$

$$Q_{II}(l = l_1 + l_2) = Q_{III}(l = l_1 + l_2) + F_Q \quad (31)$$

$$M_{III}(l = l_1 + l_2 + l_3) = 0 \quad (32)$$

$$Q_{III}(l = l_1 + l_2 + l_3) = F \quad (33)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass $q_I(y) = q_{II}(y) = q_{III}(y) = 0$ gilt, da keine Streckenlast angreift.

Als Lösung dieser Differentialgleichungen lässt sich die Querkraft $Q(y)$, das Moment $M(y)$ und die Biegelinie $w(y)$ ermitteln:

$$Q(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} & , y \in (0, l_1) \\ F + F_Q & , y \in (l_1 + l_2) \\ F & , y \in (l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (34)$$

$$M(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} (-F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1}) \cdot y & , y \in (0, l_1) \\ (F + F_Q) \cdot y - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_Q \cdot (l_1 + l_2) & , y \in (l_1 + l_2) \\ F \cdot y - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3) & , y \in (l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (35)$$

$$w(y, F, F_Q, EI) = \begin{cases} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(F \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) \cdot y^3 - \left((l_2 + l_3) \cdot l_1 \cdot F - l_1 \cdot l_2 \cdot F_Q \right) \cdot y \\ , y \in (0, l_1) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{(-F-F_Q)}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3) + F_Q \cdot (l_1+l_2)}{2} \cdot y^2 \right. \\ + \left(F \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{2} l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y \\ + \left. F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2) \right) \\ , y \in (l_1, l_1 + l_2) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{F}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3)}{2} \cdot y^2 + \left(F \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) \right. \right. \\ + \left. \left. F_Q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + \right. \\ + \left. \left. F_Q \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) \right) \\ , y \in (l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (36)$$

Die Herleitung der Lösung ist dem Anhang beigelegt.

Um nun für die Biegesteifigkeit EI ein Ergebnis zu erhalten, wird die Gleichung $w(y, F, F_Q)$ nach $EI(y, F, F_Q, w)$ umgestellt. Die eingesetzten Werte ergeben sich aus der Auslegung auf Steifigkeit. Über die Wurzelrippe werden Kräfte des Holms in die Querkraftbolzen abgesetzt. Aufgrund der biegeweichen Wurzelrippe darf die Absenkung des Holms dort nicht mit Null angenommen werden. Vereinfacht wird definiert, dass die eingeleitete Prüfkraft F_{pruef} an den Querkraftbolzen um ihren Betrag abgesetzt wird, wie es tatsächlich an einem Flugzeugrumpf geschehen würde.

$$\begin{aligned} EI(0.961m, 100N, -100N, 0.022m) &= \\ \frac{1}{w} \cdot \left(-\frac{F}{6} \cdot y^3 + \frac{F \cdot (l_1+l_2+l_3)}{2} \cdot y^2 + \left(F \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + \right. \\ &+ \left. F \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) \\ &= 952,552 \end{aligned} \quad (37)$$

4.3 Analyse der Modellierung (T.B.)

In Abb. 2 werden der Querkraftverlauf $Q(y, F, F_Q, EI)$ (als innere Schnittkraft), der Momentenverlauf $M(y, F, F_Q, EI)$ (als inneres Schnittmoment) und die Biegelinie $w(y, F, F_Q, EI)$, für den Nachweis der Steifigkeit graphisch dargestellt, über die gesamte Holmlänge und einem vergrößerten Ausschnitt im Bereich der Lager.

