

Projektarbeit

Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise

von

Hannes Golombek	4838748
Henri Kammler	4947286
Ole Scholz	4947749
Tristan Brack	4968977

Betreut von Malte Woidt, M. Sc.

Die Arbeit umfasst:

101 Seiten

+ 45 Seiten Anhang

inkl. 58 Abbildungen

Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
Technische Universität Braunschweig

Januar 2021



Projektarbeit auf dem Gebiet des Flugzeugbaus und Leichtbaus

Bearbeitungsdauer: 13 Wochen

Brack Tristan	4968977
Golombek Hannes	4838748
Kammler Henri	4947286
Scholz Ole	4947749

Ausgegeben am: 21.10.2020

Abgegeben am:

Auslegung eines alternativen Modellflügels für das Flugzeug „Zaunkönig“ in Glasfaserverbund -Holm-Bauweise

1. Einleitung

Im Rahmen dieser Projektarbeit soll der Flügel des LF1 „Zaunkönig“ (siehe Abbildung 1) im Modellmaßstab 1:4,7, d.h. die Halbspannweite beträgt ca. 848 mm, ausgelegt werden. Aus der Auslegung des Gesamtflugzeugs resultieren entsprechende Anforderungen an den Flügel, welche im Zuge der Auslegung und Fertigung berücksichtigt werden müssen. Sowohl die konstruktiven als auch die strukturmechanischen Maßnahmen sollen mit Hilfe geeigneter Ingenieursmethoden erfolgen und begründet werden.

Zur Überprüfung der Auslegung sollen die Ergebnisse der Berechnungen mit Messergebnissen aus vorangegangenen Tests verglichen werden.



Abbildung 1: Seitenansicht LF1 "Zaunkönig"

2. Anforderungen/Vorgaben

2.1. Geometrische Vorgaben des Flügels

Bei dem Flügel des Zaunkönigs handelt es sich um einen Rechteckflügel (Zuspitzung $\tau = 0$, Pfeilung $\phi = 0^\circ$). Vorflügel und Hochauftriebsklappen erstrecken sich über die gesamte Spannweite und sind jeweils an der Flügelwurzel, -mitte und -spitze mit dem Hauptflügel verbunden (bei $\eta = \{0,0; 0,5; 1,0\}$). Darüber hinaus ist der Hauptflügel gegenüber dem Rumpf mit Verstrebungen am Punkt ($\eta = 0,50$; $\xi = 0,25$) abgestützt. Die Maße des Gesamtflügels sind Abbildung 2 sowie den beigefügten Anlagen zu entnehmen. Im Gegensatz zu dem originalen, abgestrebten Flügel des Zaunkönigs soll eine alternative Bauweise ohne Streben umgesetzt werden.

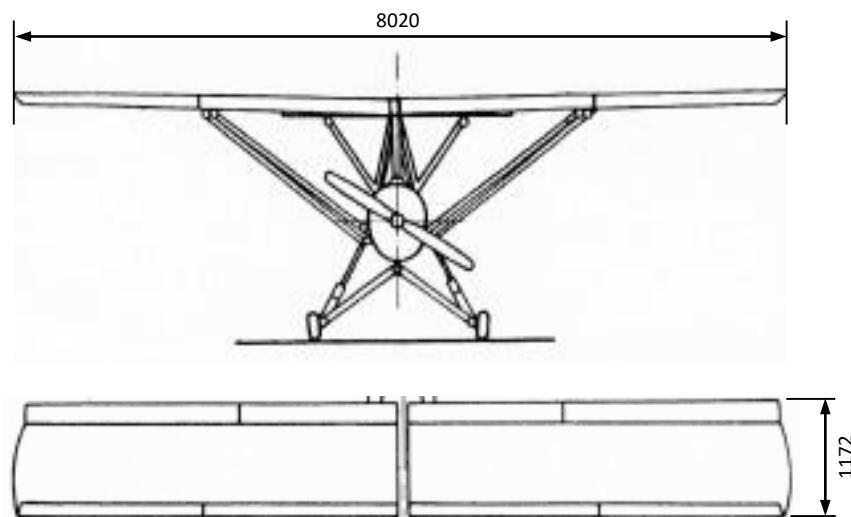


Abbildung 2: Bemaßte Front- und Draufsicht des LF1 "Zaunkönig"

2.2. Strukturmechanische Anforderungen

Für die strukturmechanischen Tests soll das Modell eines Halbflügels in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise gebaut werden, der bei einer möglichst geringen Eigenmasse eine Prüfkraft von 500 N ohne Bruch erträgt. Dabei soll der Flügel sowohl auf Festigkeit als auch auf Steifigkeit ausgelegt werden. Eine hinreichende Steifigkeit ist gegeben, wenn sich der Flügel bei einer senkrechten Belastung von $F_{Prüf} = 100$ N an der Flügelspitze ($L/4$ -Punkt) um nicht mehr als $z_{100N} = 22$ mm durchbiegt. Um die Hautdicke ausschließlich auf Festigkeit zu dimensionieren, aber frühzeitiges Beulen der Haut zu vermeiden, kann ein Sandwich-Aufbau an kritischen Bereichen und/oder Rippen gewählt werden. Es sind geeignete konstruktive Mittel zu überlegen um diese Vorgaben zu erreichen. Die Einhaltung der Anforderungen ist rechnerisch nachzuweisen.

Darüber hinaus soll der Torsionswinkel der Flügelaußenkante in Abhängigkeit einer exzentrischen, senkrechten Prüflast mit Hilfe der Theorie nach St. Venant berechnet werden.

2.3. Konstruktive Anforderungen

Der Hauptflügel des Zaunkönigs ist als Modellflügel in Glasfaserverbund-Holm-Bauweise umzusetzen. Vorflügel und Hochauftriebsklappen sind nicht auszuführen. Das aerodynamische Profil des Hauptflügels ist zu bewahren. Die V-Stellung des Flügels ist zu vernachlässigen. Als Kernmaterial steht Styrodur und Depron zur Verfügung. Die Faserorientierung der Gewebe ist im Einklang mit den durchgeführten Rechnungen belastungsgerecht zu wählen.

Die rumpfseitigen Einspannverhältnisse sind wie in Anlage C ausgeführt. Diese sehen eine wie bei Klein- und Segelflugzeugen übliche Konstruktion vor: Der Holm wird dabei im Rumpf mit der anderen Flügelhälfte verstiftet und jede Flügelhälfte stützt sich gegen den Rumpf wobei die Torsion mit Querkraftbolzen aufgenommen wird. Für den Flügelbau bedeutet dies, dass der Holm entsprechend Anlage C aus dem Flügel herausgezogen werden muss. Es sollte außerdem berücksichtigt werden, dass der Holm geeignet getapert wird, um Versagen im Einspannungsbereich zu vermeiden. An der freien Flügel spitze ist zur Lasteinleitung eine Endrippe vorzusehen, die die lösbare Montage der Endscheibe aus Anlage D erlaubt.

Der Flügel darf ein maximales Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten. Auf eine fertigungsgerechte Konstruktion ist zu achten.

3. Bewertungskriterien

Das Hauptaugenmerk der Konstruktion sollte, unter Einhaltung der zuvor genannten Randbedingungen, auf einem möglichst geringen Eigengewicht des Flügels liegen. Ein Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gruppen untereinander soll anhand der Masse $m_{\text{Flügel}}$ entsprechend des gewichtsnormalisierten Festigkeitskriteriums $m_{\text{Belastung,max}}/m_{\text{Flügel}}$ erfolgen, welches die ertragene Bruchlast mit dem Eigengewicht der Konstruktion ins Verhältnis setzt.

4. Aufgabenstellung

Um die oben beschriebenen Anforderungen zu erfüllen, sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

1. Einarbeitung in die Fragen der Anforderungen
2. Entwicklung konstruktiver und strukturmechanischer Lösungsansätze für die Faserverbund-Bauweise
3. Festlegung einer konstruktiven Lösungsvariante
4. Dimensionierung und Nachweis der gewählten Lösungsvariante mittels
 - a. Handbuchmethoden, sowie
 - b. Numerischer Methoden
5. Detailentwurf der dimensionierten Lösungsvariante
6. Auswertung, Vergleich und Diskussion der berechneten Daten (Biegung, Torsion, max. Bruchlast, Schubmittelpunkt)
7. Vergleich mit im Strukturtest ermittelten Daten und denen anderer Gruppen
8. Diskussion der Ergebnisse
9. Bewertung der eigenen Konstruktion und Diskussion einer Optimierung

Arbeitsteilung und -ablauf ist durch die Gruppe selbstständig zu organisieren. Theoretische Hintergründe, erstellte Modelle, sowie Vorgehensweisen, Entscheidungskriterien und gewonnene Ergebnisse sind sorgfältig zu dokumentieren. Die Verfasser der einzelnen Abschnitte des Abschlussberichtes sind zu kennzeichnen.

5. Literatur

- [A] Horst, P., (2013) 'Leichtbau I – Ingenieurtheorien des Leichtbaus' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [B] Ostermeyer, G.-P. (2010) 'Mechanik I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Dynamik und Schwingungen
- [C] Horst, P., (2013) 'Finite Elemente Methoden I' Vorlesungsskript. Braunschweig: Institut für Flugzeugbau und Leichtbau
- [D] Schürmann, H., (2007) 'Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden' Springer-Verlag Berlin Heidelberg

6. Anlagen

- [A] Merkblatt für die Anfertigung studentisch-wissenschaftlicher Arbeiten
- [B] Flügelkontur, Technische Zeichnung
- [C] Einspannung, Technische Zeichnung
- [D] Endscheibe, Technische Zeichnung

(Ort, Datum)

(Prof. Dr.-Ing. P. Horst)

Übersicht (O.S.)

In dieser Projektarbeit wird ein Halbflügelmodell des Flugzeugs “Zaunkönig” im Maßstab 1:4,7 in der Glasfaserverbund-Holm-Bauweise konstruiert. Der Flügel wird dabei soweit es geht mit analytischen und ergänzend mit numerischen Methoden auf Festigkeit und Biegesteifigkeit ausgelegt. Hierfür werden die Programme ABAQUS und *eLamX*² zur Hilfe genommen. Anschließend wird eine kurze Anleitung gegeben, wie der Flügel zu fertigen wäre. Für einen simulierten Testdurchlauf, bei dem eine exzentrische Last aufgebracht wird, wird die Masse, Bruchlast, Schubmittelpunkt und sowohl Absenkung als auch Verdrehung an der Flügelvorderkante. Unter besonderer Rücksichtnahme des gewichtsnormatisierten Festigkeitskriteriums wird der Flügel in Bezug auf Vergleichsdaten bewertet und die errechneten Werte kritisch analysiert.

Abstract

Abstract (O.S.)

In this project work a model halve wing of the aircraft “Zaunkönig” will be constructed scaled down 1:4.7 as a glass fiber spar structure. The wing will be construed for strength and bending stiffness using analytical methods as much as possible, completed by numerical methods. The Programs ABAQUS and *eLamX²* will be used in assistance. Afterward a short manuel to build the wing is given. For a simulated test with an eccentric force the mass, breaking load, shear center and as well lowering as torsion of the tip of the wing will be determined. Under special consideration of the weight normalized strength criterion the wing will be rated in relation to comparison data and the calculated values critically analyzed.

Inhaltsverzeichnis

1 Bezeichnungen	4
2 Einleitung	7
2.1 Projektbeschreibung (H.G.)	7
2.2 Motivation (O.S.)	7
2.3 Lösungsstrategie (H.G.)	8
3 Grundlagen	9
3.1 Glasfaser (H.G.)	9
3.2 Matrix (H.G.)	9
3.3 Netztheorie (H.G.)	9
3.4 Klassische Laminattheorie (H.G.)	10
3.4.1 Ingenieurskonstanten des MSV	12
3.4.2 Plattenelement	12
3.5 Mischungsregel (H.G.)	13
3.6 Versagenskriterium nach Puck (O.S.)	14
3.6.1 Definitionen	14
3.6.2 Zwischenfaserbruch ohne Längsspannung	15
3.6.3 Einfluss der Längsspannung	16
3.6.4 Faserbruch	17
3.7 Bauweise (O.S.)	20
4 Auslegung des Holms nach Handbuchmethoden	22
4.1 Modellierung des Holms (T.B.)	22
4.1.1 Einführung in die Balkenbiegung	22
4.1.2 Annahmen zur Modellierung	23
4.1.3 Analytisches Lösen der Modellierung	25
4.1.4 Analyse der Modellierung	29
4.2 Auslegung des Holms nach VDI 2013 (H.K.)	32
4.2.1 Allgemeine Informationen zu der Richtlinie	32
4.2.2 Dimensionierung der Gurte mit rechteckigen Querschnitten	32
4.2.3 Nachrechnung der angepassten Gurte	35
4.2.4 Bestimmung der Lagenanzahl des Steges	36
4.3 Auslegung des Holms nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)	41

4.3.1	Beispielrechnung nach Klassischer Laminattheorie	41
4.3.2	<i>eLamX²</i>	44
4.4	Beulabschätzung des Holms (T.B.)	47
4.4.1	Einführung in Stabilitäts-Überprüfungen	47
4.4.2	Beulsicherheit der Gurte	49
4.4.3	Beulsicherheit des Steges	50
4.5	Auslegung der Klebeverbindung (T.B.)	55
4.5.1	Klebeverbindung Steg - Gurt	55
4.5.2	Klebeverbindung Holm - Rippen	56
4.6	Bolzenauslegung (H.G.)	57
4.6.1	Bolzenberechnung	57
5	Auslegung der Flügelschale nach Handbuchmethoden	59
5.1	Schubfluss	59
5.1.1	Theorie (O.S.)	59
5.1.2	Idealisierung(H.G.)	61
5.1.3	Schwerpunktkoordinaten(H.G.)	63
5.1.4	Schubmittelpunkt (H.G.)	65
5.1.5	Torsion (O.S.)	68
5.1.6	Schubspannung (O.S.)	70
5.2	Auslegung der Flügelschale nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)	72
5.2.1	<i>eLamX²</i>	72
5.3	Beulabschätzung der Flügelschale (T.B.)	73
6	Numerische Berechnung	76
6.1	Vorteile der Finiten Element Methode (O.S.)	76
6.2	Funktionsweise der Finiten Element Methode (O.S.)	76
6.2.1	Schwache Lösung der Elastostatik	76
6.2.2	Diskretisierung	77
6.3	ABAQUS Analyse (H.G.)	79
6.3.1	Modell	79
6.3.2	Analyse	81
6.3.3	Beulanalyse	83

7 Konstruktion und Fertigung des Flügels	84
7.1 CAD-Konstruktion des Flügels (H.K.)	84
7.1.1 Konstruktion der Gurte	84
7.1.2 Konstruktion des Stegs	86
7.1.3 Konstruktion der Haut und der Rippen	86
7.1.4 Konstruktion unterstützender Bauteile des Holms	87
7.1.5 Querkraftbolzen und Montage auf dem Teststand	88
7.2 Massenabschätzung (H.K.)	91
7.2.1 Masse der Gurte	91
7.2.2 Masse des Stegs	91
7.2.3 Masse der Haut	92
7.2.4 Masse der Holzklötze und Rippen	93
7.2.5 Abschätzung der Verklebungen und der Gesamtmasse	94
7.3 Bauanleitung für die Fertigung (T.B.)	96
8 Zusammenfassung	100
8.1 Die Berechnungen im Überblick (H.K.)	100
8.2 Die Konstruktion und FEM-Analyse im Überblick (H.K.)	103
8.3 Gewichtsnormalisiertes Festigkeitskriterium (O.S.)	104
8.4 Diskussion der Ergebnisse	106
8.5 Ausblick auf Optimierungen der Berechnungen (H.G.)	107
9 Quellenverzeichnis	108
10 Abbildungsverzeichnis	110
11 Anhang	112
11.1 Berechnung: Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)	112
11.2 Berechnung: Schubfluss und Schubmittelpunkt (O.S.)	115
11.3 Abbildungen: <i>eLamX²</i>	125
11.4 Abbildungen: Beulberechnung	136
11.5 Abbildungen Schubfluss	140
11.6 Abbildungen: Numerische Berechnung	146
11.7 Abbildungen: Konstruktion und Fertigung	148

1 Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

- A* Festlager
in Bezug auf WirkEbene (hoch gestellt)
Fläche
- B* Loslager
- C* Krafteinleitung der Querkraftbolzen
- E* Elastizitätsmodul (allgemein)
- F* Kraft (allgemein)
- G* Schubmodul (allgemein)
- I* Flächenträgheitsmoment (allgemein)
- K* Dimensionierungskennwert nach [VDI70],
Elementsteifigkeitsmatrix (zweifach unterstrichen)
- Q* Querkraft (allgemein)
- R* Integrationskonstante (allgemein)
Festigkeit
- P* Gewichtsnormalisierte Festigkeit
- S* Statisches Moment
- T* Bei Torsion
- a* Lange Seite des Streifens nach [Her60]
- b* Kurze Seite des Streifens nach [Her60]
Biegung
- d* Druck
- f* Anstrengung (mit E als Index)
- h* Höhenabmessung des Holmes (allgemein)
- j* Sicherheitsfaktor
- l* Längenabmessung des Holmes (allgemein)
- n* Lagenanzahl
Normalkraftfluss
- p* Steigungs-/Neigungsparameter
- q* Schubfluss

- \bar{q} Flächengewicht nach [VDI70]
 s Dicke des Streifens nach [Her60]
 Laufvariable in der y-z-Ebene
 Schub
 t Dicke des Verbunds nach [Sch05]
 w Absenkung des Balkens unter Prüfkraft
 x x-Koordinate in Flugzeuglängsrichtung
 y y-Koordinate in Spannweitenrichtung, positiv Richtung von Rumpf zur Endrippe
 z z-Koordinate der Rechtssystems

Griechische Buchstaben

- ϵ Dehnung (allgemein)
 η Schwächungsfaktor
 ϑ Verwindung
 θ Winkel der Bruchebene
 φ Faservolumengehalt
 Winkel zwischen Hauptachsen- und Schwerpunkt-Koordinatensystem
 ϕ Orientierungsabweichung, Drillwinkel
 κ Steifigkeitserhöhung des Sandwich nach [Her60]
 ρ Dichte (allgemein)
 σ Zug-/Druckspannung (allgemein)
 τ Schubspannung (allgemein)

Indizes

- 11 Faserhauptrichtung
 22 Fasernebenrichtung
 12 Richtung „Wirkung (1) - Ursache (2)“
 \parallel Parallel zur Faser
 \perp Senkrecht zur Faser
 $\perp\parallel$ Belastungsrichtung „Wirkung (\perp) - Ursache (\parallel)“ (bei eLamX² umgekehrt)
 $\#$ Unter 45° zur Faserrichtung

+	Bei Zugbeanspruchung
-	Bei Druckbeanspruchung
(̄)	Bei Schwerpunkt-Koordinaten
(̂)	Bei Hauptachsen-Koordinaten
I	Holzbereich zwischen A und B
II	Holzbereich zwischen B und C
III	Holzbereich zwischen C und Flügelspitze
f	Faser
m	Matrix
max	maximal
zul	zulässig

Abkürzungen

BD	bidirektional
Fb	Faserbruch
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
GFK	Glasfaser-Kunststoffverbund
KOS	Koordinatensystem
MSV	Mehrschichtverbund
UD	unidirektional
Zfb	Zwischenfaserbruch

H.G.	verfasst von Hannes Golombek
H.K.	verfasst von Henri Kammler
O.S.	verfasst von Ole Scholz
T.B.	verfasst von Tristan Brack

2 Einleitung

2.1 Projektbeschreibung (H.G.)

Der LF1 *Zaunkönig* ist ein in den frühen 1940er Jahren entstandenes Flugzeug, das unter der Leitung von Hermann Winter an der Technischen Hochschule Braunschweig konstruiert wurde. Da der Zaunkönig vornehmlich aus Holz gebaut wurde, soll jetzt ein neuer Flügel im Maßstab 1:4,7 aus Glasfaser-Kunststoffverbund (GFK) konstruiert werden. Der Flügel muss gewisse Anforderungen erfüllen, die im Folgenden definiert werden.

Bei der Tragfläche handelt es sich um einen Rechteckflügel, der im Original über Verstrebungen mit dem Rumpf verbunden ist. Diese Streben sollen in der neuen Konstruktion nicht vorhanden sein. Der Flügel soll im Rumpf verstiftet werden, wobei die Torsionsbelastung durch zusätzliche Querkraftbolzen aufgenommen wird. Insgesamt darf der Flügel das Gewicht von 0,750 kg nicht überschreiten.

Um die strukturmechanischen Anforderungen zu erfüllen wird der Flügel auf seine Steifigkeit und Festigkeit geprüft. Die Steifigkeit ist hinreichend, wenn der Flügel bei einer senkrechten Belastung von $F_{pruef} = 100N$ an der Position des L/4-Punkts an der Endrippe eine Durchbiegung von $w = 22mm$ nicht überschreitet. Außerdem darf der Flügel bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500N$ nicht brechen. Der Flügel muss so auf Stabilität ausgelegt sein, dass kein Beulen auftritt. Zusätzlich sollen der Torsionswinkel und Schubmittelpunkt berechnet werden.

2.2 Motivation (O.S.)

Zunächst ist zu klären, warum es sinnvoll ist für diesen Flügel GFK zu verwenden. In der Luftfahrt wird immer nach Wegen gesucht das Gewicht zu minimieren, um die Wirtschaftlichkeit von Flugobjekten zu maximieren. Faser-Kunststoffverbunde (FKV) stellen hierbei mit ihrer hohen spezifischen Festigkeit einen idealen Kandidaten dar. Zusätzlich bieten FKV einfache Formgebungsmöglichkeiten für komplexe aerodynamische Profile und auch die Korrosionsbeständigkeit ist höher als bei konventionellen Werkstoffen. Als ein großer Nachteil ist der hohe Preis zu nennen, der in diesem Fall jedoch keine große Rolle spielt, da nur ein Modell entworfen wird und der Flügel nicht für hohe Stückzahlen optimiert wird. Glasfasern sind im Vergleich zu Kohlenstofffasern die günstigere Variante, auf sie wird in Kapitel 3.1 noch mal genauer eingegangen.

2.3 Lösungsstrategie (H.G.)

Um eine möglichst optimale Lösung für die Aufgabenstellung zu finden wird zunächst das Vorgehen festgelegt. Die Dimensionierung des Holms erfolgt im ersten Schritt analytisch nach Handbuchmethoden. Um die maximalen Beanspruchungen zu errechnen, wird der Holm als Balken modelliert und analysiert. Mit diesen Lasten wird der Holm unter Zuhilfenahme der VDI 2013 ausgelegt. Darauf folgend findet die Dimensionierung der Klebeverbindungen und Bolzen statt. Als letzter Schritt der analytischen Berechnung, wird der Schubmittelpunkt und die Verdrillung durch die Schubflussberechnung im Flügelquerschnitt ermittelt. Ebenfalls wird die nötige Dicke der Schale errechnet und auf die Sicherheit gegen Beulen geprüft.

Um die analytischen Berechnungen zu verifizieren soll eine numerische Berechnung mittels eines FEM-Programms stattfinden. Dafür wird ein CAD-Modell erstellt, welches dann in ein FEM-Programm importiert und analysiert wird.

Zuletzt soll ein Vergleich zu anderen Lösungen der Aufgabenstellung gezogen werden und mögliche Optimierungsmöglichkeiten der Auslegung gesucht werden.

Um eine Einführung in die Berechnungen bereitzustellen, sollen anfangs wichtige Grundlagen erläutert werden. Weitergehende Berechnungsmethoden und Theorien werden inhaltlich jedoch erst im Zuge der eigentlichen Berechnung dargestellt, um einen direkten Bezug zwischen Theorie und Anwendung vermitteln zu können.

3 Grundlagen

3.1 Glasfaser (H.G.)

Glasfasern gelten als älteste synthetische Faserart und wurden schon vor 3500 Jahren verwendet. Heutzutage werden Glasfasern überwiegend aus SiO₂ und Metalloxiden hergestellt. Die Bestandteile werden bei ca. 1400°C aufgeschmolzen und durch kleine Düsen im Boden des Kessels als dünne Fäden ausgelassen. Die Fäden werden aufgewickelt und zu größeren Fasern versponnen [Sch05]. Die hohe Festigkeit der Glasfaser beruht auf den kovalenten Bindungen von Silizium- und Sauerstoff-Atomen. Zugesetzte Metalloxide verhindern eine Ausbildung eines geordneten Gefüges und erhöhen somit zusätzlich die Festigkeit. Die Fasern können in Längsrichtung sehr hohe Kräfte aufnehmen, jedoch nicht in Querrichtung. Deshalb werden sie in eine Matrix integriert, die die Querkräfte aufnimmt und die Faser vor dem Knicken schützt. Glasfasern lassen sich auch um enge Radien sehr gut drapieren und sind durch ihre einfache Herstellungsweise im Vergleich zu anderen Faserarten sehr preiswert [Wit14]. Durch die zuvor erläuterten Eigenschaften sind Glasfasern sehr gut für dieses Projekt geeignet, für einen größeren Flügel wäre jedoch der Elastizitätsmodul zu gering und es müsste auf andere Fasern, wie zum Beispiel Kohlefasern, zurückgegriffen werden. Für die Konstruktion des Flügels stehen die Glasfasern Interglas 90070 (bidirektional) und Interglas 92145 (idealisiert unidirektional) des Herstellers Interglas Technologies zur Verfügung.

3.2 Matrix (H.G.)

Unter der Matrix versteht man den Fasern umgebenden Teil des Faserverbundstoffs. Dabei werden im Bereich des Faser-Kunststoff-Verbunds Polymere, wie z.B. Epoxidharz, verwendet. Die Matrix ist meist der schwache Teil des FKV und hat die Aufgabe, die Fasern gegen Knicken bei Druckbelastung zu schützen und eine gleichmäßige Krafteinleitung in die Fasern zu ermöglichen. Zusätzlich hält sie die Fasern in Position und verhindert Reibung zwischen den einzelnen Fasern [Sch05].

Für den Flügel wird der Epoxy-Kunststoff L 385 des Herstellers *MGScheufler* zusammen mit dem Härter H 386 im Mischverhältnis 100/40 verwendet.

3.3 Netzttheorie (H.G.)

Bevor die klassische Laminattheorie entwickelt wurde, verwendete man die sogenannte Netzttheorie. Bei der Netzttheorie wird das Mittragen der Matrix vernachlässigt. Dadurch

lassen sich die Schichtkräfte mit Hilfe eines Kräftegleichgewichts bestimmen. Durch diese Vereinfachungen kann der Konstrukteur schnell feststellen, ob die Fasern alleine der Belastung standhalten können. Wenn dies nicht der Fall ist werden die Kräfte größtenteils über die Matrix übertragen und das Laminat wird als *ungesund* bezeichnet. Durch die Annahme, dass die Matrix nicht tragend ist, wird das Laminat jedoch unterschätzt und weist deutlich höhere Festigkeiten auf, als in der Netztheorie angenommen. Damit wird in jedem Fall eine Sicherheit mit eingerechnet.

Für die Verwendung der Netztheorie sollte das Gelege zunächst in ein Hauptachsenkoordinatensystem überführt werden, damit die Schubspannungen verschwinden. Die Kraftflüsse werden damit zu \hat{n}_I und \hat{n}_{II} . Nun lässt sich der Winkel β zwischen den Fasern und den Achsen des Hauptachsenkoordinatensystems bestimmen. Mit diesem und der Annahme, dass nur die Spannungen σ_{\parallel} auftreten, können nun die Schnittkräfte in den Fasern bestimmt werden:

$$\hat{n}_I = \sum n_{\parallel k} \cdot \cos^2 \beta_k \quad (3.1)$$

$$\hat{n}_{II} = \sum n_{\parallel k} \cdot \sin^2 \beta_k \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{1}{2} \sum n_{\parallel k} \cdot \sin 2\beta_k. \quad (3.3)$$

Da der gesamte Kraftfluss als Summe der Kraftflüsse in den einzelnen Fasern angenommen werden kann, lässt sich dadurch der Kraftfluss in den einzelnen Faserschichten und somit die benötigte Dicke der Schichten, bzw. die Anzahl der Lagen bestimmen [Sch05].

In der folgenden Berechnung wird die Netztheorie jedoch nicht verwendet, da die Auslegung vorerst mit der VDI 2013 erfolgt und anhand der Klassischen Laminattheorie.

3.4 Klassische Laminattheorie (H.G.)

Das Prinzip der klassischen Laminattheorie ist die Beschreibung des Elastizitätsgesetzes eines MSV durch die Elastizitätsgesetze der einzelnen Schichten. Dies lässt sich durch die Annahme eines ideal elastischen und fehlerfrei verklebten Mehrschichtverbund (MSV), wovon ein infinitesimales Scheibenelement betrachtet wird, realisieren. Zusätzlich gilt die Annahme, dass ein ebener Spannungszustand vorliegt, die Schnittspannungen über die Dicke konstant sind und keine Verwölbungen auftreten.

Der Kraftfluss \hat{n} im ganzen Laminat lässt sich durch die Summe der Kraftflüsse in den

einzelnen Schichten zusammensetzen.

$$\hat{n}_x = \hat{\sigma}_x \cdot t = \sum n_{xk} = \sum \sigma_{xk} \cdot t_k \quad (3.4)$$

$$\hat{n}_y = \hat{\sigma}_y \cdot t = \sum n_{yk} = \sum \sigma_{yk} \cdot t_k \quad (3.5)$$

$$\hat{n}_{xy} = \hat{\tau}_{xy} \cdot t = \sum n_{xyk} = \sum \sigma_{xyk} \cdot t_k \quad (3.6)$$

Nun lässt sich das Elastizitätsgesetz für den MSV aufstellen:

$$\{\hat{n}\} = [A] \cdot \{\hat{\varepsilon}\}. \quad (3.7)$$

[A] ist hierbei die Steifigkeitsmatrix des MSV. Mit Hilfe der Kraftfluss- Spannungsbeziehung aus Gleichung 3.4, lässt sich dann auf die Spannung schließen.

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Die Verzerrung des MSV und somit auch die Verzerrung der Einzelschichten, lässt sich nun durch die Umstellung von Gleichung 3.7 bestimmen.

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [A]^{-1} \cdot \{\hat{n}\} \quad (3.9)$$

Um die Matrix A zu bestimmen werden die Steifigkeitsmatrizen der Einzelschichten [Q] benötigt. Diese lassen sich mit Hilfe der E-Moduln, Querkontraktionszahlen definieren.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\perp\parallel}\cdot E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\parallel\perp}\cdot E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Da manche Faserschichten um einen Winkel α gedreht sein können, muss für diese Schichten die Steifigkeitsmatrix mit Hilfe der Transformationsmatrix [T] nach der Transfor-

tionsregel aus Gleichung 3.12 transformiert werden.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ 0,5 \cdot \sin 2\alpha & -0,5 \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (3.12)$$

Nun lässt sich die Scheibensteifigkeits-Matrix [A] aus den Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Schichten zusammensetzen (siehe Glg.3.13).

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^2 \underline{\underline{Q}}_{ij,k} \cdot t_k \quad (3.13)$$

Um ein passende Anzahl an Faserschichten zu bekommen kann das Ergebnis nun iterativ angepasst werden.[Sch05]

3.4.1 Ingenieurskonstanten des MSV

Für den einachsigen Spannungszustand lassen sich die Moduln und Querkontraktionszahlen für den MSV ableiten. Diese lassen sich experimentell über z.B. einen Zugversuch oder rechnerisch aus dem Elastizitätsgesetz des MSV bestimmen.

$$\hat{E}_x = \frac{1}{A_{11}^{-1} \cdot t}; \hat{E}_y = \frac{1}{A_{22}^{-1} \cdot t}; \hat{G}_{xy} = \frac{1}{A_{66}^{-1} \cdot t}; \hat{\nu}_{xy} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{22}^{-1}}; \hat{\nu}_{yx} = -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{11}^{-1}} \quad (3.14)$$

Die Spannungen lassen sich jetzt durch Gleichung 3.9 errechnen.

Bei den Elastizitätsmoduln ist darauf zu achten, dass es sich um Moduln ohne Querkontraktionsbehinderung handelt [Sch05].

3.4.2 Plattenelement

Um ein Plattenelement zu Berechnen werden zusätzliche Beziehungen benötigt, da nun ein zweiachsiger Spannungszustand vorliegt. Zu Gleichung 3.13 kommen nun noch 2 weitere

Gleichungen (siehe Glg.3.15/3.16) hinzu.

$$B_{ij} = \cdot \sum_{k=1}^2 \overline{Q}_{ij,k} \cdot t_k \cdot \left(z_k - \frac{t_k}{2} \right) \quad (3.15)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^2 \overline{Q}_{ij,k} \cdot \left(\frac{t_k^3}{12} + t_k \left(z_k - \frac{t_k}{2} \right)^2 \right) \quad (3.16)$$

Nun lässt sich die Scheiben-Platten-Beziehung als Gleichung 3.17 schreiben.[Sch05]

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

3.5 Mischungsregel (H.G.)

Um die Materialkonstanten des FKV zu ermitteln kann die Mischungsregel verwendet werden. Darin werden die Materialkonstanten der Fasern und der Matrix im Verhältnis zu ihrem Massenanteil zu einer FKV-Materialkonstante zusammengestellt.

Die Dichte des FKV lässt sich aus der Dichte der einzelnen Komponenten errechnen (siehe Glg. 3.18).

$$\rho = \rho_F \cdot \varphi + \rho_M \cdot (1 - \varphi) \quad (3.18)$$

Der E-Modul parallel (siehe Glg. 3.19) und orthogonal (siehe Glg. 3.20) kann mit den E-Modulen von Faser und Matrix, sowie dem Faservolumenanteil φ errechnet werden. Zu betonen ist hierbei, dass auf eine Querkontraktionsbehinderung der Matrix durch die Fasern nicht eingegangen wird. In diesem Fall wären die resultierenden Steifigkeiten größer. Um sicher konservativ rechnen zu können, wird demnach die vereinfachte Rechnung benutzt. Aus selbigem Grund wird daher auch auf höhere Mischungsregeln, wie z.B. nach Puck, verzichtet.

$$E_{\parallel} = E_{f\parallel} \cdot \varphi + E_m \cdot (1 - \varphi) \quad (3.19)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_m}{(1 - \varphi) \cdot \frac{E_m}{E_{f\perp}} \cdot \varphi} \quad (3.20)$$

Der Schubmodul in Faser-Quer-Längs-Richtung kann ebenfalls durch die Schubmodule der Fasern und der Matrix ermittelt werden.

$$G_{\perp\parallel} = G_m \frac{1}{(1 - \varphi) + \frac{G_m}{G_{f\perp\parallel}} \cdot \varphi} \quad (3.21)$$

Außerdem lassen sich die Querkontraktionszahlen berechnen.

$$\nu_{\perp\parallel} = \varphi \cdot \nu_{f\perp\parallel} + (1 - \varphi) \cdot \nu_m \quad (3.22)$$

Aus diesen Werten lassen sich alle weiteren durch die Beziehungen zwischen den Materialkonstanten berechnen.[Sch05]

3.6 Versagenskriterium nach Puck (O.S.)

Da für einen anisotropen FKV nicht das Versagen mittels einer allgemeinen resultierenden Spannung für jeden Lastfall ermittelt werden kann, müssen Versagenskriterien für die speziellen Beanspruchungsmodi definiert werden. Für die in dieser Projektarbeit durchgeführten Auslegungen wurden die Festigkeitskriterien von Puck verwendet. Hierbei werden die einzelnen UD-Schichten des Laminats getrennt betrachtet. Auch wenn diese Betrachtungen physikalisch begründet sind (vgl. [Hor20a]), hat dies zur Folge, dass Effekte wie Delamination nicht berücksichtigt werden.

3.6.1 Definitionen

Zunächst sind einige Begriffe zu definieren. An einer UD-Schicht können zwei verschiedene Normalspannungen wirken, die sich, je nachdem, ob es sich um Druck- oder Zugbelastung handelt, unterschiedlich auf das Versagen auswirken: die Längsbeanspruchung σ_{\parallel} parallel und die Querbeanspruchung σ_{\perp} orthogonal zur Faserrichtung. Auch bei der Schubspannung muss zwischen der Quer-/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$ und der Längs-/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\parallel\perp}$ unterschieden werden. Wegen des durch die Fasern bedingten stark anisotropen Aufbaus muss zwischen zwei grundlegenden Versagensarten unterschieden werden: dem Faserbruch (Fb) und dem Zwischenfaserbruch (Zfb). Der Begriff Bruch ist hier bewusst als Schadensbezeichnung gewählt, da bei beiden Fällen kein plastisches Verhalten auftritt und es sich um einen Sprödbruch ohne nennenswertes Fließen handelt. Für das Versagenskriterium wird die genaue Definition der Anstrengung f_E gesucht. Diese ist abhängig vom Spannungszustand und immer so definiert, dass bei $f_E = 1$ das Versagen

eintritt, sie also bei Belastungen, die das Material, aushält Werte kleiner als 1 und bei überkritischen Lasten größer 1 annimmt.

Beim Zfb stimmt die Bruchebene nicht unbedingt mit der Wirkebene, der Ebene mit der höchsten Beanspruchung, überein. Auf anderen Ebenen können andere Festigkeiten herrschen, die früher überschritten werden. Generell gilt für sie, dass die Bruchebene immer parallel zu den Fasern sein muss. Puck führt analog zur Festigkeit den Bruchwiderstand der Wirkebene R^A , der als "derjenige Widerstand [definiert ist], den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen in ihr wirkenden Beanspruchung (bei Zfb: σ_{\perp}^+ oder $\tau_{\perp\perp}$ oder $\tau_{\parallel\perp}$) entgegengesetzt" [Sch05].

3.6.2 Zwischenfaserbruch ohne Längsspannung

Ignoriert man die Längsspannung σ_1 , da diese erst bei sehr hohen Werten Einfluss auf einen Zfb hat, ergibt sich ein Spannungszustand aus den beiden übrigen Normalspannungen σ_2 und σ_3 orthogonal zu den Fasern und den Schubspannungen τ_{12} , τ_{23} und τ_{31} . Um nun die Bruchebene bestimmen zu können, muss der Spannungszustand in dieser Ebene mittels der Matrix aus Gleichung 3.23 transformiert werden. Aus der Bedingung, dass die Bruchebene parallel zu den Fasern liegen muss, ergibt sich eine Drehung um die x_1 -Achse, die in Faserrichtung zeigt, mit dem Winkel θ . In der Bruchebene liegen dann nur noch die beiden Schubspannungen τ_{nt} normal und tangential zur Ebene, τ_{n1} normal in Faserrichtung und die Normalspannung σ_n senkrecht auf der Bruchebene.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ -cs & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Mit

$$c = \cos\theta \quad (3.24)$$

und

$$s = \sin\theta. \quad (3.25)$$

Mit diesen Werten definiert Puck seine Bruchbedingungen aus der Mohrschen Bruchhypothese [Sch05], wobei er zwischen $\sigma_n < 0$:

$$f_{E,\text{Zfb}} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_\perp^+} - \frac{p_{\perp\psi}^+}{R_{\perp\psi}^A}\right)\sigma_n\right]^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^+}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n \quad (3.26)$$

und $\sigma_n \geq 0$

$$f_{E,\text{Zfb}} = \sqrt{\left(\frac{p_{\perp\psi}^-}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^-}{R_{\perp\psi}^A}\sigma_n \quad (3.27)$$

unterscheidet. Mit den experimentell ermittelten Bruchwiderständen R und Steigungsparametern $p_{\perp\perp}^\pm$ lassen sich aus der Bedingung, dass der Bruchkörper, welcher sich aus $f_{E,\text{Zfb}} = 1$ ergibt, sprung- und knickfrei sein muss, somit die Neigungsparameter $p_{\perp\psi}^\pm$ bestimmen. Nun lässt sich die Anstrengung in Abhängigkeit des Drehwinkels θ errechnen. Für die meisten Fälle ist dies jedoch nicht analytisch möglich, sodass die Werte numerisch bestimmt werden müssen. In der Ebene mit der höchsten Anstrengung kann es am ehesten zum Bruch kommen. Der Reservefaktor ist als der Kehrwert der Anstrengung definiert und ist ein Maß für die Sicherheit gegen das Versagen. Falls die Anstrengung den Wert von 1 überschreitet, wird die Ebene der UD-Schicht zur Bruchebene, wo der Reservefaktor zuerst null wird. Es kommt zum Zwischenfaserbruch.

3.6.3 Einfluss der Längsspannung

In diesen Betrachtungen wurde bisher der Einfluss der Spannung in Faserrichtung σ_1 vernachlässigt. Jedoch treten bei höheren Spannungen Effekte auf, die sich auch auf den Zfb auswirken und die Bruchwiderstände senken. Zum einen wird durch starke Dehnung in Faserrichtung die Matrix überproportional beansprucht und Poren werden verstärkt geöffnet, zum anderen kann es auch, bevor Faserbruch eintritt, zum Bruch einzelner Filamente kommen, die Risse in der Matrix begünstigen. Außerdem können sich durch Druckspannungen in Faserrichtung leicht wellen, was zusätzliche $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung in das Material einträgt.

Puck berücksichtigt diese Senkung der Bruchwiderstände durch einen Schwächungsfaktor $\eta_w < 1$. Um die Einbeziehung dieses Faktors besser handhabbar zu machen, wird er für alle Bruchwiderstände gleich gewählt. Somit lässt er sich sowohl aus Gleichung 3.26, als auch 3.27 ausklammern. Es lässt sich also die Bruchbedingung unter Einbezug der

Längsspannung $f_{E1} = 1$ als

$$f_{E1} = \frac{f_{E0}}{\eta_W} = 1 \quad (3.28)$$

schreiben, wobei der Index 0 für die Anstrengung ohne σ_1 steht. Durch die gleich starke Absenkung aller Bruchwiderstände bleibt auch der Bruchwinkel erhalten. Für die Abhängigkeit des Schwächungsfaktors von σ_1 wird eine Ellipsenbeziehung gewählt, wobei wieder zwischen Druck- und Zugspannung unterschieden wird, da die Zugspannung einen stärkeren Einfluss auf den Zfb hat. Dadurch ergibt sich für den Bruchkörper eine Zigarrenform. Auch wenn Zwischenfaserbrüche nicht unbedingt zum Totalversagen des Laminats führen, sind sie hier trotzdem als Auslegungskriterium zu sehen, da sie negative Auswirkungen auf die Festigkeiten, Lebensdauer und Sicherheit haben. Die Risse in der Matrix können Delamination auslösen oder auch durch Kerbwirkung anliegende Schichten schwächen. Sowohl der Quer-Längs-Schubmodul als auch die Bruchfestigkeit R_{\parallel}^- nehmen ab. Des Weiteren können durch die Risse korrosive Medien an die Fasern gelangen und diese schädigen.

3.6.4 Faserbruch

Ein viel kritischerer Fall tritt ein, wenn beim Faserbruch die Fasern reißen oder brechen. Als Versagen gilt hier nicht der Bruch einzelner Fasern, sondern ganzer Bündel. Dies ist unter allen Umständen zu vermeiden, da die hohen Spannungen, bei denen das Material versagt, meist nicht über andere Lastpfade kompensiert werden können. Während die Spannung in Faserrichtung σ_{\parallel} für den Zfb nur eine zweitrangige Rolle spielt, ist sie für den Fb maßgebend.

Zugspannung σ_{\parallel}^+

Der Bruchwiderstand in Faserrichtung bei Zugbeanspruchung R_{\parallel}^+ wird in der Regel rechnerisch und nicht experimentell bestimmt. Der genaue Wert für die Festigkeit wird meistens nicht benötigt, weil bei FKV viel schneller durchs Versagen der Matrix ein Zfb auftreten kann und die Konstruktionen bei schwingender Beanspruchung durch Ermüdung versagen. Außerdem ist die Bestimmung des Wertes im Versuch möglich, weil es wegen der hohen Bruchspannungen an den Einspannungen zu mehrachsigen Spannungszuständen kommt. Da die Fasern quasi die gesamte Spannung aufnehmen und die Matrix dem gegenüber vernachlässigbar ist, lässt sich die Festigkeit des Laminats rein aus der der Fasern $R_{f\parallel}^+$

und des Faservolumenanteils φ bestimmen:

$$R_{\parallel}^+ = R_{f\parallel}^+ \varphi \quad (3.29)$$

Hieran lässt sich auch erkennen, dass die Spannungen, die in den Fasern herrschen, antiproportional mit dem Faservolumenanteil steigen. Jedoch kann man diesen Wert nicht ohne weiteres verwenden, sondern muss ihn durch einen Abminderungsfaktor korrigieren, da die wahre Festigkeit durch einige Effekte gesenkt wird.

Schon in der Fertigung und Verarbeitung können Schädigungen an einzelnen Filamenten entstehen, sodass diese früher versagen und benachbarte Fasern einer erhöhten Belastung ausgesetzt sind. Auch eine leicht unterschiedliche Ausrichtung oder Vorspannung kann zu einer unterschiedlichen Spannungsverteilung führen, die das vorzeitige Versagen bewirkt. Die örtliche Streuung der Festigkeit sorgt dafür, dass einige Fasern zuerst brechen und anliegende ihr Last zusätzlich tragen müssen. Auch wenn dadurch die Gesamtfestigkeit des FKVs gesenkt wird, ermöglicht dies das vorzeitige Erkennen des Versagens, was erwünscht ist.

