Ausarbeitung Übung 3

Hannes Höttinger und Josua Kucher

FH Technikum Wien, Game Engineering und Simulation, Wien, AUT

Bsp5

Animation eines weit ausschwingenden Pendels.

Die Bewegung eines Pendels in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch den Verlauf der Funktion $\varphi = \varphi(t)$ beschrieben, wobei $\varphi(t)$ den Winkel weg von der Vertikallage bedeutet. $\varphi = 0$ entspricht der Vertikallage.

Für kleinere Auslenkungen kann man die Bewegung des Pendels über eine linearisierte DGL der Form

$$\ddot{\varphi}(t) = \varphi(t) \tag{1}$$

genau zu lösen. Diese Lösung ist durch die Winkelfunktionen sin und cos, darstellbar. Bei größeren Auslenkungen muss man jedoch mit der nichtlinearen DGL

$$\ddot{\varphi}(t) = sin(\varphi(t)) \tag{2}$$

verwenden, welche nicht exakt lösbar ist.

a) Schreiben Sie das Problem als System 1. Ordnung an.

Die Funktion

$$\ddot{\varphi}(t) = \varphi(t) \tag{3}$$

lässt sich ebenfalls folgendermaßen anschreiben.

$$\ddot{\varphi}(t) = f(t, \ddot{\varphi}(t), \varphi(t)) \tag{4}$$

Ausgehend davon werden neue Variablen eingeführt.

$$\ddot{\varphi}(t) = f(t, \ddot{\varphi}(t), \varphi(t)) \tag{5}$$

$$y_1(t) = \varphi(t), y_2(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{6}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Dadruch lässt sich das System wie folgt anschreiben.

$$\dot{y_1}(t) = y_2(t) \tag{8}$$

$$\dot{y_2}(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)) \tag{9}$$

Damit lässt sich das System 1.Ordnung anschrieben.

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y_1}(t) \\ \dot{y_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ f(t, y_1(t), y_2(t)) \end{pmatrix} \tag{10}$$

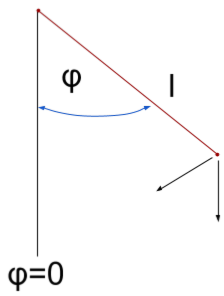

Abbildung 1: Skizze des Pendels mit Anfangsbedingung φ und den auftretenden Kräften.

b) Wählen Sie als Anfangswerte $\varphi(0) = \pi/2$ (große Auslenkung am Anfang!) und $\dot{\varphi}(0) = 0$ (Pendel in Ruhe, bevor es losgelassen), und lösen Sie sowohl das linearsierte Problem $\ddot{\varphi} = \varphi$ als auch das nichtlineare Problem $\ddot{\varphi} = \sin(\varphi)$ mit MATLAB /ode45. Integrieren Sie so weit, dass mehrere Schwingungen auftreten (dazu beobachten Sie einfach die Lösung) und machen Sie eine Animation, die die Schwingung des Pendels gemäß der 'falschen' (linearisierten) und der richtigen Lösung grafisch visualisiert.

In Matlab wurde ein Programm geschrieben, welches die Lösung der ode45 Funktion visuell darstellt. Die Vorgehensweise der Berechnung wird in dem Programmcode 1 gezeigt.

Listing 1: Numerisches Lösung mittels ode45 in Matlab:

```
deq1=@(t,x) [x(2); l * sin(x(1))]; % Pendulum equations
[t,sol] = ode45(deq1,[0:0.01:runtime],[initialangle1 ↩
    initialangle2]);  % ode solver
```

Anschließend werden die berechneten Winkel in kartesische Koordinaten umgerechnet und als Funktion der Zeit dargestellt.

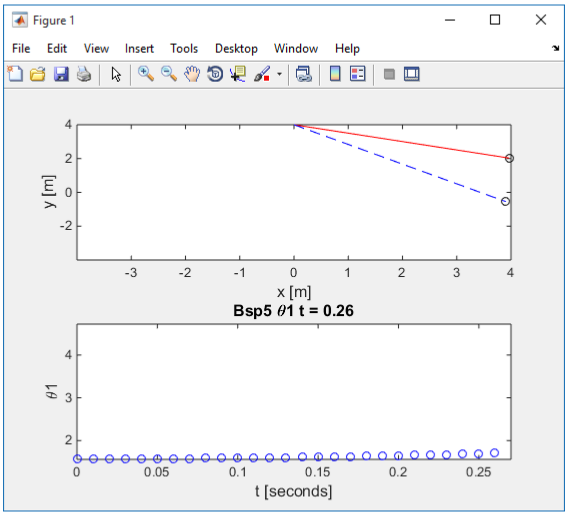

Abbildung 2: Visualisierung des approximierten Pendelverlaufs; Rot: $\ddot{\varphi}(t) = sin(\varphi(t))$; Blau: $\ddot{\varphi}(t) = \varphi(t)$

c) Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \pi$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist die exakte Lösung (in beiden Fällen) durch $\varphi(t) = \pi$ für alle t gegeben. Verifizieren Sie das. Ist diese Lösung 'physikalisch gesehen' als realistisch zu anzusehen?

Das Pendel besitzt wie angegeben zum Startzeitpunkt keine Geschwindigkeit und befindet sich in vertikaler Standposition. Für die genaue Lösung $\ddot{\varphi}(t) = sin(\varphi(t))$ lässt sich folgendermaßen Argumentieren:

$$\varphi(0) = \pi \tag{11}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = sin(\varphi(0)) = 0; \tag{12}$$

Daraus lässt sich erlesen dass das Pendel keinerlei Beschleunigung erhält und demnach in Ruheposition verweilt. Voraussetzung dafür ist das es sich bei dem Pendel um kein Schnur oder Federpendel handelt.

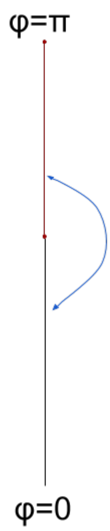

Abbildung 3: Pendel in Vertikaler Standposition $\varphi(0) = \pi$