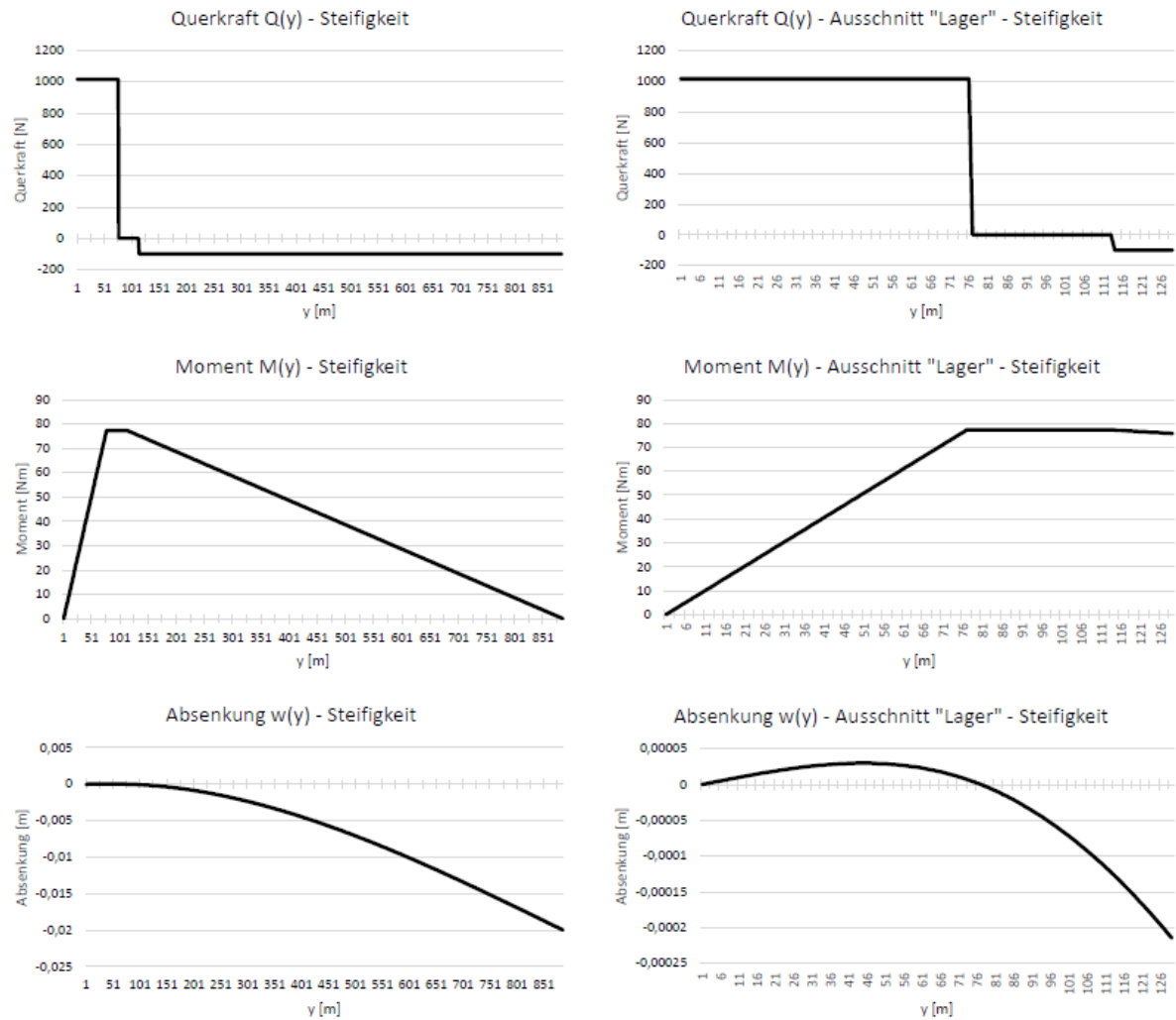


Abbildung 2: Steifigkeitsauslegung

Jedoch werden nicht bei dem Nachweis der Steifigkeit, sondern bei dem Nachweis der Festigkeit das maximale Moment (als Schnittmoment) und die maximale Kraft (als Schnittkraft) erreicht. Bei diesem Nachweis beträgt die Prüfkraft $F_{pruef} = 500N$. Diese Kraft wird bei der Berechnung von EI nicht beachtet, da bei dem Nachweis der Festigkeit die Absenkung w keine Rolle spielt. In Abb. 3 werden die genannten Verläufe nun für den Festigkeitsnachweis dargestellt.

5 Auslegung des Holms nach VDI 2013

Auf Basis der in der Balkenberechnung bestimmten Parameter Biegesteifigkeit, maximales Biegemoment und der maximalen Querkraft, sollen die Gurte und der Steg dimensioniert werden. Die Vorauslegung soll dabei anhand der VDI- Richtlinie 2013 erfolgen, diese enthält in einem Unterkapitel Informationen speziell zur Auslegung eines I-Trägers. Dabei ist zu beachten, dass bei einigen Berechnungen Vereinfachungen angenommen werden, die an den betreffenden Stellen spezifiziert werden. Zusätzlich sei angemerkt, dass die erste Auslegung nur an ausgewählten Stellen Sicherheitsfaktoren ungleich eins berücksichtigt. Grund dafür ist die Annahme, dass in den bereitgestellten Materialkennwerten ausreichende Sicherheiten verrechnet worden sind.

5.1 Dimensionierung der Gurte

Bei der Auslegung der Gurte auf Steifigkeit wird angenommen, dass der Steg des I-Trägers keine Längskräfte aufnimmt und der Biegung nicht entgegenwirken kann. Die in der Balkenberechnung ermittelte Biegesteifigkeit $EI_x = 962,31Nm^2$, die erforderlich ist, damit bei einer Kraft $F_{pruef} = 100N$ die Flügelspitze eine Absenkung von $w_{j=1,1} = 20mm$ erfährt, muss allein durch die Gurte aufgebracht werden. Im Sinne der kraftflussgerechten Gestaltung sollen die Glasfasern unidirektional in Längsrichtung des Gurtes angeordnet werden. Die Bezeichnungen der Längenangaben des Holmes orientieren sich an Abb. 4 .

Die Gurte werden zur Bestimmung der notwendigen Lagenanzahl als rechteckig angenommen, erst in einem späteren Schritt soll die Form der Kontur der vorgegebenen Haut angepasst werden. Die Maße sind über die gesamte Länge des Holms als konstant anzusehen.

Zur Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes I_x wird der E-Modul in Längsrichtung der Fasern nach der Mischungsregel nach [3] berechnet.

$$E_{11} = \phi * E_{f,11} + (1 - \phi) * E_M \quad (38)$$

Mit den gegebenen Materialkennwerten bestimmt sich $E_{11} = 31580MPa$. Damit ergibt sich ein benötigtes Flächenträgheitsmoment von $I_x = 3,04722 * 10^{-8}m^4$.

