Die folgenden Aufgaben sind bis zur Übungsstunde vorzubereiten. In der Übung deklariert jede Gruppe, für welche Aufgabe sie imstande ist, eine Lösung zu präsentieren ('Kreuzerlliste' auf Papier). Für die Präsentation in der Übung wird pro Aufgabe eine UE-Gruppe aufgerufen.

Lesen Sie die Angabe genau durch, bevor Sie mit der Ausarbeitung beginnen. Zunächst wird jeweils die Aufgabenstellung bzw. der relevante Hintergrund beschrieben, und dann:

- *. . . steht für: Dies ist konkret zu tun.*

Die Präsentation / Diskussion der Lösung kann an der Tafel, aber auch unter Einsatz des Computers (vorbereitete Datei) erfolgen – dies bleibt den Teilnehmern überlassen. Eigenes Notebook verwenden oder Datei auf USB-Stick zu Verfügung stellen. Für die meisten der Aufgaben eignet sich Matlab *als Programmierwerkzeug, die Verwendung von* Matlab *ist jedoch nicht zwingend. Visualierungen am Computer sind teilweise vorgesehen.*

Jede Gruppe arbeitet eine der Aufgaben auch sorgfältig schriftlich aus, und zwar diejenige Aufgabe, die sie in der Übung präsentiert hat. Dabei soll auch das Feedback aus der Übungsstunde in die Ausarbeitung einfließen.

Abgabe der Ausarbeitung: Spätestens 1 Woche nach der Übungsstunde, als upload bitte je ein einziges `pdf`*-Dokument in CIS/Studierenden-Abgabe.*

1.) *Parameterdarstellung einer Ebene im Raum.*

Die praktikabelste (z.B. im Hinblick auf **d)**) Parameterdarstellung einer Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ (der Einfachheit halber durch den Nullpunkt $(0,0,0)$) basiert auf zwei orthonormalen[1] Vektoren u, v, die $\mathcal{E}$ aufspannen. Punkte $P \in \mathcal{E}$ werden dann als Ortsvektoren dargestellt,

$$P = P(\lambda, \mu) = \lambda\, u + \mu\, v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Anders ausgedrückt: u und v definieren ein orthogonales Koordinatensystem in $\mathcal{E}$, und die Parameter λ und μ sind die entsprechenden Koordinaten des Punktes $P(\lambda, \mu)$.

a) • *Geben Sie einen auf 1 normierten Normalvektor auf $\mathcal{E}$ im Punkt $(0,0,0)$ an.*

b) • *Wie lauten α, β, γ, so dass die Punkte $P = (x, y, z) \in \mathcal{E}$ auf der Ebene genau den Lösungen der Gleichung*

$$\alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = 0$$

entsprechen? Erläutern Sie auch den Zusammenhang mit **a)**.

Hinweis: Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.

c) • *Welches geometrische Objekt ist durch die Parameterdarstellung*

$$\{P(\lambda, \mu) : \quad \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2,\ \mu_1 \le \mu \le \mu_2\}$$

definiert?

d) • *Wie 'rendert' (zeichnet) man eine Ellipse in der Ebene mit vorgegebenen Halbachsen $a, b > 0$ in Richtung von u bzw. v und Mittelpunkt $M \in \mathcal{E}$? Führen Sie das an einem Beispiel durch.*

e) • *Angenommen, eine Ebene wird durch zwei linear unabhängige, jedoch nicht orthonormale Vektoren aufgespannt. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, wie man daraus eine orthonormale Basis $\{u, v\}$ von $\mathcal{E}$ konstruiert.*

2.) *Fortsetzung von Aufgabe* **1.)** *(mit gleicher Notation): Orthogonalprojektion auf eine Ebene.*

Sei w der auf 1 normierte Normalvektor auf die Ebene $\mathcal{E}$ (siehe **1a,b)**). (Dann ist $\{u, v, w\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.)

[1] Orthonormal heißt: Beide Vektoren haben Länge 1 und stehen aufeinander orthogonal. In Terminologie der Linearen Algebra: $\mathcal{E}$ ist ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$, und $\{u, v\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}$.

a) Sei $P = \lambda\, u + \mu\, v + \omega\, w$ ein Punkt im Raum (falls $\omega = 0$, liegt dieser in $\mathcal{E}$, ansonsten außerhalb).