Druckspannung σ_{\parallel}^-

Bei hohen Druckspannungen, besonders bei dünnen Bauteilen des Leichtbaus, muss es nicht zum Versagen des Materials in Folge vom Erreichen der Fließgrenze oder Schubbelastung spröder Werkstoffe kommen. Es handelt sich stattdessen um ein Stabilitätsproblem, bei dem die Fasern einer UD-Schicht knicken. Jedoch kommt es nur in einem nie wirklich erreichbaren idealen Laminat zu einem Verzweigungsproblem, wie es beim Eulerknicken zu beobachten ist. Bei realen Laminaten gibt es immer Imperfektionen, bei denen die Fasern durch Welligkeiten lokal eine variierte Orientierung haben, die das sogenannte Schubknicken auslösen. Schon ohne Lastangriff liegt also eine Orientierungsabweichung mit dem Winkel ϕ_0 vor. Da trotzdem an jeder Stelle das Momentengleichgewicht herrschen muss, aber es an diesem Ort nicht mehr nur durch die Druckspannungen erfüllt ist, entstehen Schubspannungen $\tau_{\perp\parallel}$. Aus dem Momentengleichgewicht in Abbildung 3.1 lässt sich der Zusammenhang

$$\sigma_{\parallel}^- = \frac{\tau_{\perp\parallel}}{\phi_0 + \gamma_{\perp\parallel}} \quad (3.30)$$

erkennen. Mit steigender Druckspannung steigt auch der Schiebewinkel $\gamma_{\perp\parallel}$. Bei dieser Betrachtung wurde aber noch die Biegesteifigkeit der Fasern außer Acht gelassen, die dem Schubknicken entgegenwirken. Auch die benachbarten Fasern stützen die knickenden

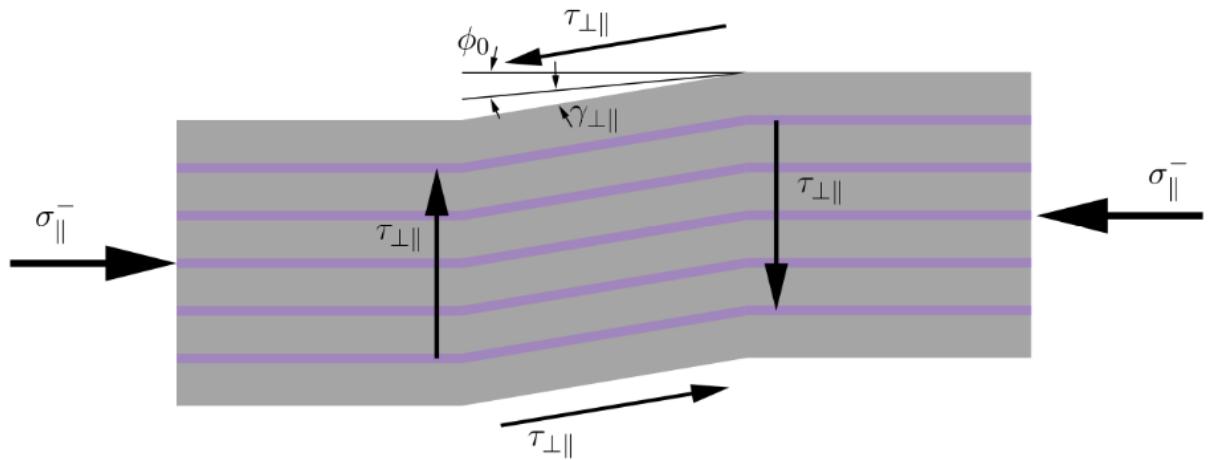


Abbildung 3.1: Kräfte beim Schubknicken von VFK

Schichten und tragen somit zu einer erhöhten Stabilität bei. Des Weiteren ist zu beachten, dass die Schubspannung $\tau_{\perp\parallel}$ stark nichtlinear von dem Schubwinkel $\gamma_{\perp\parallel}$ abhängt. Die Längs-Druckfestigkeit R_{\parallel}^- lässt sich aus der Extremwertbetrachtung von Gleichung 3.30 als der Maximalwert von σ_{\parallel}^- zu

$$R_{\parallel}^- = \frac{d\tau_{\perp\parallel}}{d\gamma_{\perp\parallel}} = G_{\perp\parallel,T}(\gamma_{\perp\parallel}) \quad (3.31)$$

bestimmen. $G_{\perp\parallel,T}(\gamma_{\perp\parallel})$ ist der Tangenten-Schubmodul beim Schubknicken. Wird dieser Wert überschritten, wächst der Schiebewinkel unkontrolliert an und es kommt zum lokalen Knicken, was nicht selten zum Gesamtversagen führen kann.

Häufig kommt es aber gar nicht zur Überschreitung dieser Festigkeit. Lokale Spannungsmaxima können schon vorher zum Versagen durch Zfb führen, bevor es zum Schubknicken kommt. In dem zu konstruierenden Flügel soll sich ein Holm befinden, in dessen Gurten es durch ihre relativ hohe Dicke jedoch trotzdem vorkommen kann. Somit ist dieser Fall für diese Projektarbeit nicht vernachlässigbar.

Sowohl die Längs-Druckfestigkeit R_{\parallel}^- als auch die Längs-Zugfestigkeit R_{\parallel}^+ sind als Materialkennwerte der UD-Schicht im Rahmen der Aufgabenstellung gegeben und ergänzen die Pucksche Zigarre, indem der Bruchkörper durch diese beiden Festigkeiten in die σ_1 -Richtung beschränkt wird.

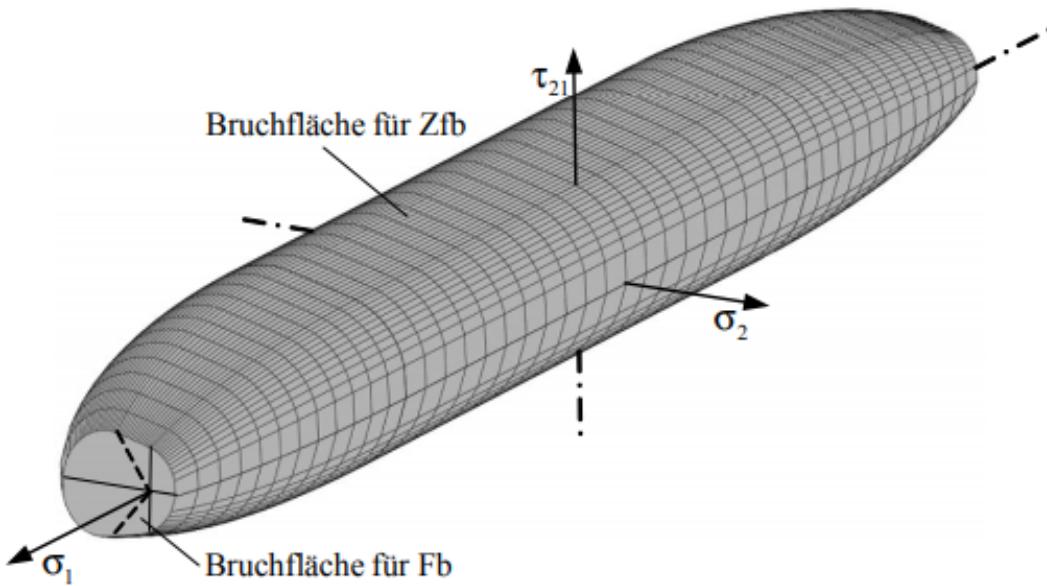


Abbildung 3.2: Pucksche Zigarre aus [Sch05]

3.7 Bauweise (O.S.)

In der Aufgabenstellung wird gefordert, dass der Flügel in der Holm-Bauweise konstruiert wird. Ein Holm besteht aus zwei parallelen Gurten, die durch einen oder mehrere Stege miteinander verbunden werden. Dabei sind verschiedene Varianten möglich. Abbildung 3.3 veranschaulicht Konstruktionsmöglichkeiten. Neben der Festigkeit ist die Steifigkeit die einzige strukturmechanische Anforderung. Somit lässt sich das Problem als Biegebalken betrachten, der bei der vorgegebenen Prüflast $F_{pruef} = 100\text{N}$ am freien Ende die vorgegebene Durchbiegung $w(100\text{N}) = 22\text{mm}$ einhält. Das entstehende Biegemoment wird hauptsächlich von den Gurten getragen, weswegen man sich bei der Wahl des Steges auf andere Kriterien konzentrieren kann. Da kein maximaler Drillwinkel vorgegeben ist und die Torsionssteifigkeit fast ausschließlich von der Haut bewirkt wird, führen mehrere Stege, wie man sie bei einem geschlossenen Profil hat, nur zu unerwünschter Gewichtszunahme. Nach diesen Überlegungen wurde der I-Holm ausgewählt, da dieser bei einfacher Fertigung die gewünschten Eigenschaften mit sich bringt.

Das aerodynamische Profil des Flügels wird durch die Schale erreicht. Hierbei wird eine dünne Haut nur an kritischen Stellen mit der Sandwichbauweise oder Rippen verstärkt, um Beulen zu verhindern. Die Schale trägt dabei so gut wie gar nicht die Last des Flügels,

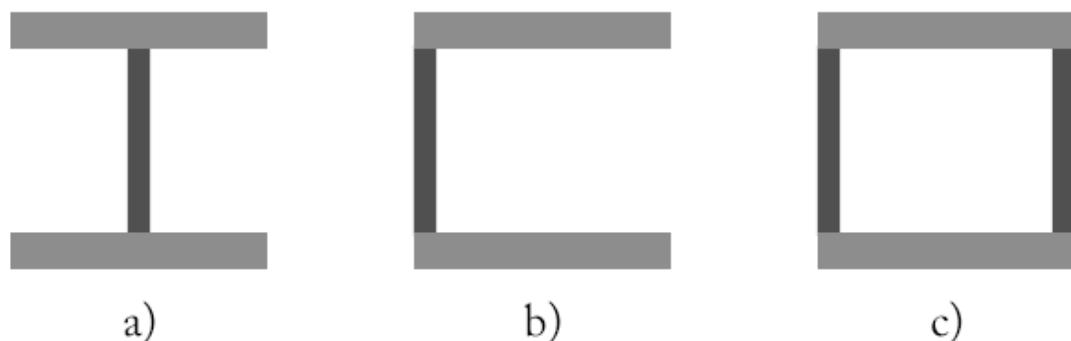


Abbildung 3.3: Holmarten: a) I-Holm b) C-Holm c) Kastenholm

jedoch ist sie für die Torsionssteifigkeit entscheidend.

4 Auslegung des Holms nach Handbuchmethoden

4.1 Modellierung des Holms (T.B.)

4.1.1 Einführung in die Balkenbiegung

Anhand der *Balkentheorie nach Bernoulli* soll im Folgenden das mechanische Verhalten des Holms unter gegebenen Bedingungen ermittelt werden. Dazu werden einführend diese Theorie und andere Zusammenhänge kurz dargestellt.

Die Balkentheorie beschreibt elastische Längs- und Querverformungen eines Balkens beliebigen Querschnitts, resultierend durch angreifende Kräfte, Streckenlasten und Momente. Diese können durch Lager oder äußere angreifende Lasten in einen solchen Körper eingeleitet werden. Ergänzend sei angemerkt, dass es sich bei einem Balken um einen Körper handelt, dessen Länge sehr viel größere Werte als die der Breite und der Höhe besitzt. Durch die Lasten herrschen im Balken innere Normal- und Querkräfte und innere Momente (N, Q, M). Mittels des Freischneidens können diese an beliebigen Stellen berechnet werden. Folgend ergeben sich Normal- (Zug, Druck) und Schubspannungen (σ, τ), die wiederum über das *Hooke'sche Gesetz* zu Dehnungen und Verzerrungen (ϵ, γ) führen, sodass letztendlich anhand derer beschriebene Verformungen (u, v, w) zu erkennen sind. Durch das hohe Verhältnis der Abmessungen zueinander werden Schubspannungen im Weiteren vernachlässigt [Hor20c][Ost18][LiN15].

Für die Reaktionseigenschaften auf angreifende Lasten sind Materialkennwerte und die Geometrie des Balkens verantwortlich, welche mit der Biegesteifigkeit EI repräsentiert werden. Gebildet wird sie durch den E-Modul E und das Flächenträgheitsmoment I . Während Ersteres eine wichtige Eigenschaft eines Materials ist, ist Letzteres von der Querschnittsform abhängig. Neben der eigentlichen Form können ebenfalls Steiner-Anteile das Flächenträgheitsmoment erhöhen. Für die zu verwendenden Formeln wird auf das spätere Kapitel 5.1.3 verwiesen [Ost18].

Innerhalb des gebogenen Balkens gibt es stets eine neutrale Faser, die eine Linie bzw. Fläche ohne eine relative Längenänderung unter angreifenden Kräften und Momenten repräsentiert. Diese Linie wird auch Biegelinie genannt, für welche die vereinfachte *Differentialgleichung des Biegebalkens*

$$w'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.1)$$

aufgestellt wurde. Neben der Krümmung w'' kann mittels Integration der Biegewinkel w' und die Absenkung w bestimmt werden. Über Differentiationen werden auch äußere Momente, Kräfte und Streckenlasten in der Balkentheorie mit einbezogen. Durch Integrationskonstanten können geometrische Rand- und Übergangsbedingungen beachtet werden. Während in der neutralen Faser keine Normalspannungen auftreten, sind diese in den Randfasern maximal [Ost18][LiN15].

Es sei außerdem angemerkt, dass jederzeit Superpositions-Eigenschaften gelten. Dadurch können einerseits mehrere Balken in einem System betrachtet werden, andererseits aber auch Balken mit mehreren Belastungen in einzelne einfache Berechnungen überführt werden [Ost18].

Für die Berechnung einer Balkenbiegung kann nach folgendem Schema vorgegangen werden: Vorerst werden die notwendigen Lagerkräfte und -momente bestimmt. Wichtige Lagerarten bilden dabei das Festlager (ein rotatorischer Freiheitsgrad), das Loslager (ein rotatorischer und ein translatorischer Freiheitsgrad) und eine Einspannung (keine Freiheitsgrade), die Freiheitsgrade seien dabei auf den zweidimensionalen Fall bezogen. Anschließend wird der Balken bereichsweise an Unstetigkeiten (z.B. Lager oder Krafteinleitungspunkte und ändernde Geometrien) geschnitten, um innere Kräfte am entstandenen positiven und negativen Schnittufer zu ermitteln. Dadurch lassen sich in diesen markanten Orten relevante Rand- und Übergangsbedingungen der Differentialgleichung des Biegebalkens bestimmen. Abschließend führen Integrationen und Differentiationen dieser Gleichung und deren Lösung zur Absenkung, dem Biegewinkel, der Krümmung sowie innerem Kraft- bzw. Momentverlauf [Ost18][LiN15].

4.1.2 Annahmen zur Modellierung

Das Koordinatensystem des Flügels entspricht einem allgemeinen Flugzeug-Koordinatensystem, sodass die Flügellängskoordinate durch y definiert ist. Der Koordinatenursprung ist im Lager A positioniert, da es keinen allgemeinen Flugzeugschwerpunkt gibt.

Zur Vereinfachung aller analytischen Berechnungen soll anfangs eine wichtige Annahme getroffen werden: Der Holm wird lediglich auf Biegung durch eine Querkraft und die Flügelschale nur auf Torsion durch ein resultierendes Torsionsmoment beansprucht. Diese Annahme kann getroffen werden, da die jeweiligen Belastungensarten auf das entsprechend

andere Bauteil eine sehr kleine relative Auswirkung haben gegenüber dem gesamten Flügel als Baugruppe. Diese Annahme ist auch bei Segelflugzeugen, wie z.B. der SB 14 der „Akademische[n] Fliegergruppe Braunschweig e.V.“ erfolgt und vom Luftfahrtbundesamt akzeptiert worden [Ron99].

Der Holm inklusive des Holmstummels wird für die Belastung durch eine Prüfkraft F_{pruef} in negative z-Richtung als Biegebalken ausgelegt. Dafür ist er an zwei Stellen gelagert, am Lager A und am Lager B . Die Lager entsprechen den Verstiftungen (siehe Bauteil U-Profil der Aufgabenstellung). Um eine Überbestimmung des Systems zu vermeiden, wird das Lager B als Loslager angenommen. Die Querkraftbolzen werden nicht durch ein Lager, sondern durch eine zusätzlich angreifende Kraft F_Q simuliert, da eine biegeweiche Wurzelrippe eine nicht definierbare, unbekannte Absenkung erlaubt.

Als Randbedingungen der Modellierung sind die Halbspannweite s und die Absenkung w (bezogen auf KOS) gegeben. Für die Absenkung w soll eine Sicherheit $j = 1,1$ gesetzt werden. Zwischen Lager A und B wird die Länge l_1 angenommen, zwischen Lager B und der Wurzelrippe C die Länge l_2 . Die verbleibende Länge bis zur Flügelspitze, an der die Prüfkraft F_{pruef} wirkt, wird l_3 bezeichnet. Die Halbspannweite s wird, beginnend in der Mitte der Verstiftungen, bis zur Flügelspitze gemessen. Ausgehend von dem Holmstummelende bis zum Lager A wird l_0 als Länge definiert. Diese Länge ist jedoch unerheblich für die Modellierung, sie wird erst für die Massenbestimmung benötigt.

Anhand der Randbedingungen und der Einspannvorrichtung für den Versuchsaufbau ergeben sich folgende Längen (ebenfalls in Abb. 4.1 dargestellt):

$$s = 0,848m \quad (4.2)$$

$$l_0 = 0,03m \quad (4.3)$$

$$l_1 = 0,076m \quad (4.4)$$

$$l_2 = 0,037m \quad (4.5)$$

$$l_3 = s - \frac{l_1}{2} - l_2 = 0,773m \quad (4.6)$$

$$w_{j=1,1} = \frac{1}{j} * w = \frac{1}{1,1} * 0,022m = 0,02m \quad (4.7)$$

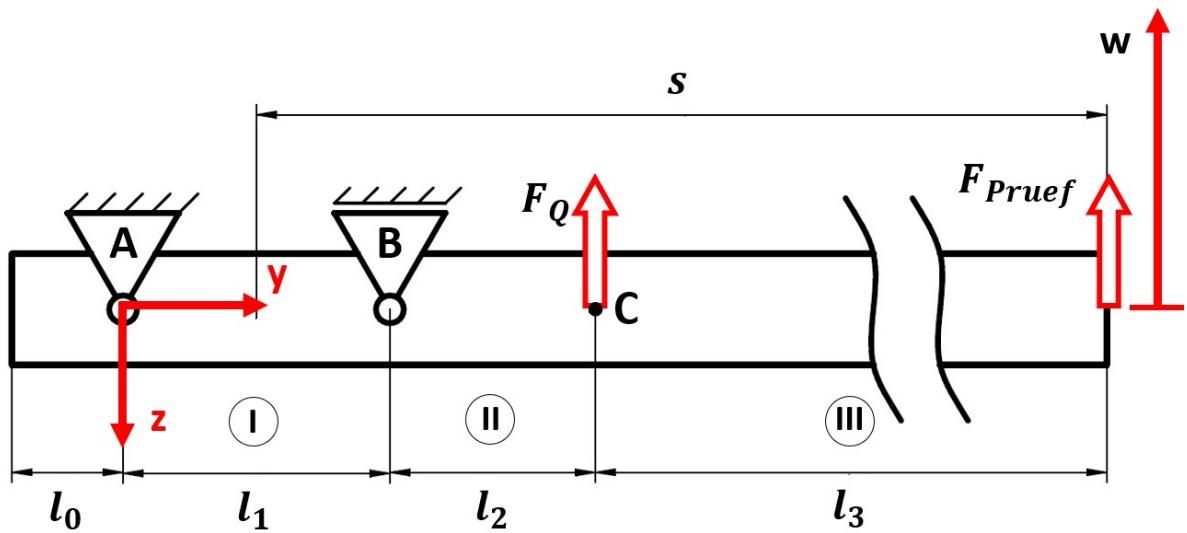


Abbildung 4.1: Modellierung des Holms als Balken

4.1.3 Analytisches Lösen der Modellierung

Um die Differentialgleichungen der Balkenbiegung lösen zu können, wird der Biegebalken vorerst in drei Teilbereiche I , II und III aufgeteilt, die sich von Lager A zu B , von Lager B zur Wurzelrippe C und von dort aus bis zur Flügelspitze erstrecken.

Dadurch ergeben sich folgende zwölf Differentialgleichungen [Ost18]:

$$EI_x \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \quad (4.8)$$

$$EI_x \cdot w_I'''(y) = q_I(y) \cdot y + R_1 = -Q_I(y) \quad (4.9)$$

$$EI_x \cdot w_I''(y) = \frac{q_I(y)}{2} \cdot y^2 + R_1 \cdot y + R_2 = -M_I(y) \quad (4.10)$$

$$EI_x \cdot w_I'(y) = \frac{q_I(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_1}{2} \cdot y^2 + R_2 \cdot y + R_3 \quad (4.11)$$

$$EI_x \cdot w_I(y) = \frac{q_I(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_1}{6} \cdot y^3 + \frac{R_2}{2} \cdot y^2 + R_3 \cdot y + R_4 \quad (4.12)$$

$$EI_x \cdot w_{II}'''(y) = q_{II}(y) \quad (4.13)$$

$$EI_x \cdot w_{II}''(y) = q_{II}(y) \cdot y + R_5 = -Q_{II}(y) \quad (4.14)$$

$$EI_x \cdot w_{II}''(y) = \frac{q_{II}(y)}{2} \cdot y^2 + R_5 \cdot y + R_6 = -M_{II}(y) \quad (4.15)$$

$$EI_x \cdot w_{II}'(y) = \frac{q_{II}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_5}{2} \cdot y^2 + R_6 \cdot y + R_7 \quad (4.16)$$

$$EI_x \cdot w_{II}(y) = \frac{q_{II}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_5}{6} \cdot y^3 + \frac{R_6}{2} \cdot y^2 + R_7 \cdot y + R_8 \quad (4.17)$$

$$EI_x \cdot w_{III}'''(y) = q_{III}(y) \quad (4.18)$$

$$EI_x \cdot w_{III}''(y) = q_{III}(y) \cdot y + R_9 = -Q_I(y) \quad (4.19)$$

$$EI_x \cdot w_{III}''(y) = \frac{q_{III}(y)}{2} \cdot y^2 + R_9 \cdot y + R_{10} = -M_I(y) \quad (4.20)$$

$$EI_x \cdot w_{III}'(y) = \frac{q_{III}(y)}{6} \cdot y^3 + \frac{R_9}{2} \cdot y^2 + R_{10} \cdot y + R_{11} \quad (4.21)$$

$$EI_x \cdot w_{III}(y) = \frac{q_{III}(y)}{24} \cdot y^4 + \frac{R_9}{6} \cdot y^3 + \frac{R_{10}}{2} \cdot y^2 + R_{11} \cdot y + R_{12} \quad (4.22)$$

Die Randbedingungen der Modellierung ergeben sich folgend nach gegebenen Definitionen von Lagern und angreifenden Kräften [Ost18]:

$$w_I(y = 0) = 0 \quad (4.23)$$

$$M_I(y = 0) = 0 \quad (4.24)$$

$$w_I(y = l_1) = 0 \quad (4.25)$$

$$w_{II}(y = l_1) = 0 \quad (4.26)$$

$$w_I'(y = l_1) = w_{II}'(y = l_1) \quad (4.27)$$

$$M_I(y = l_1) = M_{II}(y = l_1) \quad (4.28)$$

$$w_{II}(y = l_1 + l_2) = w_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.29)$$

$$w'_{II}(y = l_1 + l_2) = w'_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.30)$$

$$M_{II}(y = l_1 + l_2) = M_{III}(y = l_1 + l_2) \quad (4.31)$$

$$Q_{II}(y = l_1 + l_2) = Q_{III}(y = l_1 + l_2) + F_Q \quad (4.32)$$

$$M_{III}(y = l_1 + l_2 + l_3) = 0 \quad (4.33)$$

$$Q_{III}(y = l_1 + l_2 + l_3) = F_{pruef} \quad (4.34)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass $q_I(y) = q_{II}(y) = q_{III}(y) = 0$ gilt, da keine Streckenlast angreift. Unter anderem bildet die Schwerkraft der Erde eine Streckenlast, diese kann jedoch aufgrund ihres kleinen Einflusses auf die Absenkung gegenüber der Prüfkraft vernachlässigt werden. Ein weiteres Beispiel für eine Streckenlast bildet die Auftriebsverteilung eines Flügels während einer Anströmung. Jedoch wird genau auf diese im Versuchsstand verzichtet und durch die Prüfkraft repräsentiert.

Als Lösung dieser Differentialgleichungen lässt sich die Querkraft $Q(y)$, das Moment $M(y)$ und die Biegelinie $w(y)$ ermitteln:

$$Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} F_{pruef} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} & , y \epsilon(0, l_1) \\ F_{pruef} + F_Q & , y \epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ F_{pruef} & , y \epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.35)$$

$$M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} (-F_{pruef} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1}) \cdot y & , y \epsilon(0, l_1) \\ F_{pruef} \cdot (y - l_1 + l_2 + l_3) + F_Q \cdot (y - l_1 + l_2) & , y \epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ F_{pruef} \cdot (y - l_1 + l_2 + l_3) & , y \epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.36)$$

$$w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\left(F_{pruef} \cdot \frac{l_2+l_3}{l_1} - F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) \cdot y^3 - \left((l_2 + l_3) \cdot l_1 \cdot F_{pruef} - l_1 \cdot l_2 \cdot F_Q \right) \cdot y \right), y\epsilon(0, l_1) \\ \frac{1}{EI_x} \cdot \left(\frac{(-F_{pruef}-F_Q)}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1+l_2+l_3) + F_Q \cdot (l_1+L_2)}{2} \cdot y^2 \right. \\ \left. + \left(F_{pruef} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{2} l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y \right. \\ \left. + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2) \right) \\ , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ \frac{1}{EI_x} \cdot \left(-\frac{F_{pruef}}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1+l_2+l_3)}{2} \cdot y^2 + \left(F_{pruef} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) + F_Q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y \right. \\ \left. + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot l_1^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_1^2 \cdot l_3 \right) \right) \\ , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (4.37)$$

Die Herleitung der Lösung kann im Kapitel 11.1 nachvollzogen werden.

Um nun für die später geforderte Biegesteifigkeit EI_x ein Ergebnis zu erhalten, wird die Gleichung $w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$ nach $EI_x(y, F_{pruef}, F_Q, w)$ umgestellt. Die eingesetzten Werte ergeben sich aus der Auslegung auf Steifigkeit. Über die Wurzelrippe werden Kräfte des Holms in die Querkraftbolzen abgesetzt. Aufgrund der biegeweichen Wurzelrippe als Verbindungselement zwischen Holm und den Querkraftbolzen darf die Absenkung des Holms dort nicht mit null angenommen werden. Vereinfacht wird definiert, dass die eingeleitete Prüfkraft F_{pruef} an den Querkraftbolzen um ihren Betrag abgesetzt wird, wie es tatsächlich an einem Flugzeugrumpf geschehen würde. Dieses entspricht sehr wahrschein-

lich jedoch nicht der tatsächlichen Kraftaufnahme im Versuchsaufbau.

$$\begin{aligned}
 EI_x(0.886m, 100N, -100N, 0.02m) &= \\
 \frac{1}{w} \cdot \left(-\frac{F_{pruef}}{6} \cdot y^3 + \frac{F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{2} \cdot y^2 + \left(F_{pruef} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot l_1^2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot l_3 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + F_Q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \right) \right) \cdot y + F_{pruef} \cdot \frac{1}{6} \cdot (l_1^3 + l_1^2 \cdot l_2 + l_1^2 \cdot l_3) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_2^2 \cdot l_1 \right) \right) \\
 &= 962,552 Nm^2
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.1.4 Analyse der Modellierung

In Abb. 4.2 werden die Querkraftverläufe $Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$ als innere Schnittkraft, der Momentenverlauf $M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$ als inneres Schnittmoment und die Biegelinie $w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x)$ für den Nachweis der Steifigkeit graphisch dargestellt, über die gesamte Holmlänge und in einem vergrößerten Ausschnitt im Bereich der Lager.

Jedoch werden nicht bei dem Nachweis der Steifigkeit, sondern bei dem Nachweis der Festigkeit das maximale Schnittmoment und die maximale Schnittkraft erreicht. Bei diesem Nachweis beträgt die Prüfkraft $F_{pruef} = 500N$ und somit auch $|F_Q| = 500N$. Diese Kraft wird bei der Berechnung von EI_x nicht beachtet, da bei dem Nachweis der Festigkeit die Absenkung w kein Rolle spielt. In Abb. 4.3 werden die genannten Verläufe nun für den Festigkeitsnachweis dargestellt.

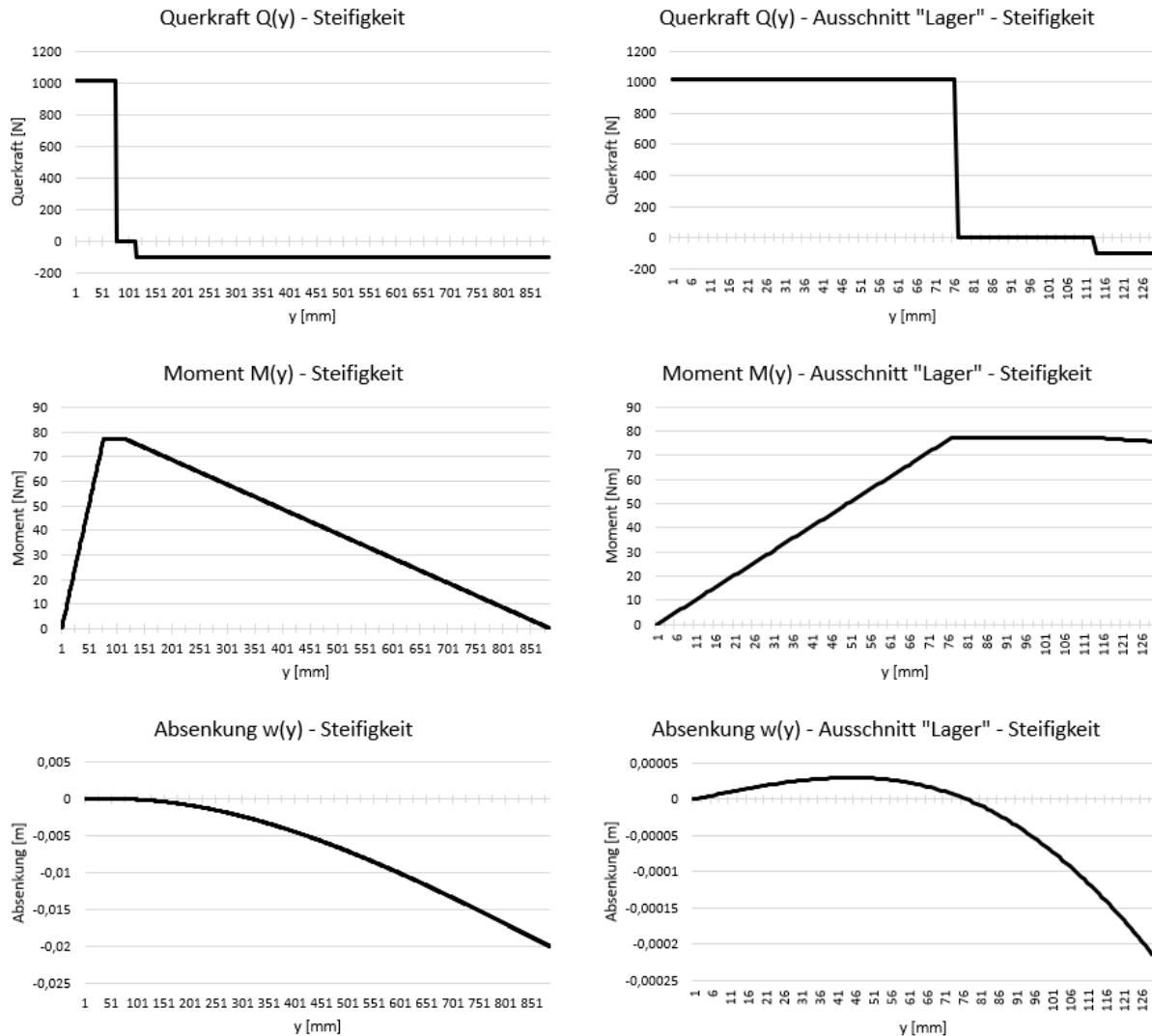


Abbildung 4.2: Kraft-, Moment- und Absenkungsverlauf der Steifigkeitsauslegung des Holms

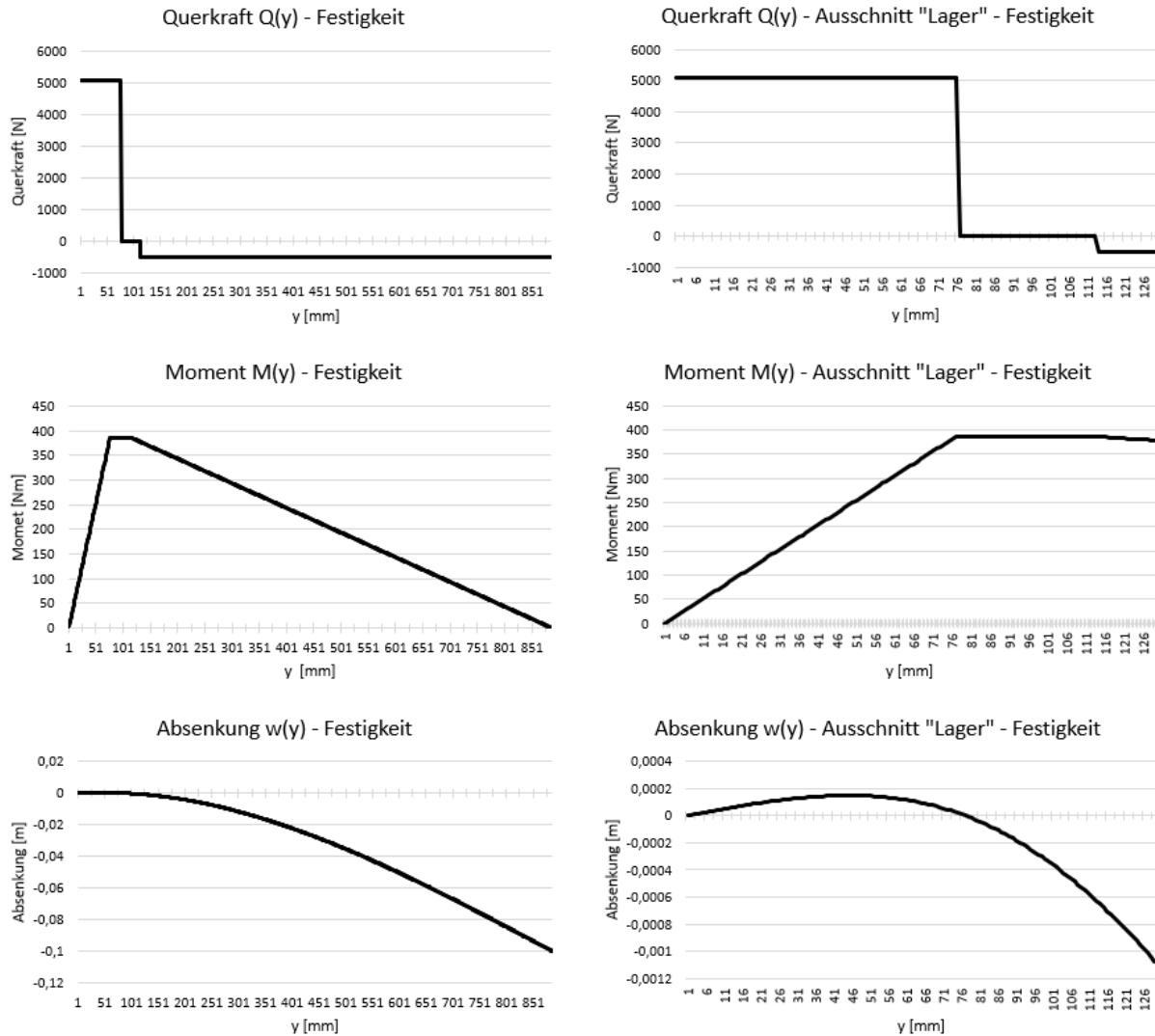


Abbildung 4.3: Kraft-, Moment- und Absenkungsverlauf der Festigkeitsauslegung des Holms

4.2 Auslegung des Holms nach VDI 2013 (H.K.)

4.2.1 Allgemeine Informationen zu der Richtlinie

Auf Basis der in der Balkenberechnung bestimmten Parameter Biegesteifigkeit, maximales Biegemoment und maximale Querkraft, werden die Gurte und der Steg dimensioniert. Die Vorauslegung erfolgt dabei anhand der VDI-Richtlinie 2013 [VDI70]. Diese behandelt die Dimensionierung von GFK-Teilen und enthält in einem Unterkapitel Informationen speziell zur Auslegung eines I-Trägers. Zur Festigkeitsauslegung werden die Gurte und der Steg getrennt voneinander betrachtet. Es wird die Annahme gemacht, dass der Gurt unter Vernachlässigung der Schubflussaufnahme das gesamte Biegemoment aufnehmen soll. Der Steg hingegen wird, neben einem über die Höhe konstanten Schubfluss, auch durch die aufgeprägte Deformation der Gurte beansprucht. Das orthotrope Werkstoffverhalten des Laminats, sowie die Festigkeitseigenschaften bei verschiedenen Beanspruchungen, werden allein durch die "charakteristischen K-Werte" [VDI70] berücksichtigt. Diese wurden in Untersuchungen an GFK-Proben für Rovings und Gewebe ermittelt und tabelliert [VDI70]. Auf diese Weise erlauben die Berechnungen der Richtlinie keine Aussagen über resultierende Versagensformen in einzelnen Schichten. Die vorangestellte Auslegung der Gurte ist in dieser Form nicht Teil der Richtlinie. Um die Anforderungen an die Steifigkeit der Tragfläche zu erfüllen, ist die Analyse der Flächenträgheitsmomente jedoch unumgänglich. Zusätzlich sei angemerkt, dass kapitelübergreifend die gesamte Auslegung nur an ausgewählten und speziell gekennzeichneten Stellen Sicherheitsfaktoren ungleich eins berücksichtigt. Grund dafür ist die Annahme, dass in den bereitgestellten Materialkennwerten ausreichende Sicherheiten verrechnet worden sind. Die Vorauslegung hat den Anspruch, die Grundlagen für die aufbauende Berechnung mithilfe eines Laminatrechners zu legen.

4.2.2 Dimensionierung der Gurte mit rechteckigen Querschnitten

Im ersten Auslegungsschritt der schubstarren Gurte wird die Einhaltung der Anforderungen an die Steifigkeit betrachtet. Die in der Balkenberechnung ermittelte Biegesteifigkeit $EI_x = 962,552 \text{ Nm}^2$, die erforderlich ist, damit bei einer Kraft $F_{\text{prüf}} = 100 \text{ N}$ die Flügel spitze eine Absenkung von $w_{j=1,1} = 20 \text{ mm}$ erfährt, muss, wegen oben genannter Annahme, allein durch die Gurte aufgebracht werden. Im Sinne der kraftflussgerechten Gestaltung sollen die Glasfasern unidirektional in Längsrichtung des Gurtes angeordnet werden. Die Bezeichnungen der Längenangaben des Holms orientieren sich an Abbildung 4.4 .

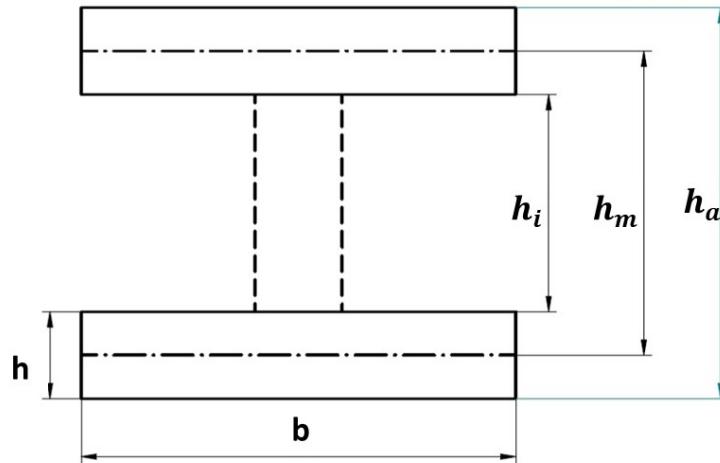


Abbildung 4.4: Bezeichnungen des I-Holms

Die Gurtquerschnitte werden zur Bestimmung der notwendigen Lagenanzahl als rechteckig angenommen, erst in einem späteren Schritt soll die Form dem vorgegebenen Hautprofil angepasst werden. Die Maße sind über die gesamte Länge des Holms in y-Richtung als konstant anzusehen.

Zur Bestimmung des Flächenträgheitsmoments I_x wird der E-Modul in Längsrichtung der Fasern gemäß der Mischungsregel nach [Sch05] berechnet.

$$E_{11} = \varphi \cdot E_{f,11} + (1 - \varphi) \cdot E_M \quad (4.39)$$

Mit den gegebenen Materialkennwerten $E_{f,11} = 74000 \text{ MPa}$, $E_M = 3300 \text{ MPa}$ und $\varphi = 0,4$ bestimmt sich $E_{11} = 31580 \text{ MPa}$. Damit ergibt sich ein benötigtes Flächenträgheitsmoment von

$$I_{x,min} = \frac{962,552 \text{ Nm}^2}{31580 \cdot 10^6 \text{ Pa}} = 3,0479 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad (4.40)$$

Das Flächenträgheitsmoment der Gurte bestimmt sich aus den Flächenträgheitsmomenten der beiden Rechteckquerschnitte und ihren zugehörigen Steiner-Anteilen, die aus der Verschiebung der Gurte um jeweils $\frac{h_m}{2}$ in z-Richtung resultieren. Da die Gurtdicke noch

nicht bekannt ist, wird auf die Annahme der Gurte als "punktformige Flächen" [Hor20c] verzichtet und der Eigenanteil mit betrachtet.

$$I_x = 2 \cdot \left(\frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h_m}{2} \right)^2 \right) \quad (4.41)$$

Es wird nach einer Kombination aus Gurtbreite b und Gurthöhe h gesucht, die die Anforderungen an das Flächenträgheitsmoment erfüllt, aber dennoch zu einer möglichst geringen Gurtquerschnittsfläche und damit zu einer möglichst geringen Masse der Gurte führt. Um die Steiner-Anteile der Gurte zu maximieren, sollen die Gurte in einem möglichst großen Abstand zur neutralen Faser angeordnet werden. Gemäß der gegebenen technischen Zeichnung der Profilkontur, lässt sich das Profil von einem Rechteck der Höhe 37,5mm umrahmen. Dies entspricht jedoch nicht der Profildicke, da die Punkte mit dem größten Abstand zur Profilsehne auf der Ober- und Unterseite bei verschiedenen Flügeltiefen vorliegen. Zusätzlich muss oberhalb und unterhalb der Gurte ein Freiraum für die umliegenden Haut berücksichtigt werden. Deshalb wird die gesamte Gurthöhe auf $h_a = 36\text{mm}$ abgeschätzt. Die dadurch begrenzte Anzahl der Lagen in der Haut wird im Kapitel 7.1 weiter erläutert.

Die folgende Übersicht enthält Werte der Gurtquerschnittsfläche bei verschiedenen Kombinationen von b und h , die zum erforderlichen gesamten Flächenträgheitsmoment von $I_{x,min} = 3,0479 \cdot 10^{-8}\text{m}^4$ führen.

h	b	$2 \cdot b \cdot h$
1mm	38,3mm	76,6mm ²
1,25mm	31,1mm	77,7mm ²
1,5mm	26,3mm	78,8mm ²
2,25mm	18,3mm	82,3mm ²

Den Daten ist zu entnehmen, dass breite Gurte geringer Dicke bei gleichem Flächenträgheitsmoment geringere Querschnittsflächen aufweisen. Aus diesem Grund sollen die Gurte möglichst breit gewählt werden. Die Breite der Gurte ist durch die vorgegebene Konstruktion der Platte zur Aufnahme der Tragfläche am Teststand begrenzt. Die vorgesehene Aussparung weist eine Breite von 30mm auf. Für die weitere Berechnung soll $b = 28\text{mm}$ gelten. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass die Fertigung des Holms im Bereich des Modellbaus von Hand erfolgen würde, womit nur grobe Toleranzen einhaltbar sind. Mithilfe eines Solvers bestimmt sich aus dem Flächenträgheitsmoment und

der Gurtbreite die Gurthöhe $h = 1,866\text{mm}$.

Im nächsten Schritt wird die zu stapelnde Lagenanzahl ermittelt. Als vorwiegend unidirektionales Material steht das Glasfasergewebe Interglas 92145 mit einem Flächengewicht von $220 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$ zur Verfügung. Laut Produktdatenblatt [Stö14] handelt es sich um eine Leinwandbindung, die eine nicht angegebene, da sehr kleine, Zugfestigkeit in Schussrichtung aufweist. Folgend wird das Gewebe als unidirektional behandelt. Nach [Sch05] berechnet sich die Lagenanzahl n für eine Dicke des Verbundes t_{soll} zu:

$$n = t_{soll} \cdot \frac{\varphi \cdot \rho_f}{\left(\frac{m_f}{L \cdot b}\right)}. \quad (4.42)$$

Mit $\left(\frac{m_f}{L \cdot b}\right) = 220 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$, $t_{soll} = h$ und $\rho_f = 2550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ergibt sich $n = 8,653$. Es sind also 9 Lagen des Gewebes 92145 für jeden Gurt vorzusehen. Die sich aus 9 Lagen ergebende Gurthöhe kann durch Umstellen von Gleichung ?? zu $\tilde{h} = 1,941\text{mm}$ bestimmt werden. Für den zunächst angenommenen Fall von Gurten mit rechteckigen Querschnitten ist die Auslegung zur Einhaltung der Anforderungen an die Steifigkeit damit abgeschlossen.

