Aufgabe 33

Sei $B = ((v_i, 0))_{i\in I} \cup (w_j, 0))_{j\in J}$. Seien o.B.d.A. I und J disjunkt (sind sie das nicht kann man durch umbenennen der Elemente und entsprechendem Anpassen der Abbildung auf w_j die Schnittmenge leeren, ohne dabei w_j zu ändern). Dann ist zu zeigen:

1. B ist ein Erzeugendensystem von $(V \times W)$
   Sei $x = (a, b) \in V \times W$. Dann existieren $(\lambda_i)_{i\in I}, (\mu_j)_{j\in J}$, so dass
   $a = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i, b = \sum_{j\in J} \mu_j w_j$.
   Damit gilt aber
   $(a, b) = (\sum_{i\in I} \lambda_i v_i, \sum_{j\in J} \mu_j w_j) = \sum_{i\in I\cup J} \xi_i b_i$
   mit $\xi_i = \begin{cases} \lambda_i & i \in I \\ \mu_i & i \in J \end{cases}, b_i = \begin{cases} (v_i, 0) & i \in I \\ (0, w_i) & i \in J \end{cases} \in B.$
   Also lässt sich jedes $x \in V \times W$ als Linearkombination von Elementen aus B darstellen, und B ist ein Erzeugendensystem von $V \times W$.

2. B ist linear unabhängig.
   Seien
   $\sum_{i\in I\cup J} \xi_i b_i = \sum_{i\in I} \lambda(v_i, 0) + \sum_{j\in J} \mu_j(0, w_j) = (0, 0)$, ξ und b wie oben.
   Dann ist sofort ersichtlich, dass beide Summen $(0, 0)$ sein müssen, damit das Ergebnis $(0, 0)$ ist. Da alle $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ jedoch linear unabhängig sind, folgt direkt, dass $\lambda_i = 0, \mu_j = 0$, also auch $\xi_i = 0$, womit B linear unabhängig ist.

Damit ist B eine Basis von $V \times W$. Da $((v_i, 0))_{i\in I}, ((0, w_j))_{j\in J}$ nach Konstruktion Disjunkt sind, gile $|B| = dim(V \times W) = dim(V) + dim(W)$, falls V und W endlich dimensional sind.

Aufgabe 34

$\lambda_1*(a+b+c)+\lambda_2*(2a+2b+2c-d)+\lambda_3*(a-b-e)+\lambda_4*(5a+6b-c+d+e)+\lambda_5*(a-c+3e)+\lambda_6*(a+b+d+e) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{-10}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{-11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \frac{20}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + 1 - \frac{11}{3} \\ 8 - \frac{20}{3} + \frac{1}{3} + \frac{6}{3} - \frac{11}{3} \\ 8 - \frac{20}{3} - \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{10}{3} + \frac{1}{3} - \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 3 - \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Im Folgenden meint das Zeichen $\sim$, dass die folgende Matrix eine Umformung der Vorherigen ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44/7 & 12/7 \end{pmatrix}$$

Wähle $\lambda_5 = 1 \Rightarrow \lambda_6 = -\frac{11}{3}$

$\Rightarrow \lambda_4 = -\frac{5}{7} + \frac{11}{3} * \frac{2}{7} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lambda_3 = -6\frac{1}{3} - 2(1) - 1\frac{11}{3} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{11}{3} = 4$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4 + \frac{1}{3} - 5\frac{1}{3} - 1 - \frac{11}{3} = 3 + \frac{15}{3} = 8$

Aufgabe 35

Satz 1: $\forall x \in M : 0 * x = 0, \forall \lambda \in R : \lambda * 0 = 0$

$0 * x = (0 + 0) * x = 0 * x + 0 * x \Rightarrow 0 * x = 0$

Satz 2: $\forall x \in M : (-1) * x = -x$

$0 = 0 * x = (1 - 1) * x = 1 * x + (-1) * x = x + (-1) * x = 0 \Rightarrow (-1) * x = -x$

Satz 3: Zeigen sie, dass im Allgemeinen nicht fr Links-Moduln gilt: $\lambda \in R, x \in M, \lambda * x = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee x = 0$

Gegenbeispiel: Sei $R = 4\mathbb{Z}$ und $M = R^1 \Rightarrow \exists 2 \in R, 2 \in M : \bar{2} * \bar{2} = \bar{4} = 0$