- *Welcher Punkt $E \in \mathcal{E}$ hat von P den kleinsten Abstand?*
- *Zeigen Sie auch: $P - E$ steht orthogonal auf $\mathcal{E}$.*

Anmerkung: Die lineare Abbildung $P \mapsto E$ nennt man den *Orthogonalprojektor* auf $\mathcal{E}$.

b) Wir stellen uns jetzt die Frage, wie man die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{E}$ berechnet, wenn P in kartesischen Koordinaten, $P = (x, y, z) = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ gegeben ist.

- *Zeigen Sie:* [2]

$$P = (P \cdot u)\, u + (P \cdot v)\, v + (P \cdot w)\, w \qquad \text{und daher:} \qquad E = (P \cdot u)\, u + (P \cdot v)\, v\,.$$

- *Geben Sie auch ein konkretes numerisches Beispiel an, mit Visualisierung.*

c) (freiwillige Ergänzung:) Sei

$$U = \big(u \mid v \big) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{(spaltenweise zu lesen)}, \qquad \text{und} \quad Q = UU^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

- *Zeigen Sie: Der Orthogonalprojektor auf $\mathcal{E}$ wird durch die Matrix $Q = UU^T$ repräsentiert, d.h., $E = Q \cdot P$ (Matrix-Vektor-Multiplikation).*
- *Geben Sie $Q = U^T U$ explizit an, und zeigen Sie:*

$$Q^2 = Q \quad \text{(Projektoreigenschaft), und}$$
$$Q = Q^T, \quad \text{d.h. } Q \text{ ist symmetrisch} \;-\; \text{dies ist charakteristisch für orthogonale Projektionen.}$$

3.) *Verallgemeinerung von* **2.)** *:*

'Schiefe' Projektion auf eine Ebene in vorgegebener Richtung (z.B. 'Schattenwurf'):

Zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ spannen eine Ebene $\mathcal{E}$ durch den Nullpunkt auf. Weiters sei ein Vektor w gegeben, der nicht in $\mathcal{E}$ liegt; dieser soll eine Projektionsrichtung angeben. Wir wollen nun die zugehörige Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ des so definierten *schiefen Projektors* bestimmen. Dazu denken wir uns die (zunächst unbekannte) Matrix Q auf u, v und w angewendet. Die gewünschte Projektionseigenschaft lässt sich dann ausdrücken als

$$Q\, u = u, \quad Q\, v = v, \quad \text{und} \quad Q\, w = 0 \quad (!)$$

In Matrixschreibweise ist das äquivalent zu

$$Q \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und daher (nach Multiplikation von rechts, Inverse existiert laut Annahme über u, v und w):

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1}$$

a) - *Realisieren Sie dies in* MATLAB*: $Q = A/B$ liefert die Lösung $Q = A \cdot B^{-1}$ der Matrixgleichung $Q \cdot B = A$ (Multiplikation von rechts mit B^{-1}).* [3]

Rechnen Sie auch ein konkretes numerisches Beispiel durch.

[2] $P \cdot u$ bezeichnet das innere Produkt des Ortsvektors P mit u.

[3] Nicht zu velwechsern mit $A \backslash B = A^{-1} \cdot B$, Multiplikation von links mit A^{-1}.

b) • *Zeigen Sie $Q^2 = Q$ (Projektoreigenschaft). Welchen Rang hat Q?*

Anmerkung: Normalerweise wird man u und v als Orthonormalsystem wählen, siehe **2.)**.

4.) *Rotationsmatrizen in Rodriguez-Darstellung.*

Ein auf Länge 1 normierter Vektor k gibt eine Richtung im Raum an (Richtungsvektor). Für die Rotationsmatrix $R_{k,\varphi}$ einer Drehung um den Winkel φ um eine Achse durch den Nullpunkt mit Achsenvektor k gilt die *Rodriguez-Darstellung*

$$R_{k,\varphi} \;=\; I + \sin\varphi \cdot K + (1-\cos\varphi)\,(kk^T - I)$$

Dabei repräsentiert die lineare Abbildung $x \mapsto K\,x$ die lineare Operation $x \mapsto k \times x$ (Kreuzprodukt). Man beachte, dass man sich hier k als Spaltenvektor geschrieben denkt, und kk^T ist daher eine 3×3-Matrix.