4.2.3 Nachrechnung der angepassten Gurte

Die Modellierung der Haut und der Holmgurte in einem CAD-Programm zeigt, dass die Gurte mit den berechneten Bemaßungen nicht innerhalb des Profils mit einer vorläufigen, als $0,75\text{mm}$ dick angenommenen Haut liegen. Die Anpassung der Konstruktion der Gurte erfolgt so, dass die Gurtaußenseite an der Innenseite der Haut anliegt (vgl. Abschnitt 7.1.1). Die Gesamtbreite von 28mm , sowie die Gurtdicke h bleiben dabei erhalten. Die Gesamthöhe h_a muss auf $\tilde{h}_a = 35,8\text{mm}$ leicht verringert werden. Abbildung 4.5 veranschaulicht die gekrümmte Form des oberen Holmgurtes.

Die angepasste Krümmung der Gurte führt zu einem veränderten Flächenträgheitsmoment \tilde{I}_x des Balkens, dass mithilfe des CAD-Programms zu $\tilde{I}_x = 3,075406 \cdot 10^{-8}\text{m}^4$ bestimmt werden kann. Da

$$\tilde{I}_x = 3,075406 \cdot 10^{-8}\text{m}^4 > I_{x,min} = 3,0479 \cdot 10^{-8}\text{m}^4 \quad (4.43)$$

gilt, genügen auch die veränderten Gurte der Steifigkeitsanforderung.

Abschließend wird gezeigt, dass die Festigkeit der Gurte einer Belastung der Flügel-

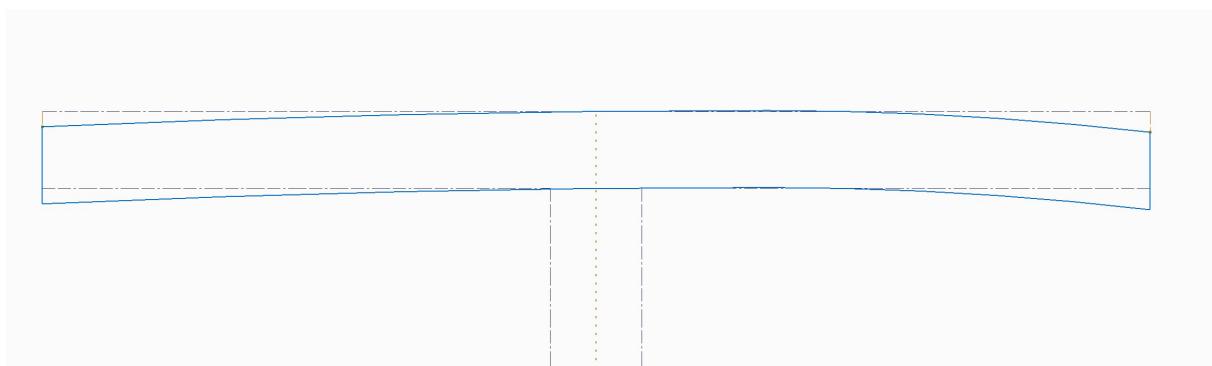


Abbildung 4.5: Angepasste gekrümmte Gurtkontur

spitze durch $F_{pruef} = 500N$ standhält. Die aus der Biegung resultierenden und betragsmäßig gleichen Zug- und Druckspannungen werden dazu mit den gegebenen UD-Festigkeitskennwerten des Handlaminats verglichen. Die Resultate der Balkenberechnungen zeigen, dass das maximale Biegemoment im Holm an Punkt C auftritt und $M_b = 500N \cdot 0,773m = 386,5Nm$ beträgt. In den Randfasern der Gurte resultieren Spannungen, die sich gemäß [Hor20c] zu

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot \tilde{h}_a}{\tilde{I}_x \cdot 2} = 224,96 MPa \quad (4.44)$$

berechnen. Da

$$\sigma_b < R_{||}^{(+)} = 597,9 MPa < |R_{||}^{(-)}| = 650,0 MPa \quad (4.45)$$

gilt, ist der Festigkeitsnachweis erbracht. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Gurte bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500N$ nicht versagen.

4.2.4 Bestimmung der Lagenanzahl des Steges

Bei der Auslegung des Steges muss beachtet werden, dass der Steg sowohl durch Schubkräfte als auch durch Normalkräfte senkrecht und parallel zu den Gurten Belastungen erfährt. Die Dehnungen Gurtinnenseiten werden dem Steg aufgeprägt, da beide Bauteile stoffschlüssig miteinander verbunden sind. Anders als in der VDI 2013 wird jedoch nicht die Bruchdehnung in der Gurtmittelebene betrachtet, sondern die Dehnungen der Innenseiten bei einer Prüfkraft von 500N. So soll die Dimensionierung des Steges auf die Anforderungen an die Festigkeit angepasst werden, um eine Überdimensionierung zu

vermeiden. Im Folgenden bezeichnen n_ϵ , n_A und q_s Kraftflüsse, n , ohne einen Index, die Lagenanzahl und \bar{q} das Flächengewicht (in Newton) des trockenen Gewebes.

Die größte Längsdehnung der Gurte tritt an der Stelle C auf, da dort das größte Biegemoment wirkt. Sie lässt sich für die Innenseiten der Gurte nach [Ost18] durch

$$\epsilon_{Gurt} = \frac{\sigma_{innen}}{E_{11}} = \frac{\frac{F_{pruef} \cdot l_3 \cdot h_i}{\bar{I}_x \cdot 2}}{E_{11}} \quad (4.46)$$

zu $\epsilon_{Gurt} = 6,351 \cdot 10^{-3}$ berechnen. Auf der Zugseite ist die Dehnung positiv, auf der Druckseite negativ. Die dem Steg aufgeprägte Dehnung führt in Längsrichtung des Steges zu einem Normalkraftfluss, der sich nach VDI 2013 mit

$$n_\epsilon = n \cdot \bar{q} \cdot K_{E\#} \cdot \epsilon_{Gurt} \quad (4.47)$$

ermitteln lässt. $K_{E\#}$ ist die Dehnsteifigkeit, ein verallgemeinerter Dimensionierungskennwert, der Tafel 3 der VDI 2013 zu $K_{E\#} = 1150 \cdot 10^3 m$ entnommen wird. Die Dehnsteifigkeit bezieht die Lagen-Elastizitätsgröße $\bar{E}_{\#} = \bar{\sigma}/\epsilon$, die unter einem Winkel von 45° zur Fadenrichtung den Zusammenhang von Spannungen und Dehnungen in einer Laminatschicht beschreibt, auf das Flächengewicht \bar{q} . Es ist zu beachten, dass in der VDI mit veralteten Einheiten, wie dem Kilopond, gerechnet wird. Flächengewichte \bar{q} sind durch Multiplikation der auf die Fläche bezogenen Masse $\frac{m_f}{L \cdot b}$ mit der Norm des Erdbeschleunigungsvektors \vec{g} zu ermitteln. Zur Berechnung von Hand wurden alle Kennwerte auf die SI-Einheiten zurückgeführt und liegen in dieser Form vor.

Zur kraftflussgerechten Gestaltung des Steges werden die Gewebelagen unter einem Winkel von 45° zu den Holmgurten angeordnet. Deshalb muss die Belastung parallel zu den Faserrichtungen mithilfe einer Transformationsformel berechnet werden.

$$n_{\epsilon\parallel} = n_\epsilon \cdot \cos^2(45^\circ) = n_\epsilon \cdot 0,5 \quad (4.48)$$

Die Normalkräfte in Längsrichtung an den Gurten bilden im Allgemeinen einen Winkel $\neq 180^\circ$ zueinander, da der Holm eine Absenkung erfährt. Daraus resultiert eine Druckkraft auf den Steg, die senkrecht zu den Gurten steht und in [VDI70] als Abtriebskraft bezeichnet wird. Abbildung 4.6 veranschaulicht die Entstehung der Abtriebskraft F_A . Der

resultierende Kraftfluss berechnet sich zu:

$$n_A = \frac{2 \cdot F_{pruef} \cdot l_3 \cdot \epsilon_{Gurt}}{h_m^2} \quad (4.49)$$

Mit der oben genannten Transformationsformel ergibt sich die Belastung in Faserrichtung.

$$n_{A||} = n_A \cdot \cos^2(45^\circ) \quad (4.50)$$

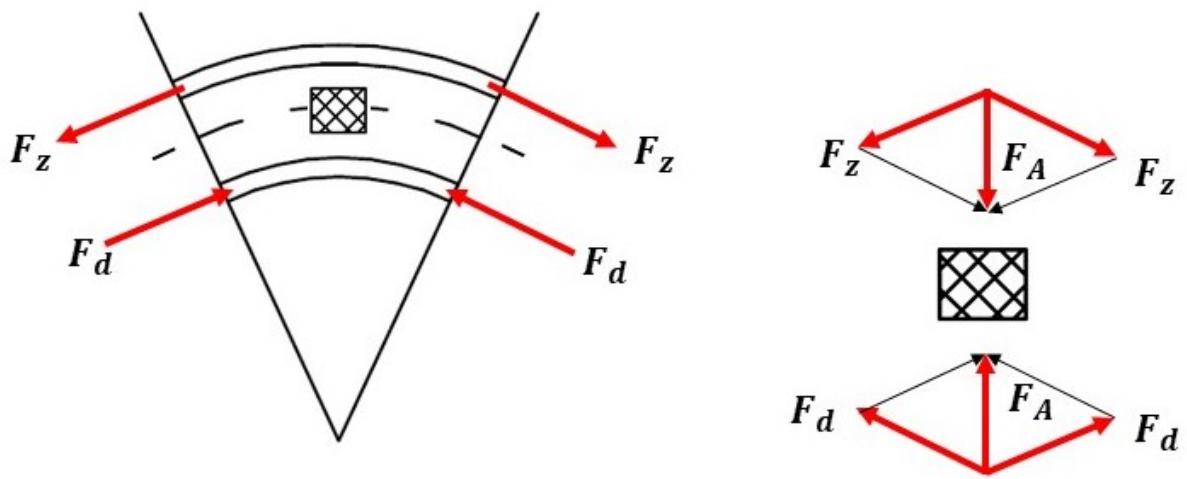


Abbildung 4.6: Prinzip der Druckkraft auf den Steg

Darüber hinaus erfährt der Steg einen Schubkraftfluss durch die Querkraft. Wegen der vernachlässigbaren Längskraftaufnahme des Steges im Vergleich zu den Gurten, kann der Schubfluss über die Höhe des Steges als konstant angenommen werden. Die VDI-Richtlinie orientiert sich hier an den Idealisierungen der Schubfeldtheorie, wie sie im entsprechenden Kapitel in [Hor20c] ausgeführt wird. Es muss berücksichtigt werden, dass die Modellierung des Holmes als Balken, der an zwei Punkten gelagert ist und durch die Querkraftbolzen eine weitere Kraft erfährt, zu einem anderen Querkraftverlauf führt als dem konstanten, der in der Richtlinie für den Kragbalken angenommen wurde. Den Berechnungen des Holmes als Biegebalken kann für eine Kraft $F_{pruef} = 500\text{N}$ eine maximale Querkraft von $Q_I = 5085,5\text{N}$ im Bereich *I* und eine betragsmäßig maximale Querkraft von $Q_{III} = 500\text{N}$ im Bereich *III* entnommen werden. Mit dem Ziel, im langen Bereich *III* Gewicht einzusparen, ist es vorteilhaft diesen Bereich geringer Querkraft getrennt von dem höher beanspruchten Bereich *I* auszulegen. Der resultierende Schubfluss berechnet sich mithilfe

der folgenden Formel:

$$q_{s\parallel} = q_s = \frac{Q}{h_i} \quad (4.51)$$

Der gesamte Kraftfluss, der durch den Steg aufgenommen werden muss, ergibt sich dann aus der Überlagerung der drei Kraftflüsse $q_{s\parallel}, n_{A\parallel}, n_{\epsilon\parallel}$.

$$n \cdot \bar{q} \cdot K_{\sigma d} \cdot k_{\parallel} = q_{s\parallel} + n_{A\parallel} + n_{\epsilon\parallel} \quad (4.52)$$

Die Tragfähigkeit einer Schicht des Verbundes unter Druckbeanspruchung wird durch $K_{\sigma d}$ charakterisiert und kann ebenfalls Tafel 3 der VDI entnommen werden. An dieser Stelle geht die Richtlinie davon aus, dass die Druckfestigkeit des Laminats im Allgemeinen geringer ist als die Zugfestigkeit. Im vorliegenden Fall zeigen die gegebenen Materialkennwerte des Laminats, dass die Druckfestigkeiten R_{\parallel}^- und R_{\perp}^- deutlich größer als die Zugfestigkeiten R_{\parallel}^+ , bzw. R_{\perp}^+ sind. Dies begründet die Vermutung, dass die vorgestellten Dimensionierungswerte nur für die Vorauslegung auf den vorliegenden Fall übertragbar sind. Da ein Teil der Schubbeanspruchung durch die Matrix geleitet wird, besteht die Gefahr eines Zwischenfaserbruches. VDI 2013 schlägt deshalb die Verwendung von $K_{\sigma d} = 30 * 10^3 m$ vor. Zusätzlich muss der Anteil der Glasmengen in Kette und Schuß durch den Faktor k_{\parallel} berücksichtigt werden. Das zur Verfügung stehende Gewebe Interglas 90070 hat annähernd gleiche Fadenanzahlen und Garnarten in Kette- und Schußrichtung ([Stö15]), damit ist $k_{\parallel} = 0,5$. Die Anzahl der notwendigen Gewebelagen n im Steg lässt sich nun durch Umstellen der Gleichungen und Einsetzen der bekannten Werte ermitteln:

$$n = \frac{\frac{2 \cdot F_{Pruef} \cdot l_3 \cdot \epsilon_{Gurt}}{h_m^2 \cdot 2} + \frac{Q}{h_i}}{\bar{q} \cdot (k_{\parallel} \cdot K_{\sigma d} - K_{E\#} \cdot \epsilon_{Gurt} \cdot 0,5)} \quad (4.53)$$

Damit ergibt sich die Lagenanzahl bei einer Prüfkraft $F_{pruef} = 500N$ von $n(500N) = 1,99$ für den Bereich 3 und $n(5085,5N) = 18,13$ für den Bereich 1. Bereich 2 erfährt eine Querkraft von $Q_2 = 0N$. Da dieser Bereich sehr kurz ist, wird er so wie Bereich 1 belegt. Um einen symmetrischen Lagenaufbau im Falle einer Sandwichkonstruktion zu ermöglichen, sind also 2 Lagen für den Bereich 3 und 20 Lagen für die Bereiche 1 und 2 vorzusehen.

Es ist zu betonen, dass diese Lagenanzahlen maßgeblich durch die Annahmen der Dimensionierungskennwerte $K_{E\#}$ und $K_{\sigma d}$ beeinflusst werden. Da sie als nur beschränkt gültig

für den vorliegenden Fall angenommen werden, bedarf es einer aufbauenden Berechnung, die unter anderem die Sicherheiten gegen Zwischenfaserbruch bestimmen kann. Im Kapitel 4.3 wird die hier ermittelte Lagenanzahl mit tatsächlichen Laminatkennwerten und einem Laminatrechner überprüft und angepasst.

4.3 Auslegung des Holms nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)

4.3.1 Beispielrechnung nach Klassischer Laminattheorie

Nachdem im Kapitel 3.4 eine Einführung in die klassische Laminattheorie gegeben wurde, wird im Folgenden eine Beispiel-Berechnung eines Lagenaufbaus vorgestellt. Diese beginnt mit den Materialdaten der verwendeten Faser und Matrix und führt bis zu den resultierenden Ingenieurskonstanten. Als repräsentatives Beispiel wird ein Laminat aus zwei Lagen Interglas 92145 mit einer Faserwinkeldifferenz von $\Delta\alpha = 90^{\circ}$ gewählt. Wie zuvor wird auch hier der Faservolumengehalt $\varphi = 40\%$ genutzt, sodass die Gesamtdicke sich zu $t = 2 \cdot 0,216mm = 0,432mm$ nach den Formel 4.42 ergibt [VDI70][Sch05].

Anhand der Aufgabenstellung sind Materialdaten der Fasern und der Matrix gegeben, die nachfolgend benötigt werden:

Fasermaterial	Matrixmaterial
ρ_f	$2,55 \frac{g}{cm^3}$
$E_{f,\parallel}$	$74000 MPa$
$E_{f,\perp\perp}$	$74000 MPa$
$G_{f,\parallel\perp}$	$30800 MPa$
$\nu_{f,\perp\parallel}$	$0,2$
	ρ_m
	$1,18 \frac{g}{cm^3}$
	E_m
	$3300 MPa$
	-
	-
	ν_m
	$0,35$

Da es sich dabei nur um rein isotrope Materialien handelt, gelten $\nu_{f,\perp\parallel} = \nu_{f,\parallel\perp}$ und $G_{f,\parallel\perp} = G_{f,\perp\parallel}$ [Hor20c]. Der Schubmodul der Matrix berechnet sich zu

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} = 1222 MPa \quad (4.54)$$

Nun werden anhand der Mischungsregel, jedoch ohne eine Beachtung von Querkontraktionsbehinderungen der Matrix durch die Fasern, Kennwerte einer einzelnen Lage Interglas 92145 bestimmt [Sch05]:

$$\rho = \rho_F \cdot \varphi + \rho_M \cdot (1 - \varphi) = 1,728 \frac{g}{cm^3} \quad (4.55)$$

$$E_{\parallel} = E_{f,\parallel} \cdot \varphi + E_m \cdot (1 - \varphi) = 31580 MPa \quad (4.56)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_{f,\perp} \cdot E_m}{E_m \cdot \varphi + E_{f,\perp} \cdot (1 - \varphi)} = 5341 MPa \quad (4.57)$$

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_{f,\perp\parallel} \cdot \varphi + \nu_m \cdot (1 - \varphi) = 0,29 \quad (4.58)$$

$$\nu_{\parallel\perp} = \nu_{\perp\parallel} \cdot \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = 0,049 \quad (4.59)$$

Mit diesen Moduln und Querkontraktionszahlen wird im weiteren die Steifigkeitsmatrix des gesamten Laminats, transformiert in Koordinatensystem-Hauptrichtungen x und y , bestimmt. Begonnen wird mit der Steifigkeitsmatrix einer einzelnen Gewebelage, bezogen wird sich auf dessen Faserrichtung. Damit kann

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\epsilon} \quad (4.60)$$

aufgestellt werden. Bei der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{Q}}$ handelt es sich um Scheiben-Steifigkeiten [Sch05].

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\parallel\perp}\cdot E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel}\cdot E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\cdot\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32035 & 1570 & 0 \\ 1570 & 5418 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa] \quad (4.61)$$

Bevor die einzelnen Lagen in ihrer Wirkung zusammengefasst werden können, müssen sie der Ausrichtung entsprechend um den Faserwinkel rotiert werden:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ 0,5 \cdot \sin 2\alpha & -0,5 \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Somit lauten die neuen Steifigkeitsmatrizen nach

$$\overline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (4.63)$$

$$\underline{\underline{Q}}_{k=1} = \begin{bmatrix} 32035 & 1570 & 0 \\ 1570 & 5418 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa], \alpha = 0 \quad (4.64)$$

$$\underline{\underline{Q}}_{k=2} = \begin{bmatrix} 5418 & 1570 & 0 \\ 1570 & 32035 & 0 \\ 0 & 0 & 1985 \end{bmatrix} [MPa], \alpha = 90 \quad (4.65)$$

Mittels dessen einzelnen Werten $\overline{Q}_{ij,k}$ lassen sich der Scheiben-, der Koppel- und der Plattenquadrant des Mehrschichtverbundes berechnen. In diesem können die Berechnungen teilweise vereinfacht werden, da die beiden Lagendicken t_k dem Betrag der Abstände $|z_k|$ entspricht [Sch05].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^2 \overline{Q}_{ij,k} \cdot t_k \quad (4.66)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 8090,1 & 678,8 & 0 \\ 678,8 & 8090,1 & 0 \\ 0 & 0 & 857,3 \end{bmatrix} \left[\frac{N}{mm} \right] \quad (4.67)$$

$$B_{ij} = \cdot \sum_{k=1}^2 \overline{Q}_{ij,k} \cdot t_k \cdot \left(z_k - \frac{t_k}{2} \right) \quad (4.68)$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 620,9 & 0 & 0 \\ 0 & -620,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [N] \quad (4.69)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^2 \overline{Q}_{ij,k} \cdot \left(\frac{t_k^3}{12} + t_k \left(z_k - \frac{t_k}{2} \right)^2 \right) \quad (4.70)$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 125,8 & 10,6 & 0 \\ 10,6 & 125,8 & 0 \\ 0 & 0 & 13,3 \end{bmatrix} [Nm\cdot mm] \quad (4.71)$$

Aus diesen Matrizen lässt sich nun das *Elastizitätsgesetz des kombinierten Scheiben-Plattenelements* anwenden [Sch05]:

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Damit kann für jede einzelne Lage das Festigkeitskriterium nach Puck überprüft werden. Eine Fortsetzung der Beispielrechnung mittels dieses Festigkeitskriteriums wird ab dieser Stelle nicht mehr durchgeführt, da sie bis auf wenige Ausnahmen nicht mehr analytisch zu lösen ist [Sch05].

Mit der Inversen der Scheibenmatrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ werden abschließend die Ingenieurskonstanten des Mehrschichtverbundes ohne Querkontraktionsbehinderung ermittelt [Sch05]:

$$\hat{E}_x = \frac{1}{\underline{\underline{A}}_{11}^{-1} \cdot t} = 18727 MPa \quad (4.73)$$

$$\hat{E}_y = \frac{1}{\underline{\underline{A}}_{22}^{-1} \cdot t} = 18727 MPa \quad (4.74)$$

$$\hat{G}_{xy} = \frac{1}{\underline{\underline{A}}_{66}^{-1} \cdot t} = 1984,5 MPa \quad (4.75)$$

$$\hat{\nu}_{xy} = -\frac{\underline{\underline{A}}_{12}^{-1}}{\underline{\underline{A}}_{22}^{-1}} = 0,084 \quad (4.76)$$

$$\hat{\nu}_{yx} = -\frac{\underline{\underline{A}}_{12}^{-1}}{\underline{\underline{A}}_{11}^{-1}} = 0,084 \quad (4.77)$$

4.3.2 eLamX²

eLamX² ist ein Laminat-Berechnungsprogramm der TU Dresden. Es kann anhand der klassischen Laminattheorie mit unterschiedlichen Versagenskriterien berechnen, inwiefern ein gewählter Lagenaufbau den Festigkeitskriterien gerecht wird. Zusätzlich sind weitere Funktionen, wie zum Beispiel Beulberechnungen, Optimierungen etc. nutzbar und andere Einflüsse, z.B. Temperatureinflüsse anwendbar, jedoch für diese Auslegung irrelevant [Hau21][Sch05].

Auch hier wurden vorerst die gegebenen Materialeigenschaften der Aufgabenstellung als Fasermaterial, Matrixmaterial und UD-Festigkeitskennwerte definiert (Anmerkung: In *eLamX²* wird bei der Indizierung die Notierung „Ursache - Wirkung“ statt „Wirkung - Ursache“ verwendet). [Hau21]

	Fasermaterial	Matrixmaterial	UD-Festigkeitskennwerte
ρ_f	$2,55 \frac{g}{cm^3}$	ρ_m	$1,18 \frac{g}{cm^3}$
$E_{f,\parallel}$	$74000 MPa$	E_m	$3300 MPa$
$E_{f,\perp\perp}$	$74000 MPa$		R_{\parallel}^{+}
$G_{f,\parallel\perp}$	$30800 MPa$	G_m	$1222 MPa$
$\nu_{f,\perp\parallel}$	$0,2$	ν_M	$0,35$
			$R_{\parallel\perp}^{+-}$
			$R_{\perp\perp}^{+}$
			$597,9 MPa$
			$650,0 MPa$
			$37,7 MPa$
			$130,0 MPa$
			$37,5 MPa$

Mit einem Faservolumenanteil $\varphi = 0,4$ ergeben sich folgende weitere Materialeigenschaften:

ρ	$1,728 \frac{g}{cm^3}$
E_{\parallel}	$31580 MPa$
E_{\perp}	$5341,2 MPa$
$\nu_{\parallel\perp}$	$0,29$
$G_{\parallel\perp}$	$1984,5 MPa$

Anschließend werden die nach Kapitel 4.2 berechneten Laminate bzw. Schichtverbunde aus mehreren Gewebe-Lagen zusammengesetzt. Eine bidirektionale Gewebelage wird dabei durch zwei einzelne Materiallagen mit einem Winkel von 90° zueinander simuliert, sodass sich die doppelte Anzahl des Materials gegenüber der Gewebeanzahl ergibt. Für die Holmgurte ergibt sich ein Lagenaufbau nach Abbildung 11.1 und für den dünnen Steg nach Abbildung 11.2. Für den dicken Steg ergibt sich der gleiche Aufbau wie bei dem dünnen Steg, allerdings mit 24 Materiallagen (siehe Abb. 11.3). Weshalb sich die Anzahl der Gewebelagen gegenüber der Auslegung nach VDI 2013 unterscheidet, wird im Weiteren beschrieben.

Nun werden die nach VDI 2013 im Kapitel 4.2 errechneten Normalkraft- und Schubflüsse bzw. Dehnungen eingegeben, sodass nun die Sicherheiten nach den Versagenskriterien von Puck ermittelt werden können. Dabei handelt es sich um leicht abweichende Flüsse bzw. Dehnungen gegenüber der Realität. Diese Werte stammen aus der Auslegung nach VDI

2013, in der teilweise die Lagenanzahl, wie bereits beschrieben, geringer ist. Zu beachten ist außerdem, dass die Flüsse und Dehnungen auf das allgemeine Koordinatensystem und nicht auf die der einzelnen Lagen bezogen werden. Es wird automatisch die niedrigste Sicherheit mit der jeweiligen Versagensart ausgegeben. Auch muss berücksichtigt werden, dass für die komplette Überprüfung der Auslegung ebenfalls ϵ_x negativ angenommen werden muss, um den gegenüberliegenden Gurt mit Druckbelastungen zu betrachten. Dabei ergeben sich jedoch stets höhere Sicherheiten [Hau21][Sch05].

Um immer eine Sicherheit von $j > 1$ zu garantieren, müssen im Steg nachträglich noch weitere Lagen zu der ursprünglich berechneten Anzahl hinzugefügt werden, sodass sich eine Gesamt-Lagenanzahl von 4 und 24 statt 2 und 20 ergibt. Diese Abweichung kann u.a. daran liegen, dass die VDI 2013 mit Konstanten rechnet, die nur beispielhaft an einem Gewebe ermittelt wurden und somit nicht exakt für die gegebenen Gewebe der Aufgabenstellung gelten können. Außerdem kann der Einfluss, dass lediglich mit der einfachen Mischungsregel ohne Querkontraktionsbehinderung der Matrix gerechnet wurde, eine leichte Abweichung gegenüber anderen Berechnungsmethoden verursachen. Dargestellt sind die Rechnungen in Abb. 11.5, Abb. 11.6 und Abb. 11.7 [Sch05][VDI70].

Als nächstes können die Ingenieurskonstanten (E-Moduln des gesamten Laminats in Hauptachsenrichtungen) ermittelt werden, welche für die spätere Stabilitätsabschätzung benötigt werden (siehe Abb. 11.9, Abb. 11.11 und Abb. 11.10).

Der Übersichtlichkeit halber werden die Abbildungen im Kapitel 11.3 dargestellt.

4.4 Beulabschätzung des Holms (T.B.)

4.4.1 Einführung in Stabilitäts-Überprüfungen

Neben der Festigkeit und Steifigkeit ist es bei einer Konstruktion dünnwandiger Bauteile notwendig, sie auf Versagen durch mangelnde statische Stabilität zu überprüfen. Stabilität bedeutet, dass ein System bestimmte maximale Lasten erträgt, es bei schon kleinen Erhöhungen jedoch zu drastischen Systemänderungen, wie z.B. in der Tragfähigkeit, kommen wird. Bemerkbar ist dieses auch in Veränderungen der Bauteilgeometrie [Ost18].

Typische Versagensarten aufgrund zu hoher Druckbeanspruchungen bilden dabei das Knicken (eindimensionale Formänderung) und das Beulen (zweidimensionale Formänderung). Bei Letzterem haben auch Schubbeanspruchungen Einfluss darauf. Dabei entstehen wellenförmige Ausprägungen des Bauteils (in entsprechend vielen Dimensionen). Sie können mit unendlich vielen Eigenwerten beliebig viele Ausprägungen, einer Sinus-Funktion mit unterschiedlichen Frequenzen entsprechend, im Bauteil bilden. Die kritische Last wird für eine einfache Ausprägung definiert, da dieser Fall zuerst eintreten wird. Die Verformungen können auch plastisch auftreten, sodass nach Entlastung des Bauteils irreparable Schäden bleiben. Inwiefern ein Bauteil im geknickten bzw. gebeulten Zustand seine Eigenschaften beibehält, lässt sich kaum vorhersagen [Ost18].

Die Beulsicherheit der Tragflügel-Bauteile erfolgt nach Hertel [Her60]. Dabei handelt es sich um Theorien isotroper Stoffe. Dennoch werden sie hier für FVK angewendet, da im Orthotropie-Achsensystem gleiche Verhaltensweisen wie isotroper Stoffe gelten. Die Orthotropie ist in nachfolgenden Bauteilen hinreichend durch gewählte Belastungsrichtungen und Lagenaufbauten gegeben. Diese Annahme hat sich bei bisherigen Flugzeug-Konstruktionen und deren Zulassungen bewährt [Ron99].

In der Hautebene eines dünnwandigen Bauteils wird zwischen beulkritischen Spannungen unterschieden, die aus reiner Biegung, Druck und Biegung, oder reinem Schub (Indizes $b/d/s$) resultieren. Sofern Normal- und Schubspannungen gleichzeitig vorliegen, kann lediglich eine kombinierte Belastung als über- oder unterkritisch eingestuft werden. Die Spannungen und Beulausprägungen sind von folgenden Parametern abhängig [Her60]:

- Seitenverhältnis $\frac{a}{b}$. Für einen Betrag gleich Null wird das Hautfeld „Streifen“ genannt.

- Randbedingungen an den Rändern des Hautfelds. Ränder können frei (alle Freiheitsgrade), gestützt (rotatorischer Freiheitsgrade) und fest (keine Freiheitsgrade) gelagert werden.
- relative Hautstärke $\frac{s}{b}$.
- Elastizitätsmodul E .

Dabei stehen a und b für die lange bzw. die kurze Seite des Hautfelds und s für dessen Hautstärke. Mit dem Seitenverhältnis und den Randbedingungen ergibt sich ein Beulfaktor k , der, je nach vorherrschender Beanspruchung, in den Abbildungen 11.4, 11.4 und 11.4 ermittelt wird.

Die beulkritischen Normal- und Schubspannungen lassen sich nach

$$\sigma_{k\text{rit}} = k \cdot E \cdot \left(\frac{s}{b}\right)^2 \quad (4.78)$$

$$\tau_{k\text{rit}} = k \cdot E \cdot \left(\frac{s}{b}\right)^2 \quad (4.79)$$

berechnen. Die Sicherheit gegen Beulen ergibt sich aus dem Verhältnis zur tatsächlich anliegenden Spannung σ_{max} bzw. τ_{max} . Falls beide Spannungstypen gleichzeitig anliegen sollten, kann mit der Gleichung

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{k\text{rit}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k\text{rit}}}\right)^2 = 1^2 = j^2 \quad (4.80)$$

in Abbildung 11.4 herausgefunden werden, ob es sich um einen überkritischen Zustand handelt [Her60].

Generell werden Krümmungen und Versteifungen nachfolgend vernachlässigt. Allerdings sind für Sandwich-Bauteile Anpassungen durchzuführen:

Die Dicke d beinhaltet neben den FVK-Lagen die Schaumstoffdicke. Dadurch, dass diese Lagen nun an den Außenseiten konzentriert sind, kann das Trägheitsmoment mit einem Faktor κ bis auf das Dreifache maximal erhöht werden. Dieser wird jedoch wieder minimiert, sofern der Lagenaufbau unsymmetrisch und somit das Dickenverhältnis ungleich eins ist. Exakte Beträge können der Abbildung 11.4 entnommen werden. Die beulkritischen Spannungen berechnen sich somit nach [Her60] zu

$$\sigma_{k\text{rit}} = \kappa \cdot k \cdot E \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 \quad (4.81)$$

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k \cdot E \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 \quad (4.82)$$

4.4.2 Beulsicherheit der Gurte

Für die Auslegung der Holmgurte werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Gurte werden als ebene, unendlich lange Streifen betrachtet.
2. Da die Mitte der Holmgurte in x -Richtung mit dem Holmsteg verklebt ist, kann diese Klebelinie als freie Lagerung gesehen werden. Somit halbiert sich die angenommene Holmgurtbreite.
3. Die äußeren Kanten in x -Richtung sind frei und nicht gelagert.
4. Die äußeren Kanten in y -Richtung werden an den jeweiligen Rippen gestützt.
5. Der Druckgurt wird nur durch Druckspannungen beansprucht. Die Schubspannungen werden durch das hohe Verhältnis von Länge zu Höhe vernachlässigt. Der auf Zug beanspruchte Gurt wird nicht beulen.
6. Als größtmögliche Länge bei höchster Biegespannung wird l_3 bestimmt.

Das Seitenverhältnis beträgt

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{28mm}{2}}{773mm} = 0,018 \approx 0 \quad (4.83)$$

Es ergibt sich:

$$k_d = 0,4 \quad (4.84)$$

und somit die kritische Spannung mit $\hat{E}_{xx} = 31580MPa$, $d = 1,941mm$ und $b = 14mm$:

$$\sigma_{krit,d} = k_d \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 = 242,82MPa \quad (4.85)$$

Im Vergleich zu der tatsächlich maximal auftretenden Randfaser spannung der Gurte (siehe Kapitel 4.2.3) ergibt sich die Sicherheit gegen Beulen zu

$$j_{Gurt} = \frac{\sigma_{krit,d}}{\sigma_b} = \frac{242,81MPa}{224,96MPa} = 1,08 \quad (4.86)$$

4.4.3 Beulsicherheit des Steges

Ebenfalls muss der Holmsteg nach der Auslegung hinsichtlich der Sicherheit gegen Beulen überprüft werden. Folgende Annahmen werden dafür getroffen:

1. Der Steg wird teilweise für einzelne lange Bereiche als nahezu ebener, unendlich langer Streifen betrachtet.
2. Die Verklebung des Steges wird als gestützte gelenkige Lagerung an allen vier Kanten angenommen.
3. Der Steg wird durch Biegung und Schubspannung beansprucht.

Für den Steg müssen alle drei Bereiche der Holmauslegung auf die Beulsicherheit geprüft werden.

Im Folgenden wird die Beulsicherheit des Bereichs I berechnet:

Das Seitenverhältnis ergibt sich zu

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8\text{mm} - 2 \cdot 1,941\text{mm}}{76\text{mm}} = 0,042 \quad (4.87)$$

Dadurch lässt sich mit

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1 \quad (4.88)$$

(symmetrische Spannungsverteilung über Höhe) der Beulfaktor ermitteln zu

$$k_b = 21,8 \quad (4.89)$$

Da das Dickenverhältnis von Steglagen zu Schaumkern sehr klein ausgelegt werden soll, wird sicherheitshalber

$$\kappa = 1 \quad (4.90)$$

definiert. Dadurch ergibt sich die kritische Biegespannung mit $\hat{E}_{xx} = 6639,8\text{MPa}$, $d = 1,882\text{mm}$ und $b = 35,8\text{mm} - 2 \cdot 1,941\text{mm}$ zu

$$\sigma_{krit,B} = \kappa \cdot k_b \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2 = 503,24\text{MPa} \quad (4.91)$$

Mit

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot h_i}{\tilde{I}_x \cdot 2} = \frac{0,773m \cdot 500N \cdot (35,8mm - 2 \cdot 1,941mm)}{2 \cdot 3,075406 \cdot 10^{-8}m^4} = 200,56MPa \quad (4.92)$$

ist das Verhältnis der vorhandenen Biegespannung zur kritischen

$$j_1 = \frac{503,24MPa}{200,56MPa} = 2,512. \quad (4.93)$$

Für den Schub wird der Beulfaktor zu

$$k_s = 5,5 \quad (4.94)$$

Damit wird die kritische Schubspannung mit $\hat{G}_{xy} = 8577,8MPa$ zu

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k_s \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left(\frac{1,882mm}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 = 164,02MPa \quad (4.95)$$

Die tatsächlich auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{h_i \cdot s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5085,5N}{1,882mm \cdot (35,8mm - 2 \cdot 1,941mm)} = 126,99MPa \quad (4.96)$$

sodass das Verhältnis der vorhandenen Schubspannung zur kritischen

$$j_2 = \frac{164,02MPa}{126,99MPa} = 1,292 \quad (4.97)$$

ergibt. Die Gesamtsicherheit beträgt

$$j = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{j_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{j_2}\right)^2}} = 1,148 \quad (4.98)$$

Somit kann rückgeschlossen werden, dass dieser Bereich des Holmsteges schon ohne zusätzlichen Schaumkern sicher gegen Beulen ist.

Nun wird der Bereich *II* betrachtet:

Da keine innere Querkraft herrscht, kann die Sicherheit durch Biegung außer Acht gelassen werden. Die Sicherheit gegen Beulen ist demnach nur von dem Schub abhängig. Das

Seitenverhältnis beträgt

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm}{37mm} = 0,863 \quad (4.99)$$

Damit ergibt sich der Beulfaktor zu

$$k_s = 6,8 \quad (4.100)$$

und weiterhin wird mit

$$\kappa = 1 \quad (4.101)$$

gerechnet. Damit lässt sich

$$\tau_{krit} = k_s \cdot \kappa \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left(\frac{1,882mm}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 = 202,79 MPa \quad (4.102)$$

berechnen. Mit dem gleichen maximalen Schub

$$\tau = 126,99 MPa \quad (4.103)$$

wie in Bereich I kann somit die Sicherheit zu

$$j = \frac{202,79 MPa}{126,99 MPa} = 1,59 \quad (4.104)$$

bestimmt werden. Auch dieser Stegbereich *II* ist ohne Schaumstoff gegen Beulen sicher.

Abschließend wird der verbliebene Bereich *III* überprüft:

Erneut wird das Seitenverhältnis ermittelt zu

$$\frac{b}{a} = \frac{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm}{773mm} = 0,041 \approx 0 \quad (4.105)$$

Dadurch ist

$$k_d = 21,8 \quad (4.106)$$

für

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1 \quad (4.107)$$

(symmetrische Spannungsverteilung über die Steghöhe) und

$$k_s = 4,8 \quad (4.108)$$

Für die Belastung auf Druck durch Biegung wirkt maximal die Spannung

$$\sigma_b = \frac{500N \cdot 0,773m}{3,075406 \cdot 10^{-8}m^4} \cdot \frac{0,0358m - 2 \cdot 1,941 \cdot 10^{-3}m}{2} = 200,56 MPa \quad (4.109)$$

Für den Schub wirkt die maximale Schubspannung von

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{500N}{0,313mm \cdot (35,8mm - 2 \cdot 1,941mm)} = 75,07 MPa \quad (4.110)$$

Die Sicherheit gegen Beulen berechnet sich nun zu

$$j = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sigma}{\sigma_{krit}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{krit}}\right)^2}} \quad (4.111)$$

mit

$$\sigma_{krit} = \kappa \cdot k \cdot \hat{E}_{xx} \cdot \left(\frac{0,313mm + x}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 \quad (4.112)$$

und

$$\tau_{krit} = \kappa \cdot k_s \cdot \hat{G}_{xy} \cdot \left(\frac{0,313mm + x}{35,8mm - 2 \cdot 1,941mm} \right)^2 \quad (4.113)$$

Dieses mal kann $\kappa = 3$ genutzt werden, sofern eine ausreichende Schaumstoff-Dicke x auftritt, dessen Lösung analytisch herausgefunden wird. Dabei wird eine Mindestdicke von

$$x = 0,569mm \quad (4.114)$$

ermittelt. Allerdings soll ein Schaum der Dicke $x = 2mm$ verbaut werden, um das exakte Anpassen der Bauteilmaße während der Fertigung zu vereinfachen. Damit ergibt sich eine Beulsicherheit im Bereich III von

$$j = 6,88 \quad (4.115)$$

Damit die äußeren Steg-Gewebelagen eine konstante Stegdicke bilden, soll in den Bereichen I und II dennoch eine Schaumdicke von $x = 0,431mm$ verbaut werden. Der in Form geschliffene Schaum erhöht zudem in diesen Bereichen die Beulsicherheit, obwohl kein zusätzlicher Schaum benötigt wird. Der Übergang der beiden Schaumdicken soll zudem nicht direkt an der Wurzelrippe beginnen, sondern erst 23mm zur Flügelspitze versetzt erfolgen,

um direkt an dem Kraftangriffspunkt C die Sicherheit zusätzlich zu erhöhen.

4.5 Auslegung der Klebeverbindung (T.B.)

Der Holm, bzw. der Tragflügel generell, wird aus verschiedenen Bauteilen gefertigt, die miteinander verbunden werden müssen. Unterschieden werden kann beim Fügen zwischen kraftschlüssiger Verbindung (z.B. Schrauben), formschlüssiger Verbindung (z.B. Schnapphaken) und stoffschlüssiger Verbindung (z.B. Löten oder Kleben) [SiV19]. FVK werden meistens miteinander verklebt, dabei muss man auf drei Varianten zurückgreifen [Wit14]:

- Nass-Nass-Verklebung: Zwei Laminate werden im nicht ausgehärteten Zustand, also während ihrer Fertigung, gefügt.
- Trocken-Nass-Verklebung: Obwohl ein Laminat schon gehärtet ist, kann es dennoch mit einem zweiten, nicht gehärteten Laminat gefügt werden. Bei dem gehärteten Laminat muss eine geforderte Rauheit garantiert werden.
- Trocken-Trocken-Verklebung: Um hierbei eine Verbindung zweier gehärteten Laminate zu schaffen, wird ein Fügestoff genutzt. Dieser wird durch das verwendete Harzsystem mit einer Beimischung von Aerosil oder Baumwollflocken zur Andickung gebildet. Beide Bauteile müssen eine Mindestrauheit in der Klebefläche aufweisen können.

In der folgenden Dimensionierungsmethode für Klebeflächen wird lediglich auf Schubspannungen in deren Flächen-Ebene eingegangen. Schälen oder senkrechte Spannungen dazu sind somit ausgeschlossen. Außerdem soll nur mit einfachen Klebeverbindungen von aufeinander liegenden Bauteilen gerechnet werden, da ein Anschrägen bzw. Schäften an Bauteilen solch kleiner Abmessungen teilweise ausgeschlossen werden muss [SiV19].

Als letzte analytische Auslegung des Holms sollen zwei bedeutende Klebeflächen berechnet werden.

4.5.1 Klebeverbindung Steg - Gurt

Die Klebverbindung wird ähnlich der VDI 2013 ausgelegt, sodass nur die Abtriebskraft des Holms und die übertragene Querkraft den Schubfluss für die Belastung definieren [SiV19][VDI70]:

$$p = \sqrt{p_A^2 + p_s^2} \quad (4.116)$$

Die Länge ergibt sich aus

$$l = \frac{p}{\tau_{zul}} \quad (4.117)$$

wobei die zulässige Klebeschubspannung

$$\tau_{zul} = 10 \text{ Pa} \quad (4.118)$$

nach Angaben der Aufgabenstellung der Schubspannung für Mumpe entsprechen soll. Die Verklebung muss wegen kleiner Bauteilmaße „Trocken-Trocken“ erfolgen.

Bereich I und II werden, ähnlich der Beulberechnung, zusammen mit den kritischsten aller Werte ausgelegt, sodass

$$l = \frac{\sqrt{(4282, 26 \frac{N}{m})^2 + (159330, 16 \frac{N}{m})^2}}{10^7 \frac{N}{m^2}} = 15,9 \text{ mm} \quad (4.119)$$

als Klebebreite benötigt werden. Für den Bereich III ergibt sich

$$l = \frac{\sqrt{(4282, 26 \frac{N}{m})^2 + (15665, 14 \frac{N}{m})^2}}{10^7 \frac{N}{m^2}} = 1,62 \text{ mm} \quad (4.120)$$

Beide Klebebreiten passen auf die verbleibenden inneren Holmgurtflächen und sollen durch Mumpe ohne zusätzliche Gewebelagen realisiert werden. Die Querschnittsfläche der Mumpe sollte somit einem gleichseitigem Dreieck entsprechen.

4.5.2 Klebeverbindung Holm - Rippen

Die vergrößerten Klebeflächen der Rippen gegenüber dem Holm sollen durch Holzklötze ermöglicht werden, die auf beide Seiten des Stegs zwischen die Holmgurte geklebt werden. Die Breite dieser Klötze errechnet sich aus

$$A = b \cdot h = \frac{F}{\tau_{zul}} \quad (4.121)$$

mit der maximal abgesetzten Kraft von $F = 500 \text{ N}$. Somit haben die Holzklötze eine Breite von

$$b = 1,56 \text{ mm} \quad (4.122)$$

bei einer Höhe von $35,8 \text{ mm} - 2 \cdot 1,941 \text{ mm}$.

4.6 Bolzenauslegung (H.G.)

4.6.1 Bolzenberechnung

Zunächst muss eine Auslegung für die Flächenpressung erfolgen. Dabei ist für die Buche $\sigma_{p,zul} = 60 \frac{N}{mm^2}$. Die projizierte Fläche ist $A = a * d$, d ist hierbei der Durchmesser des Bolzens und a die Länge des Lochs im Steg.

Die Flächenpressung ist nun:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{5085,5N}{a * 8mm} \quad (4.123)$$

Mit der zulässigen Flächenpressung für Buchenholz lässt sich die Gleichung nun nach a auflösen (siehe Glg. 4.124).

$$a = \frac{F}{\sigma_{p,zul} * d} = \frac{5085,5N}{60 \frac{N}{mm^2} * 8mm} = 10,59mm \quad (4.124)$$

Somit muss die Holzverstärkung des Stegs an der Stelle der Lager mindestens eine Breite von 10,59mm aufweisen. Im Weiteren wird eine Breite von 11mm angenommen.

