*Die folgenden Aufgaben sind bis zur Übungsstunde vorzubereiten. In der Übung deklariert jede Gruppe, für welche Aufgabe sie imstande ist, eine Lösung zu präsentieren ('Kreuzerlliste' auf Papier). Für die Präsentation in der Übung wird pro Aufgabe eine UE-Gruppe aufgerufen.*

*Lesen Sie die Angabe genau durch, bevor Sie mit der Ausarbeitung beginnen. Zunächst wird jeweils die Aufgabenstellung bzw. der relevante Hintergrund beschrieben, und dann:*

- *... steht für: Dies ist konkret zu tun.*

*Die Präsentation / Diskussion der Lösung kann an der Tafel, aber auch unter Einsatz des Computers (vorbereitete Datei) erfolgen - dies bleibt den Teilnehmern überlassen. Eigenes Notebook verwenden oder Datei auf USB-Stick zu Verfügung stellen. Für die meisten der Aufgaben eignet sich* MATLAB *als Programmierwerkzeug, die Verwendung von* MATLAB *ist jedoch nicht zwingend. Visualierungen am Computer sind teilweise vorgesehen.*

*Jede Gruppe arbeitet eine der Aufgaben auch sorgfältig schriftlich aus, und zwar diejenige Aufgabe, die sie in der Übung präsentiert hat. Dabei soll auch das Feedback aus der Übungsstunde in die Ausarbeitung einfließen.*

*Abgabe der Ausarbeitung:: Spätestens 1 Woche nach der Übungsstunde, als upload bitte je ein einziges* `pdf`*-Dokument in CIS/Studierenden-Abgabe. Legen Sie für Ihre Gruppe dort bitte ein eigenes Verzeichnis an.*

---

**1.) *Zwei Methoden zur numerischen Approximation bestimmter Integrale.***

Für eine gegebene Funktion $f(x)$ und ihr unbestimmtes Integral (auch 'Stammfunktion') mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ gilt

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(bestimmtes Integral: Fläche o.ä.).} \tag{1}$$

Angenommen, man kann die Stammfunktion $F$ nicht explizit angeben. Dann kann man die Formel (1) für $I(f)$ nicht verwenden und muss numerisch approximieren. Eine sehr einfache Approximation ist die sogenannte Trapezformel $T(f)$: Man verbindet die Randpunkte $(a, f(a))$ und $(b.f(b))$ geradlinig und integriert über die so entstehende geradlinige (lineare) Interpolationsfunktion $g(x)$.

- a) Geben Sie die $T(f)$ als Formel an in Abhängigkeit von $a, f(a), b, f(b)$. Machen Sie auch eine Skizze, die diese Art der Approximation veranschaulicht.
- b) Zum Test am Rechner wählen Sie $[a, b] = [0, 2^{-n}]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (also immer kürzere Integrationsintervalle) und integrieren die Funktion $f(x) = \sin x$ (oder irgend eine Funktion $f$ Ihrer Wahl, für die Sie $F$ kennen). Erstellen Sie eine Tabelle der Approximationsfehler in Abhängigkeit von $k$.

  Aus der Theorie ist bekannt, dass für den Approximationsfehler gilt

  $$|T(f) - I(f)| \approx C\,h^3, \quad \text{wobei} \quad h = b - a \ \ \text{(Intervallänge),} \tag{2}$$

  und wobei die Konstante $C$ von der Funktion $f$ abhängt.
- c) Um (2) zu verifizieren, ergänzen Sie ihre Tabelle aus a) mit einer Spalte, in der je zwei benachbarte Tabellenwerte in folgender Weise verglichen werden: Der Fehler sollte sich bei Halbierung der Intervalllänge etwa um den Faktor $1/2^3 = 1/8$ vermindern (siehe (2)). Tatsächlich wird es nicht genau $1/2^3$ sein, sondern $1/2^p$ mit $p \approx 3$. Tragen Sie diese Werte für die sogenannte 'Fehlerordnung' $p$ in ihre Tabelle ein.