a) • *Drücken Sie die Matrix K mit Hilfe des Vektors $k = (k_1, k_2, k_3)^T$ aus.*

b) • *Wie wertet man $R_{k,\varphi} \cdot x$ (Drehung eines gegebenen Ortsvektors $x \in \mathbb{R}^3$) effizient mittels Vektoroperationen aus?*

Hinweis: Aufgrund der Assoziativität der Matrixmultiplikation gilt $(kk^T)\,x = k\,(k^T x)$ mit dem inneren Produkt $k^T x \in \mathbb{R}$. Die Matrix kk^T wird daher für die Auswertung nicht explizit benötigt.

c) • *Weisen Sie nach, dass gilt $R_{k,\varphi} \cdot k = k$.*

d) • *Was ergibt $R_{k,\varphi} \cdot x$ für $x \perp k$?*

e) • *Realisieren Sie einige numerische Beispiele.*

5.) *Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten.*

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ und Polarkoordinaten (r, φ) in der Ebene ist gegeben durch [4]

$$x = r\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\varphi, \quad r > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]\,.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu gegebenem (x, y) die Werte (r, φ) zu bestimmen. Klarerweise ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras). Zur Berechnung des Winkels φ nehmen wir zunächst an $x > 0$ und $y > 0$. Dann ist $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, und

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \in (0, \infty)\,,$$

und umgekehrt

$$\varphi = \arctan\big(\frac{y}{x}\big) \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

wobei arctan die Umkehrfunktion des Tangens bezeichnet: $\arctan(\tan\varphi) = \varphi$. In MATLAB: `arctan`.

• *Überlegen Sie, wie man den Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ für den allgemeinen Fall (x, y beliebig, d.h. (x, y) in einem der vier Quadranten oder auf der x- oder y-Achse liegend) berechnet, und implementieren und testen Sie das. Beachten Sie die Sonderfälle $x = 0$ oder $y = 0$; insbesondere ist (für $x = 0$!) '$\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$', aber so kann man das natürlich nicht berechnen. Sie benötigen eine Fallunterscheidung.*

Anmerkung: Die MATLAB-Funktion `atan2` macht genau dasselbe.

6.) *Ausgleichsrechnung: Anpassung einer Kurve an gegebene Daten.*

In der Vorlesung (Teil II) wurde die Berechnung einer Ausgleichsgeraden erläutert und der allgemeinere Fall angedeutet.

[4] Manchmal wählt man auch $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Wir lösen jetzt ein ähnliches Problem. Wir gehen aus von der Parameterdarstellung (in Polarkoordinaten) einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a, b > 0$,

$$P(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (a\,\cos\varphi,\, b\,\sin\varphi), \quad -\pi < \varphi \le \pi\,.$$

Angenommen sei, dass (viele) Datenpunkte (x_i, y_i), $i = 1 \ldots m$, gegeben sind, die ungefähr entlang einer derartigen Ellipse verlaufen. Wir wollen nun diejenige Ellipse finden, d.h. die Parameter (Halbachsen) a, b so bestimmen, die am besten zu den gegebenen Datenpunkten passen. Als Kriterium dafür verlangen wir, dass

$$f(a,b) := \sum_{i=1}^{m} \big((a\cos\varphi_i - x_i)^2 + (b\sin\varphi_i - y_i)^2\big) \tag{1}$$

einen minimalen Wert annimmt. Die Bedingung dafür lautet:

$$\frac{\partial}{\partial\,a}\,f(a,b) = \frac{\partial}{\partial\,b}\,f(a,b) = 0\,. \tag{2}$$

- *Verfassen Sie eine Prozedur, die zu gegebenen Daten (x_i, y_i) die optimalen Parameter a, b berechnet.*
- *Realisieren Sie ein numerisches Beispiel, mit Visualisierung.*

Hinweise:

In (1) bezeichnet $\varphi_i \in (-\pi, \pi]$ den zu dem Datenpunkt (x_i, y_i) gehörigen Winkel; siehe Aufgabe **5.)**

Zu lösen ist ein System von zwei linearen Gleichungen, das sich aus den Bedingungen (2) ergibt. Sie können die Lösung dieses Systems entweder selbst programmieren (Elimination) oder dies an Matlab delegieren.