Nun werden die Bolzen, die den Holm im für den Versuchsaufbau vorgegebenen U-Profil fixieren, ausgelegt. Die Bolzen sind auf Biegung belastet, wodurch Gleichung 4.125 angenommen wird.

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (4.125)$$

$$W_{Kreis} = \frac{\pi * d^3}{32} \quad (4.126)$$

$$M_b = F * l \quad (4.127)$$

Mit Gleichung 4.126 und Gleichung 4.127 ergibt sich die Biegespannung zu Gleichung 4.128.

$$\sigma_b = F * \frac{32 * l}{\pi * d^3} \quad (4.128)$$

Die zu ertragende Kraft ist 5085,5N. Diese lässt sich jetzt noch halbieren, da mit der oben genannten Annahme nur die Hälfte des Bolzens betrachtet wird. Damit ergibt sich die gesuchte Kraft (siehe Glg. 4.129).

$$F_{bel} = \frac{F}{2} = 2542,75N \quad (4.129)$$

Nun kann mit $d = 8\text{mm}$ und $l = 8,559\text{mm}$ ein passendes Material gesucht werden. Für Stahl gilt $\sigma_{b,F} \approx 1,2 * R_e$, somit wird R_e wie in Gleichung 4.130 berechnet.

$$F * \frac{32 * l}{1,2 * \pi * d^3} = 360,8 \text{MPa} \leq R_e \quad (4.130)$$

Mit den getroffenen Annahmen ist S620Q mit einer Streckgrenze von $R_e = 620 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ein geeigneter Stahl, mit dem eine ausreichende Sicherheit gegeben ist.

Für die Querkraftbolzen wird ebenfalls S620Q verwendet. Die aufzunehmenden Kräfte lassen sich aus dem Kräftegleichgewicht ermitteln. Q_1 ist die Kraft des Bolzens vor dem Holm und Q_2 die Kraft des Bolzens hinter (in Flugrichtung betrachtet) dem Holm. Damit ergeben sich bei einer Prüfkraft von 500N folgende Kräfte:

$$Q_1 = 409,85\text{N}$$

$$Q_2 = 90,15\text{N}$$

Für den benötigten Durchmesser lässt sich nun Gleichung 4.128 nach d umstellen.

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 * F * l}{1,2 * \pi * R_e}} \quad (4.131)$$

Mit einem Hebelarm l von 10mm ergibt sich:

$$d = 3,82\text{mm} \quad (4.132)$$

Da die Querkraftbolzen auf keinen Fall versagen dürfen und in der Massenbilanz nicht relevant sind, werden sie mit einem Durchmesser von 8mm bemessen [GKM14].

5 Auslegung der Flügelschale nach Handbuchmethoden

5.1 Schubfluss

5.1.1 Theorie (O.S.)

Im Leichtbau ist es wichtig geeignete Konstruktionen zu entwerfen, um Eigenschaften der Werkstoffe ideal nutzen zu können. Das Gesamtbauteil ist dann meist so kompliziert, dass sich die für das Bauteil zu lösenden Differenzialgleichungen, wie zum Beispiel die der Elastostatik, keine geschlossenen Lösungen finden lassen. Das Ziel ist es nun durch Annahmen und Vereinfachungen ein sinnvolles und lösbares Ingenieursmodell zu finden. Alternativ könnten auch Lösungen mittels numerischer Methoden ermittelt werden, hierzu mehr in Kapitel 6.

Zylindrische, dünnwandige Profile

Häufig werden zylindrische, dünnwandige Profil genutzt, da sie bei vergleichsweiser niedriger Masse noch immer gute Werte bei zum Beispiel der Biegesteifigkeit liefern. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie deutlich höhere Ausmaße in x-Richtung haben, als in jede andere (zylindrisch). Eine Laufvariable s verläuft in der y-z-Ebene durch die Mitte der Profildicke $t(s)$. Die Dicke ist nicht zwangsläufig über s konstant, muss aber deutlich kleiner als alle anderen Abmessungen sein (dünnwandig) [Hor20c]. Man kann vereinfacht annehmen

$$\iint dA = \int t(s)ds. \quad (5.1)$$

Der Querschnitt muss in x-Richtung konstant sein und auch bei Belastung seine Gestalt beibehalten. Der Schubfluss im Profil ist als

$$q = \tau t(s) \quad (5.2)$$

und der Normalkraftfluss als

$$n_x = \sigma_x t(s) \quad (5.3)$$

definiert. Für diese Kraftflüsse gilt das hydrodynamische Analogon. Das heißt, mit einer Änderung der Dicke muss der Kraftfluss antiproportional ab- bzw. zunehmen, damit das Kräftegleichgewicht erfüllt bleibt. Für Knotenpunkte muss auch gelten, dass der Betrag der Kraftflüsse in den Knoten hinein denen aus ihm heraus gleicht. Des Weiteren lässt sich noch zwischen offenen und geschlossenen Profilen unterscheiden, wobei es sich bei

zweiterem um Ein- oder Mehrzeller handeln kann [Hor20c].

Koordinatensysteme

Bei den Berechnungen kann viel Arbeit gespart werden, indem das Koordinatensystem mit Ursprung und Achsenausrichtung klug gewählt wird. Das allgemeine Koordinatensystem, das unabhängig vom betrachteten Profil ist, bietet hierbei die wenigsten, wenn nicht sogar keine Vorteile. Verschiebt man seinen Ursprung in den Schwerpunkt, erhält man das Schwerpunkt-Koordinatensystem. Es wird mit einem Querstrich über den Koordinaten gekennzeichnet ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$). Es ist sinnvoll aus dieser Perspektive den Schubfluss zu betrachten. Aus dem Kräftegleichgewicht in x - und s -Richtung an einem infinitesimalen Volumen des

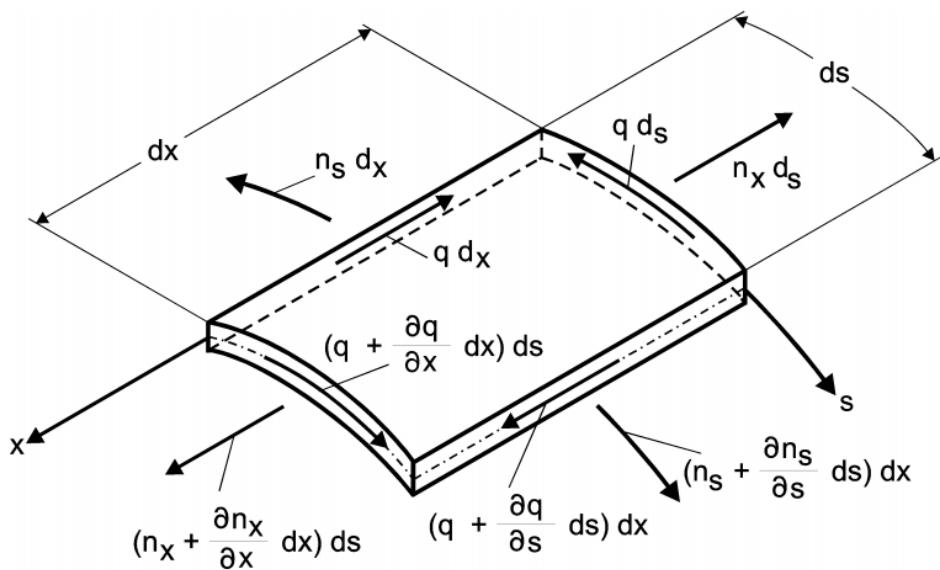


Abbildung 5.1: Infinitesimales Profilelement aus [Hor20c]

dünnwandigen Profils ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Kraftflüssen zu

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial n_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

Da jedoch eine Krümmung in s -Richtung vorliegen kann, zeigt die Resultierende des Normalkraftflusses n_s aus der Ebene heraus. Da bei dünnen Scheibenelementen ein ebener Spannungszustand herrscht, darf dies nicht sein. Daraus folgt, dass beide Terme in Glei-

chung 5.5 gleich null sein müssen. Der Schubfluss ist also in x -Richtung konstant und lässt sich somit zu

$$q(s) = - \int \frac{\partial n_x(x, s)}{\partial x} ds + q_0. \quad (5.6)$$

integrieren. Wird nun der Normalkraftfluss in Abhängigkeit von der Querkraft Q gesetzt, ergibt sich die Q -SInen-Formel nach [Hor20c]:

$$q(s) = -(Q_{\bar{z}} \frac{S_{\bar{y}}(s)I_{\bar{z}} - S_{\bar{z}}(s)I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} + Q_{\bar{y}} \frac{S_{\bar{z}}(s)I_{\bar{y}} - S_{\bar{y}}(s)I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2}) + q_0 \quad (5.7)$$

mit den Flächenträgheitsmomenten I (siehe Gleichungen 5.15-5.17). Spätestens hier zeigt sich, dass für dieses Modell das Superpositionsprinzip anwendbar ist und man die Kräfte Q_y und Q_z getrennt betrachten kann. Hier lässt sich direkt erkennen, wie diese Formel durch die Wahl eines besseren Koordinatensystems vereinfacht werden kann. Für das Hauptachsen-Koordinatensystem bleibt der Schwerpunkt weiterhin der Ursprung, jedoch werden die Achsen so um die x-Achse gedreht, dass die Deviationsmomente I_{yz} verschwinden. Es wird mit einem Dach über den Koordinaten gekennzeichnet ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$). Die Integrationskonstante

$$q_0 = q_{0b} + q_{0T} \quad (5.8)$$

ist nur bei geschlossenen Profilen ungleich null. Sie setzt sich aus einem Teil, der aus der Biegung entsteht, q_{0b} , und einem aus der Torsion, q_{0T} , zusammen. Es gibt einen Punkt in der y-z-Ebene für jedes Profil, wo eine angreifende Kraft keine Torsion verursacht. Dieser Punkt ist von hoher Bedeutung und wird Schubmittelpunkt genannt.

5.1.2 Idealisierung(H.G.)

Für die Berechnung des Schubmittelpunkts wird das Flügelprofil als vereinfachter Mehrzeller angenommen. Dabei wird der Ursprung des Koordinatensystems am unteren rechten Rand gesetzt. Das Modell wird in 10 Teilstrecken s_i aufgeteilt. Die Dicke t wird über die Schale konstant angenommen. Der Schaum wird in allen Abschnitten der Schale und im Holm vernachlässigt, da seine Hauptaufgabe der Beulsteifigkeit gilt und er bei der Schabauaufnahme im Vergleich zum Laminat nur eine unbedeutende Rolle spielt. Der Steg ist in 2 Abschnitte unterteilt. Für die maximale Belastung und somit für die Auslegung relevant ist nur der Teil mit dem dünneren Gewebe, sodass hier für die Dicke des Stegs $t_1 = 0,314\text{mm}$ angenommen wird. Für die Gurte gilt, dass alle Fasern parallel in x-Richtung ausgerichtet sind. Sie werden in dieser Rechnung ignoriert, da sie folglich im

Gegensatz zum $\pm 45^\circ$ -Gewebe vernachlässigbare Schubkräfte aufnehmen können ($D = t$). Außerdem würde ein über die Dicke variabler Schubmodul die Rechnung unnötig verkomplizieren, da die uns bekannten Methoden zur Schubflussberechnung nur für homogene Werkstoffe gültig sind [Hor20c].

Diese Annahmen bezüglich des Schaums und der Gurte sind unproblematisch, da sie so getroffen wurden, dass der Flügel sogar noch höheren Belastungen als errechnet standhalten könnte. Als einziges ist zu betrachten, dass durch das Wegfallen des Schaums in der Schale die GFK-Schichten des Sandwichs aufeinander fallen und ihre Position somit um wenige Millimeter ungenau ist. Da die genau errechnete Dicke auf eine Lagenschicht aufgerundet werden muss, ist dies vermutlich kompensierbar, sollte jedoch im Hinterkopf behalten werden.

Abbildung 5.2 zeigt, dass das Profil durch vier gerade Strecken und einen Viertelkreis modelliert wurde. Die Längen der einzelnen Teilabschnitte lassen sich im Anhang der Abbildung 11.22 entnehmen. Im Folgenden werden die wichtigsten Rechenschritte und Ergebnisse dargelegt, detailliertere Berechnungen lassen sich im Anhang unter Kapitel 11.2 finden.

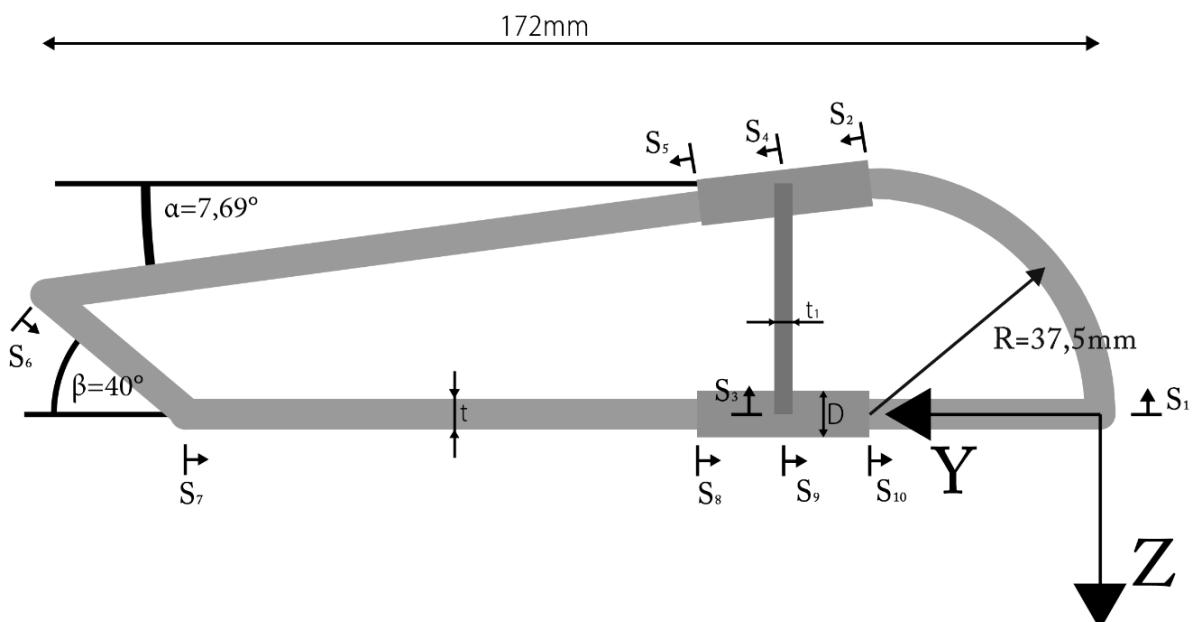


Abbildung 5.2: Vereinfachtes Modell für Schubflussberechnung

5.1.3 Schwerpunktkoordinaten(H.G.)

Zunächst wird von einer Dicke $t = 0,2\text{mm}$ ausgegangen und die statischen Momente in den einzelnen Teilstücken berechnet.

$$S_z = \int_A y dA = t \int_s y ds \quad (5.9)$$

$$S_y = \int_A z dA = t \int_s z ds \quad (5.10)$$

Damit ergeben sich für die statischen Momente in mm^3 :

Bauteilabschnitt	S_y/mm^3	S_z/mm^3
1	-281,25	160,54
2	-120,382	124,42
3	-220,78	605,24
4	-97,13	163,27
5	-571,91	2555,63
6	-58,13	965,14
7	0	1789,88
8	0	163,80
9	0	124,60
10	0	140,63

Nun kann aus den statischen Momenten der Schwerpunkt bestimmt werden, indem die statischen Momente über alle Flächen summiert werden:

$$y_0 = \frac{\int_s t(s) y ds}{\int_s t(s) ds} = \frac{S_z}{A} \quad (5.11)$$

$$z_0 = \frac{\int_s t(s) z ds}{\int_s t(s) ds} = \frac{S_y}{A} \quad (5.12)$$

Mit einer Dicke von $t = 0,2\text{mm}$ ergibt sich die Lage der Schwerpunktkoordinaten zu:

$$y_0 = 78,53\text{mm}$$

$$z_0 = -15,39\text{mm}$$

Damit können nun mit

$$S_{\bar{y}} = S_y - z_0 A \quad (5.13)$$

$$S_{\bar{z}} = S_z - y_0 A \quad (5.14)$$

die Verläufe der statischen Momente in Bezug auf den Schwerpunkt ermittelt werden, wobei die Endwerte der vorherigen Verläufe nach dem hydrodynamischen Analogon den Anfangswert s_0 des folgenden Bereichs bestimmen. Dabei ergeben sich folgende Endwerte nach [WNB16] in mm³:

Bauteilabschnitt	$S_{\bar{y}}/\text{mm}^3$	$S_{\bar{z}}/\text{mm}^3$
1	-99,91	-764,60
2	-159,18	-860,06
3	-39,53	-319,43
4	-252,75	-1236,10
5	-493,03	-372,27
6	-458,59	120,60
7	-201,65	599,69
8	-158,55	543,61
9	-155,45	448,34
10	0	0

Für ein offenes Profil muss gelten, dass an den freien Rändern der Schubfluss 0 ist, was automatisch dadurch erfüllt ist, dass beide statischen Momente ungefähr null sind. Das Profil wird in diesem Fall an den Stellen 1 und 3 geschnitten.

Nun werden die Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (5.15)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (5.16)$$

$$I_{yz} = \int_A zy dA \quad (5.17)$$

zuerst aus ihrem eigenen Schwerpunkt errechnet, sodass die auf den Gesamtschwerpunkt bezogenen Flächenträgheitsmomente $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{z}}$ und $I_{\bar{y}\bar{z}}$ mit Hilfe des Steinerschen Satzes

$$I_{\bar{y}} = I_y + z^2 A \quad (5.18)$$

$$I_{\bar{z}} = I_z + y^2 A \quad (5.19)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + zyA \quad (5.20)$$

ermittelt werden können. Es ergibt sich:

Bauteilabschnitt	I_y/mm^4	I_z/mm^4	I_{zy}/mm^4	$I_{\bar{y}}/\text{mm}^4$	$I_{\bar{z}}/\text{mm}^4$	$I_{\bar{y}\bar{z}}/\text{mm}^4$
1	2857,61	2857,61	140,63	5649,01	22688,56	-7299,54
2	0,83	44,91	6,06	1255,75	3299,07	2026,88
3	1379,88	0,10	0	1512,59	8665,70	1072,37
4	0,83	44,91	6,06	1043,48	1189,34	1098,42
5	373,09	20459,31	2762,56	3053,01	55094,88	-6871,78
6	187,25	265,93	-223,13	284,51	20659,15	2599,67
7	0,06	9689,11	0	3955,08	23439,99	7374,62
8	0,01	45,731	0	663,45	1168,88	-863,21
9	0,01	45,731	0	663,45	3287,88	-1466,61
10	0,03	878,91	0	1777,09	27679,54	-6901,18
\sum	-	-	-	19957,41	187173,00	-9230,37

Es kann sofort erkannt werden, dass $I_{\bar{y}\bar{z}} \neq 0$ ist und es sich somit nicht um ein Hauptachsensystem handelt. Das Deviationsmoment $I_{\bar{y}\bar{z}}$ ist jedoch im Vergleich zu den anderen Flächenträgheitsmomenten sehr niedrig. Aus dem Zusammenhang

$$\tan(\varphi) = \frac{2I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}} \quad (5.21)$$

nach [Hor20c] lässt sich erkennen, dass der Winkel ($\varphi = -3,15^\circ$) zwischen dem Hauptachsen- und Schwerpunkt-Koordinatensystem nur sehr gering ist. Im Folgenden finden alle Be trachtungen trotzdem weiterhin mit den Koordinatenachsen in dieser Ausrichtung statt.

5.1.4 Schubmittelpunkt (H.G.)

Nun ist es von Interesse, und im Rahmen der Aufgabenstellung auch gefordert, den Schubmittelpunkt, an dem eine angreifende Kraft reine Biegung ohne Torsion bewirkt, zu bestimmen. Zunächst wird der Schubmittelpunkt des wie in Abschnitt 5.1.3 aufgeschnittenen Profils betrachtet (siehe Abb. 5.3). Es wird die Kraft Q , die im Schubmittelpunkt angreift und äquivalent zu $q(s)$ nach

$$Q = \int_s q(s) ds \quad (5.22)$$

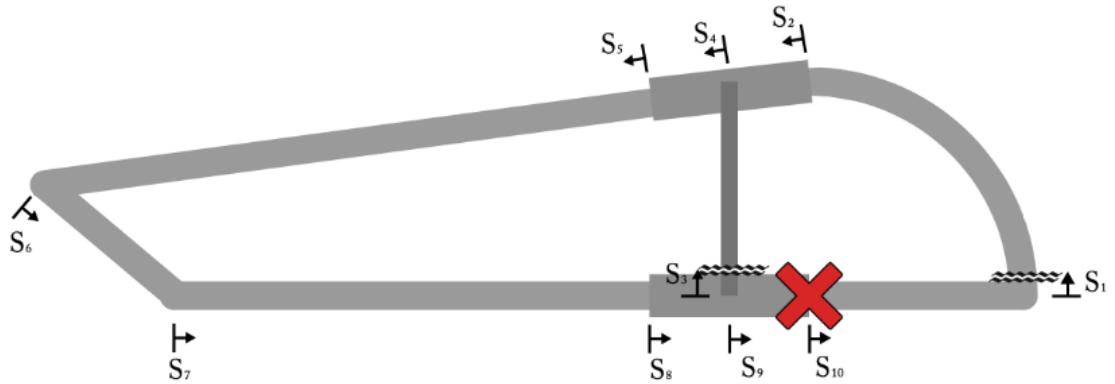


Abbildung 5.3: Offenes Profil mit Pol

ist, betrachtet. Gleichzeitig muss aus der Momentenäquivalenz gelten:

$$Qr = \int_s q(s)r(s)ds \quad (5.23)$$

wobei r der jeweilige Hebelarm zu einem beliebigen Pol ist. Unter Anwendung des Superpositionsprinzips lässt sich die Querkraft Q in ihre Komponenten der Koordinatenrichtungen zerlegen und jeweils eine gleich null setzen. Zusammen mit Gleichung (5.7) erhält man dadurch die folgenden Gleichungen zur Bestimmung des Schubmittelpunkts beim offenen Profil nach [Hor20c]:

$$y_M = \frac{-I_{\bar{z}} \int S_{\bar{y}}(s)r_t ds + I_{\bar{y}z} \int S_{\bar{z}}(s)r_t ds}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}z}^2} \quad (5.24)$$

$$z_M = \frac{-I_{\bar{y}z} \int S_{\bar{y}}(s)r_t ds + I_{\bar{y}} \int S_{\bar{z}}(s)r_t ds}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}z}^2} \quad (5.25)$$

Daraus folgt:

$$y_M = 207,60\text{mm}$$

$$z_M = -41,35\text{mm}$$

Im nächsten Schritt wird das Profil geschlossen, sodass ein Zweizeller entsteht. An den vorher noch geschnittenen Kanten kann nun ein Schubfluss herrschen. Dies wird durch

die Konstanten $q_{0b,1}$ und $q_{0b,2}$ in der jeweiligen Zelle erreicht. Da die Verwindung ϑ für beide Zellen gleich und im Falle der weiterhin reinen Biegung null sein muss, erhält man für jede Koordinatenrichtung zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \quad (5.26)$$

Nach [Hor20c]:

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \oint \frac{q(s)}{t(s)} ds \quad (5.27)$$

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \left(\oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)} ds + q_{0b,i} \oint \frac{1}{t(s)} ds - q_{0b,i\pm 1} \int \frac{1}{t(s)} ds \right) \quad (5.28)$$

Die Kreisintegrale gehen jeweils über die betrachtete Zelle und das einfache Integral über den Teil des Profils, den die beiden sich teilen. Die Verwindung ist als spezifischer Drillwinkel mit

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.29)$$

definiert, wobei φ den Drillwinkel angibt. Mit den Werten für die umschlossenen Flächen

$$A_{01} = 3087,57 \text{ mm}^2$$

$$A_{02} = 1616,41 \text{ mm}^2$$

ergeben sich die Konstanten:

$$q_{0b,1\bar{z}} = -1,82 \cdot 10^{-2} \text{ mm} Q_{\bar{z}}$$

$$q_{0b,2\bar{z}} = -5,63 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{z}}$$

$$q_{0b,1\bar{y}} = -2,61 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{y}}$$

$$q_{0b,2\bar{y}} = -1,14 \cdot 10^{-3} \text{ mm} Q_{\bar{y}}$$

Mit dem Schubfluss des geschlossenen Profils in die Momentenäquivalenz eingesetzt, ergibt sich der Schubmittelpunkt (y_{Mg}, z_{Mg}) zu:

$$Q_{\bar{z}}(y_{Mg} - y_M) = \sum_{i=0}^2 q_{0b,i\bar{z}} 2A_{0,i} \quad (5.30)$$

$$Q_{\bar{y}}(z_{Mg} - z_M) = \sum_{i=0}^2 q_{0b,i\bar{y}} 2A_{0,i} \quad (5.31)$$

$$y_{Mg} = 76, 78 \text{ mm}$$

$$z_{Mg} = -21, 56 \text{ mm}$$

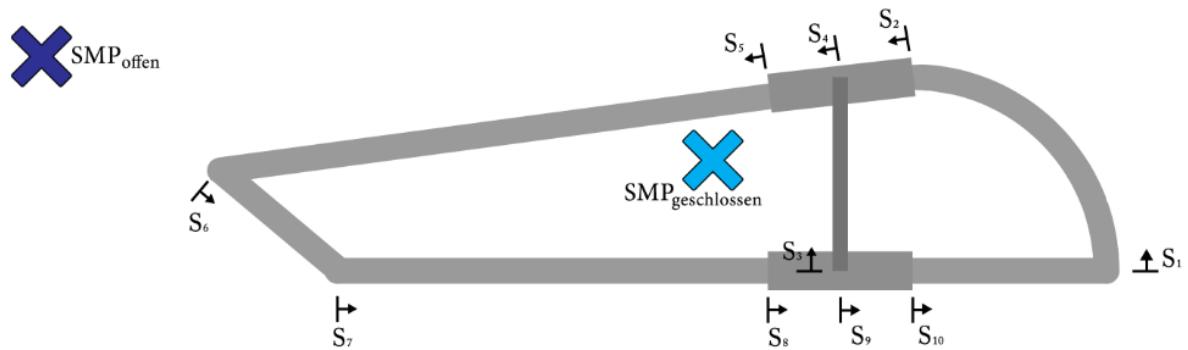


Abbildung 5.4: Schubmittelpunkt des geschlossenen und offenen Profils

5.1.5 Torsion (O.S.)

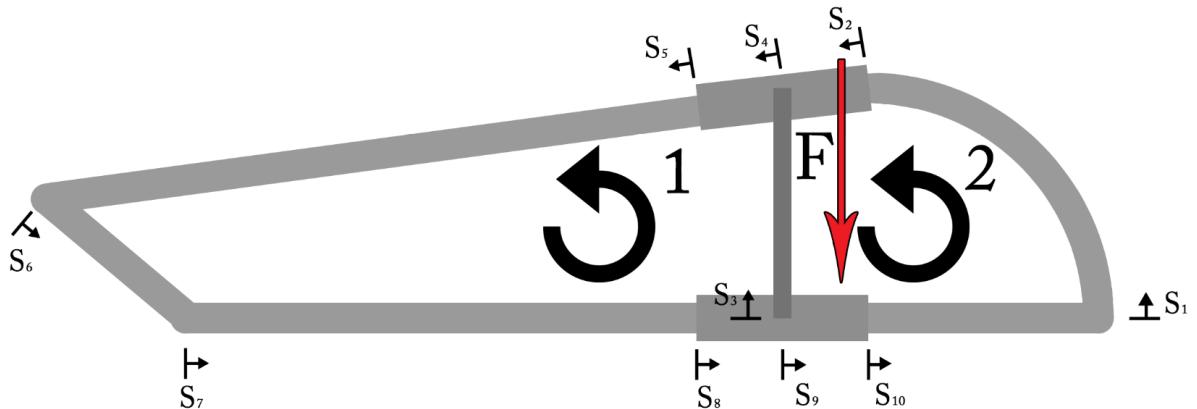


Abbildung 5.5: Angreifende Kraft und positive Drehrichtung am geschlossenen Profil

In den bisherigen Berechnungen wurde immer davon ausgegangen, dass die Kraft im Schubmittelpunkt angreift. Durch den Versuchsaufbau ist jedoch vorgegeben, dass eine

Prüflast in z-Richtung an der $l/4$ -Linie aufgebracht wird. Mit dem errechneten Schubmittelpunkt lässt sich erkennen, dass ein Torsionsmoment

$$M_{xT} = (y_{l/4} - y_0) \cdot F \quad (5.32)$$

entsteht, das noch zusätzlichen Schubfluss und eine Verwindung ϑ bewirkt. Genauer gesagt wird hier die St. Vernatsche Torsion behandelt, bei der zwar Verwölbung auftritt, diese aber nicht behindert wird [Hor20c]. Wieder können die konstanten Schubanteile $q_{0T,i}$ aus der Momentenäquivalenz und der Verwindung bestimmt werden. Wobei zu beachten ist, dass die Verwindung hier nicht mehr wie bei der reinen Biegung null ist, aber über die Verträglichkeitsbedingung weiterhin gelten muss

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta. \quad (5.33)$$

Da die bisherigen Anteile des Schubflusses definitionsgemäß weder Verwindung verursachen, noch bezüglich des Schubmittelpunkts ein Moment kompensieren, fallen sie aus den Gleichungen raus. Es bleiben nur noch die Konstanten $q_{0T,i}$ übrig. Damit ergeben sich die vereinfachten Formeln für die Verwindung und die Momentenäquivalenz:

$$\vartheta_i = \frac{1}{2A_{0i}G} \left(q_{0T,i} \oint \frac{1}{t(s)} ds - q_{0T,i\pm 1} \int \frac{1}{t(s)} ds \right) \quad (5.34)$$

$$M_{xT} = 2 \sum q_{0T,i} \cdot A_{0i} \quad (5.35)$$

Für eine maximale Prüflast von $F = 500\text{N}$, die der Flügel aushalten muss, erhält man

$$q_{0T,1} = -1,80\text{N/mm}$$

$$q_{0T,2} = -1,87\text{N/mm}.$$

Setzt man nun diese Werte in Gleichung (5.34) ein, erhält man für beide Zellen eine Verwindung von

$$\vartheta = -0,00242^\circ.$$

Integriert man diesen konstanten Wert über die gesamte Länge des Flügels, erhält man den Drillwinkel am Ende mit $\varphi = -1,87^\circ$.

5.1.6 Schubspannung (O.S.)

Das Ziel dieser Berechnung war nicht nur den Schubmittelpunkt und den Drillinkel zu bestimmen, sondern hauptsächlich die Schubspannung in der Haut zu erhalten, um diese auslegen zu können. Da die Hautdicke auf dem gesamten Umfang konstant bleiben soll, ist an dieser Stelle nur die maximale Schubspannung für alle Bereiche der Haut τ_{max} , die sich einfach aus Gleichung (5.2) ermitteln lässt, interessant. Die Dicke t ist jedoch nicht einfach aus den gesamten Rechnungen rausziehbar, weil es auch Anteile wie zum Beispiel den Holm gibt, die von t unabhängig sind. Deswegen wird iterativ vorgegangen, wobei zuerst mit einer zufällig gewählten Dicke die Rechenschritte durchgeführt werden, in dem in diesem Kapitel gezeigten Fall mit $t = 0,2\text{mm}$. Am Ende der Berechnung wird aus den maximalen Schubfluss die minimale Dicke

$$t_{min} = \frac{q_{max}}{R_\tau}. \quad (5.36)$$

bestimmt. Die Festigkeit bei reiner Schubbeanspruchung $R_\tau = 166,67\text{N/mm}^2$ wurde mittels ELamX bestimmt. Diese Dicke kann jedoch nicht einfach so als Ergebnis genommen werden, da sich der Schubfluss bei variabler Dicke mit verändert. Die Rechnung muss mit dem neuen Wert erneut durchgeführt werden. Somit nähert man sich Schritt für Schritt dem Idealwert, bei dem die vorliegende Dicke der minimalen Dicke entspricht.

Nach einigen Iterationen bildet sich der Wert $t = 0,03\text{mm}$ als Grenzwert heraus. Da dies ungefähr 0,4 Lagen bei einer Dicke $0,0783\text{mm}$ des $\pm 45^\circ$ -Gewebes entspricht, muss für die Fertigung des Flügels auf eine ganzzahlige Lagenanzahl aufgerundet werden. Hier wurde eine Dicke von

$$t = 0,1566\text{mm} \quad (5.37)$$

gewählt, was 2 Lagen entspricht. Dies macht einen symmetrischen Aufbau der Haut möglich und gewährleistet die beste Beulsteifigkeit. Außerdem ist eine ausreichende Sicherheit in Folge der getroffenen Vereinfachungen gewährleistet.

Mit dieser Dicke verändern sich die Werte des endgültigen Flügels im Vergleich zu den bisher in diesem Kapitel mit $t = 0,2\text{mm}$ durchgeföhrten Berechnungen. Der Schubmittelpunkt verschiebt sich minimal zu

$$y_{M_g} = 75,72\text{mm}$$

$$z_{M_g} = -21,31\text{mm}.$$

Auch der Drillwinkel vergrößert sich leicht durch die gesenkten dünnere Haut Steifigkeit zu

$$\varphi = -2,32^\circ.$$

Aus den Verläufen der Schubflüsse, wie sie in Abbildung 11.23 - 11.32 zu sehen, erkennt man, dass die betragsmäßig maximale Schubspannung am Endpunkt des Bereichs 8 auftritt.

$$|\tau_{max}| = \tau(s_8 = 14) = 47,52 \text{ N/mm}^2 \leq R_\tau$$

Im Steg (Bereich 3) tritt zwar ein deutlich höherer Schubfluss auf, jedoch ergibt sich durch die ebenfalls deutlich höhere Dicke eine geringere Spannung.

5.2 Auslegung der Flügelschale nach Klassischer Laminattheorie (T.B.)

5.2.1 *eLamX*²

Auch hier wird die Rechnung nach Handbuch-Methoden mittels *eLamX*² überprüft [Hau21][Sch05].

Der Lagenaufbau ähnelt dem des Steges, lediglich die Anzahl der Lagen wird auf zwei reduziert und die Dicke des Schaumstoffs erhöht (siehe Abbildung 11.4). Auch hierbei ergibt sich eine Sicherheit der Festigkeit > 1 , wie der Abbildung 11.8 im Kapitel 11.3 zu entnehmen ist. Ebenfalls werden die Ingenieurskonstanten der Flügelhaut mit dieser Software ermittelt, wie in Abbildung 11.12 dargestellt wird.

Ähnlich dem Kapitel 4.3.2 werden die Abbildungen im Anhang dargestellt.

5.3 Beulabschätzung der Flügelschale (T.B.)

Nachdem die Flügelhaut auf Festigkeit ausgelegt worden ist, muss überprüft werden, ob der Effekt des Beulens auftritt [Her60].

Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die Flügelschale wird als nahezu ebener, unendlicher Streifen betrachtet. Die tatsächliche Krümmung und die Knicke erhöhen die Stabilität deutlich, sodass durch diese konservative Rechnung die Sicherheit gewährleistet bleibt.
2. Es tritt die ermittelte Schubspannung in der Schale und eine aufgeprägte Druckspannung von dem Holm auf. Vernachlässigt wird, wie in der Auslegung nach VDI 2013, eine Druckspannung durch die angreifende Prüfkraft selbst.
3. Die Flügelschale wird als an beiden Rippen fest gelagert betrachtet. Eine Verformung der Rippen wird außer Acht gelassen.
4. Die Flügelnase und Klappenkante werden als stützende Lager angenommen, da diese einen engen Krümmungsradius aufweisen, welcher stabile und steife Strukturen hervorbringt.
5. Der Holmsteg wird ebenfalls an seinen beiden Enden, verbunden mit der Flügelschale über die Holmgurte, als stützendes Lager angenommen.
6. Dadurch ergibt sich die maximale Breite eines Streifens zu 124,5mm - von der Klappenkante zum oberen Steg-Lager.

Die Berechnung erfolgt nach den gleichen Formeln der Berechnung des Kapitels 4.4.3.

Das Seitenverhältnis beträgt für die maximale Streifenbreite

$$\frac{b}{a} = \frac{124,5\text{mm}}{773\text{mm}} = 0,16 \quad (5.38)$$

und somit wird der Beulfaktor zu

$$k_s = 5 \quad (5.39)$$

ermittelt. Auch hier beträgt die Steifigkeitserhöhung $\kappa = 3$ und der Schubmodul $\hat{G}_{xy} =$

8577,8 MPa. Dadurch lässt sich die zulässige Schubspannung ermitteln:

$$\tau_{krit} = 3 \cdot 5 \cdot 8577,8 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,078 \text{ mm} + 3 \text{ mm}}{124,5 \text{ mm}} \right)^2 = 82,68 \text{ MPa} \quad (5.40)$$

Die Schaumdicke wird durch konstruktive Vorgaben auf 3mm gesetzt. Die maximal auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau_{max} = 42,346 \text{ MPa} \quad (5.41)$$

(im Bereich der unteren Steg-Lagerung), sodass die Sicherheit gegen Schubbeanspruchung

$$j_1 = 1,95 \quad (5.42)$$

beträgt. Der Beulfaktor bei Druckbeanspruchung beträgt

$$k_d = 4,9 \quad (5.43)$$

Mit dem E-Modul $E_{Flügelschale} = 6639,8 \text{ MPa}$ kann die kritische Druckspannung zu

$$\sigma_{krit} = 3 \cdot 4,9 \cdot 6639,8 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,078 \text{ mm} + 3 \text{ mm}}{124,5 \text{ mm}} \right)^2 = 62,72 \text{ MPa} \quad (5.44)$$

bestimmt werden. Es wird angenommen, dass die Flügelschale eine Druckspannung durch die aufgeprägte Dehnung des Gurtes erfährt, die wiederum aus der maximalen Biegespannung im Holm erfolgt:

$$\sigma_{max} = E_{Flügelschale} \cdot \frac{\sigma_b}{E_{Gurt}} = 6639,8 \text{ MPa} \cdot \frac{224,96 \text{ MPa}}{31580 \text{ MPa}} = 47,29 \text{ MPa} \quad (5.45)$$

Dadurch, dass die Sicherheit gegen Druckbeanspruchung

$$j_2 = 1,32 \quad (5.46)$$

beträgt, resultiert eine Gesamtsicherheit gegenüber einer Beulerscheinung

$$j = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{1,952} + \frac{1}{1,32}}} = 1,09 \quad (5.47)$$

Dieses stellt jedoch eine theoretische Sicherheit dar, da die maximale Streifenbreite und die größte Schubspannung nicht im selben Bauteil-Bereich liegen und die maximale Randfaserspannung durch Biegung nicht an den tatsächlich sich reduzierenden Höhenverlauf angepasst worden ist. Die Sicherheit ist in der Realität somit höher, ebenfalls wird sie durch den tatsächlich gekrümmten Verlauf erhöht.

6 Numerische Berechnung

6.1 Vorteile der Finiten Element Methode (O.S.)

Nachdem der Flügel nun analytisch ausgelegt wurde, stellt sich die Frage, ob eine numerische Herangehensweise hier überhaupt noch sinnvoll ist. In den vorherigen Kapiteln wurden viele Vereinfachungen angenommen, um die Berechnungen mit verhältnismäßigen Aufwand zu bewältigen. Je komplexer ein Bauteil ist, desto unwirtschaftlicher wird es, dieses in seiner Fülle analytisch zu berechnen oder gar unmöglich, wenn keine geschlossenen Lösungen bekannt sind. Im Leichtbau werden diese Details benutzt, um Bauteile an den Stellen zu verstärken, wo besonders große Lasten auftreten (z.B. Rippen). Wenn diese nun für eine einfachere Berechnung wegfallen, muss das restliche Bauteil robuster ausgelegt werden, was zu einer vermeidbaren Gewichtszunahme führt. Auch wenn es sich bei numerischen Lösungen nur um Annäherungen an den wahren Zustand handelt, kann durch einen hohen Vernetzungsgrad ein präziseres Ergebnis erzielt werden als das vereinfachte analytische. Somit übernimmt die numerische Berechnung auch eine Kontrollfunktion.

6.2 Funktionsweise der Finiten Element Methode (O.S.)

6.2.1 Schwache Lösung der Elastostatik

Für die Berechnung der Elastostatik sind die Gleichgewichtsbedingung (6.1), Verzerrungs-Verschiebungsbedingung (6.2) und das Stoffgesetz (6.3) auch bei der Finiten Elemente Methode (FEM) ausschlaggebend

$$\underline{0} = \underline{X} + \underline{\underline{D}}^T \sigma \quad (6.1)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{\underline{D}} \underline{u} \quad (6.2)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \underline{\epsilon} \quad (6.3)$$

[Hor20b]. Wobei \underline{X} der Vektor der Volumenkräfte, $\underline{\underline{E}}$ die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\epsilon}$ der Verzerrungsvektor, \underline{u} der Verschiebungsvektor und $\underline{\underline{D}}$ die Operatormatrix ist.

Um einer aufwendigen Bestimmung der analytischen Lösung zu entgehen, bedient sich die FEM dem Prinzip der *schwachen Lösung*. Hierbei hat man eine Differenzialgleichung, die in dem betrachteten Gebiet gleich null ist. Für die Elastostatik kann man hierbei die Gleichgewichtsbedingung verwenden. Diese kann man mit der virtuellen Verschiebung $\delta \underline{u}$

multiplizieren und über das Gebiet integrieren, sodass man

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{X}} dV = 0 \quad (6.4)$$

erhält. Umgeformt ergibt sich das zu

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{u} dV = \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{p} dO_p + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\underline{X}} dV \quad (6.5)$$

wobei die Terme auf der rechten Seite den Lasten entsprechen, die auf das Volumen V und die mit p belastete Oberfläche O_p wirken. Die schwierig zu lösende Differenzialgleichung hat sich nun schon zu einem Integrationsproblem vereinfacht. Daraus kann die Verschiebung bestimmt werden, weswegen man dies auch die Weggrößenmethode nennt. Die Verzerrungen und Spannungen erhält man aus Nachrechnungen, die mit den Gleichungen (6.2) und (6.3) berechnet werden. Diese Gleichung ist noch ganz allgemein für das Kontinuum gültig. Im nächsten Schritt wird das Gebiet in eine finite Menge von Elementen zerteilt.

6.2.2 Diskretisierung

Die Werte der Verschiebung \underline{u} werden nur an Aufpunkten, den sogenannten Knoten, bestimmt. Mittels einer von der Laufvariablen \underline{x} abhängigen Formfunktion $\underline{\underline{N}}$ wird der Verlauf von einem Knoten zu seinen Nachbarn definiert, um wieder einen kontinuierlichen Verlauf zu erhalten. Hierbei muss die Formfunktion an dem Knoten, von dem sie ausgeht, den Wert 1 und bei jedem anderen den Wert 0 annehmen. Allgemein ergibt sich somit

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{N}}(\underline{x}) \underline{u}^{(e)} \quad (6.6)$$

wobei $\underline{u}^{(e)}$ der Vektor der Verschiebungen eines Elementes e ist. Wenn man nun diese Gleichung in die Gleichung der schwachen Lösung (6.5) einsetzt, lässt sich $\delta(\underline{u}^{(e)})^T$ aus den Integralen raus ziehen und kürzen, da es von \underline{x} unabhängig ist.

$$\int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} dV \underline{u}^{(e)} = \int_{O_p} \underline{\underline{N}}^T \underline{p} dO_p + \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{X}} dV \quad (6.7)$$

Wobei sich das linke Integral zu der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^{(e)}$ ergibt.

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} = \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} dV \quad (6.8)$$

Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen lassen sich zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammenfassen, mit der dann die Lösung berechnet wird.

6.3 ABAQUS Analyse (H.G.)

6.3.1 Modell

Die numerische Analyse findet mit Hilfe des Programms ABAQUS des Anbieters Dassault Systemes statt. Das Programm ist für Studenten kostenlos erhältlich, jedoch ist diese Version auf eine Anzahl von 1000 Knoten beim Vernetzen des Bauteils beschränkt.

Das zuvor erstellte CAD-Modell wird zunächst in ABAQUS importiert. Da es sich nun noch um ein Bauteil aus Vollmaterialien handelt und für eine möglichst genaue Analyse ein Schalenmodell verwendet werden soll, muss das Modell zunächst umgewandelt werden. Dafür werden die Volumenkörper des Modells in zweidimensionale Flächen umgewandelt, denen im Folgenden dann eine Dicke zugeordnet werden kann (siehe Abb.6.1).

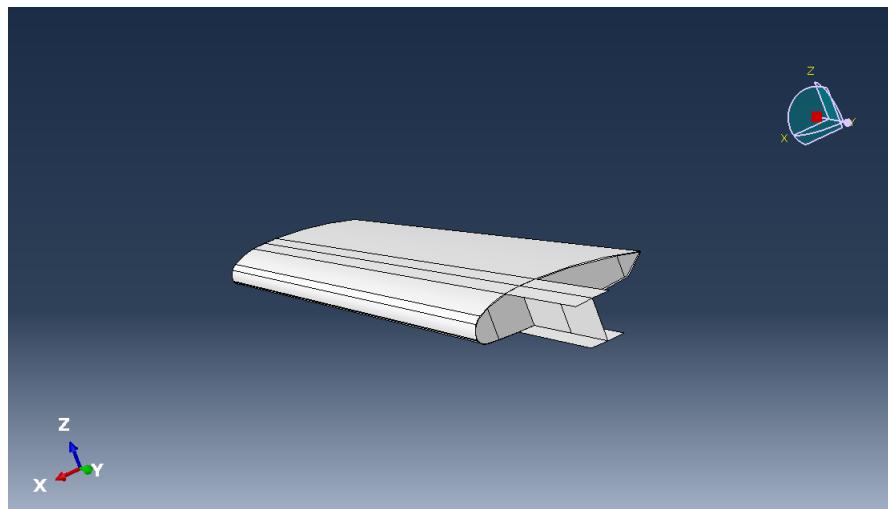


Abbildung 6.1: Schalenmodell

Daraufhin werden die Kennwerte der Materialien in das Programm integriert. Hierbei werden die Werte für GFK, den Schaum und die Rippen eingetragen (siehe Abb.11.33). Diese wurden in Kapitel 4.3.2 mit Hilfe von *elamX²* festgelegt. Für GFK wird das Material als Laminat erstellt, wodurch der E-Modul parallel und senkrecht zur Faser, sowie die Schubmoduln definiert werden können.

