Aufgabe 52 *Inverse Matrizen*

Beweis folgt aus der Matrixmultiplikation, da die einzelnen Spalten von X mit der Matrix A multipliziert werden. Die Resultierende Matrix hat dann Zeilenvektoren der Form e_i, d.h. die i-te Zeile hat eine 1 an Stelle i und sonst 0. Dies ist laut Definition die Einheitsmatrix.

Berechnen sie die Inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & -1,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_{41} = -0,5 | x_{42} = -1,5 | x_{43} = -1 | x_{44} = 2$

$x_{31} + 4,5x_{41} = x_{31} - 2,25 = 0,25 \Rightarrow x_{31} = 2,5 | x_{32} + 4,5x_{42} = x_{32} - 6,75 = -0,25 \Rightarrow x_{32} = 6,5 | x_{33} + 4,5x_{43} = x_{33} - 4,5 = 0,5 \Rightarrow x_{33} = 5 | x_{34} + 4,5x_{44} = x_{34} + 9 = 0 \Rightarrow x_{34} = -9$

$x_{21} + x_{31} - 3x_{41} = x_{21} + 2,5 + 1,5 = -0,5 \Rightarrow x_{21} = -4,5|$

$x_{22} + x_{32} - 3x_{42} = x_{22} + 6,5 + 4,5 = 0,5 \Rightarrow x_{22} = -10,5 | x_{23} + x_{33} - 3x_{43} = x_{23} + 5 + 3 = 0 \Rightarrow x_{23} = -8 | x_{24} + x_{34} - 3x_{44} = x_{24} - 9 - 6 = 0 \Rightarrow x_{24} = 15$

$x_{11} + x_{21} + 2x_{31} + 4x_{41} = x_{11} - 4,5 + 5 - 2 = 1 \Rightarrow x_{11} = 2,5$

$x_{12} + x_{22} + 2x_{32} + 4x_{42} = x_{12} - 10,5 + 13 - 6 = 0 \Rightarrow x_{12} = 3,5$

$x_{13} + x_{23} + 2x_{33} + 4x_{43} = x_{13} - 8 + 10 - 4 = 0 \Rightarrow x_{13} = 2$

$x_{14} + x_{24} + 2x_{34} + 4x_{44} = x_{14} + 15 - 18 + 8 = 0 \Rightarrow x_{14} = -5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 & 2 & -5 \\ -4,5 & -10,5 & -8 & 15 \\ 2,5 & 6,5 & 5 & -9 \\ -0,5 & -1,5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 & 2 & -5 \\ -4,5 & -10,5 & -8 & 15 \\ 2,5 & 6,5 & 5 & -9 \\ -0,5 & -1,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 53 Stellen sie sowohl die Matrix A als auch die Matrix A^{-1} als Produkt von Elementarmatrizen dar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$S_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_1(1) * Q_1^2(1) * Q_1^3(1) * Q_2^3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$S_1(1)*Q_1^2(1)*Q_1^3(1)*Q_2^3(1)Q_2^1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_1(1)*Q_1^2(1)*Q_1^3(1)*Q_2^3(1)*Q_2^1(1)*Q_3^2(1) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A,$

$Q_3^2(-1) * Q_2^1(-1) * Q_2^3(-1) * Q_1^3(-1) * Q_1^2(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$, da

$S_1(1) * Q_1^2(1) * Q_1^3(1) * Q_2^3(1) * Q_2^1(1) * Q_3^2(1) * Q_3^2(-1) * Q_2^1(-1) * Q_2^3(-1) * Q_1^3(-1) * Q_1^2(-1)$

$= S_1(1)*Q_1^2(1)*Q_1^3(1)*Q_2^3(1)*Q_2^1(1)*Q_3^2(1)*Q_3^2(1)^{-1}*Q_2^1(1)^{-1}*Q_2^3(1)^{-1}*(Q_1^3(1))^{-1}*Q_1^2(1)^{-1}$

$= S_1(1)*Q_1^2(1)*Q_1^3(1)*Q_2^3(1)*Q_2^1(1)*(Q_3^2(1)*Q_3^2(1)^{-1})*Q_2^1(1)^{-1}*Q_2^3(1)^{-1}*Q_1^3(1)^{-1}*Q_1^2(1)^{-1}$

$= S_1(1) * Q_1^2(1) * Q_1^3(1) * Q_2^3(1) * (Q_2^1(1) * Q_2^1(1)^{-1}) * Q_2^3(1))^{-1} * (Q_1^3(1))^{-1} * Q_1^2(1)^{-1}$

$= S_1(1) * Q_1^2(1) * Q_1^3(1) * (Q_2^3(1) * Q_2^3(1)^{-1}) * Q_1^3(1)^{-1} * Q_1^2(1)^{-1}$

$= S_1(1) * Q_1^2(1) * (Q_1^3(1) * Q_1^3(1)^{-1}) * Q_1^2(1)^{-1}$

$= S_1(1) * (Q_1^2(1) * Q_1^2(1)^{-1})$

$= S_1(1) = e_{nxn}$, weiterhin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+2-1 & 1-1 \\ 2-2 & -1+4-2 & -2+2 \\ 2-2 & -1+4-3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 54 *Ein Rangsatz*

Sei $A \in Mat_K(m \times n)$, Man zeige: Zeilenrang von M=Spaltenrang von M.

Sei r der Zeilenrang von A. a hat damit r linear unabängige Zeilenvektoren, die eine Basis $((v_1, ..., v_r)$ bilden, weshalb jeder Zeilenvektor eine Kombination der Basisvektoren ist, also: $A_1 = \lambda_{11} v_1 + ... + \lambda_{1r} v_r$. Für die einzelnen Elemente gilt dann: $a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} v_{kj}$, also z.B. für die erste Spalte:

$a_{11} = \lambda_{11} v_{11} + \lambda_{12} v_{21} + ... + \lambda_{1r} v_{r1}$

$a_{m1} = \lambda_{m1} v_{11} + \lambda_{m2} v_{21} + ... + \lambda_{mr} v_{r1}$, also für den 1.Spaltenvektor:

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} = v_{11} * \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ ... \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + ... + v_{r1} * \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ ... \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}$. Der Spaltenvektor ist somit eine Kombination von r Vektoren, die allerdings nicht linear abhängig sein müssen. Folglich gilt: $Spaltenrang(A) \leq Zeilenrang(A)$. Führt man das gleiche mit der transponierten Matrix aus, erhält man $Spaltenrang(A^T) = Zeilenrang(A) \leq Zeilenrang(A^T) = Spaltenrang(A)$, daher $Spaltenrang(A) = Zeilenrang(A)$