Arbeitsblatt 7

Aufgabe 29

(a)

Sei $z \in \mathbb{C}$ zeigen sie, dass dann gilt: $z\bar{z} = |z|^2$

Beweis: $z = (a, b), \bar{z} = (a, -b), |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z\bar{z} = (a * a + b * b, a * (-b) - a * b) = (a^2 + b^2, 0)$

$= a^2 + b^2 = |z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$

(b)

Es seien $v, z \in \mathbb{C}, |z| = 1, F_{v,z}(w) = v + z\bar{w}, u \in \mathbb{C}, u^2 = z$, wir schreiben $\bar{u}v = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ Sei

$S_{v,z}(w) = bui + z\bar{w}, T_{v,z}(w) = au + w$ Zeigen sie, dass gilt: $F_{v,z} = S_{v,z} \circ T_{v,z} = T_{v,z} \circ S_{v,z}$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass $|u| = 1 : |z| = |u^2| = |u| * |u| = 1 \Rightarrow |u| = 1$

$(S_{v,z} \circ T_{v,z})(w) = S_{v,z}(au + w) = bui + z(au \bar{+} w) = bui + za\bar{u} + z\bar{w}$

$a + bi = bi + |z|^2 a = bi|u|^2 + z\bar{z}a = biu\bar{u} + za\bar{u}\bar{u} \Rightarrow v = \frac{a+bi}{\bar{u}} = biu + za\bar{u}$

$\Rightarrow (S_{v,z} \circ T_{v,z})(w) = bui + za\bar{u} + w\bar{w} = v + z\bar{w} = F_{v,z}$

$(T_{v,z} \circ S_{v,z})(w) = T_{v,z}(bui + z\bar{w} = au + bui + z\bar{w}$

$au\bar{u} + bui\bar{u} = a|u|^2 + bi|u| = a + bi \Rightarrow v = \frac{a+bi}{\bar{u}} = au + bui$

$\Rightarrow (T_{v,z} \circ S_{v,z})(w) = au + bui + z\bar{w} = v + z\bar{w} = F_{v,z}(w)$

(c)

Suche $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $\{w \in \mathbb{C} | S_{v,z}(w) = w\} = \{w_0 + tu, t \in \mathbb{R}\} =: G$

$S_{v,z}(w_0 + tu) = w_0 + tu \Leftrightarrow bui + z * (w_0 \bar{+} tu) = w_0 + tu \Leftrightarrow bui + z\bar{w}_0 + zt\bar{u} = w_0 + tu$

$\Leftrightarrow bui + u^2\bar{w}_0 = w_0 \Leftrightarrow bi + u\bar{w}_0 = \bar{u}w_0 \Leftrightarrow bi = \bar{u}w_0 - u\bar{w}_0$

$bi = \bar{u}w_0 - \bar{u}\bar{w}_0 \Leftrightarrow bi = 2 * Im(w_0\bar{u}) \Leftrightarrow Im(w_0\bar{u}) = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow w_0\bar{u} = \frac{b}{2}i * t \Leftrightarrow w_0 = \frac{bui}{2} + tu$

(d)

Zeigen sie: Die Abbildung $T_{v,z}$ bildet die Menge aus c auf sich selbst ab

Beweis: $T_{v,z}(w_0 + tu) = au + w_0 + tu = w_0 + (a + t)u, (a + t) \in \mathbb{R} \Rightarrow w_0 + (a + t)u \in \{w_0 + tu | t \in \mathbb{R}\}$

(e)

Geben sie eine Geometrische Interpretation der Abbildungen $F_{v,z}(w), T_{v,z}, S_{v,z}$:

$F_{v,z}(w)$ spiegelt den gegebenen Vektor an der x-Achse, dreht ihn um den Punkt (0,0) und verschiebt ihn um den Vektor v.

$T_{v,z}$ verschiebt den gegebenen Vektor um den Vektor u, multipliziert mit dem Vorfaktor a.

$S_{v,z}$ spiegelt den gegebenen Vektor an der x-Achse, dreht ihn um den Punkt (0,0) und verschiebt ihn um den Vektor u, wobei dieser mit dem Vorfaktor b multipliziert wurde und dessen x- und y-Koordinate vertauscht wurden, sowie er an der y-Achse gespiegelt wurde.