Nun wird das Schalenmodell in die verschiedenen Segmente unterteilt, denen dann Materialien und deren entsprechende Dicken und Anzahl von Schichten zugeordnet werden. Hierbei wird das Bauteil in den dicken und den dünnen Teil des Stegs, die Gurte, die Haut, sowie die Rippen unterteilt. Für die Bauteile aus GFK werden erst zwei zum Flügelkoordinatensystem um 45 und -45 Grad gedrehte GFK-Schichten definiert (siehe Abb.

11.6), dann der Schaum und daraufhin erneut zwei versetzte GFK-Schichten. Eine Schicht hat hierbei ein Viertel der zuvor berechneten Dicke ohne den Schaum. Für die Rippen wird eine Dicke von 3mm angenommen.

Als nächstes werden die Randbedingungen und angreifenden Kräfte festgelegt. Der Holm ist in der Einspannung fest gelagert. Daher wird an der Stelle der Lager A und B eine feste Einspannung angenommen. Die aufgenommenen Kräfte durch die Querkraftbolzen werden als Kräfte angebracht. Die Prüfkraft wird am Ende des Flügels an der L/4-Linie eingeleitet.

Daraufhin wird das Bauteil vernetzt. Hierbei wird eine Anzahl an Knoten pro Längeneinheit eingegeben und das Programm verbindet diese zu einem Netz aus Flächen. Durch die Begrenzung auf 1000 Knoten ist das Netz jedoch recht grob, wodurch die Berechnung ebenfalls eine gewisse Ungenauigkeit aufweisen kann.

6.3.2 Analyse

Zunächst wird eine Prüfkraft von 100N angelegt, um die maximale Absenkung zu ermitteln. Hierbei ergibt sich für die Absenkung $z_{max} = 17,34mm$, welche erwartungsgemäß an der Spitze des Flügels auftritt. Dies ist weniger als die geforderte Absenkung von $z_{max} = 20mm$, auf die der Flügel in den vorherigen Kapiteln ausgelegt wurde, und somit kann dieses Aufgabenkriterium als erfüllt angesehen werden (siehe Abb.6.2). Die Abweichung von diesem Wert lässt sich dadurch begründen, dass die vorherigen Berechnungen davon ausgegangen sind, dass nur der Holm die Biegung trägt. Auch wenn dies eine gute Näherung ist und für die Auslegung auch sinnvoll, trägt in Realität auch die Schale einen kleinen Anteil zur Biegesteifigkeit bei. Um herauszufinden, ob der Flügel eine hinreichen-

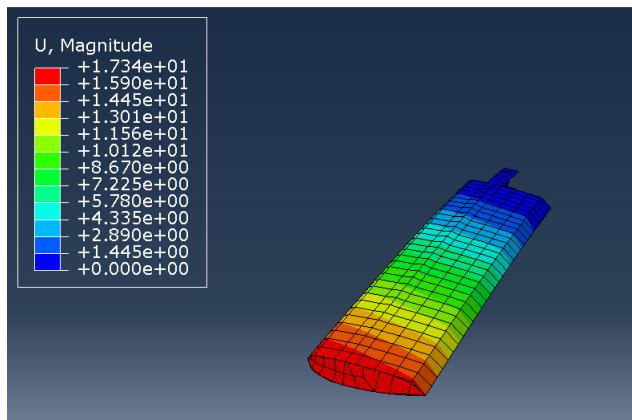


Abbildung 6.2: Absenkung bei einer Belastung von 100N

de Festigkeit aufweist, wird die Prüfkraft auf 500N erhöht. Nun müssen die maximalen Spannungen im Bauteil mit den Kennwerten verglichen werden. Das Modell zeigt nun maximale Spannungen an der Stelle des Lagers B an. Da sich dort allerdings noch eine nicht mit modellierte Verstärkung durch Holzblöcke befindet, sind diese Werte deutlich höher als in der Realität. Daher werden nur die Werte betrachtet, die sich ab der Wurzelrippe ergeben.

Die maximale Vergleichsspannung (Mises) ergibt sich im Steg des Holms. Diese wird hier nicht weiter behandelt, da bei ihr die Information über den Spannungszustand verloren geht und dieser für einen isotropen Stoff ausschlaggebend ist. Die Normalspannung in x_1 -Richtung ist im vorderen Teil des Stegs am höchsten und beträgt beim Maximum $85,63 \frac{N}{mm^2}$.

Die Normalspannung in x_2 -Richtung ist im Gurt der Unterseite des Flügels am höchsten

(im Versuchsaufbau Oberseite) und beträgt maximal $14,25 \frac{N}{mm^2}$. Die Spannung in x_3 -Richtung ist überall 0, da bei den Schalenelementen von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen wird.

Die Schubspannung ist in der Schale auf der Unterseite am höchsten. Hier ergibt sich ein Maximalwert von $16,72 \frac{N}{mm^2}$.

Das angenommene Koordinatensystem bezieht sich auf die oberste Schicht des Laminats.

Daher sind x_1 und x_2 immer in Richtung der Faser oder orthogonal dazu.

Da die Spannungen nicht in allen Schichten gleich sein müssen, haben sie allerdings eine geringe Aussagekraft. Eine bessere Aussage lässt sich durch die maximalen Dehnungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen treffen. Durch die Annahme, dass die Dehnung in allen Schichten gleich ist, kann diese in elamX eingegeben werden und so eine Sicherheit gegen Bruch ermittelt werden (siehe Abb. 11.13 - 11.16).

Richtung	Gurt oben	Gurt unten	Steg	Haut
ε_x	-0,00142	0,00206	0,00276	-0,00107
ε_y	-0,0015	0,00226	-0,00275	-0,000664
γ_{xy}	-0,00754	0,00843	0,00523	-0,00754
minimale Sicherheit	2,332	1,31	2,32	2,785

Die geringste Sicherheit ergibt sich im unteren Gurt mit 1,31. Dies ist hinreichend, um die Festigkeit des Flügels zu bestätigen.

Die Werte sind durch das Zusammenspiel aller Bauteile sehr viel kleiner als in den vorherigen Berechnungen. Dadurch bestätigt das FEM- Modell die vorangegangenen Berechnungen.

6.3.3 Beulanalyse

Da der Holmstummel bis zur Wurzelrippe C nicht ausreichend modelliert werden konnte und die Holzklötze in der Holmwurzel jegliches Beulen stark behindern, wird für die Beulauslegung eine feste Einspannung am Lager C angenommen (siehe Abb.6.3).

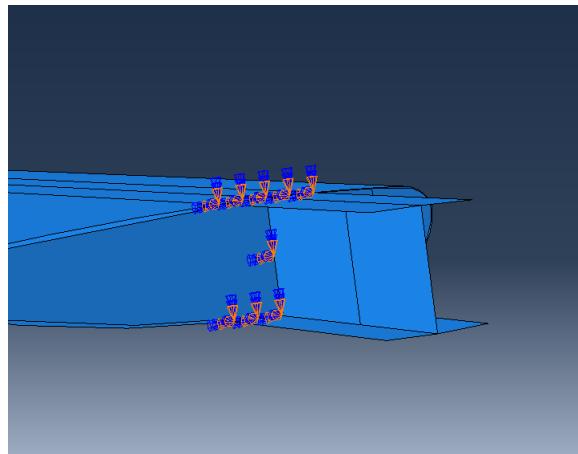


Abbildung 6.3: Einspannung am Lager C

Nun können die Eigenwerte für die Belastung von 100N, 500N und 1000N abgelesen werden.

Prüfkraft	Beulfaktor
100N	10,253
500N	2,0506
1000N	1,0253

Diese Werte sind alle größer als 1 und ändern sich antiproportional zur Kraft, damit ist der Flügel für alle drei Belastungsfälle ausreichend gegen das Beulen dimensioniert. Das Programm ermöglicht außerdem die Ausgabe möglicher Beulformen. Ein Beispiel ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Haut würde nah am Holmstummel beulen.

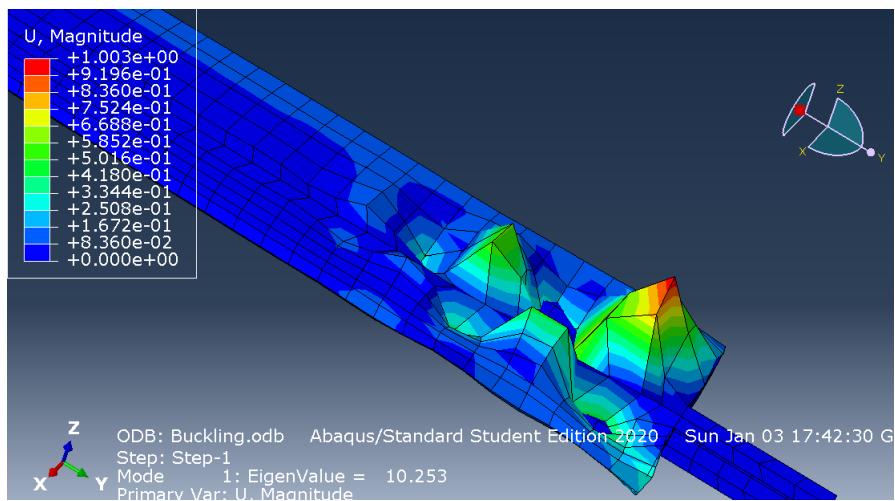


Abbildung 6.4: Beispiel Beulform

7 Konstruktion und Fertigung des Flügels

7.1 CAD-Konstruktion des Flügels (H.K.)

Auf Basis der dimensionierten Haut und des Holms soll ein CAD-Modell des Flügels erstellt werden. Zur Konstruktion wird das CAD-Programm Solid Edge in der Studentenversion verwendet. Als Grundlage dient eine gegebene unvollständig bemaßte technische Zeichnung der Profilkontur, aus der exakt entnommen werden kann, dass das Profil ohne die Hochauftriebselemente oder Querruder von einem Rechteck der Kantenlängen 172mm, dies entspricht der Profiltiefe, und 37,5mm gerade umschlossen wird. Aus den bekannten Längenangaben kann der Maßstab der gedruckten Zeichnung bezüglich des Modellmaßstabs zu 1 : 1,039 berechnet werden. Markante Punkte entlang der Kontur können in der Zeichnung vermessen werden und mithilfe des Maßstabs auf Punkte im CAD-Modell umgerechnet werden. Im CAD-Programm werden Tangentenbögen von Punkt zu Punkt gelegt, um die Kontur hinreichend glatt anzunähern. Die verwendeten Punkte werden durch die im Anhang befindliche technische Zeichnung der Profilkontur illustriert.

7.1.1 Konstruktion der Gurte

In den Bereichen oberhalb und unterhalb des Holms soll die Haut nicht in Sandwich-Bauweise ausgeführt sein. Für die Auslegung des Holms wurde davon ausgegangen, dass eine Dicke des Verbundmaterials der Haut von 0,75mm ausreichend ist, die nach Glei-

chung ?? 9 Lagen des Interglas 90070 Gewebes entspricht. Die genauere Auslegung der Haut hat gezeigt, dass nur zwei Lagen des Gewebes notwendig sind. Der entstehende Freiraum $t_{frei} = 0,75mm - 2 \cdot 0,078mm = 0,594mm$ zwischen der Haut und den weiter innen liegenden Gurten kann bei der Fertigung mit Harz aufgefüllt werden.

Der zu Beginn des Abschnitts 4.2.2 dimensionierte Holm mit rechteckigen Gurtquerschnitten, $b = 28mm$ und $h_a = 36mm$, wird nun so auf die Kontur des Profils gelegt, dass die Überdeckung der Gurte mit der umgebenden Haut möglichst gering ausfällt. Dann wird die Höhe h_a an den örtlichen inneren Abstand der oberen und unteren Haut auf $\tilde{h}_a = 35,8mm$ angepasst. Der rechteckige Querschnitt der Gurte wird mithilfe eines Offsets von $h = 1,941mm$ der Hautkrümmung angepasst. Diese Anpassungsmaßnahmen senken das Flächenträgheitsmoment leicht. Das resultierende Flächenträgheitsmoment \tilde{I}_x lässt sich aufgrund der komplexen Querschnittsgeometrie der Gurte nur mit dem CAD-Programm exakt bestimmen. Der Vergleich mit dem erforderlichen Flächenträgheitsmo-

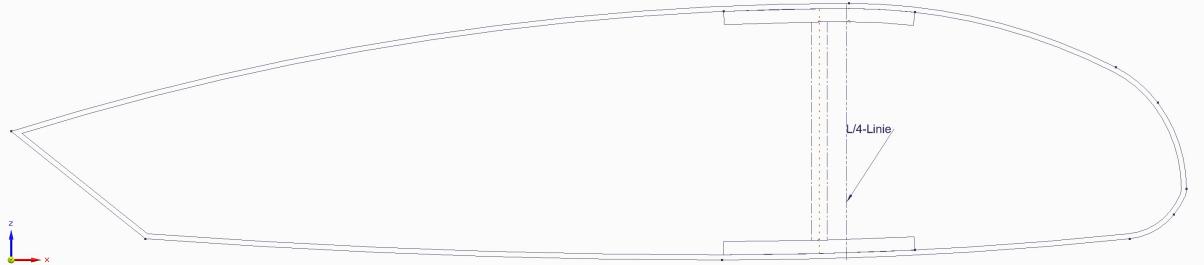


Abbildung 7.1: Haut und Gurte nach dem ersten Schritt der Konstruktion

ment zeigt, dass die angepasste Geometrie der Gurte die Steifigkeitsbedingung (vgl. Beziehung 4.43) erfüllt. Die Haut konstanter Dicke und die Gurte im ersten Schritt der Konstruktion werden durch Abbildung 7.1 veranschaulicht. Zusätzlich zeigt die Abbildung die ungefähre Lage der L/4-Linie. Diese wurde mithilfe einer vorhandenen Hilfsansicht der Tragfläche inklusive der Hinterkantenklappen und des Vorflügels, beide im eingefahrenen Zustand, ermittelt. In der Hilfsansicht wird die abgebildete Länge des mittleren auszulegenden Teils der Tragfläche gemessen. Der Maßstab der ausgedruckten Hilfsansicht bezüglich des Modellmaßstabes wird zu 1:2,529 berechnet. Diese Kenntnis ermöglicht die Berechnung des Abstandes der L/4-Linie zur Vorderkante der Haupttragfläche, der 42,4mm beträgt und besonders für die Berechnung der Torsion ausschlaggebend ist.

7.1.2 Konstruktion des Stegs

Im nächsten Schritt werden die beiden Stegseiten und der in der Mitte liegende Schaum konstruiert. Im CAD-Programm erfolgt dies mithilfe von nur einer Skizze, die der Extrusion der Einzelteile zugrunde liegt. So kann sichergestellt werden, dass in jeder Komponente der Bezug auf die angrenzenden Gurte und die unterschiedlichen Krümmungsradien der Seitenkanten gewahrt bleibt. Die Konstruktionen des Steges und des Schaumes erfordern auch die Berücksichtigung der verschieden belegten Unterteilungen des Steges. Während der innere Teil des Stegs, am inneren Holmstummel-Ende beginnend und 23mm in y -Richtung über die Aufnahme der Querkraftbolzen an Punkt C hinaus gehend, gemäß der Dimensionierung mithilfe des Laminatrechners mit 24 Lagen aufgeteilt zu jeweils zwölf Lagen auf beiden Seiten des Schaums belegt wird, soll der gesamte äußere Teil mit nur insgesamt vier Lagen gleichmäßig verteilt belegt werden. Es bietet sich an, die vier Lagen des äußeren Bereichs über die gesamte Holmlänge zu erstrecken. Die 20 verstärkenden Lagen enden 23mm hinter Punkt C in einem sanften Übergang mit einer Länge von 30mm . Der dünn belegte Teil wird durch einen 2mm breiten Schaumkern vor dem Beulen geschützt, der zum dick belegten Teil hin entsprechend schmäler wird. Das innere Holmstummel-Ende wird auf eine Länge von $l_0 = 30\text{mm}$ im Abstand vom Mittelpunkt des Lagers A abgeschätzt. Abbildung 7.2 veranschaulicht den prinzipiellen Aufbau. Eine technische Zeichnung im Anhang illustriert die Konstruktion von Gurten und Steg. Sie gibt außerdem Aufschluss über die wichtigsten Maße und stellt die unterschiedlichen Wandstärken des Schaumkerns und des Faserverbundanteils im Steg für die verschiedene Bereiche im Querschnitt grafisch dar.

7.1.3 Konstruktion der Haut und der Rippen

Um die Haut vor Beulerscheinungen zu schützen, soll ein Schaumkern zwischen die innere und äußere Hautschicht gelegt werden. Der Beulberechnung ist zu entnehmen, dass mit einem 3mm dicken Kern ausreichende Sicherheit gegen Beulen gegeben ist. Ein Schaumkern dieser Stärke ist darüber hinaus gut handhabbar und kann mithilfe eines heißen Drahtes einfach und kostengünstig aus einem Styrodurklotz ausgeschnitten werden. Um die Höhe h_a der Gurte möglichst nicht durch die Haut einzuschränken, soll der Schaumkern zu den Gurten hin über 5mm in einem sanften Übergang auslaufen, sodass nur das Laminat über dem oberen und unter dem unteren Gurt hergeführt werden muss. Abbildung 7.3 veranschaulicht die prinzipielle Gestaltung der Haut im Bereich des oberen Gurtes, der grau dargestellt ist.

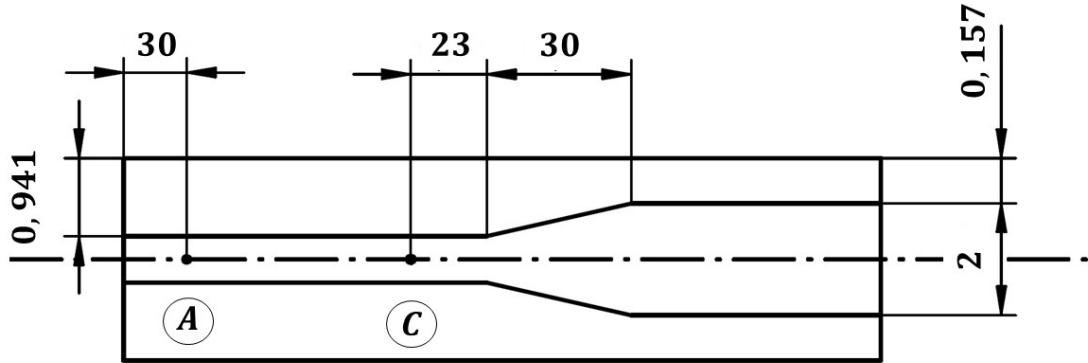


Abbildung 7.2: Prinzipskizze der Sandwichstruktur im Steg

Der Freiraum zwischen Gurten, den Steglagen und der inneren Hautlage kann nun für die Vorder- und Hinterseite des Steges umrandet werden. Die darauf basierende Skizze ist die Grundlage der Konstruktion der zweigeteilten Wurzel- und Endrippe. Die Rippen werden in ihrer Dimensionierung als gegeben angenommen, eine Auslegung erfolgt im Rahmen dieser Projektarbeit nicht. Ein Belastungstest der Tragfläche würde in der Realität durch eine an der Endrippe angreifende Last erfolgen. Damit die Last angeschlagen werden kann, müssen zwei Bohrungen in der Endrippe vorgesehen werden, deren Abstand durch das gegebene Bauteil Endscheibe bestimmt wird. Zur einfachen Montage der Prüfeinheit werden zwei Gewindegürtel konstruiert, die in die Bohrungen eingefügt werden.

7.1.4 Konstruktion unterstützender Bauteile des Holms

Die Kraftaufnahme der als Fest- und Loslager modellierten Punkte A und B erfolgt durch zwei Hauptbolzen, die im Flugzeug die Tragflächen miteinander verbinden. In diesem Fall werden die Lagerkräfte von maximal 5085N an den Teststand übertragen. Damit bei der Krafteinleitung in den Holm Spannungsspitzen vermieden werden, soll die Auflagefläche der Bolzen vergrößert werden. Dies geschieht, indem eine Holzkonstruktion für Vorder-

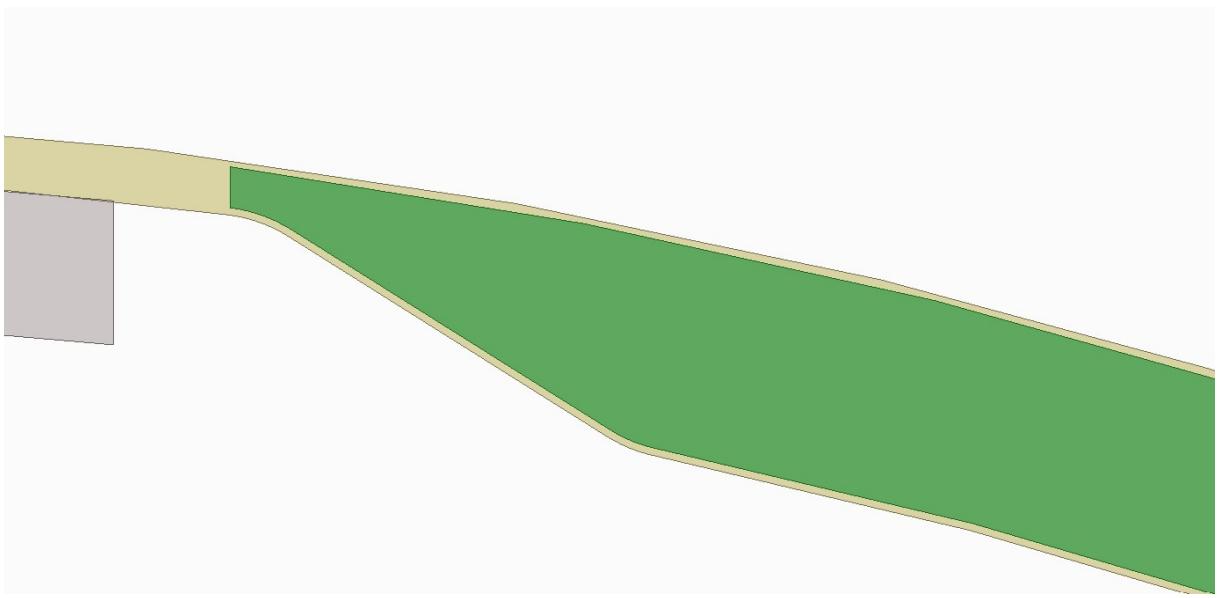


Abbildung 7.3: Hautsandwich am Übergang zum Gurt

und Rückseite des Holms erstellt wird, die der Kontur der Gurte angepasst ist und Bohrungen für die Bolzen enthält. Diese Klötze werden auf ihrer jeweiligen Stegseite mit den Gurten und dem Steg verklebt. Da der Abstand der Bohrungen mit 76mm gering ist, wird ein längerer Holzklotz für beide Bohrungen konstruiert. Aussparungen an den Seiten und zwischen den Bohrungen sollen das Gewicht der Klötze reduzieren. Zum Schutz der Hauptbolzen werden zwei Messinghülsen konstruiert und in die Bohrungen eingefügt. So kann verhindert werden, dass die gefetteten Bolzen bei Montage und Demontage Späne aus dem Steg lösen oder sich verkanten. Die Messinghülsen weisen eine Wandstärke von 0,5mm und einen Innendurchmesser von 8mm auf. In der Fertigung kann auf kostengünstige Messingrohre zurückgegriffen werden. Die Konstruktion wird durch Abbildung 7.4 veranschaulicht. Eine technische Zeichnung des vorderen Holzklotzes mit Angaben zu den Hauptabmessungen befindet sich im Anhang.

7.1.5 Querkraftbolzen und Montage auf dem Teststand

Die Prüfung, ob die gesamte Auslegung der Tragfläche den Bestimmungen der Aufgabenstellung gerecht wird, erfolgt anhand einer FEM-Berechnung, anstelle der tatsächlichen Fertigung des Flügels und des Bruchtests. Dennoch kann mithilfe gegebener Zeichnungen der Teststandelemente geprüft werden, ob die konstruierte Tragfläche in der Realität auf dem Teststand montierbar wäre. Der Abstand der Hauptbolzen zueinander wurde bereits

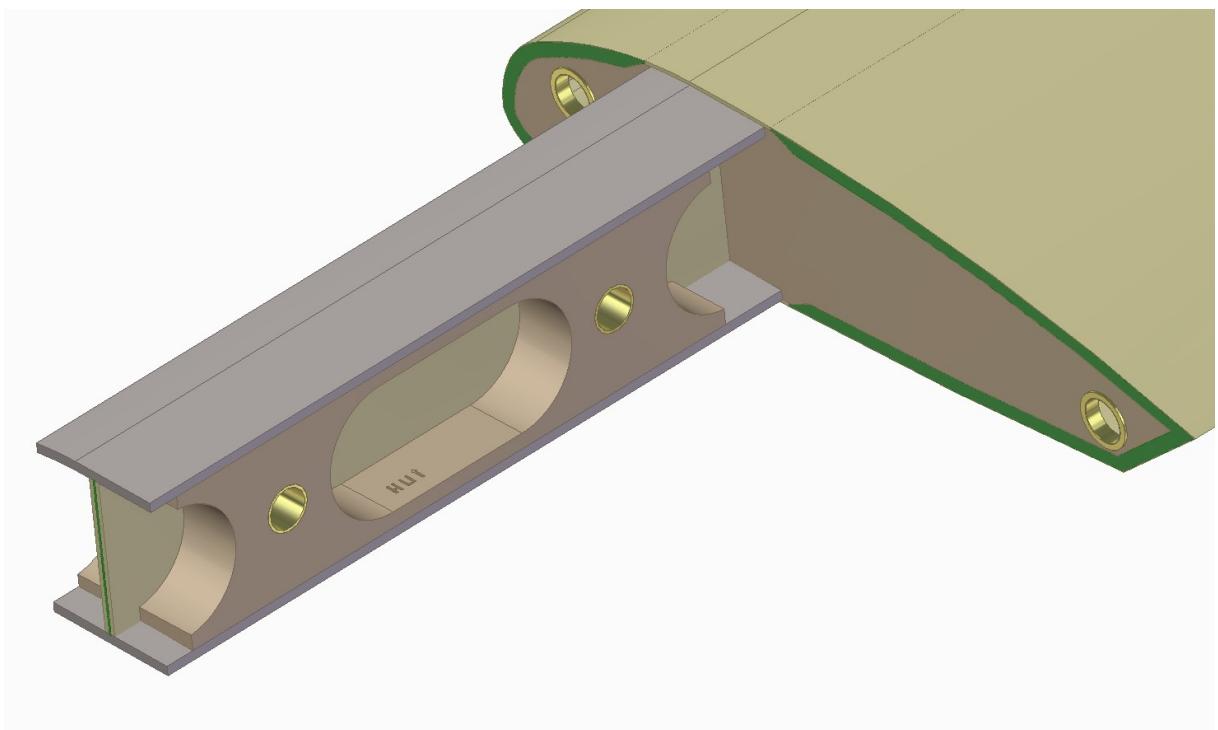


Abbildung 7.4: Holzklötze und Hülsen

in der frühen Modellierung des Holms als Biegebalken berücksichtigt. Für die Positionierung der Bohrungen und Hülsen der Querkraftbolzen wird der Abstand zwischen den Langlöchern und der Aussparung für den Holm in der Montageplatte gemessen. An der gegenüberliegenden Wurzelrippe können so die Bohrungen festgelegt werden. Bei Verwendung der Maße aus der gegebenen technischen Zeichnung der Montageplatte, fällt auf, dass das Langloch zur Aufnahme des in Flugrichtung hinteren Querkraftbolzens für diese Konstruktion ungeeignet ist. Es liegt außerhalb des Bereichs der Wurzelrippe. Dies wird auf die Anordnung des Holms in der Tragfläche zurückgeführt, die die Position der Flügelkontur bezüglich der Montageplatte festlegt. Sie kann nachträglich nicht ohne größere Änderungen des Holmquerschnitts und eine damit verbundene Neuauslegung verändert werden. Abbildung 11.36 des Anhangs veranschaulicht die ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs. Um eine grundsätzlich neue Dimensionierung aller Komponenten zu vermeiden, wurde die Position des Langlochs angepasst. Da die Querkraftbolzen einen großen Abstand zueinander aufweisen (vgl. Abb. 7.4), müssen zur Aufnahme der Torsionsmomente nur kleine zusätzliche Kräfte aufgenommen werden. Die Radien der Langlöcher in der Montageplatte begrenzen den Durchmesser der Querkraftbolzen auf maximal 8,5mm. Ge-

mäß 4.6.1 ist bereits ein Durchmesser von 8mm ausreichend. Auch für die Querkraftbolzen werden Hülsen konstruiert, die die Wurzelrippe schützen und die Montage erleichtern. Sie sind in Abbildung 7.4 ebenfalls dargestellt.

Alle Komponenten der Tragfläche und ihre Positionen sind im Anhang auf einer Explosionszeichnung ersichtlich. Eine Grafik des gesamten CAD-Modells und der Bauteile des Teststandes ist ebenfalls im Anhang enthalten (vgl. Abb. 11.35). Abbildung 11.37 zeigt die auf der Montageplatte positionierte Tragfläche unter Verwendung des angepassten Langlochs.

7.2 Massenabschätzung (H.K.)

Auf Basis der Dimensionierung der einzelnen Komponenten kann die Masse der Tragfläche abgeschätzt werden. Im Folgenden werden die Volumina bestimmt, um mithilfe der Dichte des jeweiligen Werkstoffes auf die Masse zu schließen. Mithilfe des CAD-Programms können die Volumina zeitsparend und exakt bestimmt werden. Dies ist besonders für komplizierte Geometrien, zum Beispiel für den Schaumkern der Haut hilfreich.

7.2.1 Masse der Gurte

Für den oberen und unteren Gurt ergeben sich folgende Werte:

$$V_{Gurt,o} = A_{Gurt,o} \cdot (l_0 + l_1 + l_2 + l_3) = 4,983 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.1)$$

$$V_{Gurt,u} = A_{Gurt,u} \cdot (l_0 + l_1 + l_2 + l_3) = 4,98 \cdot 10^{-5} m^3. \quad (7.2)$$

Im nächsten Schritt wird die Dichte der Faserverbundbauteile bestimmt. Sie errechnet sich gemäß der Mischungsregel nach [Sch05] zu

$$\rho_{Verbund} = \varphi \cdot \rho_f + (1 - \varphi) \cdot \rho_m = 1728 \frac{kg}{m^3}. \quad (7.3)$$

Gemäß dieser Formel sind die Dichten der Verbundbauteile unabhängig von den verwendeten Geweben und ihren Flächengewichten, solange das gleiche Fasermaterial und der gleiche Faservolumengehalt vorliegen. Damit ergeben sich die Massen der Gurte zu

$$m_{Gurt,o} = V_{Gurt,o} \cdot \rho_{Verbund} = 0,0861 kg \quad (7.4)$$

$$m_{Gurt,u} = V_{Gurt,u} \cdot \rho_{Verbund} = 0,086 kg. \quad (7.5)$$

7.2.2 Masse des Stegs

Unterteilt in den Anteil des Schaums und den des Verbundmaterials, ergeben sich für den Steg folgende Volumina:

$$V_{Steg,Verb} = A_{Steg,Verb} \cdot \tilde{h}_i = 1,813 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.6)$$

$$V_{Steg,Schaum} = A_{Schaum} \cdot \tilde{h}_i = 4,953 \cdot 10^{-5} m^3. \quad (7.7)$$

Für die jeweiligen Volumina folgt mit der Dichte $\rho_{Verbund}$ und der Dichte des Schaums $\rho_{Schaum} = 35 \frac{kg}{m^3}$:

$$m_{Steg,Verb} = V_{Steg,Verb} \cdot \rho_{Verbund} = 0,031kg \quad (7.8)$$

$$m_{Steg,Schaum} = V_{Steg,Schaum} \cdot \rho_{Schaum} = 0,002kg \quad (7.9)$$

Als Werkstoff für den Schaum steht Styrodur zur Verfügung. Laut Trendbericht aus dem Magazin *Kunststoffe* in der Ausgabe 10/2008 [Gle08], beträgt die Dichte von extrudiertem Polystyrol-Hartschaumstoff (XPS) $25 \frac{kg}{m^3}$ bis $45 \frac{kg}{m^3}$. Für die Massenabschätzung wurde der Mittelwert angenommen.

7.2.3 Masse der Haut

Das Volumen des Schaumkerns der Haut beträgt

$$V_{Haut,Schaum} = A_{Haut,Schaum} \cdot l_3 = 6,143 \cdot 10^{-4} m^3. \quad (7.10)$$

Mit der Dichte ρ_{Schaum} beträgt die Masse des Kerns

$$m_{Haut,Schaum} = V_{Haut,Schaum} \cdot \rho_{Schaum} = 0,022kg. \quad (7.11)$$

Zur Bestimmung der Masse des Faserverbundanteils in der Haut wird die Länge der abgewickelten Hautschichten mit dem CAD-Programm bestimmt. Für die innere und die äußere Schicht ergeben sich:

$$l_{Haut,innen} = 346,46mm \quad (7.12)$$

$$l_{Haut,aussen} = 367,83mm \quad (7.13)$$

Die Dicke einer Schicht des Interglas 90070 Gewebes mit einer flächenbezogenen Masse von $80 \frac{g}{m^2}$ berechnet sich nach [Sch05] mit der Formel:

$$t = n \cdot \frac{m}{Lb} \cdot \frac{1}{\varphi \cdot \rho_f}. \quad (7.14)$$

Für eine Schicht, $\varphi = 0,4$ und $\rho_f = 2550 \frac{kg}{m^3}$ ist $t_{Haut} = 0,078mm$. Die Breite entspricht Länge l_3 , damit ergibt sich das Volumen der inneren und äußeren Hautschicht zu:

$$V_{Haut,innen} = l_{Haut,innen} \cdot l_3 \cdot t_{Haut} = 2,089 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.15)$$

$$V_{Haut,aussen} = l_{Haut,aussen} \cdot l_3 \cdot t_{Haut} = 2,218 \cdot 10^{-5} m^3 \quad (7.16)$$

und für die Massen folgt:

$$m_{Haut,innen} = V_{Haut,innen} \cdot \rho_{Verbund} = 0,036\text{kg} \quad (7.17)$$

$$m_{Haut,aussen} = V_{Haut,aussen} \cdot \rho_{Verbund} = 0,038\text{kg}. \quad (7.18)$$

Für die Gesamtdicke des Verbundanteils der Haut wurde in der Auslegung $0,75\text{mm}$ vorgesehen. Aus der geringeren tatsächlichen Dicke ergeben sich ober- und unterhalb der Gurte Freiräume mit einer Dicke von $t_{frei} = 0,75\text{mm} - 2 \cdot 0,078\text{mm} = 0,594\text{mm}$. Dieser Freiraum wird mit Harz ausgefüllt und muss zusätzlich berechnet werden. Die Länge des Bereichs, in dem kein Schaumkern die innere und äußere Lage trennt und in der folglich dieser Freiraum auftritt, wird im CAD-Programm für die Oberseite zu $l_{frei,o} = 31,18\text{mm}$ und für die Unterseite zu $l_{frei,u} = 32,1\text{mm}$ bestimmt. Die Krümmung in diesem Bereich kann wegen des großen Krümmungsradius und der kleinen Länge vernachlässigt werden. Es ergeben sich die Querschnittsflächen der Freiräume:

$$\begin{aligned} A_{frei,o} &= l_{frei,o} \cdot t_{frei} = 18,52\text{mm}^2 \\ A_{frei,u} &= l_{frei,u} \cdot t_{frei} = 19,07\text{mm}^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Über die Extrusionslänge der Tragfläche l_3 folgt für das Volumen der Freiräume:

$$\begin{aligned} V_{frei,o} &= A_{frei,o} \cdot l_3 = 1,432 \cdot 10^{-5}\text{m}^3 \\ V_{frei,u} &= A_{frei,u} \cdot l_3 = 1,474 \cdot 10^{-5}\text{m}^3 \end{aligned} \quad (7.20)$$

und mit der Dichte $\rho_m = 1180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$:

$$\begin{aligned} m_{frei,o} &= V_{frei,o} \cdot \rho_m = 0,017\text{kg} \\ m_{frei,u} &= V_{frei,u} \cdot \rho_m = 0,018\text{kg}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

7.2.4 Masse der Holzklötzte und Rippen

Da die Holzklötzte ebenfalls eine komplizierte Geometrie aufweisen, wird auch ihre Masse der Einfachheit halber mit dem CAD-Programm berechnet. Als Material wurde in der Bolzenauslegung Buchenholz gewählt, das nach [Win20] eine Dichte von $\rho_{Buche} = 610 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ aufweist. Die Masse eines jeden Holzklotzes wird damit zu $m_{Klotz} = 0,016\text{kg}$ bestimmt. Auf die gleiche Weise wird zur Bestimmung der Massen der Rippen verfahren. Die Wurzelrippe und die Endrippe bestehen jeweils aus zwei Teilen, die Masse einer Rippe wird mithilfe des Programms für Buchenholz zu $m_{Rippe} = 0,004\text{kg}$ bestimmt. Darüber hinaus

müssen die Massen der Hülsen ermittelt werden. Als Werkstoff ist Messing vorgesehen, dessen Dichte gemäß [MMH20] zu $\rho_{\text{Messing}} = 8400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ angenommen wird. Die beiden Hülsen der Hauptbolzen wiegen damit jeweils $m_{\text{Haupthuelle}} = 0,003 \text{ kg}$ und die der Querkraftbolzen jeweils $m_{\text{Querhuele}} = 0,001 \text{ kg}$. Die beiden zur Verbindung mit der Belastungseinheit des Teststandes erforderlichen Gewindegürtel der Endrippe werden aus Stahl gefertigt. Ihre Masse beträgt jeweils $m_{\text{Endhuele}} = 0,001 \text{ kg}$.

7.2.5 Abschätzung der Verklebungen und der Gesamtmasse

Einen weiteren Anteil an der Gesamtmasse liefern die Klebeverbindungen. Zur Verklebung der Rippen mit dem Holm sind Holzklötze vorgesehen, die an die Vorder- und Hinterseite des Stegs geklebt werden und dadurch eine ausreichend große Klebefläche zur Verfügung stellen. Die Breite der Klötze wurde im Abschnitt 8.2 zu $1,56 \text{ mm}$ berechnet. Zur einfachen Fertigung können Holzleisten mit einem quadratischen Querschnitt von $2 \text{ mm} \cdot 2 \text{ mm}$ gewählt werden. Bei einer Länge von \tilde{h}_i beträgt die Masse jeder Leiste weniger als $0,1 \text{ g}$. Da nur vier Leisten vorgesehen sind, kann die Masse vernachlässigt werden. Die Verklebungen von Steg und Gurt, sowie die Klebestellen zwischen den Halbschalen, sollen mit Mumpe und ohne den Einsatz zusätzlicher Gewebelagen oder Leisten erfolgen. Es wird angenommen, dass die Massen der Klebestellen, die allein an der Kontaktfläche zweier Bauteile liegen, vernachlässigbar sind. Lediglich die Klebebreite zwischen den Gurten und dem Steg in den Bereichen 1 und 2 ist breiter als der Steg selbst, sodass von außen zusätzlich Mumpe aufgetragen werden muss. Es wird ein Dreiecksquerschnitt der Klebefuge angenommen, der in Abbildung 7.5 für den oberen Gurt dargestellt wird. Die Länge der Fuge beträgt $l_0 + l_1 + l_2 = 0,143 \text{ m}$ in Holmlängsrichtung. Mit $\rho_M = 1180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ als angenommene Dichte der Mumpe ergibt sich die Masse der Verklebung zu $m_{\text{Kleber}} = 0,015 \text{ kg}$

Abschließend wird die Gesamtmasse aus der Summe der einzelnen Massen berechnet. Sie ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 m_{\text{ges}} &= m_{\text{Gurt},o} + m_{\text{Gurt},u} + m_{\text{Steg},\text{Verb}} + m_{\text{Steg},\text{Schaum}} \\
 &\quad + m_{\text{Haut},\text{Schaum}} + m_{\text{Haut},\text{innen}} + m_{\text{Haut},\text{außen}} \\
 &\quad + 2 \cdot m_{\text{Rippe}} + 2 \cdot m_{\text{Klotz}} \\
 &\quad + 2 \cdot m_{\text{Haupthuelle}} + 2 \cdot m_{\text{Querhuele}} + 2 \cdot m_{\text{Endhuele}} \\
 &\quad + m_{\text{frei},o} + m_{\text{frei},u} + m_{\text{Kleber}} \\
 &= 0,366 \text{ kg}
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

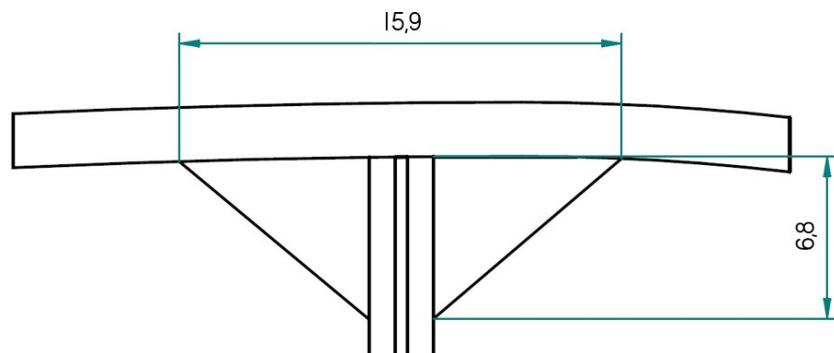


Abbildung 7.5: Verklebung von Steg und Gurt

Die Gewichtslimitierung von 0,75kg wird eingehalten.

7.3 Bauanleitung für die Fertigung (T.B.)

Nach der erfolgten Auslegung, Dimensionierung und Konstruktion des Tragflügels erfolgt, die Entwicklungsphase abschließend, der Bau eines Prototyps. Versuchsbauten werden, neben der Erprobung der Fertigung und Funktion, hauptsächlich für Strukturtests zum Nachweis der erfolgten Rechnungen genutzt. Um den Modellflügel des Zaunkönigs fertigen zu können, wird im Folgenden eine grob-strukturierte Anleitung gestellt. Dabei werden jedoch nicht alle notwendigen Nebenschritte genannt, sondern von erfahrenen Handwerkern als bekannt vorausgesetzt. Ebenfalls wird nicht auf eine vorherige Fertigung kleinerer Teile eingegangen.

Der Bau des Flügels erfolgt in drei Abschnitten. Zuerst soll der Holm gebaut werden, danach die Flügelschale und abschließend erfolgt die Verklebung der Bauteile. Es werden beide Negativformen der Profilform zur Verfügung gestellt, verbaut werden die Gewebe Interglas 90070 (bidirektional) und 92145 (annähernd unidirektional), das Epoxidharz L385 inkl. Härter H386, Aerosil oder Baumwollflocken zum Andicken des Harze (ugs. Mumpe), Messing und Buchenholz. Zur Positionierung von Bauteilen und zum eigenen Formenbau sollen Strangprofile genutzt werden.

1. Holm:

- (a) Jeweils zwei Aluminiumprofile werden als Formwände für die Holmgurte in beiden Profilformen positioniert. Dadurch wird die Breite garantiert, während die Profilform die Wölbung schafft. Die Flügelform wird durch gefräste Profile verlängert, um den Holmstummel ebenfalls in gewölbter Geometrie bauen zu können.
- (b) Anschließend werden je 9 Lagen Interglas 92145 in diesen Formen laminiert. (Belegung nach Kapitel 4.4)
- (c) Nach dem Aushärten werden sowohl die Gurte als auch die Aluminiumprofile wieder aus der Profilform entnommen.
- (d) Die Gurte werden an den Enden auf die passende Länge geschliffen.
- (e) Der Schaumstoff wird zugeschnitten und die Abstufung geschliffen.
- (f) Der Schaumstoff wird nun mit angedicktem Harz (Harz vermischt mit Microballoons) „abgespachtelt“, um ein Vollsaugen der Poren mit nicht-gehärtetem Harz zu vermeiden. Der folgende Schritt muss so zeitnah erfolgen, dass die Härtung

noch nicht erfolgt ist. Dadurch wird eine Nass-Nass-Verklebung des Schaumstoffs mit Geweben garantiert.

- (g) Es werden Lagen Interglas 90700 auf einer ebenen Fläche laminiert. Dabei muss auf die Abstufung von 12 auf 2 Gewebelagen und auf die 45°-Ausrichtung geachtet werden. Danach wird der Schaum positioniert und anschließend wieder mit 12 bis 2 Lagen in umgekehrter Reihenfolge der Abstufung belegt (Belegung nach Kapitel 4.4).
- (h) Nach dem Härten des Steg-Sandwichs wird dieser auf das Endmaß geschliffen.
- (i) Mittels kleiner Holz-Klebewinkel wird der Steg auf einem Holmgurt positioniert und mit Harz verklebt.
- (j) Nun werden die Holzklötze für die Bolzenaufnahmen, die Wurzlippe und die Endlippe eingeklebt. An den verbleibenden Kanten der Verklebung des Steges mit dem Gurt wird mit Mumpe die nötige Klebefläche geschaffen.
- (k) Sobald die Mumpe gehärtet ist, wird der andere Gurt auf den Steg, die Rippen und die Holzklötze geklebt und die Klebekanten werden ebenfalls mit Mumpe ausgefüllt.
- (l) Abschließend werden in den Steg an den entsprechenden Stellen Löcher gebohrt und die Messinghülsen eingesetzt. Dabei kann die exakte Ausrichtung der Buchsen durch eine gleichzeitige Verbindung des Teststands mit Bolzen/Stiften erfolgen.