Das Flächenträgheitsmoment der Gurte bestimmt sich aus den Flächenträgheitsmomenten der beiden Rechteckquerschnitte und ihren zugehörigen Steiner-Anteilen.

$$I_x = 2 * \left(\frac{b * h^3}{12} + b * h * \left(\frac{h_m}{2} \right)^2 \right) \quad (39)$$

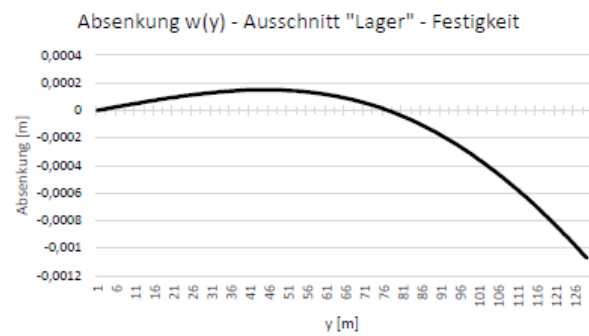
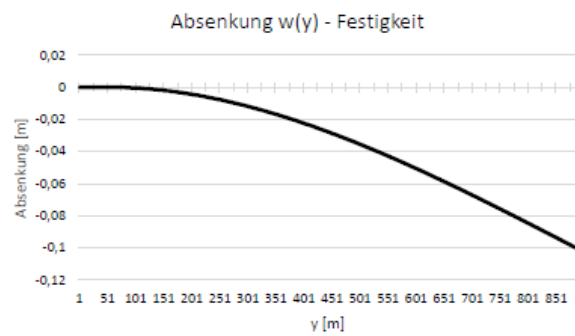
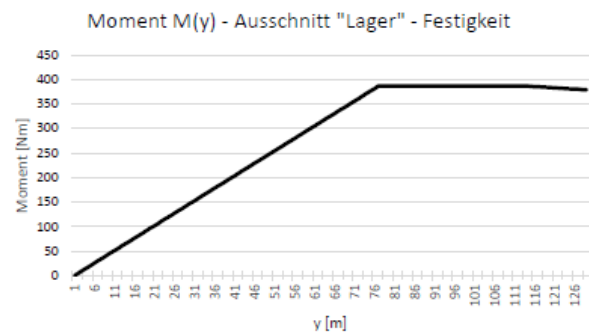
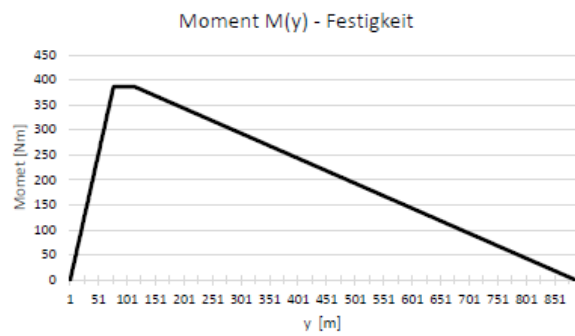
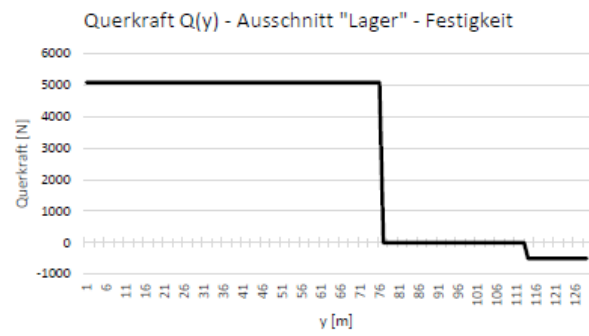
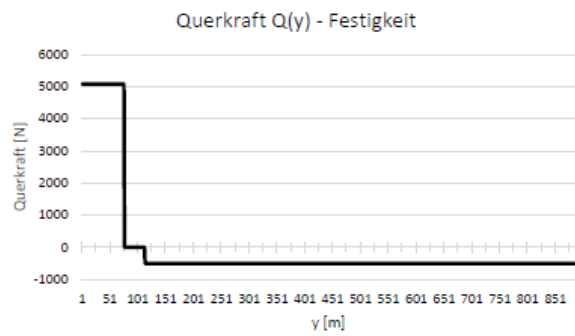


Abbildung 3: Festigkeitsauslegung

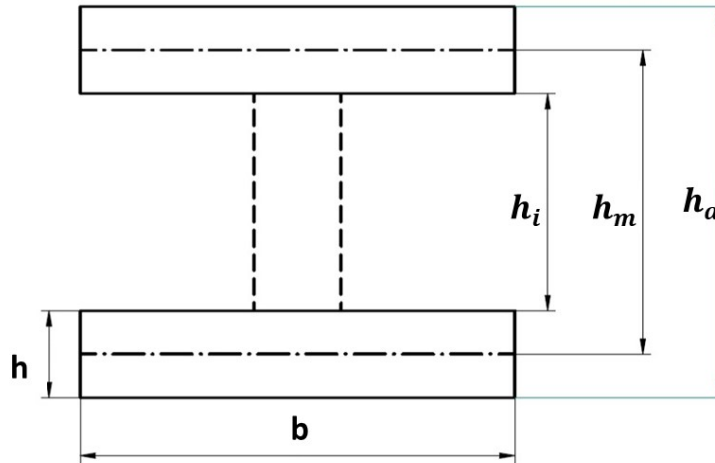


Abbildung 4: Maße des rechteckigen I-Holms

Es wird nach einer Kombination aus Gurtbreite b und Gurthöhe h gesucht, die die Anforderungen an das Flächenträgheitsmoment erfüllt, aber dennoch zu einer möglichst geringen Gurtquerschnittsfläche und damit zu einer möglichst geringen Masse der Gurte führt. Um die Steiner-Anteile der Gurte zu maximieren, sollen die Gurte in einem möglichst großen Abstand zur neutralen Faser angeordnet werden. Vorgegeben ist eine Profildicke von $37,5\text{mm}$, allerdings muss berücksichtigt werden, dass die nach innen gelegte Haut, die Wölbungsrücklage und die Dickenrücklage die maximale Höhe des Holms einschränken. Deshalb wird die gesamte Gurthöhe auf $h_a = 36\text{mm}$ abgeschätzt. Die dadurch begrenzte Anzahl der Lagen in der Haut wird im Abschnitt "CAD-Modell" weiter erläutert.

