Aufgabe 56 *Orthogonaler Raum*

Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$W^0 := \{\alpha \in V^* : \alpha(w) = 0 \forall w \in W\}$$

der zu W *orthogonale* Raum.

Sei weiters V endlichdimensional. Zeigen sie: $W^0 \subset V^*$ ist ein Untervektorraum der Dimension

$$dim W^0 = dim V^* - dim W^*$$

Wir betrachten die Basis $(v_1, ..., v_r)$ von W, die zur Basis $(v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ erweitert werden kann. Daher ist $(v_1^*, ..., v_r^*)$ Basis von W^* und $(v_1^*, ..., v_n^*)$ Basis von V^*. Da $(v_{r+1}^*, ..., v_n^*)$ nicht in der Basis von $W*$ enthalten und trotzdem linear unabhängig ist, wissen wir, dass jedes $v^* \in (v_{r+1}^*, ..., v_n^*)$ jeden Vektor aus W auf die Null abbildet, wobei das für die $v^* \in (v_1^*, ..., v_r^*)$ nicht gilt. Folglich erzeugt $(v_{r+1}^*, ..., v_n)$ den orthogonalen Raum W^0. Aufgrund der linearen unabhängigkeit folgt, dass $(v_{r+1}^*, ..., v_n)$ Basis von W^0 ist und somit gilt: $dim_K(W^0) = n - r = dim_K(V) - dim_K(W)$.

Dass W^0 ein Untervektorraum ist, folgt daraus, dass die Basis von W^0 Teilmenge der Basis von V^* ist.

Aufgabe 57 *Transposition* $(M(\mathcal{B}, F, \mathcal{A}))^T = M(\mathcal{A}^*, F^T, \mathcal{B}^*)$

$M(\mathcal{A}, F^T, \mathcal{B}) = (\alpha_{ij})_{j \leq m, i \leq n}, M(\mathcal{B}, F, \mathcal{A}) = (\tilde{\alpha}_{kl})_{k \leq m, l \leq n}$

Aufgabe 58 *k-Formen*

Seien U und V K-Vektorräume. Zeigen sie

(i) Jede Linearkombination von k-Formen auf V ist wieder eine k-Form Äquivalent ist, zu zeigen, dass die k-Formen einen Untervektorraum von $Abb(V, K)$ bilden, d.h.:
$(\lambda\mu_1 + \mu_2) \in \Lambda^k V$. Wir zeigen zuerst, dass $(\lambda\mu_1 + \mu_2)$ eine Multilinearform ist:
$(\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., \xi x_j + y_j, ..., x_k) = \lambda * \mu_1(x_1, ..., \xi x_j + y_j, ..., x_k) + \mu_2(x_1, ..., \xi x_j + y_j, ..., x_k) = \lambda * \xi * \mu_1(x_1, ..., x_j, ..., x_k) + \lambda * \mu_1(x_1, ..., y_j, ..., x_k) + \xi * \mu_2(x_1, ..., x_j, ..., x_k) + \mu_2(x_1, ..., y_j, ..., x_k) = \xi * (\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., x_j, ..., x_k) + (\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., y_j, ..., x_k)$
Alternation:

(i) Sei $(x_1, ..., x_k)$ eine Familie von Vektoren, in der ein Vektor zweimal vorkommt.
$(\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., x_k) = \lambda * \mu_1(x_1, ..., x_k) + \mu_2(x_1, ..., x_k) = \lambda * 0 + 0 = 0$

(ii) $(\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., x_i + \xi * x_j, ..., x_j, ..., x_k)$
$= \lambda * \mu(x_1, ..., x_i + \xi * x_j, ..., x_j, ..., x_k) + \mu_2(x_1, ..., x_i + \xi * x_j, ..., x_j, ..., x_k)$
$= \lambda * \mu_1(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) + \xi * \lambda * \mu_1(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_k) + \mu_2(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) + \xi * \mu_2(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_k)$
$= \lambda * \mu_1(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) + \xi * \lambda * 0 + \mu_2(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) + \xi * 0$
$= (\lambda\mu_1 + \mu_2)(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k)$

(ii) Sei $\phi : V \to U$ eine lineare Abbildung und μ eine k-Form auf U. Dann ist μ^{phi}, definiert als

$$\mu^{\phi}(a_1, ..., a_k) = \mu(\phi(a_1), ..., \phi(a_k))$$

eine k-Form auf V.

Wir zeigen wie oben zuerst, dass μ^{ϕ} eine Multilinearform ist.

$\mu^{\phi}(a_1, ..., \xi * a_j + b_j, ..., a_k)$

$= \mu(\phi(a_1), ..., \phi(\xi * a_j + b_j, ..., a_k), ..., \phi(a_k) = \mu(\phi(a_1), ..., \xi\phi(a_j) + \phi(b_j), ..., \phi(a_k))$

$= \xi\mu(\phi(a_1), ..., \phi(a_j), ..., \phi(a_k)) + \mu(\phi(a_1), ..., \phi(b_j), ..., \phi(a_k)$

$= \xi * \mu^{\phi}(a_1, ..., a_j, ..., a_k) + \mu^{\phi}(a_1, ..., b_j, ..., a_k)$

Anschließend erneut Alternation:

(i) Sei $(x_1, ..., x_k)$ eine Familie Vektoren, die einen Vektor zweimal enthält, dann wird dieser von ϕ auch jeweils auf den gleichen Vektor abgebildet und die resultierende Familie enthält erneut einen doppelten Vektor und wird somit auf die 0 abgebildet, wie es sein sollte.

(ii) $\mu^{\phi}(x_1, ..., x_i + \lambda * x_j, ..., x_j, ..., x_k) = \mu(\phi(x_1), ..., \phi(x_i + \lambda * x_j), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_k)$
$= \mu(\phi(x_1), ..., \phi(x_i) + \lambda * \phi(x_j), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_k)$
$= \mu(\phi(x_1), ..., \phi(x_i), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_k)) + \lambda * \mu(\phi(x_1), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_k))$
$= \mu(\phi(x_1), ..., \phi(x_i), ..., \phi(x_j), ..., \phi(x_k)) * \lambda * 0$
$= \mu^{\phi}(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k)$

Hinweis: Bei Fall (ii) der Alternationsprüfung könnte auch $j < i$ sein, war allerdings zu viel Schreibaufwand und es ist für den Beweis irrelevant.