2. Flügelschale:

- (a) Anhand der Profilformen wird der Schaumstoff zugeschnitten und die Schrägen werden geschliffen.
- (b) Der Schaumstoff wird auch hierbei mit angedicktem Harz „abgespachtelt“, um ein Vollsaugen der Poren mit nicht gehärtetem Harz zu vermeiden. Der folgende Schritt muss wiederum so zeitnah erfolgen, dass die Härtung noch nicht erfolgt ist. Dadurch wird eine Nass-Nass-Verklebung des Schaumstoffs mit Geweben garantiert.
- (c) In beide Profilschalen wird die äußere Lage Interglas 90070 laminiert, anschließend wird der Schaumstoff positioniert und die innere Lage folgt (Belegung nach Kapitel 4.4).

3. Verklebung:

- (a) Nun wird der Holm inkl. der Rippen in die untere Schale mit Mumpe geklebt. Entsprechende Hohlräume sollten mit Mumpe aufgefüllt werden, um eine durchgehend stoffschlüssige Verbindung zu schaffen.
- (b) Darauf wird die obere Flügelschale verklebt, dabei wird diese sowohl mit dem Holm, als auch mit der unteren Schale verklebt. Da es sich hierbei um eine Blind-Verklebung handelt, ist es zu empfehlen, etwas überschüssig Mumpe aufzubringen.
- (c) Die äußereren Klebekanten beider Flügelschalen werden in Form geschliffen.
- (d) Der Flügel ist nun fertiggestellt, abschließend könnte dieser gespachtelt und lackiert werden. Darauf wird jedoch aus Gewichtsgründen verzichtet. Um dabei nicht die äußere Gewebelage zu beschädigen, wäre es dafür angebracht, eine Schutz-Gewebelage zusätzlich in den Lagenaufbau einzuplanen.

Als grundlegendes Fertigungsverfahren steht das Handlaminier-Verfahren zur Verfügung. Neben diesem steht außerdem das Vakuumpressen und die Vakuuminjektion zur Auswahl. Ersteres Herstellungsverfahren beruht darauf, dass Gewebe- bzw. Gelegelagen manuell mit Pinseln und Schaum-Rollen mit Harz getränkt, per Hand ausgerichtet und anschließend mit diesen Werkzeugen entlüftet werden. Dieses bringt einen niedrigen Faservolumengehalt, jedoch auch eine individuellere Gestaltung eines Bauteils in offenen Formen mit sich.

Beim Vakuumpressen handelt sich um eine Weiterentwicklung dieses Verfahrens. Nach dem eigentlichen Laminieren wird das Bauteil zusätzlich mit einer Folie abgedichtet, sodass die eingeschlossene Luft entzogen werden kann und die Folie somit einen zusätzlichen Druck auf das Bauteil ausübt. Dadurch kann überschüssiges Harz von einem aufgebrachten Fließ aufgenommen werden, sodass der Faservolumenanteil steigt. Es muss jedoch in Erfahrung gebracht werden, ob bei Sandwich-Laminaten der Stützstoff dem Flächendruck standhalten kann.

Der Faservolumenanteil kann weiter gesteigert werden, in dem das Harz nicht während der Belegung eingebracht, sondern nach dem Vakuumieren mittels Unterdruck in das Gewebe gesaugt wird. Hierbei ist jedoch Erfahrung nötig, ob das Harz die geforderte Zähigkeit aufweist, um alle Fasern tränken zu können. Der hohe Faservolumengehalt (ca. 50%) ist jedoch auch mit einem höherem Aufwand verbunden. [Wit14]

Es erscheint sinnvoll, den Tragflügel im Handlaminat herzustellen. Für die Gewichtseinsparung und Steifigkeitserhöhung (Mischungsregel) durch einen höheren Faservolu-

mengehalt wären die beiden anderen Verfahren vorteilhafter, dieses würde aber nicht den zusätzlichen Aufwand und die nicht zwingend erforderlichen Gewichtserspartnisse rechtfertigen. Außerdem können so kurzfristig kleinere Anpassungen der Formgestaltung während der Fertigung einfach durchgeführt werden, was sich für einen Prototypen als unabdingbar gestaltet. Außerdem werden durch die Wahl der Fertigung ein geringerer Erfahrungsschatz und weniger Halb- und Werkzeuge für die Fertigung benötigt.

8 Zusammenfassung

8.1 Die Berechnungen im Überblick (H.K.)

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Auslegungsschritte und Berechnungen zusammengefasst und die wichtigsten Aspekte herausgestellt.

Die gesamte Auslegung folgte übergeordneten Zielsetzungen, die das mechanische Verhalten bei quasistatischer Belastung an der Endrippe vorgeben. Bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 100N$ darf sich die Flügelspitze um höchstens $w(100N) = 22mm$ absenken. Um diese Bedingung sicher zu erfüllen wurde ein Sicherheitsfaktor von $j = 1,1$ festgelegt, der die zulässige Absenkung auf $w_{j=1,1}(100N) = 20mm$ verringert. Bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500N$ darf die Tragfläche nicht versagen und Beulerscheinungen dürfen nicht auftreten. Zusätzlich sollte ein Hauptaugenmerk auf das möglichst geringe Gewicht der Konstruktion gerichtet sein.

Der Auslegung des Holms ging die *Modellierung als Biegebalken* voraus, der mit der schubstarren Balkentheorie nach Bernoulli berechnet wurde. Zur Modellierung wurden die Hauptbolzen Lager interpretiert, die Querkraftbolzen und die Prüfkraft als äußere Lasten. Vorgegebene Längenangaben des Teststandes und der Tragfläche bestimmen die Maße der einzelnen Bereiche. Für jeden Bereich wurden die Differentialgleichungen des Biegebalkens aufgestellt und gelöst. Die zentralen Ergebnisse sind die Kenntnisse der Schnittkraft- und -momentenverläufe, sowie die erforderliche Biegesteifigkeit von $EI_x = 962,552Nm^2$ zur Einhaltung der maximalen Absenkung $w_{j=1,1}(100N)$. Zur Einhaltung der Anforderungen an die Festigkeit sind die Querkräfte $Q_1(500N) = 5085,5N$ in Bereich 1, $Q_2(500N) = 0N$ in Bereich 2 und $Q_3(500N) = -500N$ in Bereich 3 relevant.

Die *Holmgurte* nehmen, entsprechend der Schubfelträgertheorie, das Biegemoment auf und sind damit Hauptbestandteil der Auslegung zur Einhaltung des Steifigkeitskriteriums. Um das erforderliche Flächenträgheitsmoment der Rechteckquerschnitte, das sich aus der Biegesteifigkeit EI_x und dem aus der Mischungsregel bestimmmbaren E-Modul in Fadenrichtung $E_{11} = 31580MPa$ berechnen lässt, bei einer möglichst kleinen und damit gewichtsoptimierten Querschnittsfläche zu erreichen, wurden die Gurte in z-Richtung möglichst weit auseinander gelegt und möglichst breit in x-Richtung gestaltet. Die resultierende Gurtdicke wird mit $n = 9$ Lagen des annähernd unidirektionalen Gewebes Interglas 92145 erreicht und beträgt damit $\tilde{h} = 1,941mm$. Die Anpassung der rechteckigen

Gurtquerschnitte an die gekrümmte Profilkontur der Tragfläche verringert das Flächenträgheitsmoment leicht, dennoch ist das dadurch entstandene $\tilde{I}_x > I_{min}$ und die in den Randfasern resultierende Spannung an der Stelle der maximalen Biegebeanspruchung weniger als halb so groß, wie die zulässige Spannung des unidirektionalen Handlaminats.

Der *Holmsteg* wird durch drei Kraftflüsse beansprucht. Durch die stoffschlüssige Verbindung von Gurten und Steg wird die Längsdehnung ϵ_{Gurt} dem Steg aufgeprägt und führt zu einem Normalkraftfluss n_ϵ parallel zu den Gurten. Aufgrund der Absenkung des Holms entstehen Druckkräfte, die eine zu den Gurten senkrechten Kraftfluss n_A erzeugen. Zusätzlich wirkt ein Schubfluss q_s . Zur Vorauslegung wurde der Glasfaserverbund durch allgemeine Dimensionierungskennwerte charakterisiert, bezüglich der Steifigkeitseigenschaften mit $K_{E\#}$ und mit $K_{\sigma d}$ für die Festigkeitseigenschaften. Mithilfe der VDI 2013 konnten auf diese Weise die Lagenanzahlen zu $n = 20$ für die Bereiche 1 und 2 und $n = 2$ für den Bereich 3 bestimmt werden.

Der Tatsache, dass die Auslegung des Holmstege nach dieser Richtlinie nur überschlägig erfolgt, wurde in der detaillierteren Dimensionierung mit der *CLT* Rechnung getragen. Diese berücksichtigt die gegebenen Materialkennwerte des Laminats. Die aus der Balkenanalyse und Schubflussberechnung hervorgehenden Beanspruchungen, sowie die Lagenanzahlen der Vorauslegung wurden als Grundlage für das Festigkeitskriterium nach Puck verwendet. Mithilfe des Laminatrechners ließen sich die Lagenanzahlen und Beanspruchungen variieren und Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch bestimmen. Die Analyse hat gezeigt, dass die Lagenanzahlen erhöht werden mussten, auf $n = 24$ in den Bereichen *I* und *II*, sowie $n = 4$ im Bereich 3.

Um die *Sicherheit gegen Beulen* für den Holm zu prüfen, wurden anschließend der auf Druck beanspruchte Gurt und der Steg mithilfe der Berechnungsmethoden nach Hertel analysiert. Für den Druckgurt konnte unter Verwendung des E-Moduls und der Gurdicke die Sicherheit gegen Beulen zu $j_{Gurt} = 1,08$ bestimmt werden. Der Steg wurde bereichsweise mit den jeweils vorliegenden Biege- und Schubbeanspruchungen untersucht. Die Bereiche 1 und 2 sind mit Sicherheiten von $j_1 = 1,148$, bzw. $j_2 = 1,59$ schon ohne die Verwendung eines Schaumkerns sicher gegen Beulen. Für den Bereich 3 ist eine Sandwichkonstruktion zur Gewährleistung der Beulsicherheit notwendig. Ein 2mm starker Schaumkern wurde gewählt, um die Fertigung zu vereinfachen. Damit ergibt sich eine Beulsicherheit von $j_3 = 6,88$ im Bereich 3 und eine zusätzliche Sicherheit für die Bereiche

1 und 2.

Die *Klebeverbindungen* zwischen dem Steg und den Gurten werden durch das Aufbringen von Mumpe hergestellt. Mit der gegebenen Schubfestigkeit $\tau_{Mumpe} = 10 MPa$ wird eine Klebebreite von $l = 15,9 mm$ in den Bereichen 1 und 2 benötigt, für den schwächer beanspruchten Bereich 3 reichen $l = 1,62 mm$. Bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500 N$ wird gemäß der grundlegenden Annahme $F_Q = F_{pruef}$ eine ebenso große Kraft über die Wurzelrippe abgesetzt. Eine schmale Holzleiste mit einer Breite von $1,56 mm$ kann auf jeder Seite des Stegs die Klebefläche zwischen Wurzelrippe und Steg bereitstellen.

Als Verbindung der Tragfläche zum Teststand sind zwei *Hauptbolzen* und zwei Querkraftbolzen vorgesehen, deren Durchmesser bereits durch die Bohrungen im Teststand festgelegt ist. Beide Hauptbolzen werden bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500 N$ durch eine $5085,5 N$ beansprucht. Unter Berücksichtigung der Bolzenlänge wurde eine Mindeststreckgrenze des Bolzenwerkstoffes von $R_e = 360,8 MPa$ ermittelt. Als Werkstoff für alle Bolzen wurde daraufhin S620Q gewählt. Diese Wahl gewährleistet auch, dass die Querkraftbolzen mit einem Durchmesser von $d = 8 mm$ sicher ausgelegt sind.

Die im Allgemeinen außerhalb des Schubmittelpunkts der Tragfläche angreifende Belastung, führt zu einem Torsionsmoment und einer Biegebelastung des Flügels. Letztere wird durch den Holm aufgenommen, der unter dieser Annahme bereits dimensioniert wurde, ersteres muss durch die Flügelschale aufgenommen werden und darf hier nicht zu Beulerscheinungen führen. Zur Bestimmung des Schubflusses in der Schale, wurde die Profilkontur durch zehn Abschnitte angenähert und der Schaum der Sandwichkonstruktion vernachlässigt. Für die erste Berechnung wurde die Hautdicke zu $t = 0,2 mm = konst.$ angenommen. Bezüglich der vordersten Kante und der speziell definierten Koordinatenrichtungen des angenäherten Profils liegt der Schwerpunkt bei $y_0 = 78,53 mm$ und $z_0 = -15,39 mm$. Über die Flächenträgheits-, Deviations- und statischen Momente wurde die Lage des Schubmittelpunkts im Falle des offenen Profils lokalisiert, der bei $y_M = 207,60 mm$ und $z_M = -41,35 mm$ und damit, wie erwartet, außerhalb des Profils liegt. Die Kontur wurde geschlossen und über die Momentenäquivalenz die Lage des Schubmittelpunktes zu $y_{Mg} = 76,78 mm$, $z_{Mg} = -21,56 mm$ berechnet. Für den enstehenden Zweizeller wurde unter Annahme gleicher Verwindung beider Zellen der Drillwinkel bei einer Belastung von $F_{pruef} = 500 N$ im 1/4-Punkt zu $\varphi = -1,87^\circ$ ermittelt. Darüber hinaus konnte mit den Kenntnissen auftretender Schubflüsse die maximale Schubspannung

ermittelt werden. Zur Dimensionierung der Hautstärke wurde die Berechnung der Schubflüsse für mehrere Hautstärken t vorgenommen. Die so bestimmten maximalen Schubflüsse wurden mit den zugehörigen Lagenaufbauten in den Laminatrechner *eLamX²* eingegeben, um die Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch zu ermitteln. $n = 2$ Lagen ermöglichen eine Sandwichkonstruktion und sichern die Auslegung gegenüber den Vereinfachungen ab. Daraus ergab sich ein Drillwinkel für die neue Dicke von $\varphi(500N) = -2,32^\circ$.

Die Auslegung nach Handbuchmethoden wurde durch die *Beulabschätzung der Flügelschale* abgeschlossen. Dazu wurde der gefährdetsten Profilabschnitt betrachtet, dessen Krümmung vernachlässigt wurde, um die Sicherheit zu erhöhen und um die Rechnung zu vereinfachen. Weiterhin wurde mit der größten auftretenden Schubspannung gerechnet, obwohl diese nicht im betrachteten Bereich vorliegt. Bei Verwendung eines 3mm dicken Schaumkerns ergibt sich eine Sicherheit gegen Beulen von $j = 1,09$. Die Wahl der Schaumdicke ist durch die einfache Fertigbarkeit begründet. Die großzügige Auslegung wirkt sich wegen der sehr geringen Dichte des Styrodurs nur unwesentlich auf die Massenbilanz aus.

8.2 Die Konstruktion und FEM-Analyse im Überblick (H.K.)

Als *Grundlage der FEM-Analyse* und zur Veranschaulichung der vorangegangenen Auslegung nach Handbuchmethoden, wurde ein Modell der Tragfläche im CAD-Programm erstellt. Es berücksichtigt alle bisherigen geometrischen Größen. Des Weiteren wurden zusätzliche Bauteile und Details erstellt. Für die Sandwichkonstruktion der Flügelschale wurde eine Lösung gefunden, bei der der Schaumkern die beulgefährdeten Bereiche schützt, im Bereich der Gurte jedoch ausläuft, um die Höhe h_a des Holms nicht weiter einzuschränken. Es wurden Wurzel- und Endrippe konstruiert, in denen Bohrungen zur Aufnahme der Querkraftbolzen und zur Verschraubung der Endplatte vorgesehen sind. Messinghülsen wurden für die Bohrungen der Bolzen erstellt, um die betreffenden Bereiche zu schützen und die Montage zu erleichtern. Auch die Holzklötze, die die Auflagefläche der Hauptbolzen am Steg vergrößern, wurden konstruiert. Alle Bauteile wurden zum Schluss im CAD-Programm zusammengebaut. Die jeweiligen Dichten wurden den Komponenten zugeordnet und ermöglichten eine Massenabschätzung des Tragflügels zu $m_{ges} = 0,366\text{kg}$.

Der im CAD-Programm zusammengebaute Tragflügel wurde zur *FEM-Analyse in Abaqus* importiert. Die Analyse dünnwandiger Bauteile wird durch die Verwendung von Schalenmodellen erleichtert, sodass der Volumenkörper im ersten Schritt in Flächen umgewandelt

wurde. Die Materialkennwerte für Styrodur und GFK wurden in das Programm integriert und das Laminat zusammengestellt. Anschließend wurde den einzelnen Flächen die Dicke des zugehörigen Bauteils, bei GFK-Teilen die jeweilige Lagenzahl zugeordnet. Lager A und B wurden als feste Einspannung modelliert, die Querkraftbolzen und Prüfkraft als äußere Lasten, letztere mit Angriffspunkt im 1/4-Punkt. Die Analyse hat zeigt, dass sich die Flügel spitze bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 100N$ um $w(100N) = 17,34mm$ absenkt. Dieses Ergebnis bestätigt die Einhaltung der Anforderung an die Steifigkeit die eine Absenkung von $w_{zul} = 20mm$ erlaubt. Um die Einhaltung der Festigkeitsanforderungen zu prüfen, wurde ein Prüfkraft von 500N eingestellt. Spannungsspitzen ergaben sich im Bereich der Hauptbolzen, die jedoch durch die nicht modellierten Holzklötze gemildert würden. Genauere Aussagen zur Ertragbarkeit der Belastungen, lieferte die Analyse der größten aufgetretenen Dehnungen im Faserkoordinatensystem, die als für alle Lagen gleich groß angenommen wurden. Die Dehnungen konnten in *elamX²* übertragen werden, um auf diese Weise die Sicherheiten gegen Faser- und Zwischenfaserbruch einer Komponente an einer kritischen Stelle zu ermitteln. Bei einer Prüfkraft von $F_{pruef} = 500N$ ergaben sich die kleinsten Sicherheiten gegen Zfb im Steg zu $j_{min} = 2,32$, in der Haut zu $j_{min} = 2,785$, am oberen Gurt zu $j_{min} = 2,332$ und am unteren Gurt zu $j_{min} = 1,312$. Es wird vermutet, dass diese, gegenüber der beabsichtigten Auslegung, großen Sicherheiten auf die konservativen Annahmen der einzelnen Auslegungsschritte zurückzuführen sind. Die gegenseitige Stützung der Komponenten untereinander, die in der Auslegung nach Handbuchmethoden nicht berücksichtigt werden konnten, wird so deutlich.

Mithilfe des FEM-Programms wurde auch eine *Beulanalyse* durchgeführt. Da der Holmstummel nicht genau genug modelliert werden konnte, wurde vereinfachend eine Einspannung an den Querkraftbolzen angenommen. Nahe dieser Einspannung tritt das Beulen am ehesten auf. Der Beulfaktor entspricht dem Sicherheitsfaktor bzgl. einer Beulform. Selbst bei $F_{pruef} = 1000N$ beträgt er noch 1,0253, damit wird die Konstruktion als sicher gegen Beulen im beabsichtigten Bereich der Prüfkraft angenommen.

8.3 Gewichtsnormalisiertes Festigkeitskriterium (O.S.)

Um eine Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Flügeln zu schaffen wird die gewichtsnormalisierte Festigkeit

$$P = \frac{m_{\text{Belastung,max}}}{m_{\text{Flügel}}} \quad (8.1)$$

definiert. Es wird also die Gewichtskraft als Masse $m_{\text{Belastung,max}}$, die der Flügel im Testaufbau maximal aushält, ins Verhältnis mit der Flügelmasse $m_{\text{Flügel}}$ gesetzt. Auch wenn das Ziel war, einen möglichst leichten Flügel, der den in der Aufgabenstellung formulierten Anforderungen entspricht, zu konstruieren, wird somit berücksichtigt, dass mehr Material zwar eine höhere Masse mit sich bringt, aber er wahrscheinlich auch größere Lasten aushalten kann. Üblicher Weise würde man die Bruchlast im Teststand ermitteln, aber auf Grund der COVID-19 Pandemie ist es uns nicht möglich den Flügel zu bauen, geschweige denn zu testen.

Eine Möglichkeit wäre es 500 Newton als Bruchlast anzunehmen, da wir im Rahmen der Projektarbeit nachgewiesen haben, dass unsere Konstruktion dies aushält. Da jedoch immer eher vorsichtige Annahmen getroffen und die errechneten Werte dann meist noch aufgerundet wurden, wäre die gewichtsnormisierten Festigkeit weit unter dem voraussichtlich im Teststand ermittelten Wert. Somit wäre der Aussagewert sehr gering. Eine bessere Möglichkeit bietet hier das FE-Modell. Dies ist zwar auch nicht perfekt, da zum einen die Einspannung auf Grund der Holzblöcke nicht perfekt realistisch modelliert werden kann. Die kritischste Stelle liegt nach Überlegungen und durch ABAQUS bestätigt am Ansatz des Holmstummels, also dem Flügelende, dass am Rumpf anliegt, bzw. an der Stelle, wo der GFK im Steg dicker wird. Diese Stellen liegen weit genug von der Einspannung entfernt, sodass die Werte als plausibel angenommen werden können. Zum anderen ist durch die Studentenversion von ABAQUS der Idealisierungsgrad auf 1000 Knoten und somit auch die Genauigkeit der Ergebnisse beschränkt. Trotzdem ist dies mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der beste Ansatz um die Bruchlast zu ermitteln, da hier als Einziges der Flügel als Ganzes modelliert wird.

Da nicht bekannt ist, in welchem Bereich das Material zuerst versagt, wird in Gurt, Steg und Schale jeweils der Ort der höchsten Belastung einzeln betrachtet. Da nur ein einheitlich Wert für die Spannung der Elemente gegeben wird, diese in Realität aber nicht über alle Schichten konstant ist, wird die Dehnung betrachtet, da sie für alle identisch ist. Wird nun die Dehnung in die beiden Achsenrichtungen und der Schubwinkel in *elamX²* eingegeben, erhält man sofort die Sicherheit gegen den Bruch. Die Ergebnisse sind in Abbildung 11.13 bis 11.16 zu erkennen, wobei es zwei verschiedenen Werte für den Holm gibt, da er auf einer Seite auf Druck und auf der anderen auf Zug belastet wird. Der untere Gurt hat demnach die geringste Sicherheit von 1,31. Da die Belastung im Flügel linear mit der anliegenden Kraft steigen, lässt sich der Faktor direkt auf die aufgebrachte

Last von 500N übertragen. Somit ergibt sich eine Bruchlast von 650N oder mit einer Erdbeschleunigung von $9,81 \frac{m}{s^2}$

$$m_{\text{Belastung,max}} = 66,26 \text{ kg}.$$

Eine erneute FEM-Berechnung mit der gesteigerten Kraft liefert neue Dehnungen, die im Gurt wie erwartet eine Sicherheit von ungefähr 1 ergeben. Da der kleinste Beulfaktor deutlich höher als diese Sicherheit war, kommt es auch nicht bei der erhöhten Last zum Beulen. Für das Gewichtsnormalisiertes Festigkeitskriterium ergibt sich nun also mit $m_{\text{Flügel}}$ aus der Massenabschätzung ungefähr ein Wert von

$$P = 181,04.$$

8.4 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Messwerte sollen nun mit den Werten anderer Gruppen verglichen werden.

Ein Aufgabekriterium ist die Absenkung der Flügel spitze bei einer Belastung von 100N. Unser Flügel erreichte dabei eine Absenkung von $17,34 \text{ mm}$. Aus den Daten der uns zur Verfügung stehenden Testreihe geht eine Absenkung von $40,833 \text{ mm}$ bei einer Last von 100N hervor.

Ein weiteres Vergleichskriterium ist die Bruchlast, die bei unserem Flügel 650 N betrug. Die Bruchlast der Testreihe betrug nur 434,63 N. Da jedoch nicht nur die maximal aus haltbare Last, sondern auch das Gewicht eine große Rolle spielt wird das gewichtsnormalierte Festigkeitskriterium herangezogen (Glg. 8.1). Für unseren Flügel ergab sich dort ein Wert von $P = 181,04$. Für den Vergleichsflügel ergibt sich mit $m_{\text{max}} = 44,305 \text{ kg}$ und $m_{\text{ges}} = 0,699 \text{ kg}$ ein Wert von $P = 66,38$.

Zusätzlich kann der der Maximal auftretende Torsionswinkel verglichen werden. Unser Flügel wies bei einer Belastung von 650N einen Torsionswinkel von 3,01 Grad auf. Der Winkel des Vergleichsobjektes wies bei 434,63 N einen Winkel von 1,5 Grad auf. Diese Werte sind aufgrund der verschiedenen Kräfte jedoch nur schwer vergleichbar.

Allgemein lässt sich sagen, dass unser Flügel in fast allen Kategorien besser abschneidet. Jedoch kann dies auch durch zwangsläufige Ungenauigkeiten in der Herstellung verursacht sein, die in unserem theoretischen Modell nicht berücksichtigt werden können.

Etwas aussagekräftiger ist der Vergleich mit der Parallelgruppe, die die gleiche Aufgabe haben wie wir.

Die Absenkung bei einer Last von 100N betrug dort $Z_{100N} =$

8.5 Ausblick auf Optimierungen der Berechnungen (H.G.)

Da für die Auslegung viele Annahmen und Vereinfachungen getroffen wurden, lassen sich einige Optimierungsmöglichkeiten für das Projekt nennen.

Zunächst ließe sich die Dicke der Gurte über der Holmlänge als nicht konstant annehmen um zusätzlich das Gewicht zu verringern. Da dies jedoch schwer bis nicht analytisch zu lösen wäre und einen signifikanten Mehraufwand für eine relativ kleine Gewichtsänderung mit sich gebracht hätte, wurde in dieser Arbeit davon abgesehen.

Die Wurzelrippe wurde mit einer definierten Dicke als gegeben angesehen. Hier wäre ebenfalls eine Möglichkeit, um evtl. Gewicht einzusparen und die Absenkung zusätzlich zu verringern. Da dies jedoch zusätzliche Einarbeitung in die Holztechnik und deutlich mehr Zeitaufwand mit sich bringen würde, wurde hier davon abgesehen.

Die Berechnung des FKV wurde mit mittels der Mischungsregel durchgeführt. In alternativer Literatur wurde dies beispielsweise nach Puck berechnet. Dadurch könnten sich genauere Materialkennwerte ergeben, was zu einer möglichen Verringerung der GFK Schichten und somit des Gewichts führen könnte. Dies würde aber wiederum zu einer deutlich aufwändigen Rechnung führen, deren Ertrag zu gering ist, um dies zu rechtfertigen.

In mehreren Berechnungen wurden schwächere Annahmen getroffen, als die Realität widerspiegelt. So wurde in der Auslegung des Holms und der Haut die Steifigkeit des Schaums nicht mit einberechnet, wodurch etwas Leichtbaupotential verschenkt wurden.

Es wurde in vielen Fällen mit einer Sicherheit gerechnet. Da in den Annahmen und in den Materialkennwerten schon eine gewisse Ungenauigkeit und diese oft kleiner als in der Realität sind, können die Sicherheitswerte herabgesetzt werden, oder sogar gleich 1 gesetzt werden.

Die FEM-Modellierung ist ebenfalls in vielerlei Hinsicht optimierbar. Durch die Studentenversion kann das Bauteil nicht so genau vernetzt werden, wie es für eine genaue Auswertung nötig wäre. Zusätzlich sind die Holzblöcke am Holmstummel nicht modelliert worden, da dies sehr aufwändig gewesen wäre.

9 Quellenverzeichnis

- [GKM14] Gomeringer, R.; Kilgus, R., Menges, V.; Oesterle, S.; Rapp, T.; Scholer, C.; Stenzel, A.; Stephan, A.; Wieneke, F.: „*Tabellenbuch Metall*“; 47. Auflage, Europa Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2014
- [Gle08] Glenz, W.: „*Kunststoffe*“; , Hanser, , 2008
- [Hau21] Hauffe, A.: „*expandable Laminate eXplorer - eLamX*“; TU Dresden - ilr; <https://bugs.elamx.de/projects/expandable-laminate-explorer-elamx>, 01.01.2021
- [Her60] Hertel, H.: „*Leichtbau: Bauelemente, Bemessungen und Konstruktionen von Flugzeugen u.a.*“; , Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- [Hor20a] Horst, P.: „*Elemente des Leichtbaus, Vorlesungsskript*“; Institut für Flugzeugbau und Leichtbau, TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [Hor20b] Horst, P.: „*Finite Elemente 1, Vorlesungsskript*“; Institut für Flugzeugbau und Leichtbau, TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [Hor20c] Horst, P.: „*Ingenieurtheorien des Leichtbaus, Vorlesungsskript*“; TU Braunschweig - IfL, Braunschweig, 2020
- [LiN15] Linke, M.; Nast, E.: „*Festigkeitslehre für den Leichtbau, Ein Lehrbuch zur Technischen Mechanik*“; , Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2015
- [Mis36] Mises, R. V.: „*Fluglehre: Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung*“; , Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1936
- [MMH20] Mittelrheinische Metallgießerei Heinrich Beyer GmbH: „*Produktkatalog 2020*“; , , , 2020
- [Ost18] Ostermeyer, G.-P.: „*Mechanik 1 - Vorlesungsskript*“; 7. Auflage, Technische Universität Braunschweig - Ids, Braunschweig, 2018
- [Ron99] Ronig, S.: „*Festigkeitsnachweis der Flügelstruktur für das Segelflugzeug SB 14*“; Akademische Fliegergruppe e.V., Braunschweig, 1999
- [Sch05] Schürmann, H.: „*Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*“; , Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2005

- [SiV19] Sinapius, M.; Vietor, T.: „*Grundlagen des Konstruierens - Vorlesungsskript*“; TU Braunschweig - ehem. IAF, IK, Braunschweig, 2019
- [Stö14] Stöferle, ?: „*Glasfilamentgewebe für die Kunststoffverstärkung, Produktspezifikation 92145*“; Porcher Industries Germany GmbH, , 2014
- [Stö15] Stöferle, ?: „*Glasfilamentgewebe für die Kunststoffverstärkung, Produktspezifikation 90070*“; Porcher Industries Germany GmbH, , 2015
- [VDI06] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 3, Entwicklung von Bauteilen aus -Faser-Kunststoff-Verbund, Berechnungen*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, , 2006
- [VDI70] VDI-Gesellschaft Materials Engineering: „*VDI 2013 (Blatt 1)-Dimensionierung von Bauteilen aus GFK (Glasfaser verstärkte Kunststoffe)*“; VDI-Gesellschaft Materials Engineering, , 1970
- [VDI89] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 1, Entwicklung von Bauteilen aus -Faser-Kunststoff-Verbund, Grundlagen*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, , 1989
- [VDI93] VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik: „*VDI 2014 Blatt 2, Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund, Konzeption und Gestaltung*“; VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, , 1993
- [Win20] Winter, ?: „*Specific gravity of inner and outer beech bark*“; European Journal of Wood and Wood Products, , 2020
- [Wit14] Witten, E.: „*Handbuch Faserverbundkunststoffe/Composites: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen*“; 4. Auflage, Springer Vieweg, , 2014
- [WNB16] Wriggers, P.; Nackenhorst, U.; Beuermann, S.; Spiess, H.; Löhnert, S.: „*Technische Mechanik kompakt*“; , Vieweg+Teubner, , 2016

10 Abbildungsverzeichnis

3.1	Kräfte beim Schubknicken von VFK	19
3.2	Pucksche Zigarre aus [Sch05]	20
3.3	Holmarten: a) I-Holm b) C-Holm c) Kastenholm	21
4.1	Modellierung des Holms als Balken	25
4.2	Kraft-, Moment- und Absenkungsverlauf der Steifigkeitsauslegung des Holms	30
4.3	Kraft-, Moment- und Absenkungsverlauf der Festigkeitsauslegung des Holms .	31
4.4	Bezeichnungen des I-Holms	33
4.5	Angepasste gekrümmte Gurtkontur	36
4.6	Prinzip der Druckkraft auf den Steg	38
5.1	Infinitesimales Profilelement aus [Hor20c]	60
5.2	Vereinfachtes Modell für Schubflussberechnung	62
5.3	Offenes Profil mit Pol	66
5.4	Schubmittelpunkt des geschlossenen und offenen Profils	68
5.5	Angreifende Kraft und positive Drehrichtung am geschlossenen Profil .	68
6.1	Schalenmodell	79
6.2	Absenkung bei einer Belastung von 100N	81
6.3	Einspannung am Lager C	83
6.4	Beispiel Beulform	84
7.1	Haut und Gurte nach dem ersten Schritt der Konstruktion	85
7.2	Prinzipskizze der Sandwichstruktur im Steg	87
7.3	Hautsandwich am Übergang zum Gurt	88
7.4	Holzklötze und Hülsen	89
7.5	Verklebung von Steg und Gurt	95
11.1	Lagenaufbau Holmgurte nach <i>eLamX²</i>	125
11.2	Lagenaufbau Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX²</i>	125
11.3	Lagenaufbau Steg Bereich <i>I&II</i> nach <i>eLamX²</i>	126
11.4	Lagenaufbau Flügelschale nach <i>eLamX²</i>	127
11.5	Berechnung Holmgurte nach <i>eLamX²</i>	127
11.6	Berechnung Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX²</i>	128
11.7	Berechnung Steg Bereich <i>I&II</i> nach <i>eLamX²</i>	129
11.8	Berechnung Flügelschale nach <i>eLamX²</i>	130
11.9	Ingenieurskonstanten Holmgurte nach <i>eLamX²</i>	130

11.10	Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich <i>III</i> nach <i>eLamX²</i>	131
11.11	Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich <i>I&II</i> nach <i>eLamX²</i>	132
11.12	Ingenieurskonstanten Berechnung Flügelschale nach <i>eLamX²</i>	133
11.13	Sicherheit im Steg bei 500N nach <i>eLamX²</i>	133
11.14	Sicherheit in der Haut bei 500N nach <i>eLamX²</i>	134
11.15	Sicherheit am Gurt oben bei 500N nach <i>eLamX²</i>	134
11.16	Sicherheit am Gurt unten bei 500N nach <i>eLamX²</i>	135
11.17	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Druck ohne Versteifungen; nach [Her60]	136
11.18	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Biegung und Druck, ohne Versteifungen; nach [Her60]	137
11.19	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Schub, ohne Versteifungen; nach [Her60]	138
11.20	Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, Ränder einseitig gestützt, für Überlagerungen, ohne Versteifungen; nach [Her60]	139
11.21	Sandwichplatte mit unterschiedlichen Hautstärken, Beulsteifigkeit, für Steifigkeits-Erhöhungsfaktor; nach [Her60]	139
11.22	Wertebereich der Laufvariablen s_i	140
11.23	Schubfluss Bereich 1	141
11.24	Schubfluss Bereich 2	141
11.25	Schubfluss Bereich 3	142
11.26	Schubfluss Bereich 4	142
11.27	Schubfluss Bereich 5	143
11.28	Schubfluss Bereich 6	143
11.29	Schubfluss Bereich 7	144
11.30	Schubfluss Bereich 8	144
11.31	Schubfluss Bereich 9	145
11.32	Schubfluss Bereich 10	145
11.33	ABAQUS Material Beispiel GFK	146
11.34	ABAQUS Section Beispiel:Steg	147
11.35	CAD-Modell der Tragfläche und des Teststandes	148
11.36	Ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs der Querkraftbolzen	149
11.37	Montage der Tragfläche auf dem Teststand	149

11 Anhang

11.1 Berechnung: Analytische Lösung der Modellierung (T.B.)

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen 4.35, 4.36 und 4.37 hergeleitet [Ost18][LiN15]:

- Aus Gleichung 4.12 und 4.23 ergibt sich:

$$R_4 = 0 \quad (11.1)$$

- Aus Gleichung 4.10 und 4.24 ergibt sich:

$$R_2 = 0 \quad (11.2)$$

- Aus Gleichung 4.19 und 4.34 ergibt sich:

$$R_9 = -F \quad (11.3)$$

- Aus Gleichung 4.14, 4.19, 4.34 und 11.3 ergibt sich:

$$R_5 = -F_{pruef} - F_Q \quad (11.4)$$

- Aus Gleichung 4.20 , 4.33 und 11.3 ergibt sich:

$$R_{10} = F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \quad (11.5)$$

- Aus Gleichung 4.15, 4.20, 4.31, 11.3, 11.4 und 11.5 ergibt sich:

$$R_6 = F_{pruef} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + F_Q \cdot (l_1 + l_2) \quad (11.6)$$

- Aus Gleichung 4.10, 4.15, 4.28, 11.4 und 11.6 ergibt sich:

$$R_1 = F_{pruef} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} + F_Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \quad (11.7)$$

- Aus Gleichung 4.12, 4.25 und 11.7 ergibt sich:

$$R_3 = -\frac{1}{6} \cdot F_{pruef} \cdot (l_2 + l_3) \cdot l_1 - \frac{1}{6} \cdot F_Q \cdot l_2 \cdot l_1 \quad (11.8)$$

- Aus Gleichung 4.11, 4.16, 4.27, 11.4, 11.6, 11.7 und 11.8 ergibt sich:

$$R_7 = F_{pruef} \cdot \left(-\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 - \frac{2}{3}l_1l_3 \right) + F_Q \cdot \left(-\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 \right) \quad (11.9)$$

- Aus Gleichung 4.17, 4.26, 11.4, 11.6 und 11.9 ergibt sich:

$$R_8 = F_{pruef} \cdot \left(\frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 + \frac{1}{6}l_1^2l_3 \right) + F_Q \cdot \left(\frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 \right) \quad (11.10)$$

- Aus Gleichung 4.16, 4.21, 4.30, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6 und 11.9 ergibt sich:

$$R_{11} = F_{pruef} \cdot \left(-\frac{1}{2}l_1^2 - \frac{2}{3}l_1l_2 - \frac{2}{3}l_1l_3 \right) + F_Q \cdot \left(\frac{1}{2}l_1^2 + \frac{1}{3}l_1l_2 \right) \quad (11.11)$$

- Aus Gleichung 4.17, 4.22, 4.29, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.9, 11.10 und 11.11 ergibt sich:

$$R_{12} = F_{pruef} \cdot \left(\frac{1}{6}l_1^3 + \frac{1}{6}l_1^2l_2 + \frac{1}{6}l_1^2l_3 \right) + F_Q \cdot \left(\frac{1}{6}l_2^3 - \frac{1}{3}l_1^2l_2 - \frac{1}{2}l_2^2l_1 \right) \quad (11.12)$$

- Nun können die Gleichungen 11.3, 11.4, und 11.7 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.35 ergibt:

$$Q(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} -R_1 & , y\epsilon(0, l_1) \\ -R_5 & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ -R_9 & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (11.13)$$

- Nun können die Gleichungen 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6 und 11.7 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.36 ergibt:

$$M(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} -R_1 \cdot y - R_2 & , y\epsilon(0, l_1) \\ -R_5 \cdot y - R_6 & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ -R_9 \cdot y - R_{10} & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (11.14)$$

- Nun können die Gleichungen 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.9, 11.11 und 11.12 in folgende Gleichung eingesetzt werden, sodass sich Gleichung 4.37

ergibt:

$$w(y, F_{pruef}, F_Q, EI_x) = \begin{cases} \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{R_1 \cdot y^3}{6} + \frac{R_2 \cdot y^2}{2} + R_3 \cdot y + R_4 \right) & , y\epsilon(0, l_1) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{R_5 \cdot y^3}{6} + \frac{R_6 \cdot y^2}{2} + R_7 \cdot y + R_8 \right) & , y\epsilon(l_1, l_1 + l_2) \\ \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{R_9 \cdot y^3}{6} + \frac{R_{10} \cdot y^2}{2} + R_{11} \cdot y + R_{12} \right) & , y\epsilon(l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (11.15)$$

11.2 Berechnung: Schubfluss und Schubmittelpunkt (O.S.)

- Wertebereich der Laufvariable

i	$s_i \in (0, \dots)$
1	58,90
2	14,00
3	37,50
4	14,00
5	107,72
6	30,07
7	83,46
8	14
9	14
10	37,5

- Statische Momente im allgemeinen Koordinatensystem mit s_0 : (Werte sind aus Abb. 5.2 zu entnehmen)

$$S_{z,1}(s_1) = t \int_0^{s_1} R \left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) ds = tR^2 \left[\frac{s}{R} - \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right]_{s=0}^{s_1} = tR^2 \cdot \left(\frac{s_1}{R} - \sin\left(\frac{s_1}{R}\right) \right) \quad (11.16)$$

$$S_{y,1}(s_1) = t \int_0^{s_1} -R \sin\left(\frac{s}{R}\right) ds_1 = t \left[R^2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right]_{s=0}^{s_1} = tR^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{s_1}{R}\right) - 1 \right) \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} S_{z,2}(s_2) &= t \int_0^{s_2} \left(37,5 \text{mm} + \cos(\alpha) \cdot s \right) ds + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \left[37,5 \text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_2} + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left(37,5 \text{mm} \cdot s_2 + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{z,1}(s_{1,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned}
S_{y,2}(s_2) &= t \int_0^{s_2} \left(-37, 5\text{mm} + \sin(\alpha) \cdot s \right) ds + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}}) \\
&= t \left[-37, 5\text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_2} + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(-37, 5\text{mm} \cdot s_2 + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{y,1}(s_{1,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.19}$$

$$S_{z,3}(s_3) = t_1 \int_0^{s_3} \left(37, 5\text{mm} + 14\text{mm} \right) ds = t_1 \left[51, 5\text{mm} \cdot s \right]_{s=0}^{s_3} = t_1 \cdot \left(51, 5\text{mm} \cdot s_3 \right) \tag{11.20}$$

$$S_{y,3}(s_3) = t_1 \int_0^{s_3} -s \, ds = t_1 \left[-\frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_3} = t_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}s_3^2 \right) \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,4} &= t \int_0^{s_4} \left(37, 5\text{mm} + \cos(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}}) \\
&= t \left[51, 37\text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_4} + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(51, 37\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\cos(\alpha)}{2}s_4^2 \right) + S_{z,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{z,3}(s_{3,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.22}$$

$$\begin{aligned}
S_{y,4} &= t \int_0^{s_4} \left(-37, 5\text{mm} + \sin(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}}) \\
&= t \left[-35, 63\text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_4} + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(-35, 62\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\sin(\alpha)}{2}s_4^2 \right) + S_{y,2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{y,3}(s_{3,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,5} &= t \int_0^{s_5} \left(37,5 \text{mm} + \cos(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s_{4,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}}) \\
&= t \left[65,25 \text{mm} \cdot s + \frac{\cos(\alpha)}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s_5} + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(65,25 \text{mm} \cdot s_5 + \frac{\cos(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{z,4}(s_{4,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.24}$$

$$\begin{aligned}
S_{y,5} &= t \int_0^{s_5} \left(-37,5 \text{mm} + \sin(\alpha)(s_{2,\text{ende}} + s_{4,\text{ende}} + s) \right) ds + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}}) \\
&= t \left[-33,75 \text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\alpha)}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s_5} + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(-33,75 \text{mm} \cdot s_5 + \frac{\sin(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{y,4}(s_{4,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.25}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,6} &= t \int_0^{s_6} \left(172 \text{mm} - \cos(\beta) \cdot s \right) ds + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \left[172 \text{mm} \cdot s - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_6} + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(172 \text{mm} \cdot s_6 - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{z,5}(s_{5,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.26}$$

$$\begin{aligned}
S_{y,6} &= t \int_0^{s_6} \left(\sin(\beta) \cdot (s - s_{6,\text{ende}}) \right) ds + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \left[-19,33 \text{mm} \cdot s + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s^2 \right]_{s=0}^{s_6} + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(-19,33 \text{mm} \cdot s_6 + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{y,5}(s_{5,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.27}$$

$$\begin{aligned}
S_{z,7} &= t \int_0^{s_7} \left(172 \text{mm} - \cos(\beta) s_{6,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}}) \\
&= t \left[148,96 \text{mm} \cdot s - \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s_7} + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}}) \\
&= t \cdot \left(148,96 \text{mm} \cdot s_7 - \frac{1}{2} s_7^2 \right) + S_{z,6}(s_{6,\text{ende}})
\end{aligned} \tag{11.28}$$

$$S_{y,7} = t \int_0^{s_7} 0 \, ds + S_{y,6}(s_{6,\text{ende}}) = S_{y,6}(s_{6,\text{ende}}) \quad (11.29)$$

$$\begin{aligned} S_{z,8} &= t \int_0^{s_8} \left(172\text{mm} - \cos(\beta)s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}}) \\ &= t \left[65,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_8} + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left(65,5\text{mm} \cdot s_8 - \frac{1}{2}s_8^2 \right) + S_{z,7}(s_{7,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (11.30)$$

$$S_{y,8} = t \int_0^{s_8} 0 \, ds + S_{y,7}(s_{7,\text{ende}}) = S_{y,7}(s_{7,\text{ende}}) \quad (11.31)$$

$$\begin{aligned} S_{z,9} &= t \int_0^{s_9} \left(172\text{mm} - \cos(\beta)s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s_{8,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}}) \\ &= t \left[51,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_9} + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left(51,5\text{mm} \cdot s_9 - \frac{1}{2}s_9^2 \right) + S_{z,8}(s_{8,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (11.32)$$

$$S_{y,9} = t \int_0^{s_9} 0 \, ds + S_{y,8}(s_{8,\text{ende}}) = S_{y,8}(s_{8,\text{ende}}) \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} S_{z,10} &= t \int_0^{s_{10}} \left(172\text{mm} - \cos(\beta)s_{6,\text{ende}} - s_{7,\text{ende}} - s_{8,\text{ende}} - s_{9,\text{ende}} - s \right) ds + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \\ &= t \left[37,5\text{mm} \cdot s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s_{10}} + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \\ &= t \cdot \left(37,5\text{mm} \cdot s_{10} - \frac{1}{2}s_{10}^2 \right) + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \end{aligned} \quad (11.34)$$

$$S_{y,10} = t \int_0^{s_{10}} 0 \, ds + S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) = S_{z,9}(s_{9,\text{ende}}) \quad (11.35)$$

