Aufgabe 41

Seien $P_1 = (1,1), P_2 = (1,-1), P_3 = (2,1), Q_1 = (-1,4), Q_2 = (3,2), Q_3 = (0,7)$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$

(i) Gibt es eine lineare Abbildung, die P_1 auf Q_i abbildet für $i = 1,2,3$?

$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, P_1 * F = \begin{pmatrix} f_{11} + f_{12} \\ f_{21} + f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_2 * F = \begin{pmatrix} f_{11} - f_{12} \\ f_{21} - f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P_3 * F = \begin{pmatrix} 2 * f_{11} + f_{12} \\ 2 * f_{21} + f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Dies formen wir in 2 Gleichungssysteme um, da f_{11} und f_{12} nichts mit f_{21} und f_{22} zu tun haben.

$f_{11} + f_{12} = -1 \Leftrightarrow f_{11} = -1 - f_{12} \Rightarrow f_{11} - f_{12} = -1 - f_{12} - f_{12} = -1 - 2 * f_{12} = 3$

$\Leftrightarrow f_{12} = -2 \Rightarrow f_{11} = 1 \Rightarrow 2 * f_1 1 + f_1 2 = 2 * 1 + (-2) = 0$

$f_{21} + f_{22} = 4 \Leftrightarrow f_{21} = 4 - f_{22} \Rightarrow f_2 1 - f_2 2 = 4 - f_{22} - f_{22} = 2 \Leftrightarrow f_{22} = 1 \Rightarrow f_{21} = 3 \Rightarrow 2 * f_{21} + f_{22} = 2 * 3 + 1 = 7$ Somit gibt es eine lineare Abbildung, dargestellt durch die Matrix F, die die genannten Bedingungen erfüllt.

(ii) Gibt es eine lineare Abbildung, die P_1 auf Q_1, P_2 auf Q_3 und P_3 auf Q_2 abbildet?

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, P_1 * G = \begin{pmatrix} g_{11} + g_{12} \\ g_{21} + g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = Q_1,$

$P_2 * G = \begin{pmatrix} g_{11} - g_{12} \\ g_{21} - g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = Q_3, P_3 * G = \begin{pmatrix} 2 * g_{11} + g_{12} \\ 2 * g_{21} + g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = Q_2$

Dies formen wir erneut in ein lineares Gleichungssystem um.

$g_{11} + g_{12} = -1 \Leftrightarrow g_{11} = -1 - g_{12} \Rightarrow g_{11} - g_{12} = -1 - g_{12} - g_{12} = 0 \Leftrightarrow g_{12} = 0.5 \Rightarrow g_{11} = -0.5 \Rightarrow 2 * g_{11} + g_{12} = -1 + 0.5 = -0.5 \neq 3$ Damit existiert keine lineare Abbildung, die die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 42

Sei $\mathfrak{B} = \{b_i\}_{i=1,\dots,5} := \{\sin, \cos, \sin * \cos, \sin^2, \cos^2\}$ und $V = Span(\mathfrak{B}) \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$(die b_i sind als Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu verstehen). Betrachten sie den Endomorphismus $F : V \to V, f \to f'$, wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

(i) Zeigen sie, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis von V ist.

Dass $\mathfrak{B}$ ein Erzeugendensystem ist, ist klar. Dass $\mathfrak{B}$ linear unabhängig ist, zeigen wir, indem wir für jeden Teil von $\mathfrak{B}$ lineare Unabhängigkeit zeigen. Gleichsetzen des Termes mit 0 bedeutet, dass die Funktion alle x auf 0 abbildet. $\lambda_1 * \cos(x) + \lambda_2 * \sin(x) + \lambda_3 * \cos(x) * \sin(x) + \lambda_4 * \cos(x)^2 + \lambda_5 * \sin(x)^2 = 0$. Zuerst betrachten wir den Term für $x = 0$.

$\lambda_1 * \cos(0) + \lambda_2 * \sin(0) + \lambda_3 * \cos(0) * \sin(0) + \lambda_4 * \cos(0)^2 + \lambda_5 * \sin(0)^2 = \lambda_1 + 0 + 0 + \lambda_4 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_4$.

Nun $x = \pi \Rightarrow \lambda_1 * \cos(\pi) + \lambda_2 * \sin(\pi) + \lambda_3 * \sin(\pi) * \cos(\pi) - \lambda_1 * \cos(\pi) + \lambda_5 * \sin(\pi)^2 = -\lambda_1 + 0 + 0 - \lambda_1 + 0 = 0 \Rightarrow -2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_4 = 0$

Den vereinfachten Term betrachten wir für $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_2 * \sin(0,5\pi) + \lambda_3 * \cos(0,5\pi) + \lambda_5 *$

$\sin(0,5\pi)^2 = \lambda_2 + 0 + \lambda_5 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_5$. Nun betrachten wir den Term für $x = 1,5\pi \Rightarrow \lambda_2 * \sin(1,5\pi) + \lambda_3 * \cos(1,5\pi) * \sin(1,5\pi) - \lambda_5 * \sin(1,5*\pi)^2 = -\lambda_2 + 0 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow 2*\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ Nun bleibt lediglich $\lambda_3 * \cos(x) * \sin(x)$ übrig, die Funktion bildet allerdings z.B. für $x = 0,25\pi$ nicht auf 0 ab, da $\lambda_3 * \cos(0,25\pi) * \sin(0,25\pi) = 0,5\lambda_3 \neq 0$ für $\lambda_3 \neq 0$ (gefordert, da mindestens ein $\lambda \neq 0$ sein muss.

(ii) Bestimmen sie $\alpha_{ij}, i,j = 0,...,5$, sodass $F(b_j) = \sum_{i=1}^{5} \alpha_{ij} b_i$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Da vorfaktoren bei der Ableitung nicht geändert werden, gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \\ \sin * \cos \\ \cos^2 \\ \sin^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \\ \cos^2 - \sin^2 \\ 2 * \sin * cos \\ -2 * \sin * \cos \end{pmatrix}$$

(iii) Bestimmen sie die Basen von Ker$F$ und ImF.

Basis vom Bild von F sind $\sin, \cos, \sin * \cos, \cos^2 - \sin^2$, da diese linear Unabhängig sind. und nach (ii) im Bild sein müssen. Basis vom Kern ist demnach $\sin^2 + \cos^2$, da Funktion konstant ist und somit auf 0 abgeleitet wird.

Aufgabe 43

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei definiert: $W_0 := V$ und $W_{i+1} = F(W_i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $W_{m+i} = W_m$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Ist der Kern von F leer, so ist die Aussage trivial, da $W_0 = V = ker(F) + Im(F) = Im(F) = F(W_0) = W_1 \Rightarrow W_{i+1} = F(W_i) = W_i$. Ist der Kern nicht leer, so besitzt $W_1 = F(W_0)$ eine kleinere Basis, da die Basis des Kerns abgezogen wird. So können wir weiter fortfahren, bis entweder $F(W_i) = W_i = W_{i+1}$ oder $W_i = \{0\}$, und somit auch auf sich selbst abgebildet wird, da $F(\{0\}) = \{0\}$