Zum Test ist es sinnvoll, eine Ellipse mit Halbachsen a, b vorzugeben und die Daten (x_i, y_i) so zu wählen, dass sie in der Nähe dieser Ellipse liegen. Ihre Prozedur sollte dann eine Lösung liefern, die in der Nähe der vorgegebenen Werte a, b liegt.

7.) *Numerische Instabilität aufgrund eines Auslöschungseffektes.*

Wir wollen die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$$

am Rechner für kleine Werte von $x > 0$, d.h. $0 < x \ll 1$, auswerten.

a) • *Zeigen Sie: $f(x)$ kann man auch in der Form*

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}$$

schreiben.

b) • *Experimentieren Sie am Rechner mit beiden Auswertungsvarianten in* `double` *Arithmetik. Wählen Sie $x = 10^{-k}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.*

c) Einen ‘nahezu exakten’ Funktionswert kann man sich mittels Taylor-Entwicklung verschaffen, etwa mit Grad 10. Bei dieser für kleine x sehr genauen Approximation benötigt man keine Auswertung einer Wurzel, und ihre Auswertung ist numerisch sehr ‘gutartig’ (stabil). (• *Können Sie erklären, warum?)*:

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_{10}(x) := {} & (1/2)\,x - (1/8)\,x^2 + (1/16)\,x^3 - (5/128)\,x^4 + (7/256)\,x^5 \\ & - (21/1024)\,x^6 + (33/2048)\,x^7 - (429/32768)\,x^8 + (715/65536)\,x^9 - (2431/262144)\,x^{10} \end{aligned}$$

mit einem Approximationsfehler der Größenordnung $O(x^{11})$.

d) • Durch Vergleich der beiden Auswertungsvarianten für $f(x)$ mit **c)** erkennt man, dass eine dieser beiden Varianten numerisch instabil ist. • *Können Sie diesen Effekt erklären?*

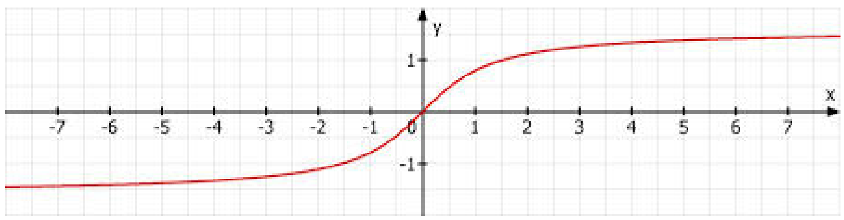
Anmerkung: Die Approximation $p_{10}(x)$ aus **c)** ist ein Polynom vom Grad 10. Die Auswertung eines Polynomes $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$ programmiert man sinnvollerweise nach dem sogenannten Horner-Schema, d.h. gemäß

$$a_0 + a_1(x + a_2(x + a_3(\ldots)))\,.$$

Verwenden Sie dieses – beachten Sie, dass dies einer Schleife entspricht, die 'von innen nach außen' auswertet (man beginnt mit der innersten Klammer).

8.) *Noch einmal Arcustangens.*

Angenommen, Sie haben den Tangens (`tan`) auf Ihrem Rechner zur Verfügung, nicht aber die Umkehrfunktion `arctan`. Kein Problem, das können Sie selbst programmieren.



Die Funktion $y = \arctan(x)$

Um für einen gegebenen Wert x den zugehörigen Winkel $y = \arctan(x)$ zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $f(y) := \tan y - x = 0$ mit dem *Newton-Verfahren.*

a) Sei zunächst $x \in [0,1]$ angenommen. Dann ist $y_0 = x$ eine grobe Approximation für $\arctan x$, die sich als Startwert für die Newton-Iteration eignet.

Andere Werte von x kann man auf diesen Fall zurückführen:

b) Für $x > 1$ verwendet man die Identität $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$.

c) Für $x < 0$ verwendet man die Identität $\arctan x = -\arctan(-x)$.

• *Realisieren und testen Sie eine derartige Prozedur. Die Newton-Iteration brechen Sie ab, wenn sich zwei aufeinenderfolgende Näherungen relativ gemessen um weniger als eine vorgegebene Genauigkeitsschranke δ unterscheiden. Bei Rechnung in* `double` *(Genauigkeit etwa 16 Dezimalstellen) dürfte $\delta \approx 10^{-14}$ eine sinnvolle Wahl sein.*