  Man erhält nur auf hinreichend kurzen Intervallen ($h = b - a$ hinreichend klein) eine gute Approximation (dies hängt auch vom Verlauf des Integranden $f$ ab).
- d) Sei nun ein festes Integrationsintervall, z.B. $[0, 1]$, gegeben. Wir unterteilen es in $2^n$ gleich lange Teilintervalle der Länge $h = 2^{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, wenden auf jedes dieser Teilintervalle die Trapezformel aus a) an, und summieren diese Anteile auf. Führen Sie für diese 'summierte Trapezformel' das zu a),b) analoge Experiment durch. Gilt hier auch $p = 3$ (vgl. b),c)) oder was?

  Fertigen Sie auch eine Skizze an.
- e) Analog wie unter a)–d), mit der meist deutlich genaueren und für die meisten praktischen Zwecke sehr gut geeigneten Simpson-Formel

  $$S(f) = (b - a)\left(\tfrac{1}{6} f(a) + \tfrac{4}{6}\, f(\tfrac{a+b}{2}) + \tfrac{1}{6}\, f(b)\right). \tag{3}$$

  Was beobachten Sie hier für die Fehlerordnung $p$?

**2.) *Anwendung von 1.) zur Berechnung der Bogenlänge von Kurven.***

- a) Verwenden Sie die beiden in 1.) betrachteten summierten Näherungsformeln dazu, um die Bogenlänge $2\pi$ des Einheitskreises numerisch zu approximieren. Verwenden Sie die einfachste Parametrisierung der Kreislinie über Polarkoordinaten. (Die so entstehenden Näherungsformeln für $2\pi$ sehen relativ einfach aus.)

  Wie fein muss man die Unterteilung des Integrationsintervalles $[0, 2\pi]$ jeweils wählen, damit das Ergebnis auf mindestens 10 Dezimalstellen richtig ist? Untersuchen Sie dies experimentell am Rechner.

- b) Dasselbe wie unter a), für die räumliche Kurve

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \cos\varphi \\ \varphi \sin\varphi \\ \sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = 0 \ldots 2\pi. \tag{4}$$

  (Zum Vergleich: Exakte Bogenlänge = 21.85437391650173758897...)

**3.) *Exakte Bestimmung einer einfachen Bahnkurve.***

Die folgende Bewegung spielt sich in der $(x, y)$-Ebene ab:

Ein Ball wird von der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ unter dem Winkel $\alpha \in (0, \pi/2)$ nach rechts oben geworfen, mit Startgeschwindigkeit $v > 0$ (gemessen in m/s) zum Zeitpunkt $t = 0$. Dann folgt er unter dem Einfluss der Gravitation (mit Erdbeschleunigung $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s}$) einer Bahnkurve

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Da in $x$-Richtung keine Kraft wirkt, gilt für die horizontale Komponente die Differentialgleichung[1]

$$\ddot{x}(t) = 0 \tag{6a}$$

für alle $t$. In vertikaler Richtung wirkt nach unten die Erdbeschleunigung $g$, und daher gilt

$$\ddot{y}(t) = -g \tag{6b}$$

für alle $t$.

- a) Geben Sie alle möglichen Lösungen $x(t), y(t)$ der beiden Differentialgleichungen in (6) an.

  Hinweis: Zwei mal integrieren, wobei jedesmal eine Integrationskonstante auftritt.

- b) Geben Sie für die am Beginn beschriebene konkrete Situation die Bahnkurve $P(t) = (x(t), y(t))$ des Balles als Funktion in $t$ an.

  Hinweis: Die Integrationskonstanten in a) ergeben sich in eindeutiger Weise aus der Angabe. Eine Skizze ist nützlich.

Anmerkung: Dieses Problem lässt sich exakt lösen, weil es so einfach ist. Wenn an aber z.B. annimmt, dass $g$ von der Höhe abhängt (für sehr große Wurfhöhen bzw. Raketenflug hoch hinaus), ist man auf numerische Methoden angewiesen (später).