Die nachstehende Tabelle 1 enthält Werte der Gurtquerschnittsfläche bei verschiedenen Kombinationen von b und h , die zu einem gesamten Flächenträgheitsmoment von $I_x = 3,01631 * 10^{-8}\text{m}^4$ führen.

Den Daten ist zu entnehmen, dass breite Gurte geringer Dicke bei gleichem Flächenträgheitsmoment geringere Querschnittsflächen aufweisen. Aus diesem Grund sollen die Gurte möglichst breit gewählt werden. Die Breite der Gurte ist durch die vorgegebene Konstruktion der Platte zur Aufnahme der Tragfläche am Teststand begrenzt. Die vorgesehene Aussparung weist eine Breite von 30mm auf. Für die weitere Berechnung soll $b = 28\text{mm}$ gelten. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass die Fertigung des Holms im Bereich des Modellbaus von Hand erfolgen würde, womit nur grobe Toleranzen einhaltbar sind.

Tabelle 1: Verschiedene Kombinationsmöglichkeiten von b und h

h	b	$2 * b * h$
$1mm$	$38,3mm$	$76,6mm^2$
$1,25mm$	$31,1mm$	$77,7mm^2$
$1,5mm$	$26,3mm$	$78,8mm^2$
$2,25mm$	$18,3mm$	$82,3mm^2$

Mithilfe eines Solvers bestimmt sich aus dem Flächenträgheitsmoment und der Gurtbreite die Gurthöhe $h = 1,866mm$.

Im nächsten Schritt wird die zu stapelnde Lagenanzahl ermittelt. Als unidirektionales Material steht das Glasgewebe Interglas 92145 mit einem Flächengewicht von $220 \frac{g}{m^2}$ zur Verfügung. Nach [3] berechnet sich die Lagenanzahl n für eine Dicke des Verbundes t_{soll} zu:

$$n = t_{soll} * \frac{\phi * \rho_f}{\left(\frac{m_f}{L*b}\right)} \quad (40)$$

Mit $\left(\frac{m_f}{L*b}\right) = 220 \frac{g}{m^2}$ und $t_{soll} = h$ ergibt sich $n = 8,653$. Es sind also 9 Lagen des Gewebes 92145 für jeden Gurt vorzusehen. Die sich aus 9 Lagen ergebende Gurthöhe kann durch Umstellen von Gleichung 40 zu $\tilde{h} = 1,941mm$ bestimmt werden. Für den zunächst angenommenen Fall von Gurten mit rechteckigen Querschnitten ist die Auslegung zur Einhaltung der Anforderungen an die Steifigkeit damit abgeschlossen.

5.2 Nachrechnung der angepassten Gurte

Die Modellierung der Haut und der Holmgurte in einem CAD-Programm zeigt, dass die Gurte mit den berechneten Bemaßungen nicht innerhalb des Profils mit der als $0,75mm$ dick angenommenen Haut liegen. Die Anpassung der Konstruktion der Gurte erfolgt so, dass sich die Gurtoberseite der Innenseite der Haut anschmiegt. Die Gesamtbreite von $28mm$, sowie die Gurtdicke bleiben dabei gleich. Da die Wölbungsrücklage ungleich der Dickenrücklage ist, muss die Gesamthöhe h_a auf $\tilde{h}_a = 35,8mm$ leicht verringert werden. Abbildung ?? veranschaulicht die gekrümmte Form des oberen Holmgurtes.

Die angepasste Krümmung der Gurte führt zu einem veränderten Flächenträgheitsmoment \tilde{I}_x des Balkens, dass mithilfe des CAD-Programms exakt zu $\tilde{I}_x = 3,075406 * 10^{-8} m^4$ bestimmt werden kann. Da $3,075406 * 10^{-8} m^4 > 3,01631 * 10^{-8} m^4$ ist, genügen auch die veränderten Gurte der Steifigkeitsanforderung.

Abschließend wird gezeigt, dass die Festigkeit der Gurte einer Belastung der Flügelspitze durch $F_{pruef} = 500N$ standhält. Die aus der Biegung resultierenden und betragsmäßig gleichen Zug-

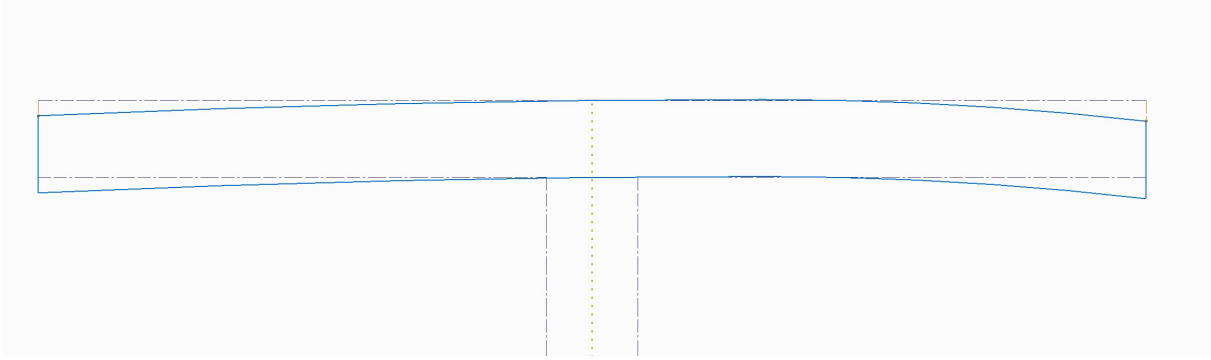


Abbildung 5: Der rechteckige Gurt ist gestrichelt dargestellt, der angepasste gekrümmte Gurt mit einer durchgezogenen Linie.