- Integrale über Statische Momente mit $t = 0,2\text{mm}$

$$S_{\bar{z}}(s) = S_z(s) - y_0 ts \quad (11.36)$$

$$S_{\bar{y}}(s) = S_y(s) - z_0 ts \quad (11.37)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{1,\text{ende}}} S_{\bar{z},1} ds_1 &= \int_0^{s_{1,\text{ende}}} tR^2 \cdot \left(\frac{s_1}{R} - \sin\left(\frac{s_1}{R}\right) - \frac{y_0 s_1}{R^2} \right) ds_1 \\ &= tR^3 \left[\frac{s_1^2}{2R^2} \left(1 - \frac{y_0}{R} \right) + \cos\left(\frac{s_1}{R}\right) \right]_{s_1=0}^{s_{1,\text{ende}}} = -24781,04\text{mm}^4 \end{aligned} \quad (11.38)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{1,\text{ende}}} S_{\bar{y},1} ds_1 &= \int_0^{s_{1,\text{ende}}} tR^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{s_1}{R}\right) - 1 - \frac{z_0 s_1}{R^2} \right) ds_1 \\ &= tR^3 \left[\sin\left(\frac{s_1}{R}\right) - \frac{s_1}{R} - \frac{z_0 s_1^2}{2R^3} \right]_{s_1=0}^{s_{1,\text{ende}}} = -679,64\text{mm}^4 \end{aligned} \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{2,\text{ende}}} S_{\bar{z},2} ds_2 &= \int_0^{s_{2,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(37,5\text{mm} \cdot s_2 + \frac{\cos(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{\bar{z},1}(s_{1,\text{ende}}) - y_0 ts_2 \right) ds_2 \\ &= \left[t \left(s_2^2 \frac{37,5\text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} \cdot s_2^3 \right) + S_{\bar{z},1}(s_{1,\text{ende}}) s_2 \right]_{s_2=0}^{s_{2,\text{ende}}} \\ &= -11417,94\text{mm}^4 \end{aligned} \quad (11.40)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{2,\text{ende}}} S_{\bar{y},2} \, ds_2 &= \int_0^{s_{2,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(-37, 5\text{mm} \cdot s_2 + \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot s_2^2 \right) + S_{\bar{y},1}(s_{1,\text{ende}}) - z_0 t s_2 \right) \, ds_2 \\
&= \left[t \left(-s_2^2 \frac{37, 5\text{mm} + z_0}{2} + \frac{\sin(\alpha)}{6} s_2^3 \right) + S_{\bar{y},1}(s_{1,\text{ende}}) s_2 \right]_{s_2=0}^{s_{2,\text{ende}}} \\
&= -1819,86\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.41}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{3,\text{ende}}} S_{\bar{z},3} \, ds_3 &= \int_0^{s_{3,\text{ende}}} \left(t_1 \cdot \left(51, 5\text{mm} \cdot s_3 \right) - y_0 t_1 s_3 \right) \, ds_3 \\
&= t_1 \left[\frac{51, 5\text{mm} - y_0}{2} s_3^2 \right]_{s_3=0}^{s_{3,\text{ende}}} \\
&= -5967,72\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.42}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{3,\text{ende}}} S_{\bar{y},3} \, ds_3 &= \int_0^{s_{3,\text{ende}}} t_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} s_3^2 - z_0 s_3 \right) \, ds_3 \\
&= t_1 \left[-\frac{s_3^3}{6} - \frac{z_0}{2} s_3^2 \right]_{s_3=0}^{s_{3,\text{ende}}} \\
&= 638,06\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.43}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{4,\text{ende}}} S_{\bar{z},4} \, ds_4 &= \int_0^{s_{4,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(51, 37\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\cos(\alpha)}{2} s_4^2 \right) + S_{\bar{z},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{z},3}(s_{3,\text{ende}}) - y_0 t s_4 \right) \, ds_4 \\
&= \left[t \left(s_4^2 \frac{51, 37\text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} s_4^3 \right) + s_4 \left(S_{\bar{z},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{z},3}(s_{3,\text{ende}}) \right) \right]_{s_4=0}^{s_{4,\text{ende}}} \\
&= -16954,55\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.44}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{4,\text{ende}}} S_{\bar{y},4} \, ds_4 &= \int_0^{s_{4,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(-35, 62\text{mm} \cdot s_4 + \frac{\sin(\alpha)}{2} s_4^2 \right) + S_{\bar{y},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{y},3}(s_{3,\text{ende}}) - t z_0 \right) \, ds_4 \\
&= \left[t \left(-s_4^2 \frac{35, 62\text{mm} + z_0}{2} + s_4^3 \frac{\sin(\alpha)}{6} \right) + s_4 \left(S_{\bar{y},2}(s_{2,\text{ende}}) + S_{\bar{y},3}(s_{3,\text{ende}}) \right) \right]_{s_4=0}^{s_{4,\text{ende}}} \\
&= -3166,21\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.45}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{5,\text{ende}}} S_{\bar{z},5} \, ds_5 &= \int_0^{s_{5,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(65, 25\text{mm} \cdot s_5 + \frac{\cos(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{\bar{z},4}(s_{4,\text{ende}}) - ty_0 s_5 \right) \, ds_5 \\
&= \left[t \left(s_5^2 \frac{65, 25\text{mm} - y_0}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{6} s_5^3 \right) + s_5 S_{\bar{z},4}(s_{4,\text{ende}}) \right]_{s_5=0}^{s_{5,\text{ende}}} \\
&= -107261,55\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.46}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{5,\text{ende}}} S_{\bar{y},5} \, ds_5 &= \int_0^{s_{5,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(-33, 75\text{mm} \cdot s_5 + \frac{\sin(\alpha)}{2} s_5^2 \right) + S_{\bar{y},4}(s_{4,\text{ende}}) - tz_0 s_5 \right) \, ds_5 \\
&= \left[t \left(-s_5^2 \frac{33, 75\text{mm} + z_0}{2} + s_5^3 \frac{\sin(\alpha)}{6} \right) + s_5 S_{\bar{y},4}(s_{4,\text{ende}}) \right]_{s_5=0}^{s_{5,\text{ende}}} \\
&= -42977,28\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.47}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{6,\text{ende}}} S_{\bar{z},6} \, ds_6 &= \int_0^{s_{6,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(172\text{mm} \cdot s_6 - \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{\bar{z},5}(s_{5,\text{ende}}) - ty_0 s_6 \right) \, ds_6 \\
&= \left[t \left(s_6^2 \frac{172\text{mm} - y_0}{2} - s_6^3 \frac{\cos(\beta)}{6} \right) + s_6 S_{\bar{z},5}(s_{5,\text{ende}}) \right]_{s_6=0}^{s_{6,\text{ende}}} \\
&= -3426,83\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.48}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{6,\text{ende}}} S_{\bar{y},6} \, ds_6 &= \int_0^{s_{6,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(-19, 33\text{mm} \cdot s_6 + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot s_6^2 \right) + S_{\bar{y},5}(s_{5,\text{ende}}) - tz_0 s_6 \right) \, ds_6 \\
&= \left[t \left(-s_6^2 \frac{19, 33\text{mm} + z_0}{2} + s_6^3 \frac{\sin(\beta)}{6} \right) + s_6 S_{\bar{y},5}(s_{5,\text{ende}}) \right]_{s_6=0}^{s_{6,\text{ende}}} \\
&= -14579,38\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.49}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{7,\text{ende}}} S_{\bar{z},7} \, ds_7 &= \int_0^{s_{7,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(148, 96\text{mm} \cdot s_7 - \frac{1}{2}s_7^2 \right) + S_{\bar{z},6}(s_{6,\text{ende}}) - ty_0 s_7 \right) \, ds_7 \\
&= \left[t \left(s_7^2 \frac{148, 96\text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_7^3}{6} \right) + s_7 S_{\bar{z},6}(s_{6,\text{ende}}) \right]_{s_7=0}^{s_{7,\text{ende}}} \\
&= 39745, 58\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.50}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{7,\text{ende}}} S_{\bar{y},7} \, ds_7 &= \int_0^{s_{7,\text{ende}}} \left(S_{\bar{y},6}(s_{6,\text{ende}}) - tz_0 s_7 \right) \, ds_7 \\
&= \left[-s_7^2 \frac{tz_0}{2} + s_7 S_{\bar{y},6}(s_{6,\text{ende}}) \right]_{s_7=0}^{s_{7,\text{ende}}} \\
&= -27553, 07\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.51}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{8,\text{ende}}} S_{\bar{z},8} \, ds_8 &= \int_0^{s_{8,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(65, 5\text{mm} \cdot s_8 - \frac{1}{2}s_8^2 \right) + S_{\bar{z},7}(s_{7,\text{ende}}) - ty_0 s_8 \right) \, ds_8 \\
&= \left[t \left(s_8^2 \frac{65, 5\text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_8^3}{6} \right) + s_8 S_{\bar{z},7}(s_{7,\text{ende}}) \right]_{s_8=0}^{s_{8,\text{ende}}} \\
&= 8048, 81\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.52}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{8,\text{ende}}} S_{\bar{y},8} \, ds_8 &= \int_0^{s_{8,\text{ende}}} \left(S_{\bar{y},7}(s_{7,\text{ende}}) - tz_0 s_8 \right) \, ds_8 \\
&= \left[-s_8^2 \frac{tz_0}{2} + s_8 S_{\bar{y},7}(s_{7,\text{ende}}) \right]_{s_8=0}^{s_{8,\text{ende}}} \\
&= -2521, 46\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.53}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{9,\text{ende}}} S_{\bar{z},9} \, ds_9 &= \int_0^{s_{9,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(51, 5\text{mm} \cdot s_9 - \frac{1}{2}s_9^2 \right) + S_{\bar{z},8}(s_{8,\text{ende}}) - ty_0 s_9 \right) \, ds_9 \\
&= \left[t \left(s_9^2 \frac{51, 5\text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_9^3}{6} \right) + s_9 S_{\bar{z},8}(s_{8,\text{ende}}) \right]_{s_9=0}^{s_{9,\text{ende}}} \\
&= 6989, 29\text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.54}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{9,\text{ende}}} S_{\bar{y},9} \, ds_9 &= \int_0^{s_{9,\text{ende}}} \left(S_{\bar{y},8}(s_{8,\text{ende}}) - tz_0 s_9 \right) \, ds_9 \\
&= \left[-s_9^2 \frac{tz_0}{2} + s_9 S_{\bar{y},8}(s_{8,\text{ende}}) \right]_{s_9=0}^{s_{9,\text{ende}}} \\
&= -1918,06 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.55}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{10,\text{ende}}} S_{\bar{z},10} \, ds_{10} &= \int_0^{s_{10,\text{ende}}} \left(t \cdot \left(37,5 \text{mm} \cdot s_{10} - \frac{1}{2} s_{10}^2 \right) + S_{\bar{z},9}(s_{9,\text{ende}}) - ty_0 s_{10} \right) \, ds_{10} \\
&= \left[t \left(s_{10}^2 \frac{37,5 \text{mm} - y_0}{2} - \frac{s_{10}^3}{6} \right) + s_{10} S_{\bar{z},9}(s_{9,\text{ende}}) \right]_{s_{10}=0}^{s_{10,\text{ende}}} \\
&= 9285,09 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.56}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_{10,\text{ende}}} S_{\bar{y},10} \, ds_{10} &= \int_0^{s_{10,\text{ende}}} \left(S_{\bar{y},9}(s_{9,\text{ende}}) - tz_0 s_{10} \right) \, ds_{10} \\
&= \left[-s_{10}^2 \frac{tz_0}{2} + s_{10} S_{\bar{y},9}(s_{9,\text{ende}}) \right]_{s_{10}=0}^{s_{10,\text{ende}}} \\
&= -2165,16 \text{mm}^4
\end{aligned} \tag{11.57}$$

- Hebelarme um den Pol unter Berücksichtigung des positiven Drehsinnes

i	r_i/mm	$\int S_{\bar{z},i}/\text{mm}^4$	$\int S_{\bar{y},i}/\text{mm}^4$
1	37,5	-24781,04	-679, 64
2	37,16	-11417,94	-1819,86
3	-14	-5967,72	638,06
4	37,16	-16954,55	-3166,21
5	37,16	-107261,55	-42977,28
6	81,97	-3426,83	-14579,38
7	0	39745,58	-27553,07
8	0	8048,81	-2521,46
9	0	6989,29	-1918,06
10	0	9285,09	-2165, 16

- Umformung von Formel (5.28)

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2A_{01}G} \underbrace{\left(\oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)} ds + q_{0b,1} \oint \frac{1}{t(s)} ds - q_{0b,2} \int \frac{1}{t(s)} ds \right)}_{A} \\
 &= A + q_{0b,1}B - q_{0b,2}C
 \end{aligned} \tag{11.58}$$

$$q_{0b,2}C = A + q_{0b,1}B$$

$$q_{0b,2} = \frac{A + q_{0b,1}B}{C}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2A_{01}G} \underbrace{\left(\oint \frac{q_{offen}(s)}{t(s)} ds + q_{0b,2} \oint \frac{1}{t(s)} ds - q_{0b,2} \int \frac{1}{t(s)} ds \right)}_{D} \\
 &= D + q_{0b,2}E - q_{0b,1}F \\
 &= D + \frac{A + q_{0b,1}B}{C}E - q_{0b,1}F \\
 &= D + \frac{AE}{C} + q_{0b,1} \left(\frac{BE}{C} - F \right) \\
 &- \left(D + \frac{AE}{C} \right) = q_{0b,1} \left(\frac{BE}{C} - F \right) \\
 q_{0b,1} &= -\frac{D + \frac{AE}{C}}{\frac{BE}{C} - F} = \frac{DC + AE}{BE - FC}
 \end{aligned} \tag{11.59}$$

11.3 Abbildungen: eLamX²

Lagenaufbau					
N...	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
2	Lage 2	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
3	Lage 3	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
4	Lage 4	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
5	Lage 5	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
6	Lage 6	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
7	Lage 7	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
8	Lage 8	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
9	Lage 9	0,0	0,216	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck

Abbildung 11.1: Lagenaufbau Holmgurte nach eLamX²

Lagenaufbau					
N...	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za..	Puck
5	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ...	Puck
6	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ...	Puck
7	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ...	Puck
8	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ...	Puck

Abbildung 11.2: Lagenaufbau Steg Bereich III nach eLamX²

Lagenaufbau					
N...	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
5	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
6	Lage 3 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
7	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
8	Lage 4 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
9	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
10	Lage 5 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
11	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
12	Lage 6 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
13	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
14	Lage 7 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
15	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
16	Lage 8 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
17	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
18	Lage 9 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
19	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
20	Lage 10 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
21	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
22	Lage 11 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
23	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
24	Lage 12 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Za. Puck	
25	Lage 12 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
26	Lage 12 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
27	Lage 11 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
28	Lage 11 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
29	Lage 10 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
30	Lage 10 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
31	Lage 9 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
32	Lage 9 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
33	Lage 8 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
34	Lage 8 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
35	Lage 7 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
36	Lage 7 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
37	Lage 6 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
38	Lage 6 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
39	Lage 5 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
40	Lage 5 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
41	Lage 4 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
42	Lage 4 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
43	Lage 3 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
44	Lage 3 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
45	Lage 2 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
46	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
47	Lage 1 (2/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	
48	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit ... Puck	

Abbildung 11.3: Lagenaufbau Steg Bereich I&II nach eLamX²

Lagenaufbau					
Nummer	Name	Winkel	Dicke	Material	Versagenskriterium
1	Lage 1 (1/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkö.. Puck	
2	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaunkö.. Puck	
3	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaun... Puck	
4	Lage 1 (1/2)	45,0	0,039	UD Einzelschicht Projektarbeit Zaun... Puck	

Abbildung 11.4: Lagenaufbau Flügelschale nach eLamX²

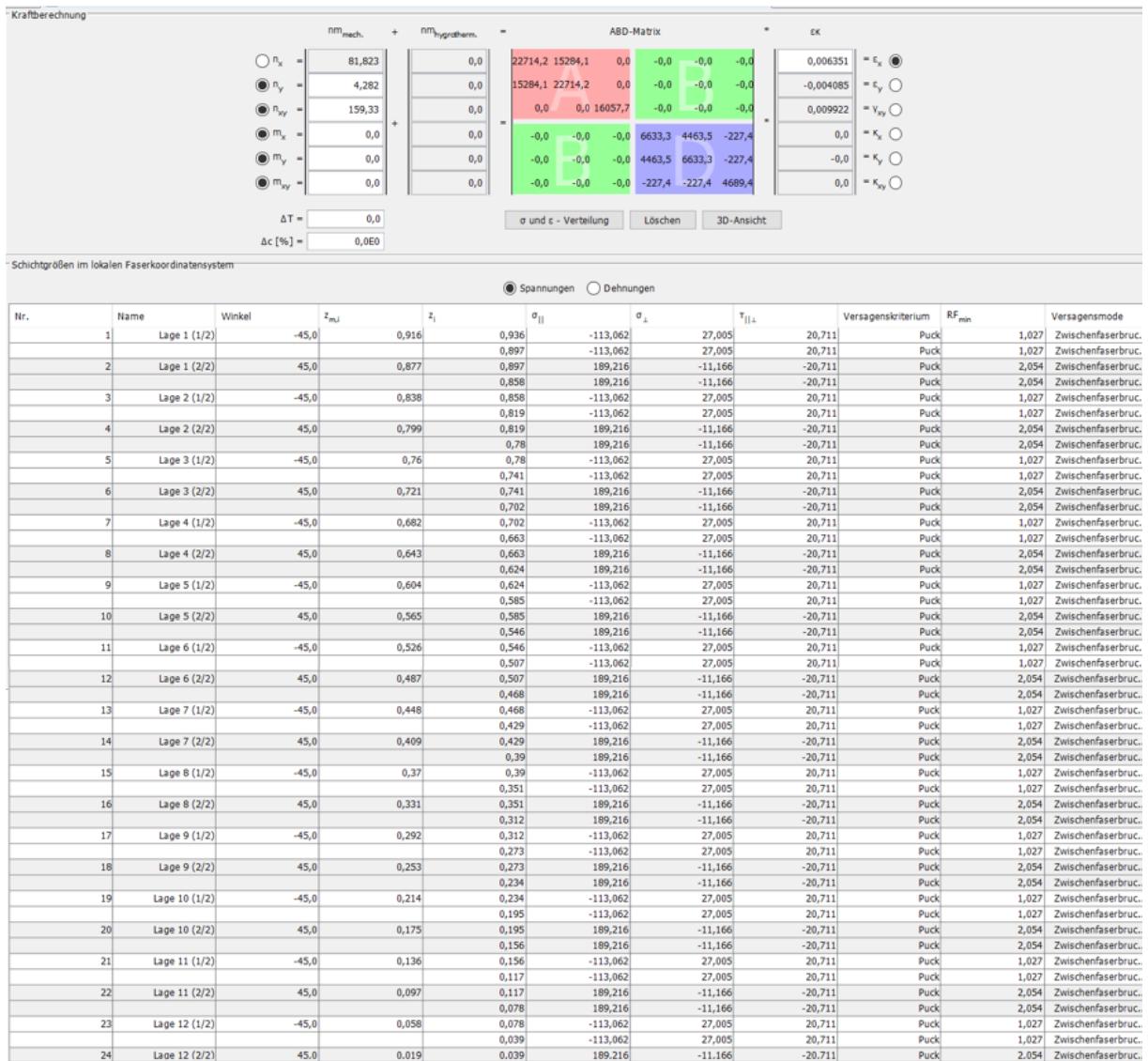
Kraftberechnung												
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem												
● Spannungen ○ Dehnungen												
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$		Versagenskriterium	RF _{min}	Versagensmode	
1	Lage 1	0,0	0,862	0,97	225,029	-0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
2	Lage 2	0,0	0,647	0,755	225,029	-0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
3	Lage 3	0,0	0,431	0,539	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
4	Lage 4	0,0	0,216	0,323	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
5	Lage 5	0,0	0,0	0,108	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
6	Lage 6	0,0	-0,216	-0,108	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
7	Lage 7	0,0	-0,431	-0,323	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
8	Lage 8	0,0	-0,647	-0,539	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	
9	Lage 9	0,0	-0,862	-0,755	225,029	0,0	0,0		Puck	2,657	Faserbruch Zug	

Abbildung 11.5: Berechnung Holmgurte nach eLamX²

Kraftberechnung

	$n_m^{\text{mech.}}$	+	$n_m^{\text{hydrotherm.}}$	=	ABD-Matrix	*	ε_K			
<input type="radio"/> $n_x =$	16,038		0,0	3785,7 2547,4 0,0 -0,0 -0,0 -0,0			0,006351	$= \varepsilon_x \circ$		
<input checked="" type="radio"/> $n_y =$	4,282		0,0	2547,4 3785,7 0,0 -0,0 -0,0 -0,0			-0,003142	$= \varepsilon_y \circ$		
<input checked="" type="radio"/> $n_{xy} =$	15,665		0,0	0,0 0,0 2676,3 -0,0 -0,0 -0,0			0,005853	$= v_{xy} \circ$		
<input checked="" type="radio"/> $m_x =$	0,0		0,0	-0,0 -0,0 -0,0 30,7 20,7 -6,3			0,0	$= K_x \circ$		
<input checked="" type="radio"/> $m_y =$	0,0		0,0	-0,0 -0,0 -0,0 20,7 30,7 -6,3			-0,0	$= K_y \circ$		
<input checked="" type="radio"/> $m_{xy} =$	0,0		0,0	-0,0 -0,0 -0,0 -6,3 -6,3 21,7			0,0	$= K_{xy} \circ$		
$\Delta T =$	0,0									
$\Delta c [\%] =$	0,0E0									
				<input checked="" type="radio"/> Spannungen	<input type="radio"/> Dehnungen					
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem										
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Versagenskriterium	R_F_{\min}	Versagensmode
1	Lage 1 (1/2)	-45,0	0,137	0,156 0,117	-35,243 -35,243	22,472 22,472	18,84 18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
2	Lage 1 (2/2)	45,0	0,097	0,117	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
3	Lage 2 (1/2)	-45,0	0,058	0,078 0,039	-35,243 -35,243	22,472 22,472	18,84 18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
4	Lage 2 (2/2)	45,0	0,019	0,039	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
5	Lage 2 (2/2)	45,0	-0,02	-0,0	143,073	-0,045	-18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
6	Lage 2 (1/2)	-45,0	-0,059	-0,039	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
7	Lage 1 (2/2)	45,0	-0,098	-0,078 -0,117	-35,243 143,073	22,472 -0,045	18,84 -18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...
8	Lage 1 (1/2)	-45,0	-0,137	-0,117	-35,243	22,472	18,84	Puck	1,186	Zwischenfaserbruc...

Abbildung 11.6: Berechnung Steg Bereich III nach eLamX²

Abbildung 11.7: Berechnung Steg Bereich I&II nach eLamX²

Kraftberechnung									
	$n_m_{\text{mech.}}$	+	$n_m_{\text{hygrotherm.}}$	=	ABD-Matrix	*	ε_k		
• $n_x =$	0,0		0,0		1892,9 1273,7 0,0 0,0 0,0 0,0	*	0,0	$= \varepsilon_x \circ$	
• $n_y =$	0,0		0,0		1273,7 1892,9 0,0 0,0 0,0 0,0	*	-0,0	$= \varepsilon_y \circ$	
• $n_{xy} =$	6,631		0,0		0,0 0,0 1338,1 0,0 0,0 0,0	*	0,004955	$= \gamma_{xy} \circ$	
• $m_x =$	0,0		0,0		0,0 0,0 0,0 3,8 2,6 1,6	*	-0,0	$= \kappa_x \circ$	
• $m_y =$	0,0		0,0		0,0 0,0 0,0 2,6 3,8 1,6	*	0,0	$= \kappa_y \circ$	
• $m_{xy} =$	0,0		0,0		0,0 0,0 0,0 1,6 1,6 2,7	*	0,0	$= \kappa_{xy} \circ$	
$\Delta T =$	0,0								
$\Delta c [\%] =$	0,0E0								
					<input type="button" value="σ und ε - Verteilung"/>	<input type="button" value="Löschen"/>	<input type="button" value="3D-Ansicht"/>		

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem										
● Spannungen ○ Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Versagenskriterium	RF_{\min}	Versagensmode
1	Lage 1 (1/2)	45,0	0,058	0,058	0,078	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729 Zwischenfaserbruch M...
					0,039	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729 Zwischenfaserbruch M...
2	Lage 1 (2/2)	-45,0	0,019	0,019	0,039	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955 Zwischenfaserbruch M...
3	Lage 1 (2/2)	-45,0	-0,019	-0,019	0,0	-75,481	9,532	0,0	Puck	3,955 Zwischenfaserbruch M...
4	Lage 1 (1/2)	45,0	-0,058	-0,058	-0,039	75,481	-9,532	0,0	Puck	3,955 Zwischenfaserbruch M...
					-0,078	75,481	-9,532	0,0	Puck	7,729 Zwischenfaserbruch M...
										7,729 Zwischenfaserbruch M...

Abbildung 11.8: Berechnung Flügelschale nach eLamX²

ABD-Matrix									
62162,0	3049,0	0,0	-0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3049,0	10513,6	0,0	0,0	-0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	3850,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
-0,0	0,0	0,0	19504,1	956,6	956,6	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	-0,0	0,0	956,6	3298,8	3298,8	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1208,2	0,0	0,0	0,0

Inverse ABD-Matrix									
1,6319E-5	-4,7325E-6	0,0E0	8,0805E-22	-6,7864E-22	0,0E0				
-4,7325E-6	9,6487E-5	0,0E0	-6,7864E-22	3,6036E-21	0,0E0				
0,0E0	0,0E0	2,5969E-4	0,0E0	0,0E0	0,0E0				
8,0805E-22	-6,7864E-22	0,0E0	5,2011E-5	-1,5083E-5	0,0E0				
-6,7864E-22	3,6036E-21	0,0E0	-1,5083E-5	3,0752E-4	0,0E0				
0,0E0	0,0E0	0,0E0	0,0E0	0,0E0	8,2765E-4				

Ingenieurkonstanten									
mit QKB					ohne QKB				
		Membran		Biegung		Membran		Biegung	
E_x		=	32035,7	32035,7	31580,0	31580,0			
E_y		=	5418,3	5418,3	5341,2	5341,2			
G_{xy}		=	1984,5	1984,5	1984,5	1984,5			
v_{xy}		=	-	-	0,290	0,290			
v_{yx}		=	-	-	0,049	0,049			
t_{ges}		=			1,94				
Flächengewicht		=			3,353E-9				

Abbildung 11.9: Ingenieurkonstanten Holmgurte nach eLamX²

ABD-Matrix						
3785,7	2547,4	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
2547,4	3785,7	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
0,0	0,0	2676,3	-0,0	-0,0	-0,0	-0,0
-0,0	-0,0	-0,0	30,7	20,7	-6,3	-6,3
-0,0	-0,0	-0,0	20,7	30,7	-6,3	-6,3
-0,0	-0,0	-0,0	-6,3	-6,3	21,7	21,7

Inverse ABD-Matrix						
4,8271E-4	-3,2481E-4	2,6375E-36	6,9563E-19	-4,4673E-19	1,2409E-19	
-3,2481E-4	4,8271E-4	2,6375E-36	-4,4673E-19	6,9563E-19	1,2409E-19	
2,6375E-36	2,6375E-36	3,7365E-4	1,5281E-19	1,5281E-19	8,2266E-19	
6,9563E-19	-4,4673E-19	1,5281E-19	6,0256E-2	-3,9291E-2	6,0988E-3	
-4,4673E-19	6,9563E-19	1,5281E-19	-3,9291E-2	6,0256E-2	6,0988E-3	
1,2409E-19	1,2409E-19	8,2266E-19	6,0988E-3	6,0988E-3	4,961E-2	

Ingenieurskonstanten						
mit QKB			ohne QKB			
	Membran	Biegung	Membran	Biegung		
E_x	=	12133,7	12133,7	6639,8	6557,2	
E_y	=	12133,7	12133,7	6639,8	6557,2	
G_{xy}	=	8577,8	8577,8	8577,8	7964,3	
v_{xy}	=	-	-	0,673	0,652	
v_{yx}	=	-	-	0,673	0,652	
t_{ges}	=		0,312			
Flächengewicht	=		5,3914E-10			

Abbildung 11.10: Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich III nach eLamX²

ABD-Matrix						
22714,2	15284,1	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,
15284,1	22714,2	0,0	-0,0	-0,0	-0,0	-0,
0,0	0,0	16057,7	-0,0	-0,0	-0,0	-0,
-0,0	-0,0	-0,0	6633,3	4463,5	-227,	
-0,0	-0,0	-0,0	4463,5	6633,3	-227,	
-0,0	-0,0	-0,0	-227,4	-227,4	4689,	

Inverse ABD-Matrix						
8,0452E-5	-5,4135E-5	5,084E-36	2,6365E-19	-1,6991E-19	4,8639E-2	
-5,4135E-5	8,0452E-5	4,5564E-36	-1,6992E-19	2,533E-19	4,3615E-2	
5,084E-36	4,5564E-36	6,2275E-5	4,5971E-21	4,5971E-21	2,0879E-1	
2,6365E-19	-1,6992E-19	4,5971E-21	2,7558E-4	-1,8529E-4	4,378E-	
-1,6991E-19	2,533E-19	4,5971E-21	-1,8529E-4	2,7558E-4	4,378E-	
4,8639E-21	4,3615E-21	2,0879E-19	4,378E-6	4,378E-6	2,1367E-	

Ingenieurskonstanten						
	mit QKB			ohne QKB		
	Membran	Biegung	Membran	Biegung		
E_x	=	12133,7	12133,7	6639,8	6637,7	
E_y	=	12133,7	12133,7	6639,8	6637,7	
G_{xy}	=	8577,8	8577,8	8577,8	8560,8	
v_{xy}	=	-	-	0,673	0,672	
v_{yx}	=	-	-	0,673	0,672	
t_{ges}	=		1,872			
Flächen&ewicht	=		3.2348E-9			

Abbildung 11.11: Ingenieurskonstanten Berechnung Steg Bereich I&II nach eLamX²

- ABD-Matrix						
1892,9	1273,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1273,7	1892,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	1338,1	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	3,8	2,6	1,6	1,6
0,0	0,0	0,0	2,6	3,8	1,6	1,6
0,0	0,0	0,0	1,6	1,6	2,7	2,7

- Inverse ABD-Matrix						
9,6543E-4	-6,4962E-4	2,0207E-36	-1,5222E-18	1,2093E-18	-4,4991E-19	
-6,4962E-4	9,6543E-4	-1,3597E-36	1,0243E-18	-8,1373E-19	3,0274E-19	
2,0207E-36	-1,3597E-36	7,473E-4	-6,7337E-19	3,8381E-19	1,6847E-19	
-1,5222E-18	1,0243E-18	-6,7337E-19	5,0725E-1	-2,8912E-1	-1,2691E-1	
1,2093E-18	-8,1373E-19	3,8381E-19	-2,8912E-1	5,0725E-1	-1,2691E-1	
-4,4991E-19	3,0274E-19	1,6847E-19	-1,2691E-1	-1,2691E-1	5,1617E-1	

- Ingenieurkonstanten						
mit QKB		ohne QKB				
Membran			Membran			
Biegung			Biegung			
E_x			6639,8 6231,4			
E_y			6639,8 6231,4			
G_{xy}			8577,8 8577,8			
v_{xy}			0,673 0,570			
v_{yx}			0,673 0,570			
t_{ges}			0,156			
Flächengewicht			2,6957E-10			

Abbildung 11.12: Ingenieurkonstanten Berechnung Flügelschale nach eLamX²

Kraftberechnung										
$n_mech.$	$+ nm_{hydotherm.}$									
$\bigcirc n_x =$	$\begin{bmatrix} 88,668 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$\bigcirc n_y =$	$\begin{bmatrix} -88,288 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$\bigcirc n_{xy} =$	$\begin{bmatrix} 19,43 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$\bigcirc m_x =$	$\begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$\bigcirc m_y =$	$\begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$\bigcirc m_{xy} =$	$\begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$									
$= ABD\text{-Matrix}$										
$= \begin{bmatrix} 35056,9 & 2941,5 & 0,0 & -0,0 & -0,0 & -0,0 \\ 2941,5 & 35056,9 & 0,0 & -0,0 & -0,0 & -0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 3715,1 & -0,0 & -0,0 & -0,0 \\ -0,0 & -0,0 & -0,0 & 10692,5 & 859,0 & 0,0 \\ -0,0 & -0,0 & -0,0 & 859,0 & 9783,0 & 0,0 \\ -0,0 & -0,0 & -0,0 & 0,0 & 0,0 & 1084,9 \end{bmatrix}$										
$* \varepsilon_K$										
$= \begin{bmatrix} 0,00276 & = \varepsilon_x \bigcirc \\ -0,00275 & = \varepsilon_y \bigcirc \\ 0,00523 & = \gamma_{xy} \bigcirc \\ 0,0 & = \kappa_x \bigcirc \\ -0,0 & = \kappa_y \bigcirc \\ 0,0 & = \kappa_{xy} \bigcirc \end{bmatrix}$										
$\Delta T =$	0,0									
$\Delta c [\%] =$	0,0E0									
<input type="button" value="σ und ε - Verteilung"/> <input type="button" value="Löschen"/> <input type="button" value="3D-Ansicht"/>										
Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem										
<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	$z_{m,i}$	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Versagenskriterium	R_F_{min}	Versagensmode
1	Lage 1 (1/2)	0,0	0,916	0,936 0,897 0,858 0,819 0,741 0,702	84,097 84,097 -83,761 -83,761 84,097 -83,761	-10,563 -10,563 10,633 10,633 -10,563 10,633	10,379 10,379 -10,379 -10,379 10,379 -10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...
2	Lage 1 (2/2)	90,0	0,877	0,897 0,858 -83,761 -83,761 84,097 -83,761	84,097 -83,761 10,633 10,633 -10,563 10,633	10,379 -10,379 -10,379 -10,379 10,379 -10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
3	Lage 2 (1/2)	0,0	0,838	0,858 0,819 0,78 0,741 0,702 0,663	84,097 84,097 -10,563 -10,563 84,097 -83,761	10,379 10,379 10,379 10,379 10,379 10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
4	Lage 2 (2/2)	90,0	0,799	0,819 0,78 0,741 0,702 0,663 0,624	-83,761 -83,761 84,097 -83,761 -10,563 -83,761	10,633 10,633 -10,563 10,633 10,379 10,633	-10,379 -10,379 Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...	
5	Lage 3 (1/2)	0,0	0,76	0,78 0,741 0,702 0,663 0,624 0,585	84,097 84,097 -10,563 -10,563 84,097 -83,761	-10,563 -10,563 10,633 10,633 -10,563 10,633	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
6	Lage 3 (2/2)	90,0	0,721	0,721 0,663 0,624 0,585 0,546 0,507	-83,761 -83,761 -83,761 -83,761 -83,761 84,097	10,633 10,633 10,633 10,633 10,633 -10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...	
7	Lage 4 (1/2)	0,0	0,682	0,682 0,663 0,624 0,585 0,546 0,507	84,097 84,097 -83,761 -83,761 84,097 -83,761	-10,563 -10,563 10,633 10,633 -10,563 10,633	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
8	Lage 4 (2/2)	90,0	0,643	0,643 0,624 0,585 0,546 0,507 0,487	-83,761 -83,761 -83,761 -83,761 -83,761 -83,761	10,633 10,633 10,633 10,633 10,633 -10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...	
9	Lage 5 (1/2)	0,0	0,604	0,604 0,565 0,526 0,507 0,487	84,097 84,097 -10,563 -10,563 -83,761	-10,563 -10,563 10,633 10,633 10,633 -10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
10	Lage 5 (2/2)	90,0	0,565	0,565 0,526 0,507 0,487	84,097 84,097 -10,563 -10,563	10,633 10,633 -10,379 -10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...	
11	Lage 6 (1/2)	0,0	0,526	0,526 0,507 0,487	84,097 84,097 -83,761	-10,563 -10,563 10,633 -10,379	Puck	4,68	Zwischenfaserbruc...	
12	Lage 6 (2/2)	90,0	0,487	0,487 0,507 0,507	-83,761 -83,761 -83,761	10,633 10,633 -10,379	Puck	2,32	Zwischenfaserbruc...	

Abbildung 11.13: Sicherheit im Steg bei 500N nach eLamX²

Kraftberechnung

	$\text{nm}_{\text{mech.}}$	+	$\text{nm}_{\text{hydrotherm.}}$	=	ABD-Matrix	*	ε_{K}
<input type="radio"/> n_x =	-3,289		0,0	2921,4 245,1 0,0 0,0 -0,0 0,0			-0,00107 = ε_x <input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> n_y =	-2,202		0,0	245,1 2921,4 0,0 -0,0 -0,0 0,0			-0,000664 = ε_y <input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> n_{xy} =	-2,334		0,0	0,0 0,0 309,6 0,0 0,0 0,0			-0,00754 = γ_{xy} <input checked="" type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_x =	0,0		0,0	0,0 -0,0 0,0 9,1 0,5 0,0			0,0 = κ_x <input type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_y =	0,0		0,0	-0,0 -0,0 0,0 0,5 2,8 0,0			0,0 = κ_y <input type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_{xy} =	0,0		0,0	0,0 0,0 0,0 0,0 0,0 0,6			0,0 = κ_{xy} <input type="radio"/>
ΔT =	0,0						
$\Delta c [\%]$ =	0,0E0						

σ und ε - Verteilung Löschen 3D-Ansicht

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem

<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	z_{mi}	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Versagenskriterium	R_F_{\min}	Versagensmode
1	Lage 1 (1/2)	0,0	0,058	0,078	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...
				0,039	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...
2	Lage 1 (2/2)	90,0	0,019	0,039	-22,953	-6,841	14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...
				0,0	-22,953	-6,841	14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...
3	Lage 1 (2/2)	90,0	-0,019	0,0	-22,953	-6,841	14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...
				0,039	-22,953	-6,841	14,963	Puck	2,873	Zwischenfaserbruch...
4	Lage 1 (1/2)	0,0	-0,058	-0,039	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...
				-0,078	-35,322	-5,279	-14,963	Puck	2,785	Zwischenfaserbruch...

