Aufgabe 44 *Polynome*

Sei V der Raum der Polynome vom Grad höchstens 3 auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{B} = \{b_i\}_{i=1,\dots,4} = \{1, t, t^2, t^3\}$.
Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$F : V \to \mathbb{R} : f \to \int_{-1}^{1} f(t)dt \texttt{ und } G : V \to \mathbb{R}, f \to (f(-1), f(0), f(1)).$$

(i) Für $i = 1, 2, 3, 4$ bestimmen sie die Entwicklungskoeffizienten von $F(b_i)$ bzgl. dem kanonischen Basisvektor (e_1) von $\mathbb{R}$ und von $G(b_i)$ bzgl. der kanonischen Basisvektoren $\{e_1, e_2, e_3\}$ (von $\mathbb{R}^3$)

(ii) Zeigen sie: Ker$G \subset$ Ker F $\forall x \in Ker(G) : G(x) = (0, 0, 0) \Rightarrow f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0, f = \lambda_1 t3 + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t + \lambda_4, f(0) = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0, f(-1) = -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3, f(1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 * \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 \Rightarrow f(x) = \lambda_1 x^3 - \lambda_1 x \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) = (\frac{\lambda_1}{4} x^4 - \frac{\lambda_1}{2} x^2)_{-1}^{1} = (\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_1}{2}) - (\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_1}{2}) = 0 \Rightarrow \forall x \in V, G(x) = 0 : F(x) = 0 \Rightarrow Ker(G) \subset Ker(F)$

(iii) Finden sie eine Abbildung $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $H \circ G = F$

$f := \lambda_1 * t^3 + \lambda_2 * t^2 + \lambda_3 * t + \lambda_4 G : (f(-1), f(0), f(1) \to \int_{-1}^{1} = F(1) - F(-1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) = 2 * (\lambda_2 + \lambda_4)$

$f(0) = \lambda_4, f(-1) = -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \Rightarrow \lambda_1 = -f(-1) + \lambda_2 - \lambda_3 + f(0)$

$f(1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = (-f(-1) + \lambda_2 - \lambda_3 + f(0)) + \lambda_2 + \lambda_3 + f(0)$

$= -f(-1) + 2 * \lambda_2 + 2 * f(0) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2} \Rightarrow H(f(-1), f(0), f(1)) = f(1) - 2f(0) + f(-1) + 2 * f(0) = f(1) + f(-1)$

Test: $f := x^3 + x^2 + x + 1, G(f) = (f(-1), f(0), f(1)) = (0, 1, 4) \Rightarrow H((0, 0, 4)) = 4 + 0 - 0 = 4, F(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x]_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1) = \frac{8}{3}$