und Druckspannungen werden dazu mit den vorhandenen UD-Festigkeitskennwerten des Handlaminats verglichen. Die Resultate der Balkenberechnungen zeigen, dass das maximale Biegemoment im Holm an Punkt C auftritt und $M^b = 500N * 0,773m = 386,5Nm$ beträgt. In den Randfasern der Gurte resultieren Spannungen, die sich nach

$$\sigma_b = \frac{M_b * \tilde{h}_a}{\tilde{I}_x * 2} \quad (41)$$

zu $\sigma_b = 224,96MPa$ berechnen. Da

$$\sigma_b < R_{||}^{(+)} = 597,9MPa < R_{||}^{(-)} = 650,0MPa \quad (42)$$

gilt, ist der Festigkeitsnachweis erbracht. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Gurte bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500N$ nicht versagen.

5.3 Bestimmung der Lagenanzahl des Steges

Die Auslegung des Steges erfolgt auch anhand der VDI 2013. Dabei muss beachtet werden, dass der Steg sowohl durch Schubkräfte als auch durch Normalkräfte senkrecht und parallel zu den Gurten Belastungen erfährt. Die Dehnungen der Innenseiten der Gurte werden dem Steg aufgeprägt, da beide Bauteile stoffschlüssig miteinander verbunden sind. Anders als in der VDI 2013 wird jedoch nicht die Bruchdehnung der Gurte betrachtet, sondern die Dehnungen der Innenseiten bei einer Prüfkraft von 500N. So soll die Dimensionierung des Steges auf die Anforderungen an die Festigkeit angepasst werden, um Leichtbaupotentiale bestmöglich auszuschöpfen.

Die größte Längsdehnung der Gurte tritt an der Stelle C auf, da dort das größte Biegemoment wirkt. Sie lässt sich für die Innenseite der Gurte durch

$$\epsilon_{Gurt} = \frac{\sigma_{innen}}{E_{11}} = \frac{\frac{F_{pruef} * l_3 * h_i}{\tilde{I}_x * 2}}{E_{11}} \quad (43)$$

zu $\epsilon_{Gurt} = 6,351 * 10^{-3}$ berechnen. Auf der Zugseite ist die Dehnung positiv, auf der Druckseite negativ. Die dem Steg aufgeprägte Dehnung führt in Längsrichtung des Steges zu einem Normalkraftfluss, der sich nach VDI 2013 mit

$$p_{\epsilon} = n * \bar{q} * K_{Ex} * \epsilon_{Gurt} \quad (44)$$

ermitteln lässt. K_{Ex} ist dabei ein verallgemeinerter Dimensionierungskennwert, der Tafel 3 der VDI 2013 zu $K_{Ex} = 1150 * 10^3 m$ entnommen wird. Die Dimensionierungskennwerte der VDI sind nur für bestimmte Verbunde als exakt anzusehen, dennoch liefern sie für die Vorauslegung hinreichend genaue Werte, die in einem späteren Schritt mithilfe eines Laminatrechners überprüft werden können.

Es ist zu beachten, dass in der VDI mit veralteten Einheiten, wie dem Kilopond, gerechnet wird. Flächengewichte \bar{q} sind durch Multiplikation der auf die Fläche bezogene Masse $\frac{m_f}{L*b}$ mit der Erdbeschleunigung \bar{g} zu ermitteln. n kennzeichnet erneut die Lagenanzahl.

Zur kraftflussgerechten Gestaltung des Steges werden die Gewebelagen unter einem Winkel von 45° zu den Holmgurten angeordnet. Deshalb muss die Belastung parallel zu den Fadenrichtungen mithilfe einer Transformationsformel nach VDI 2013 berechnet werden.

$$p_{\epsilon||} = p_{\epsilon} * \cos^2(45^\circ) = p_{\epsilon} * 0,5 \quad (45)$$

Die Normalkräfte an den Gurten bilden im Allgemeinen einen Winkel $\neq 180^\circ$ zueinander, da der Holm eine Absenkung erfährt. Daraus resultiert eine Normalkraft auf den Steg, die senkrecht zu den Gurten steht. Diese Abtriebskraft berechnet sich nach VDI 2013 zu:

$$p_A = \frac{2 * F_{pruef} * l_3 * \epsilon_{Gurt}}{h_m^2} \quad (46)$$

Mit der oben genannten Transformationsformel ergibt sich die Belastung in Faserrichtung.

$$p_{A||} = p_A * \cos^2(45^\circ) \quad (47)$$

Darüber hinaus erfährt der Steg einen Schubkraftfluss durch den Querkraftschub. Wegen der vernachlässigbaren Längskraftaufnahme des Steges im Vergleich zu den Gurten, kann der Querkraftschub über die Höhe des Steges als konstant angenommen werden. Es muss berücksichtigt werden, dass die Modellierung des Holms als Balken, der an zwei Punkten gelagert ist und durch die Querkraftbolzen eine weitere Kraft erfährt, zu einem anderen Querkraftverlauf führt als dem konstanten, der in der Richtlinie für den Kragbalken angenommen wurde. Den Berechnungen des Holms als Balken kann eine maximale Querkraft von $5085,5N$ im Bereich 2 und eine maximale Querkraft von $500N$ im Bereich 3 entnommen werden. Mit dem Ziel, im langen Bereich 3 Gewicht einzusparen, ist es vorteilhaft diesen Bereich geringer Querkraft getrennt von den höher beanspruchten Bereichen 1 und 2 auszulegen. Die resultierende Druckbeanspruchung berechnet sich mithilfe der folgenden Formel.