Abbildung 11.14: Sicherheit in der Haut bei 500N nach eLamX²

Kraftberechnung

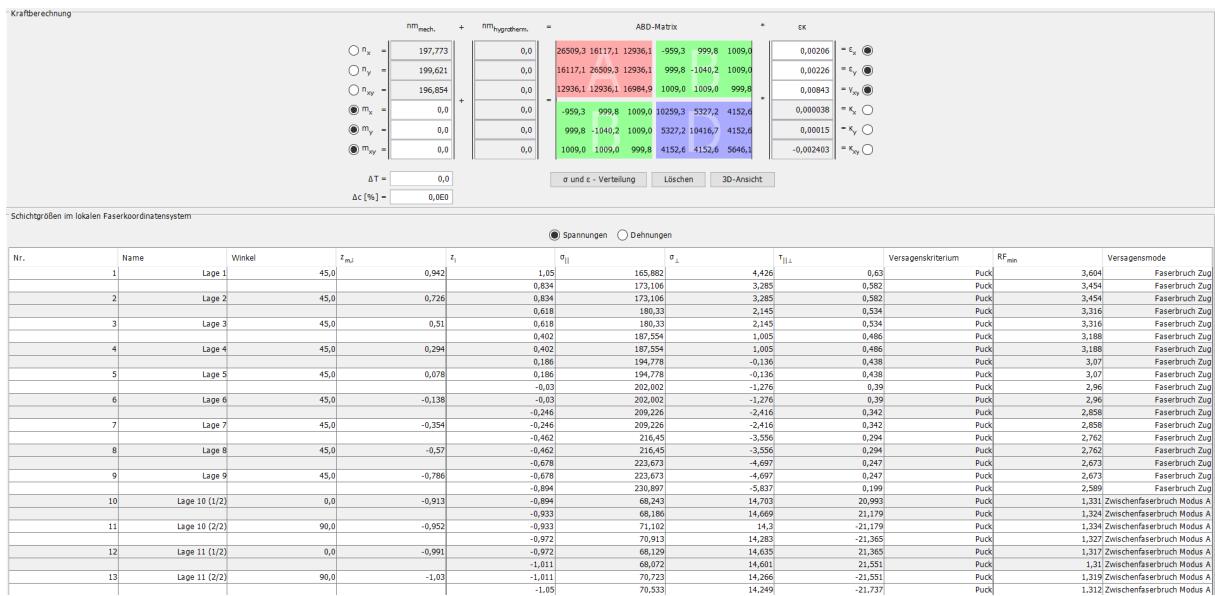
	$\text{nm}_{\text{mech.}}$	+	$\text{nm}_{\text{hydrotherm.}}$	=	ABD-Matix	*	ε_{K}
<input type="radio"/> n_x =	-157,532		0,0	66509,8 16117,1 12936,1 -959,3 999,8 1009,0			-0,00142 = ε_x <input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> n_y =	-158,242		0,0	16117,1 26509,3 12936,1 999,8 -1040,2 1009,0			-0,00115 = ε_y <input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> n_{xy} =	-163,989		0,0	12936,1 12936,1 16998,9 1009,0 1009,0 999,8			-0,00754 = γ_{xy} <input checked="" type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_x =	0,0		0,0	-959,3 999,8 1009,0 10259,3 5327,2 4152,6			0,000017 = κ_x <input type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_y =	0,0		0,0	999,8 -1040,2 1009,0 5327,2 10416,7 4152,6			-0,000038 = κ_y <input type="radio"/>
<input checked="" type="radio"/> m_{xy} =	0,0		0,0	1009,0 1009,0 999,8 4152,6 4152,6 5646,0			0,001873 = κ_{xy} <input type="radio"/>
ΔT =	0,0						
$\Delta c [\%]$ =	0,0E0						

σ und ε - Verteilung Löschen 3D-Ansicht

Schichtgrößen im lokalen Faserkoordinatensystem

<input checked="" type="radio"/> Spannungen <input type="radio"/> Dehnungen										
Nr.	Name	Winkel	z_{mi}	z_i	$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Versagenskriterium	R_F_{\min}	Versagensmode
1	Lage 1	45,0	0,942	1,05	-134,344	0,437	-0,274	Puck	4,838	Faserbruch Druck
				0,834	-140,427	1,231	-0,25	Puck	4,629	Faserbruch Druck
2	Lage 2	45,0	0,726	0,834	-140,427	1,231	-0,25	Puck	4,629	Faserbruch Druck
3	Lage 3	45,0	0,51	0,618	-146,511	2,026	-0,226	Puck	4,437	Faserbruch Druck
4	Lage 4	45,0	0,294	0,402	-152,595	2,82	-0,203	Puck	4,26	Faserbruch Druck
5	Lage 5	45,0	0,078	0,186	-158,678	3,614	-0,179	Puck	4,096	Faserbruch Druck
6	Lage 6	45,0	0,-03	-164,762	4,409	-0,155	Puck	3,945	Faserbruch Druck	
7	Lage 7	45,0	-0,354	-0,246	-170,845	5,203	-0,132	Puck	3,777	Zwischenfaserbruch Modus A
8	Lage 8	45,0	-0,57	-0,462	-176,929	5,997	-0,108	Puck	3,59	Zwischenfaserbruch Modus A
9	Lage 9	45,0	-0,786	-0,678	-183,013	6,792	-0,085	Puck	3,397	Zwischenfaserbruch Modus A
10	Lage 10 (1/2)	0,0	-0,913	-0,894	-189,095	7,592	-0,065	Puck	3,228	Zwischenfaserbruch Modus A
11	Lage 10 (2/2)	90,0	-0,952	-0,933	-48,295	-10,19	-0,206	Puck	2,423	Zwischenfaserbruch Modus B
12	Lage 11 (1/2)	0,0	-0,991	-0,972	-49,117	-10,08	-0,431	Puck	2,396	Zwischenfaserbruch Modus B
13	Lage 11 (2/2)	90,0	-1,03	-1,011	-48,314	-10,183	-0,576	Puck	2,374	Zwischenfaserbruch Modus B

Abbildung 11.15: Sicherheit am Gurt oben bei 500N nach eLamX²

Abbildung 11.16: Sicherheit am Gurt unten bei 500N nach eLamX²

11.4 Abbildungen: Beulberechnung

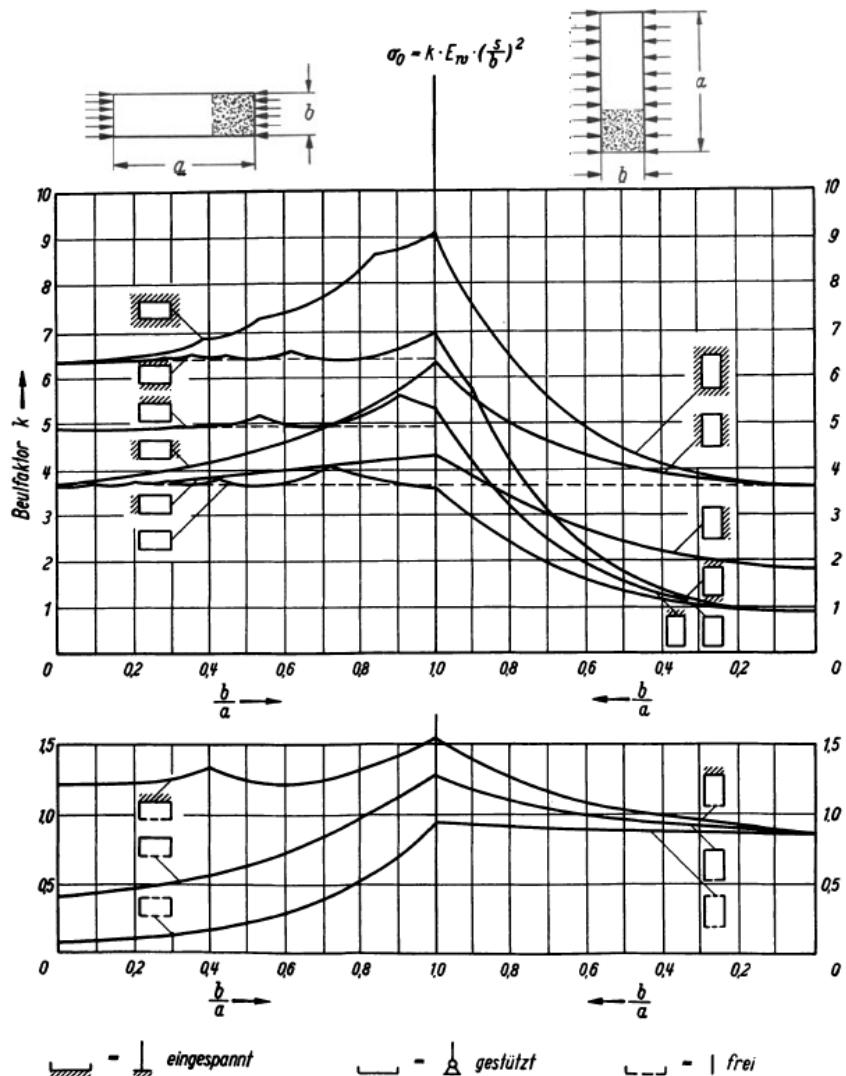


Abbildung 11.17: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Druck ohne Versteifungen; nach [Her60]

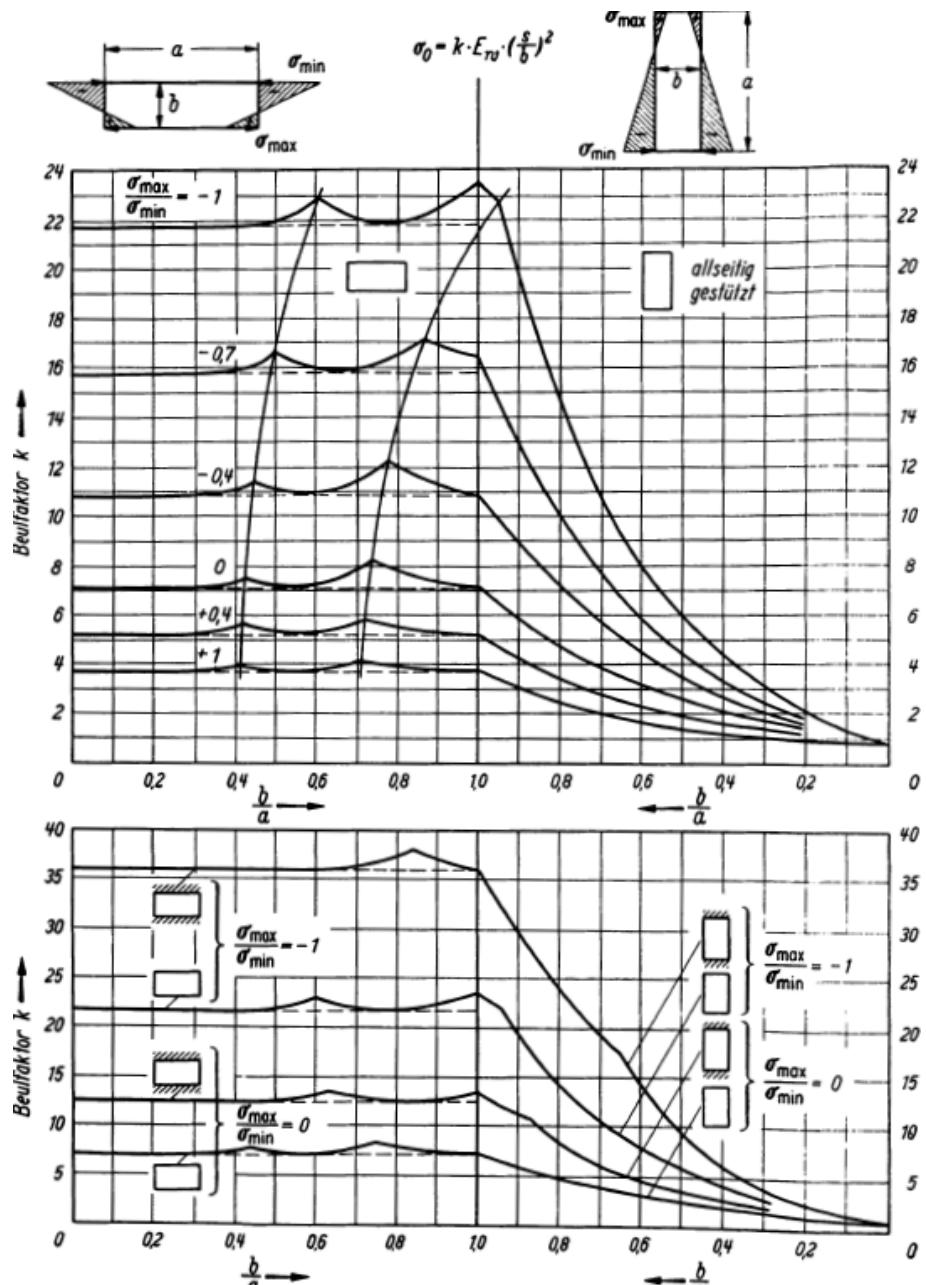


Abbildung 11.18: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Biegung und Druck, ohne Versteifungen; nach [Her60]

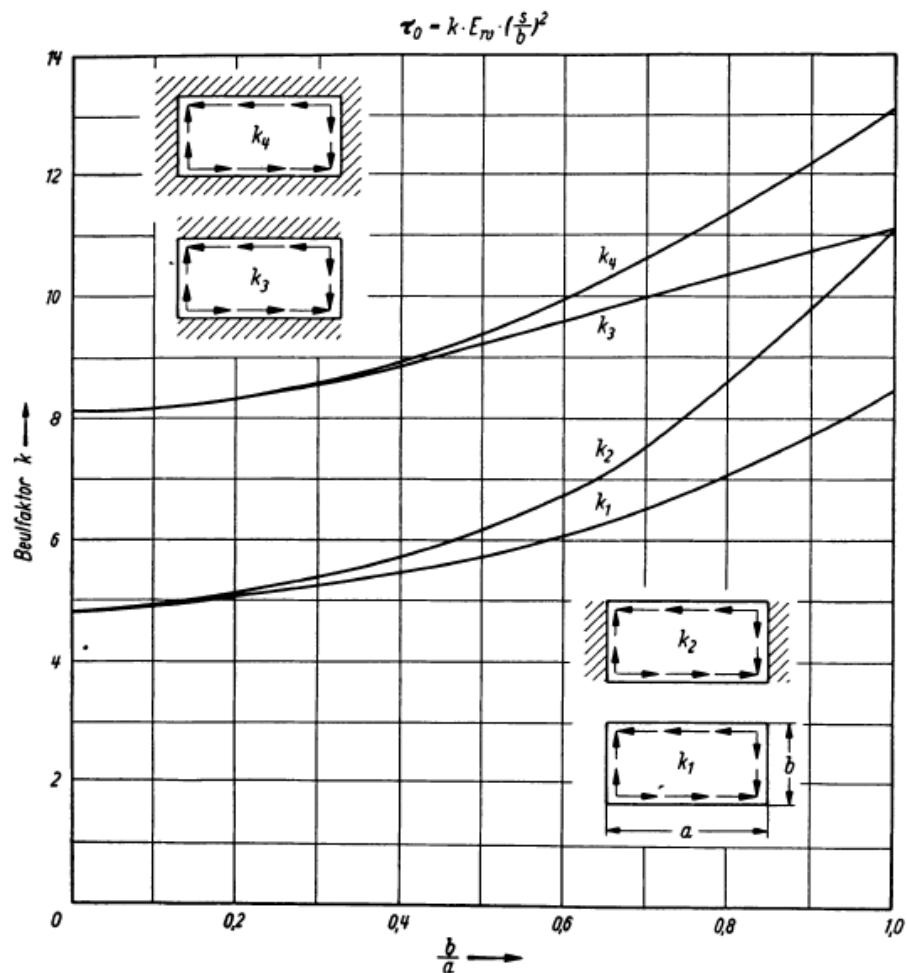


Abbildung 11.19: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, verschiedenen Randbedingungen für Schub, ohne Versteifungen; nach [Her60]

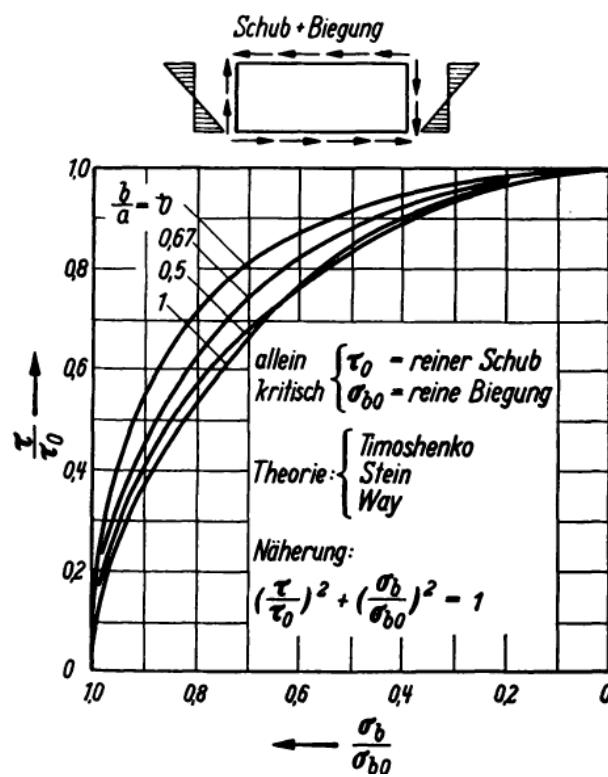


Abbildung 11.20: Beulfaktor bei Beulspannungen einer ebenen isotropen Platte, Ränder einseitig gestützt, für Überlagerungen, ohne Versteifungen; nach [Her60]

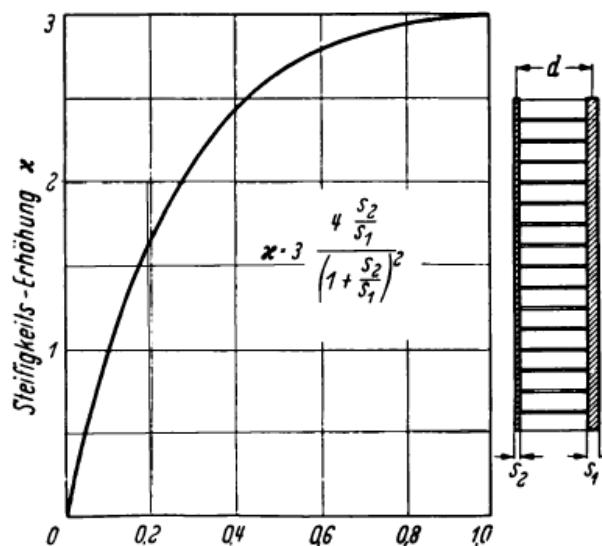


Abbildung 11.21: Sandwichplatte mit unterschiedlichen Hautstärken, Beulsteifigkeit, für Steifigkeits-Erhöhungsfaktor; nach [Her60]

11.5 Abbildungen Schubfluss

s	$\in(0,...)$
1	58,90486225
2	14
3	37,5
4	14
5	107,72
6	30,07
7	83,46
8	14
9	14
10	37,5
Σ	411,1548623

Abbildung 11.22: Wertebereich der Laufvariablen s_i

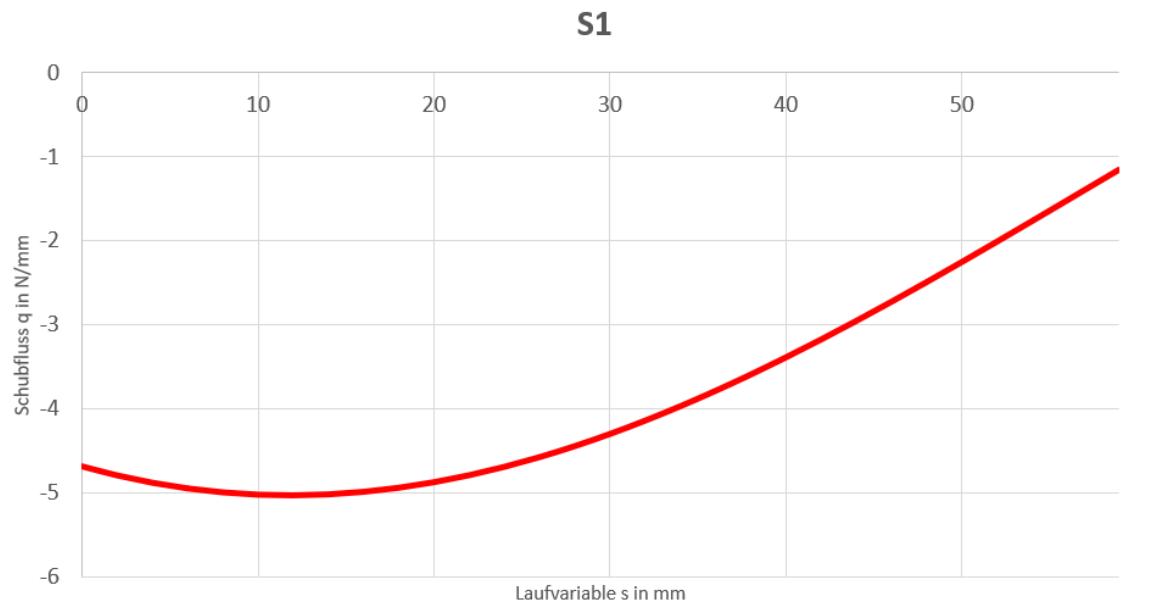


Abbildung 11.23: Schubfluss Bereich 1



Abbildung 11.24: Schubfluss Bereich 2

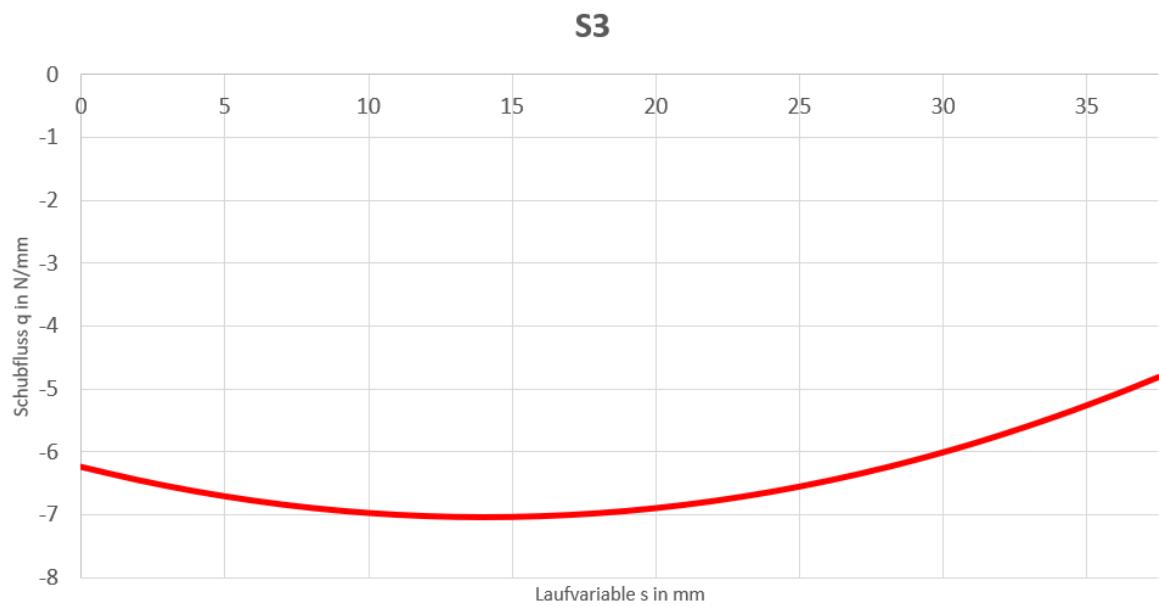


Abbildung 11.25: Schubfluss Bereich 3

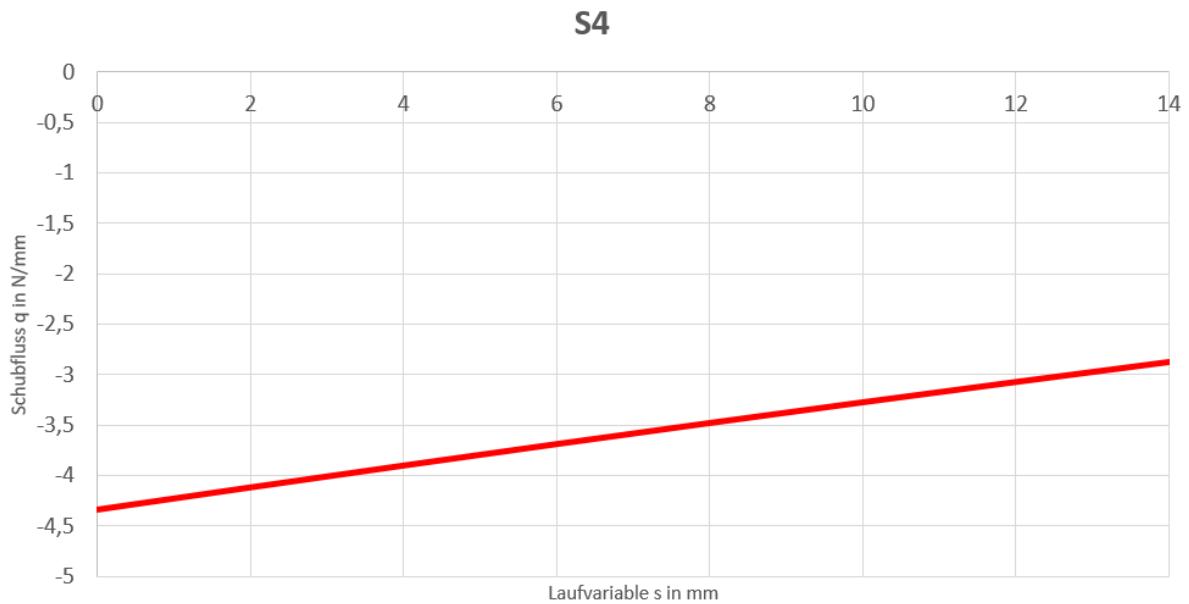


Abbildung 11.26: Schubfluss Bereich 4

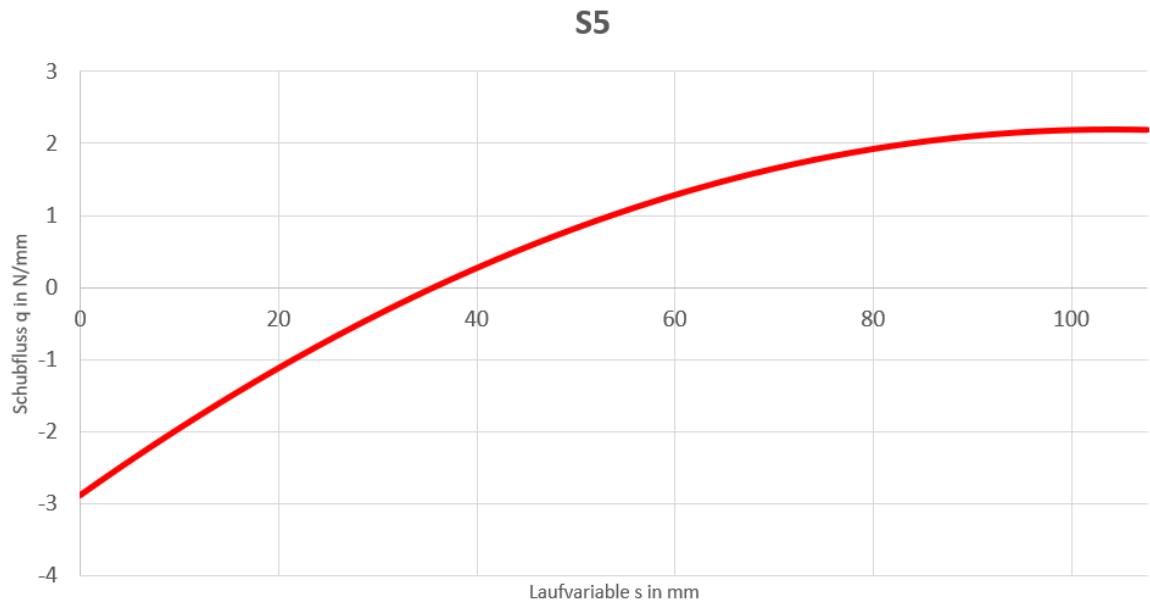


Abbildung 11.27: Schubfluss Bereich 5

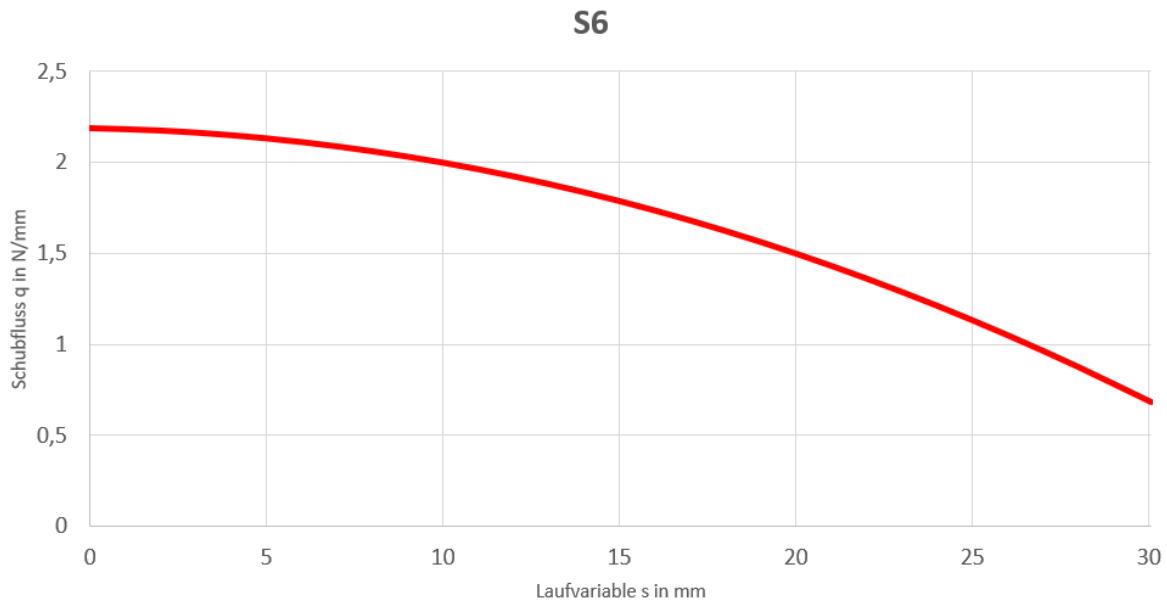


Abbildung 11.28: Schubfluss Bereich 6

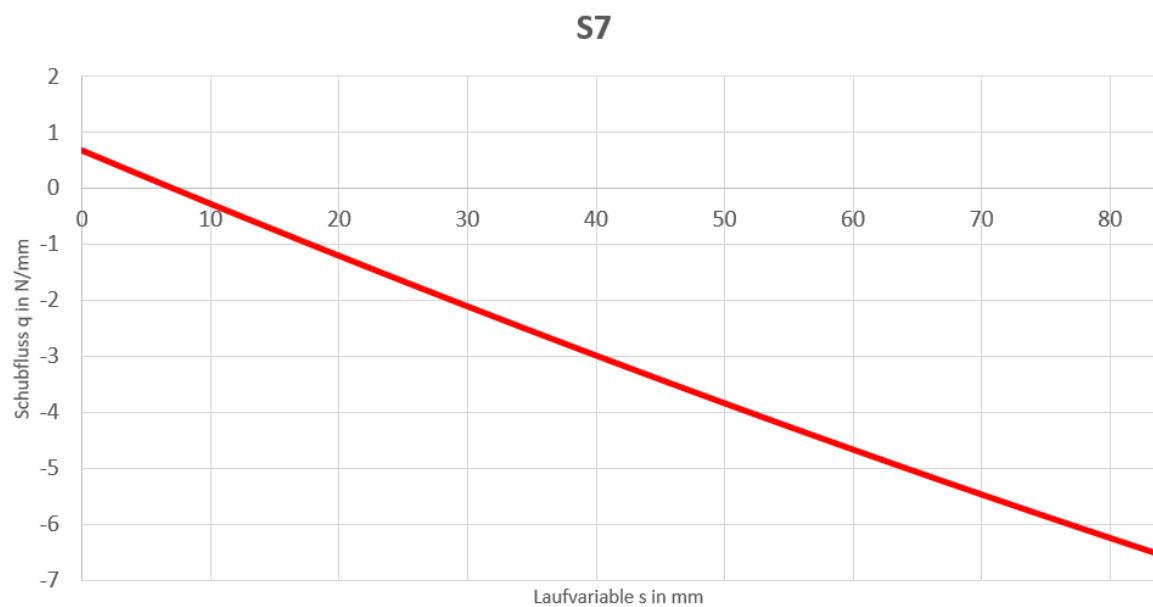


Abbildung 11.29: Schubfluss Bereich 7

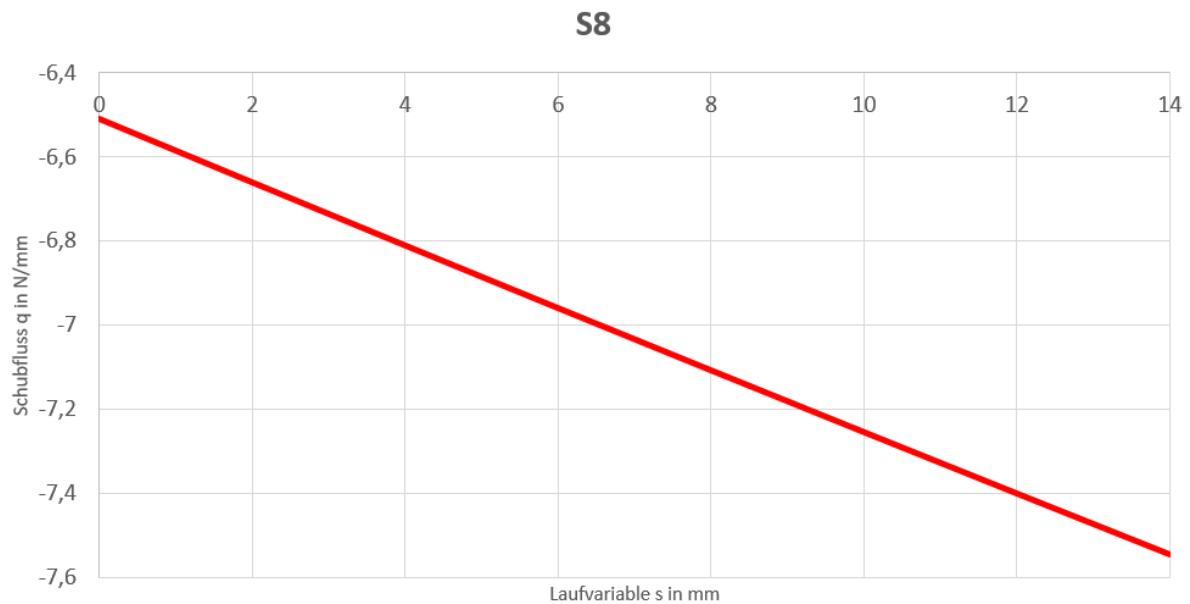


Abbildung 11.30: Schubfluss Bereich 8

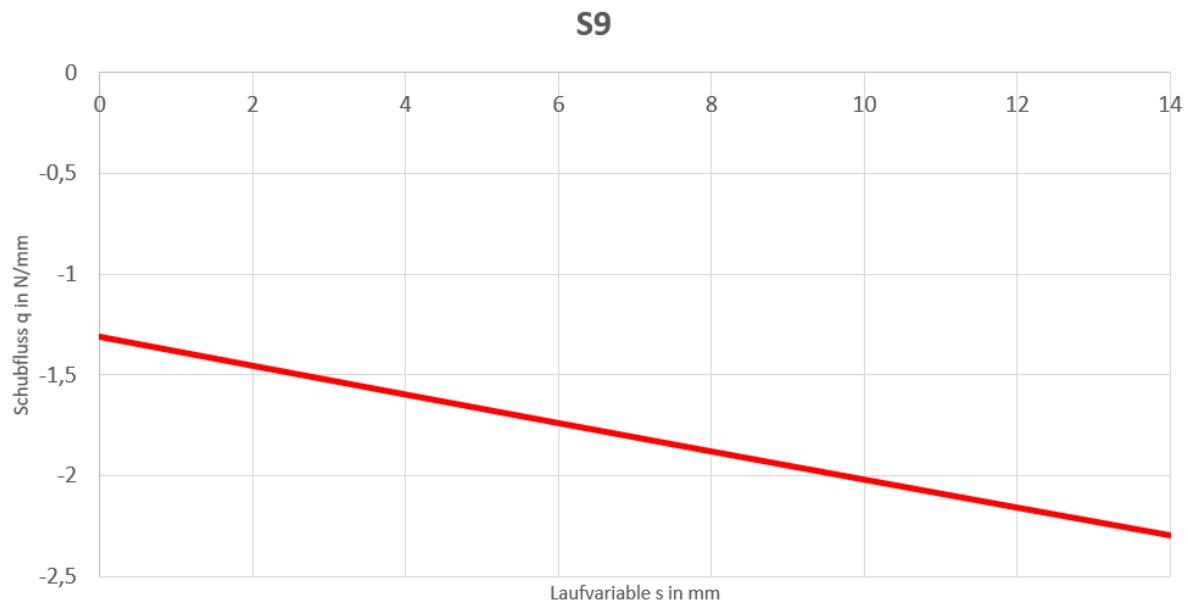


Abbildung 11.31: Schubfluss Bereich 9

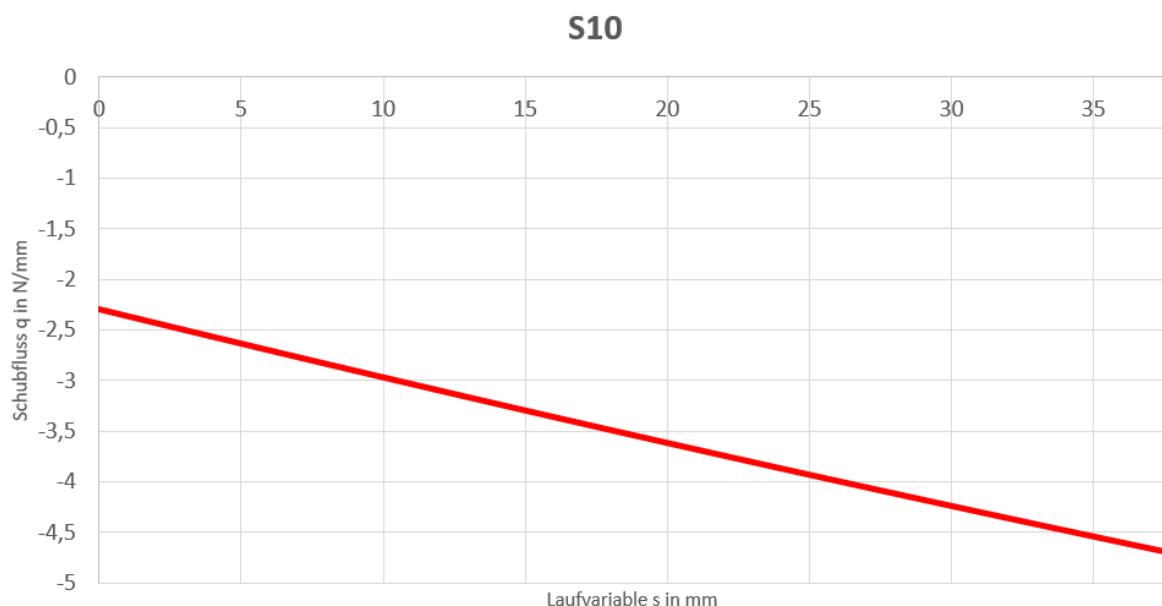


Abbildung 11.32: Schubfluss Bereich 10

11.6 Abbildungen: Numerische Berechnung

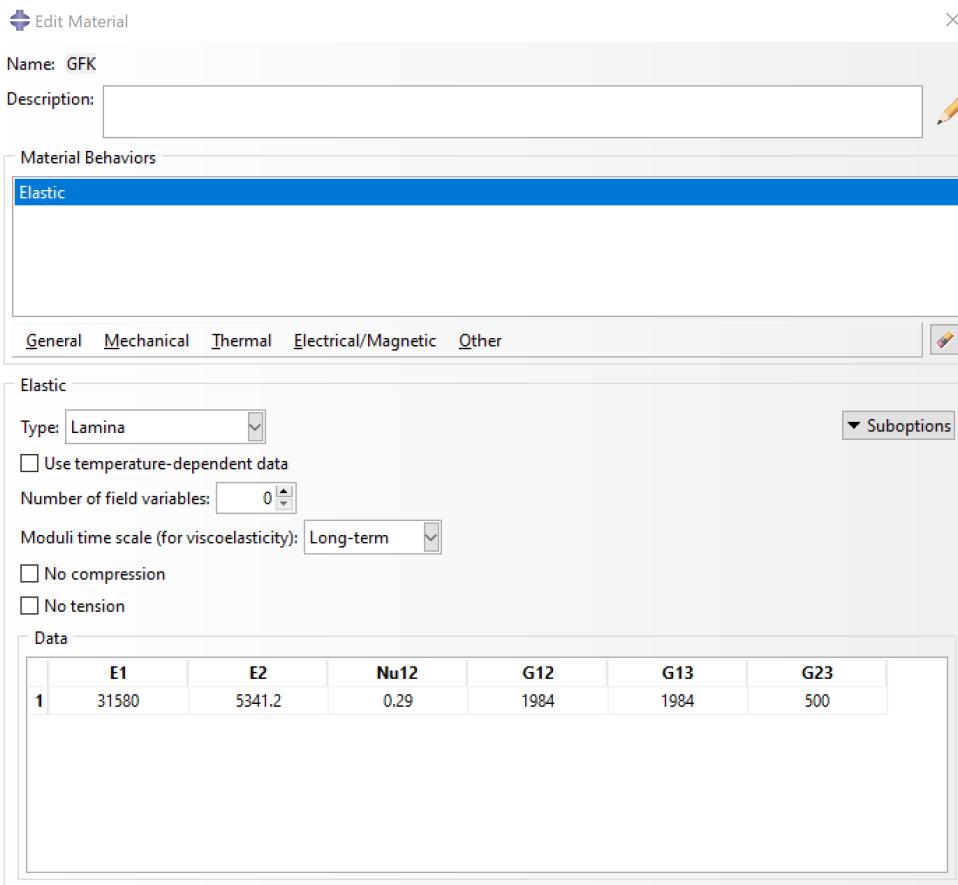


Abbildung 11.33: ABAQUS Material Beispiel GFK

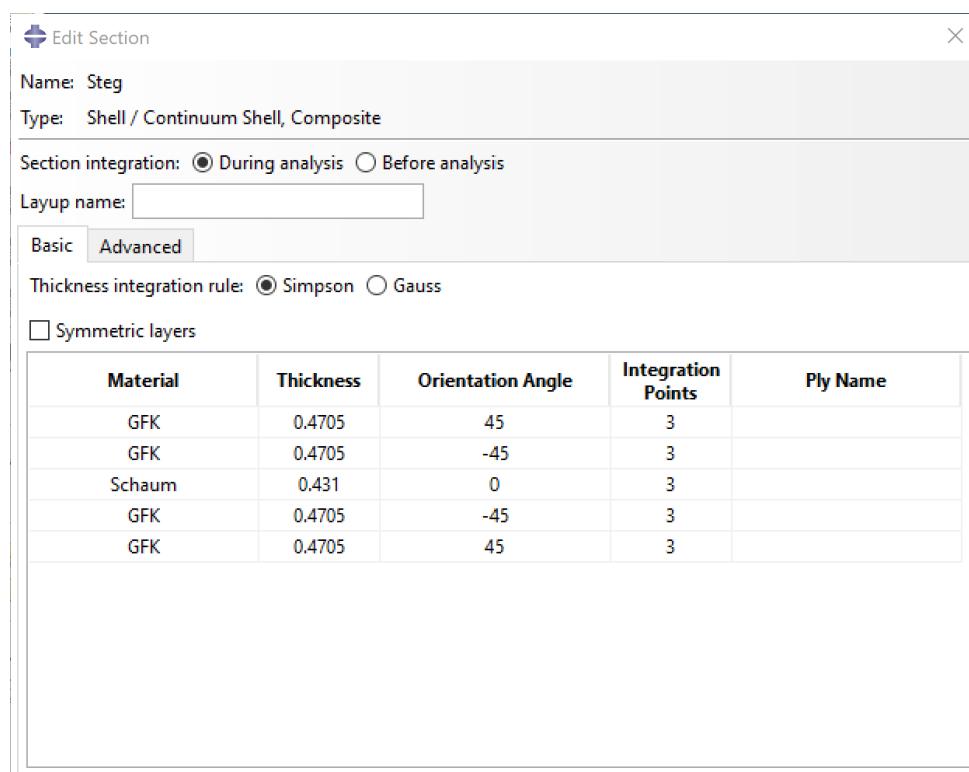


Abbildung 11.34: ABAQUS Section Beispiel:Steg

11.7 Abbildungen: Konstruktion und Fertigung

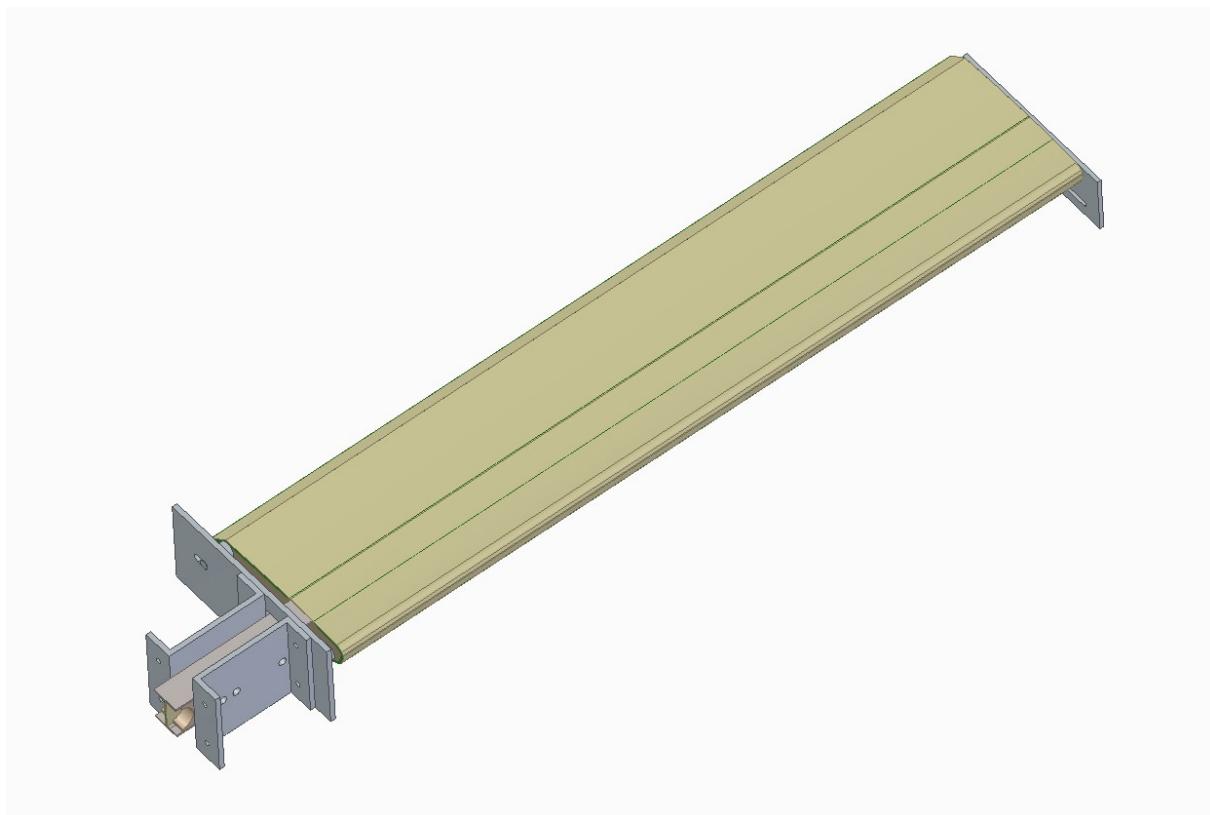


Abbildung 11.35: CAD-Modell der Tragfläche und des Teststandes

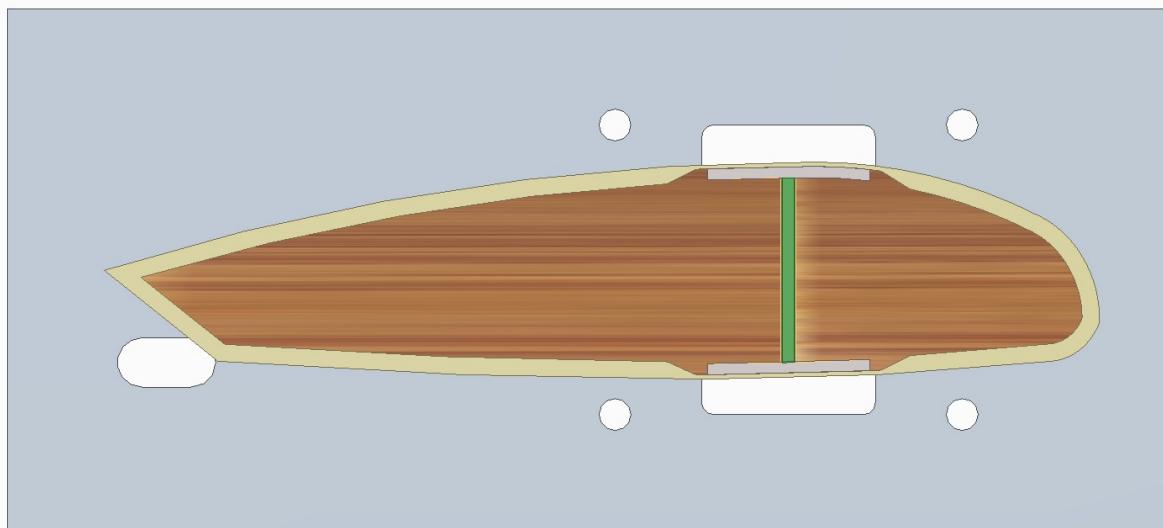


Abbildung 11.36: Ursprüngliche Lage des hinteren Langlochs der Querkraftbolzen

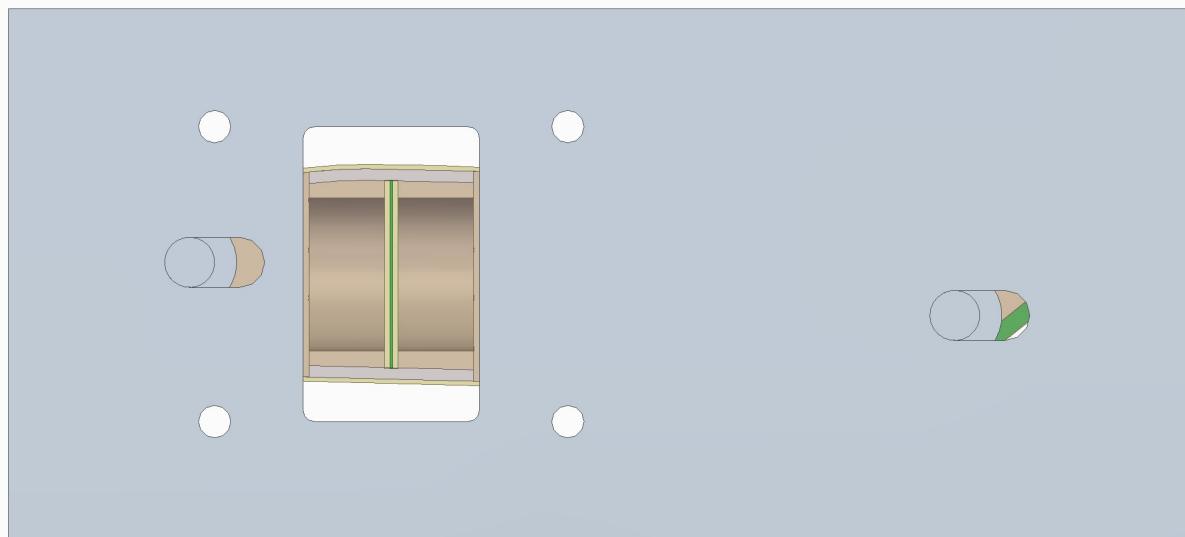


Abbildung 11.37: Montage der Tragfläche auf dem Teststand

