Ausarbeitung Übung 2

Hannes Höttinger und Josua Kucher

FH Technikum Wien, Game Engineering und Simulation, Wien, AUT

Bsp1

Parameterdarstellung einer Ebene im Raum.

Die praktikabelste (z.B. im Hinblick auf d)) Parameterdarstellung einer Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ (der Einfachheithalber durch den Nullpunkt (0, 0, 0)) basiert auf zwei orthonormalen Vektoren u, v, die $\mathcal{E}$ aufspannen. Punkte $P \in \mathcal{E}$ werden dann als Ortsvektoren dargestellt,

$$P = P(\lambda, \mu) = \lambda u + \mu v, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{1}$$

a) Geben Sie einen auf 1 normierten Normalvektor auf $\mathcal{E}$ in Punkt (0,0,0) an.

Es wird das Kreuzprodukt der orthonormalen Vektoren u und v gebildet, um den Normalvektor zu erhalten:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y \\ u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z \\ u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \end{pmatrix} \tag{2}$$

Da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beide orthonormal sind, muss $\vec{n}$ nicht mehr normiert werden, der Normalvektor hat bereits die Länge 1.

b) Wie lauten α, β, γ, so dass die Punkte $P = (x, y, z) \in \mathcal{E}$ auf der Ebene genau den Lösungen der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \tag{3}$$

entsprechen? Erläutern Sie auch den Zusammenhang mit a).

Betrachtet man die obige Formel als Skalarprodukt $\rightarrow$ soll Punkt P auf der Ebene liegen, dann muss das Skalarprodukt zwischen P und dem Normalvektor $\vec{n}$ 0 ergeben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

Das bedeutet, dass der Vektor normal auf die Ebene stehen muss =

$$n_x x + n_y y + n_z z = 0 \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y \\ u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z \\ u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \end{pmatrix} = \vec{n} \tag{6}$$

c) Welches geometrische Objekt ist durch die folgende Parameterdarstellung definiert?

$$\{P(\lambda, \mu) : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\} \tag{7}$$

Sofern $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufeinander normal stehen, definiert diese Parameterdarstellung ein Rechteck auf dieser Ebene. Die Parameter liegen entlang der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in einem definierten Bereich.

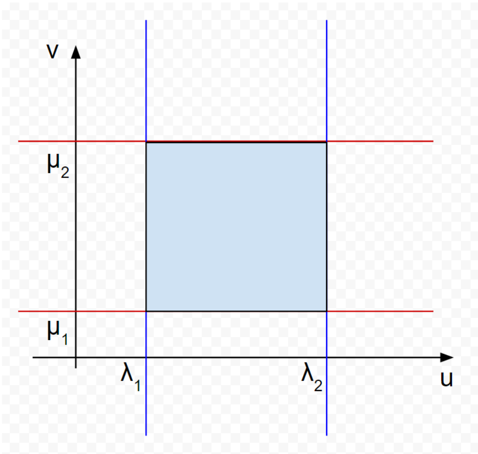

Abbildung 1: Objekt in Parameterdarstellung: $\{P(\lambda, \mu) : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\}$

d) Wie 'rendert' man eine Ellipse in der Ebene mit vorgegebenen Halbachsen $a, b > 0$ in Richtung von u bzw. v und Mittelpunkt $M \in \mathcal{E}$?

Eine Ellipse definiert mittels der Halbachsen und dem Mittelpunkt M:

$$E(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos\varphi \\ b \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} + M \tag{8}$$

Die Halbachsen sollen nun auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ liegen $\rightarrow$ Ellpise auf $\mathcal{E}$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

$$E(\varphi) = \begin{pmatrix} u_x \cdot a \cdot \cos\varphi + v_x \cdot b \cdot \cos\varphi + 0 \\ u_y \cdot a \cdot \cos\varphi + v_y \cdot b \cdot \cos\varphi + 0 \\ u_z \cdot a \cdot \cos\varphi + v_z \cdot b \cdot \cos\varphi + 0 \end{pmatrix} + M \tag{9}$$

$$= M + \vec{u} \cdot a \cdot \cos\varphi + \vec{v} \cdot b \cdot \cos\varphi \tag{10}$$

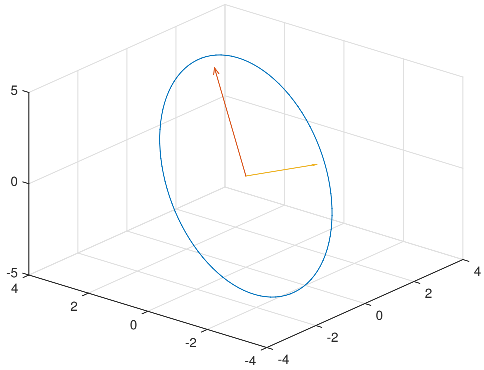

Abbildung 2: Ellipse in $\mathbb{R}$ mit Halbachsen auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Listing 1: Numerisches Beispiel für eine Ellipse in Matlab:

```
a = 1;
b = 1;

M=[0,0,0];
u=[1,2,5];
v=[2,-1,0];

t=0:pi/50:2*pi;
xt = ellipse3d(t, a, b, M(1), u(1), v(1));
yt = ellipse3d(t, a, b, M(2), u(2), v(2));
zt = ellipse3d(t, a, b, M(3), u(3), v(3));

plot3(xt, yt, zt);

hold on
grid on

quiver3(0,0,0,u(1),u(2),u(3));
quiver3(0,0,0,v(1),v(2),v(3));
```

e) Angenommen, eine Ebene wird durch zwei linear unabhängige, jedoch nicht orthonormale Vektoren aufgespannt. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, wie man daraus eine orthonormale Basis $\{u, v\}$ *von* $\mathcal{E}$ *konstruiert.*

Zwei linear unabhängige jedoch nicht orthonormale Vektoren $\vec{s}, \vec{t}$ sollen eine orthonormale Basis bilden.

Normalvektor bilden:

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} \tag{11}$$

Nun wird ein weiterer Vektor gebildet:

$$\vec{g} = \vec{s} \times \vec{n} \tag{12}$$

Beide Vektoren müssen normalisiert werden, danach ergibt sich eine Orthonormalbasis:

$$\vec{u} \,\widehat{=}\, \vec{s} \tag{13}$$

$$\vec{v} \,\widehat{=}\, \vec{g} \tag{14}$$

Ein weiteres Verfahren, um eine Orthogonalbasis zu bilden, beschreibt das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, welches aus jedem System linear unabhängiger Vektoren ein Orthogonalsystem erzeugt.