$$p_{s||} = p_s = \frac{Q}{h_i} \quad (48)$$

Der Kraftfluss, der durch den Steg aufgenommen werden muss, ergibt sich aus der Überlagerung der drei Kraftflüsse $p_{s||}, p_{A||}, p_{e||}$. Die Tragfähigkeit einer Schicht des Verbundes wird durch $K_{\sigma d}$ charakterisiert und kann ebenfalls Tafel 3 der VDI entnommen werden. Da ein Teil der Schubbeanspruchung durch die Matrix geleitet wird, besteht die Gefahr eines Zwischenfaserbruches. VDI 2013 schlägt deshalb die Verwendung von $K_{\sigma d} = 30 * 10^3 m$ vor. Zusätzlich muss der Anteil der Glasmengen in Kette und Schuß durch den Faktor $k_{||}$ berücksichtigt werden. Das zur Verfügung stehende Gewebe Interglas 90070 hat annähernd gleiche Fadenanzahlen in Kette- und Schußrichtung, damit ist $k_{||} = 0,5$.

$$n * \bar{q} * K_{\sigma d} * k_{||} = p_{s||} + p_{A||} + p_{e||} \quad (49)$$

Die Anzahl der notwendigen Gewebelagen n im Steg lässt sich nun durch Umstellen der Gleichungen und Einsetzen der bekannten Werte ermitteln.

$$n = \frac{\frac{2 * F_{Pruef} * l_3 * \epsilon_{Gurt}}{h_m^2 * 2} + \frac{Q}{h_i}}{\bar{q} * (k_{||} * K_{\sigma d} - K_{Ex} * \epsilon_{Gurt} * 0,5)} \quad (50)$$

Damit ergibt sich die Lagenanzahl von $n(500N) = 1,99$ für den Bereich 3 und $n(5085,5N) = 18,13$ für die Bereiche 1 und 2. Um einen symmetrischen Lagenaufbau zu ermöglichen, sind also 2 Lagen für den Bereich 3 und 20 Lagen für die Bereiche 1 und 2 vorzusehen.

Es ist zu betonen, dass diese Lagenanzahlen maßgeblich durch die Annahmen der Dimensionierungskennwerte K_{Ex} und $K_{\sigma d}$ beeinflusst werden. Diese stimmen nicht exakt mit den Kennwerten des vorliegenden Laminats überein. Im Abschnitt (???!!!ElamX-Abschnitt hier einfügen!!!???) wird die ermittelte Lagenanzahl überprüft und angepasst.

6 Beulabschätzung des Holms

6.1 Beulsicherheit der Gurte (T.B.)

Nachdem die Holmgurte auf Festigkeit und Steifigkeit ausgelegt worden sind, muss überprüft werden, ob der Effekt des Beulens auftritt.

Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Berechnung erfolgt nach Hertel, "Leichtbau - Bauelemente, Bemessungen und Konstruktion von Flugzeugen und anderen Leichtbauwerken", Springer-Verlag, 1980, Kapitel 3.2
2. Es wird angenommen, dass die orthotropen Gewebe hinreichend mit den Gleichungen für isotropes Material gerechnet werden kann. Diese Entscheidung wird mit erfolgten Zulassungen für Segelflugzeuge begründet anhand dieser Formeln.
3. Die Gurte werden als ebene, unendlich lange Streifen betrachtet. Die tatsächliche Krümmung dieser beeinflusst die Beulsicherheit positiv.

4. Da die Mitte (in x -Richtung) der Holmgurte mit dem Holmsteg verklebt ist, kann diese Klebelinie als freie Lagerung gesehen werden. Somit halbiert sich die angenommene Holmgurtbreite.
5. Die äußeren Kanten (in x -Richtung) sind frei, nicht gelagert.
6. Die äußeren Kanten (in y -Richtung) werde als an den jeweiligen Rippen gestützt.
7. Der Gurt wird nur durch Druckspannungen beansprucht. Die Schubspannungen werden durch das hohe Verhältnis von Länge zu Höhe vernachlässigt.
8. Als größt mögliche Länge bei höchster Biegespannung wird l_3 bestimmt.

Das Seitenverhältnis beträgt

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{28mm}{2}}{773mm} = 0,018 \approx 0 \quad (51)$$

. Nach [Hertel, Abbildung 84] ergibt sich

$$k_d = 0,4 \quad (52)$$

und somit die kritische Spannung

$$\sigma_{krit,d} = k_d \cdot E_{||} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 = 242,82MPa \quad (53)$$

Im Vergleich mit der tatsächlich maximal auftretenden Randfaserspannung der Gurte ergibt sich die Sicherheit gegen Beulen zu

$$j = \frac{242,81MPa}{224,96MPa} = 1,08 \quad (54)$$

6.2 Beulsicherheit des Steges (T.B.)

Ebenfalls muss der Holmsteg nach der Auslegung hinsichtlich der Sicherheit gegen Beulen geprüft werden. Folgende Annahmen werden dafür getroffen:

1. Die Berechnung erfolgt, wie bei der Berechnung der Holmgurte, nach Hertel.
2. Es wird angenommen, dass die orthotropen Gewebe hinreichend mit den Gleichungen für isotropes Material gerechnet werden kann, Diese Entscheidung wird ebenfalls mit erfolgten Zulassungen für Segelflugzeuge begründet.
3. Der Steg wird als ebener, unendlich langer Streifen betrachtet.
4. Die Verklebung des Steges wird als gestützte, gelenkige Lagerung an allen vier Kanten angenommen.
5. Der Steg wird durch Biegung und Schubspannung beansprucht.