**4.) *Fortsetzung von Aufgabe 3.) .***

- a) Zu welchem Zeitpunkt $t$ fällt der Ball wieder zu Boden?
- b) Der Ball springt wieder hoch (elastischer Stoß, Reflexionsgesetz) und fliegt weiter. Beschreiben Sie, wie die Lösungskurve fortzusetzen ist.
- c) Analog wie unter b), aber mit Bremswirkung: Bei jedem Aufprall auf den Boden reduziert sich die momentane Geschwindigkeit durch einen Reibungsverlust um $b$ Prozent.

  Wählen Sie konkrete Daten für die Parameter $\alpha, g, v, b$ und produzieren Sie eine Animation der resultierenden Bahnkurve.

[1] $\dot{x}(t)$ steht für die Ableitung nach der Zeit $t$: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, und $\ddot{x}(t)$ bezeichnet die zweite Ableitung.

**5.)** ***Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer vorgegebenen Kurve.***

Wir betrachten eine Ellipse mit Halbachsen der Länge $a$ und $b$, mit der Parameterdarstellung (bezüglich Polarkoordinaten)

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\cos\varphi \\ b\,\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\,\pi.$$

Ein punktförmiges Objekt startet zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $(x, y) = (a, 0)$ und soll sich mit konstanter vorgegebener Geschwindigkeit $c$ entlang der Ellipse entgegen dem Uhrzeigersinn bewegen. Wir wollen diese Bewegung mathematisch beschreiben, so dass sie sich für eine Animation eignet.

Während dieser Bewegung wird der Winkel $\varphi$ in einer noch zu bestimmenden Weise von der Zeit $t$ abhängen. Wir bezeichnen diese noch unbekannte Funktion mit $\varphi(t)$. Zum Startzeitpunkt gilt $\varphi(0) = 0$. Mit dieser Funktion $\varphi(t)$ stellt

$$\begin{pmatrix} x(\varphi(t)) \\ y(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\cos\varphi(t) \\ b\,\sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der Ellipse nach der Zeit $t$ dar.

- **a)** Geben Sie eine Formel (in Abhängigkeit von $t$ und $\varphi(t)$) für den Betrag $v(t)$ der Geschwindigkeit der dadurch definierten Bahnkurve an.
- **b)** Jetzt wollen wir die Funktion $\varphi(t)$ so bestimmen, dass $\varphi(t), \dot\varphi(t) > 0$ (Bewegung gegen den Uhrzeigersinn!) und $v(t) = \text{const.} = c$.

  Geben Sie für die gesuchte Funktion $\varphi(t)$ eine Differentialgleichung an, d.h., eine Gleichung, in der $\varphi(t), \dot\varphi(t)$ und $\ddot\varphi(t)$ vorkommen. Wie sieht diese Gleichung aus?

  Hinweis: Die Gleichung ergibt sich aus der Forderung $\dot v(t) = 0$. Das ist eine Übung im Differenzieren!
- **c)** Diese Differentialgleichung sieht sehr kompliziert aus und lässt sich nicht exakt lösen. Aber $a = b$ ist ein einfacher Spezialfall:

  Wie sieht die Lösung für eine Kreislinie aus $(a = b)$?

Anmerkung: Später lösen wir die Differentialgleichung numerisch.

**6.)** ***Parameterdarstellung von Flächen im Raum. Beispiel: Kugelkoordinaten.***

Eine Fläche im Raum hat zwei Dimensionen. Eine Parameterdarstellung involviert daher zwei Parameter.

Beispiel: Beschreibung einer Kugel mit Mittelpunkt $(a, b, c)$ und Radius $r$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(\phi,\theta) &= a + r\,\cos\phi\,\cos\theta \\ y(\phi,\theta) &= b + r\,\sin\phi\,\cos\theta \\ z(\phi,\theta) &= c + r\,\sin\theta \end{aligned}$$

Dabei variiert der ebene Winkel $\phi$ in $[0, 2\,\pi]$ (wie bei Polarkoordinaten) und der vertikale Winkel $\theta$ in $[-\pi/2, \pi/2]$.