Für den Steg müssen die drei Bereiche der Holmauslegung auf die Beulsicherheit geprüft werden. Im Folgenden wird die Beulsicherheit des Bereichs *I* berechnet:

Das Seitenverhältnis ergibt sich zu

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm}{76mm} = 0,042 \quad (55)$$

Dadurch lässt sich mit

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1 \quad (56)$$

nach [Hertel, Abbildung 85] der Beulfaktor ermitteln zu

$$k_b = 21,8 \quad (57)$$

. Da das Dickenverhältnis von Steglagen zu Schaumkern sehr klein ausgelegt werden soll, wird

$$\kappa = 1 \quad (58)$$

definiert. Dadurch ergibt sich die kritische Biegespannung zu

$$\sigma_{krit,B} = \kappa \cdot k_b \cdot E_{\parallel} \cdot \left(\frac{1,882mm}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 = Ergebnis \quad (59)$$

Das Verhältnis der Biegespannung zur kritischen Biegespannung ist

$$j_1 = \frac{200,56Mpa}{Ergebnis} \quad (60)$$

. Für den Schub wird nach [Hertel, Abbildung NR.?]]

$$k_s = 5,5 \quad (61)$$

Damit wird die kritische Schubspannung zu

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k \cdot E_{\#} \cdot \left(\frac{1,882mm}{58,88mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 = 164,02MPa \quad (62)$$

. Die tatsächlich auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{5085,5N}{1,882mm \cdot (35,8mm - 2 \cdot 1,941mm)} = 126,99Mpa \quad (63)$$

, sodass das Verhältnis der Schubspannung zur kritischen

$$j_2 = \frac{126,99MPa}{164,02MPa} \quad (64)$$

ergibt. Die Gesamtsicherheit beträgt nach [Quelle?]

$$j = \sqrt{\frac{1}{j_1^2 + j_2^2}} = 1,148 \quad (65)$$

. Somit kann rückgeschlossen werden, dass dieser Bereich des Holsteges ohne Schaumkern schon sicher gegen Beulen ist.

Nun wird der Bereich *II* betrachtet: Da keine innere Querkraft herrscht, kann die Sicherheit durch Biegung außer Acht gelassen werden. Die Sicherheit gegen Beulen entspricht demnach der Sicherheit gegen Beulen, alleinig beeinflusst durch Schubspannungen:

7 Auslegung der Verklebungen

8 CAD-Modell

Auf Basis der verfeinerten Dimensionierung des Holmes mithilfe von ELAMX und der Beulabschätzung, soll nun ein CAD-Modell des Flügels erstellt werden. Als Grundlage dient eine unvollständige technische Zeichnung der Profilkontur, aus der exakt entnommen werden kann, dass das Profil ohne die Hochauftriebselemente oder Querruder 172mm tief ist und eine Profildicke von $37,5\text{mm}$ aufweist. Aus den bekannten Längenangaben kann der Maßstab der gedruckten Zeichnung zu $1 : 1,039$ berechnet werden. Mithilfe eines Rechtecks, das die Kontur gerade umschließt, können weitere Punkte auf der Kontur des Profils ermittelt werden. Im CAD-Programm werden Tangentenbögen von Punkt zu Punkt gelegt, um die Kontur hinreichend glatt anzunähern.

In den Bereichen oberhalb und unterhalb des Holms soll die Haut nicht in Sandwich-Bauweise ausgeführt sein. Für die Auslegung des Holms wurde davon ausgegangen, dass eine Dicke des Verbundmaterials der Haut von $0,75\text{mm}$ ausreichend ist. Zunächst wird davon ausgegangen, dass für die Haut das Gewebe Interglas 90070 verwendet wird, das ein Flächengewicht von $80\frac{\text{g}}{\text{m}^2}$ aufweist. Nach Gleichung 40 entsprechen 9 Lagen dieses Gewebes der angenommenen Hautdicke. Dies erscheint ausreichend. Sollten weniger Lagen für die Haut benötigt werden, kann der entstehende Freiraum zwischen den Gurten und der Haut aufgefüllt werden. Um die Hautdicke von $0,75\text{mm}$ im Bereich der Gurte zu berücksichtigen, wird ein Offset von dieser Breite nach innen gerichtet.

Der zu Beginn des Abschnitts 5.1 dimensionierte Holm mit rechteckigen Gurtquerschnitten, $b = 28\text{mm}$ und $h_a = 36\text{mm}$ wird nun so auf die Kontur des Profils gelegt, dass die Überdeckung der Gurte mit der umgebenden Haut möglichst gering ausfällt. Dann wird die Höhe h_a an den örtlichen inneren Abstand der oberen und unteren Haut auf $\tilde{h}_a = 35,8\text{mm}$ angepasst. Der rechteckige Querschnitt der Gurte wird mithilfe eines Offsets von $\tilde{h} = 1,941\text{mm}$ der Kontur der Haut angepasst. Diese Anpassungsmaßnahmen senken das Flächenträgheitsmoment leicht. Das resultierende Flächenträgheitsmoment \tilde{I}_x lässt sich aufgrund der komplexen Querschnittsgeometrie der Gurte mit dem CAD-Programm bestimmen. Der Vergleich mit dem erforderlichen Flächenträgheitsmoment zeigt, dass die angepasste Geometrie der Gurte die Steifigkeitsbedingung erfüllt.