- a) Sei $P_0 = P(\phi_0, \theta_0) = (x(\phi_0, \theta_0), y(\phi_0, \theta_0), z(\phi_0, \theta_0))$ ein Punkt auf der Kugel. Geben Sie zwei Vektoren an, die die Tangentialebene an die Kugeloberfläche an dieser Stelle aufspannen.

  Hinweis:

  – Hält man $\phi_0$ fest und denkt sich $\theta$ variabel, erhält man eine Kurve auf der Kugel durch den Punkt $P_0$, deren Tangentialvektor man angeben kann.

  – Hält man $\theta_0$ fest und denkt sich $\phi$ variabel, erhält man eine andere Kurve auf der Kugel durch $P_0$, samt Tangentialvektor.

  Was sind das für Kurven? Geben Sie die beiden Tangentialvektoren an.
- b) Fortsetzung von a): Geben Sie einen nach außen orientierten Normalvektor auf die Kugeloberfläche an der Stelle $P_0$ an.

  Anmerkung: Die Formel basierend auf den Tangentialvektoren aus a) funktioniert für beliebige Parameterdarstellungen glatter Flächen. Im Fall der Kugel muss genau das rauskommen was man erwartet, da man ja den Normalvektor von vornherein kennt.

**7.)** ***Einfache lineare Abbildungen.***

• Geben Sie die $2 \times 2$ - Koeffizientenmatrizen $A$ der linearen Abbildungen an, die die beiden Einheitsvektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ in unten angegebene Vektoren $a_1$ und $a_2$ überführen. Charakterisieren Sie diese Abbildungen geometrisch und stellen Sie sie grafisch dar, indem Sie das Bild des Einheitsquadrates zeichnen. Geben Sie auch die jeweilige Determinante $\det(A)$ an.

Im Folgenden sind $\alpha, c, d, \ldots$ beliebige Konstanten. Für die Grafik wählen Sie konkrete Werte.

- $a_1 = e_1$, $a_2 = (0, d)$
- $a_1 = (c, 0)$, $a_2 = e_2$
- $a_1 = (c, 0)$, $a_2 = (0, d)$
- $a_1 = e_2$, $a_2 = e_1$

Und jetzt noch folgende Abbildungen:

- $(1,1)$ wird abgebildet auf $(c, d)$. Wie viele solche Abbildungen gibt es?
- Rotation um Winkel $\alpha$ im bzw. entgegen dem Urzeigersinn
- Spiegelung an der $x$-Achse
- Spiegelung an der $y$-Achse
- Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt mit Steigung $c$.
- Projektion auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt mit Steigung $c$, in Richtung entweder orthogonal darauf oder irgendwie schief dazu (machen Sie eine Skizze).

**8.)** ***Spezielle lineare Gleichungssysteme.***

Wir betrachten zwei Typen von linearen Gleichungssystemen $A\,x = b$.

• Schreiben Sie für beide Fälle einen Code, der diese Systeme mittels Elimination löst, und testen Sie dies an Beispielen (numerische Daten für $A, b$ wählen). Die Dimension $n$ des Systems ist beliebig, nur das 'Besetzungsmuster' ist vorgegeben: * bedeutet einen Eintrag $\neq 0$.

**a)** Bidiagonales System (einfach), z.B. für $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{pmatrix} \qquad \text{oder das gleiche, aber } A \text{ transponiert}$$

**b)** Tridiagonales System (schwieriger), z.B. für $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

Hinweis: Überlegen Sie, wie man das System mittels einer Schleife so umformt, dass ein System der Gestalt a) entsteht.

In beiden Fällen a),b) kann es vorkommen, dass die Elimination versagt (Sonderfälle; System nicht lösbar oder Division durch 0). Gehen Sie davon aus, dass dies nicht passiert.

**c)** • Verwenden Sie Ihre Codes auch dazu, um für zwei konkrete Matrizen $A$ aus a),b) die inverse Matrix $A^{-1}$ zu bestimmen. Wie sieht das Besetzungsmuster von $A^{-1}$ aus? Was fällt Ihnen auf?