9 Zusammenfassung

Test Zusammenfassung

10 FEM

10.1 Warum FEM?

Nachdem der Flügel nun analytisch ausgelegt wurde, stellt sich die Frage, ob eine numerische Herangehensweise hier überhaupt noch sinnvoll ist. In den vorherigen Kapiteln wurde viele Vereinfachungen angenommen, um die Berechnungen mit verhältnismäßigen Aufwand zu bewältigen. Je komplexer ein Bauteil ist, desto unwirtschaftlicher wird es, dies in seiner Fülle analytisch zu berechnen oder gar unmöglich, wenn keine geschlossenen Lösungen bekannt sind. Im Leichtbau werden diese Details benutzt, um Bauteile an den Stellen zu verstärken, wo besonders große Lasten auftreten (z.B. Rippen). Wenn diese nun für eine einfachere Berechnung wegfallen, muss das Restliche Bauteil robuster ausgelegt werden, was zu einer vermeidbaren Gewichtszunahme führt. Auch wenn es sich bei numerischen Lösungen nur um Annäherungen an den wahren Zustand handelt, kann durch einen hohen Vernetzungsgrad ein präziseres Ergebnis erzielt werden als das vereinfachte Analytische. Somit übernimmt die numerische Berechnung auch eine Kontrollfunktion.

10.2 Wie funktioniert FEM?

10.2.1 Schwache Lösung der Elastostatik

Für die Berechnung der Elastostatik sind die Gleichgewichtsbedingung (66), Verzerrungs-Verschiebungsbedingung (67) und das Stoffgesetz (68) auch bei der Finiten Elemente Methode (FEM) ausschlaggebend.

$$\underline{0} = \underline{X} + \underline{E}^T \sigma \quad (66)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad (67)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon} \quad (68)$$

Wobei \underline{X} der Vektor der Volumenkräfte, \underline{E} die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\epsilon}$ der Verzerrungsvektor, \underline{u} der Verschiebungsvektor und \underline{D} die Operatormatrix ist.

Um einer aufwendigen Bestimmung der analytischen Lösung zu entgehen, bedient sich die FEM an dem Prinzip der *schwachen Lösung*. Hierbei hat man eine Differenzialgleichung, die in dem betrachteten Gebiet gleich null ist. Für die Elastostatik kann man hierbei die Gleichgewichtsbedingung verwenden. Diese kann man mit $\delta \underline{u}$ multiplizieren und über das Gebiet integrieren, sodass man

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{\sigma} dV + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{X} dV = 0 \quad (69)$$

erhält. Umgeformt ergibt sich das zu

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} dV = \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{p} dO_p + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{X} dV \quad (70)$$

Wobei die Terme auf der rechten Seite den Lasten entsprechen, die auf das Volumen V und die mit p belastete Oberfläche O_p wirken. Die schwer zu lösende Differenzialgleichung hat sich nun schon zu einem Integrationsproblem vereinfacht. Daraus kann die Verschiebung bestimmt werden,

weswegen man dies auch die Weggrößenmethode nennt. Die Verzerrungen und Spannungen erhält man aus Nachrechnungen mit den Gleichungen (67) und (68) berechnet werden. Diese Gleichung ist noch ganz allgemein fürs Kontinuum gültig. Im nächsten Schritt wird das Gebiet in eine finite Menge von Elementen zerteilt.

10.2.2 Diskretisierung

Die Werte der Verschiebung \underline{u} werden nur an Aufpunkten, den sogenannten Knoten, bestimmt. Mittels einer von Laufvariable \underline{x} abhängigen Formfunktion \underline{N} wird der Verlauf von einem Knoten zu seinen Nachbarn definiert, um wieder einen kontinuierlichen Verlauf zu erhalten. Hierbei muss die Formfunktion an dem Knoten, von dem sie ausgeht, den Wert 1 und bei jedem anderen den Wert 0 annehmen. Allgemein ergibt sich somit

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{N}(\underline{x})\underline{u}^{(e)} \quad (71)$$

, wobei $\underline{u}^{(e)}$ der Vektor der Verschiebungen eines Elementes e ist. Wenn man nun diese Gleichung in die Gleichung der schwachen Lösung (70) einsetzt, lässt sich $\delta(\underline{u}^{(e)})^T$ aus den Integralen raus ziehen und kürzen, da es von \underline{x} unabhängig sind.

$$\int_V \underline{N}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{N} dV \underline{u}^{(e)} = \int_{O_p} \underline{N}^T \underline{p} dO_p + \int_V \underline{N}^T \underline{X} dV \quad (72)$$

Wobei sich das linke Integral zu der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{K}^{(e)}$ ergibt.

$$\underline{K}^{(e)} = \int_V \underline{N}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{N} dV \quad (73)$$

Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrixen lassen sich zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammenfassen, mit der dann die Lösung berechnet wird. -> Beispiel einfügen?

11 Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] H. Hertel : *Leichtbau: Bauelemente, Bemessungen und Konstruktionen von Flugzeugen u.a.* . Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg , 1960.
- [2] Mises, R. V. : *Fluglehre: Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung* . Springer Verlag , 1936.
- [3] Helmut Schürmann : *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden* . Springer Verlag , 2005.
- [4] Elmar Witten : *Handbuch Faserverbundkunststoffe, Composites: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen* . Springer Vieweg , 2014.

12 Abbildungsverzeichnis

13 Anhang

Test Anhang