Aufgabe 48 *Isomorphiesätze*

Es seien V ein K-Vektorraum und $V_1, V_2 \in V$ Untervektorräume. Zeigen sie, dass gilt:

(i)

$$(V_1 + V_2)/V_1 \cong V_2/(V_1 \cap V_2)$$

Es sei $F : V_2 \to (V_1 + V_2)/V_1, x \to [x]$. Dann gilt: $\forall x : (x \in V_2) : F(x) = 0 \Rightarrow x - 0 \in V_1 \Rightarrow x \in V_1 \Rightarrow x \in (V_2 \cap V_1) \Rightarrow ker(F) = (V_2 \cap V_1)$

$\forall x \in (V_1 + V_2) : x \in span(V_1 \cup V_2) \Rightarrow \exists v_1 \in span(V_1) = V_1, v_2 \in span(V_2) = V_2 : x = v_1 + v_2 \Rightarrow [x] = [v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2] = [v_2](\text{da } v_1 \in V_1 \Rightarrow [v_1] = 0) \Rightarrow (V_1 + V_2)/V_1 = V_2/V_1$

Daraus folgt trivialerweise, dass $F(V_2) = Im(F) = V_2/V_1 = (V_1 + V_2)/V_1$

Nach dem Homomorphiesatz existiert dann ein Isomorphismus

$$\bar{F} : V_2/ker(F) = V_2/(V_1 \cap V_2) \to (V_1 + V_2)/V_1 = Im(F),$$

womit $V_2/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_1$ gilt.

(ii) Falls $V_1 \subset V_2 \subset V$:

$$(V/V_1)/(V_1/V_2) \cong V/V_2$$

Es sei $F : V/V_1 \to V/V_2 : [x] \to [[x]]$. Dann gilt: $\forall [x] \in (V_2/V_1) : [x] - [0] = [x - 0] = [x] \in V_2 \Rightarrow F([x]) = 0 \Rightarrow ker(F) = (V_2/V_1)$

$\forall [x] \in (V/V_1) : x - [x] \in V_1 \Rightarrow x - [x] \in V_2 \Rightarrow F([x]) = [[x]] \in (V/V_2) \Rightarrow F((V/V_1)) = Im(F) = (V/V_2)$

Nach dem Homomorphiesatz existiert dann ein Isomorphismus

$$\bar{F} : (V/V_1)/ker(F) = (V/V_1)/(V_1/V_2) \to (V/V_2) = Im(F),$$

womit $(V/V_1)/(V_1/V_2) \cong V/V_2$ gilt.

Aufgabe 49 *Matrixmultiplikation*

Bilden sie alle möglichen Matrixprodukte (auch Dreifachmultiplikationen) aus den folgenden 3 Matrizen und berechnen sie diese.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 100 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times5}, B = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -5 & 7 \\ 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times2}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$$

$C{*}A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -193 & 11 & 10 \\ 22 & -12 & -386 & 22 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}, B{*}C{*}A = \begin{pmatrix} 1100 & -600 & -19300 & 1100 & 1000 \\ 99 & -54 & 1737 & 99 & 90 \\ 242 & -132 & 4246 & 242 & 220 \\ 88 & -48 & -1464 & 88 & 80 \end{pmatrix}$

$B * C = \begin{pmatrix} -200 & 100 & 300 \\ -18 & 9 & 27 \\ -44 & 22 & 66 \\ -16 & 8 & 24 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

Andere Produkte sind aufgrund der Dimensionen der Matrizen nicht möglich.

Aufgabe 50 *Unterringe*

Sind die folgenden Teilmengen Unterringe:

Bemerkung: Es muss nur die Multiplikation überprüft werden, da aus der Eintragsweisen Addition folgt, dass die jeweiligen vermeintlichen Unterringe zumindest Untergruppen sind.

(1) $M_1 := \{a_{ij} {\in} Mat_K(n{\times}n) : a_{ij} = 0, i{\geq}j\} \subset Mat_K(n{\times}n)$

$A{\in}M_1, B{\in}M_1, A * B = C = (c_{ij}), c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{(i-1)} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Sei $i{\geq}j : \sum_{k=1}^{(i-1)} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{(i-1)} 0 * b_{kj} = 0$, da $k{\leq}(i-1) < i \Rightarrow a_{ik} = 0$

$\sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} * 0 = 0$, da $k{\geq}i{\geq}j \Rightarrow b_{kj} = 0$

$\Rightarrow A * B \in M_1$ und $\{M_1, +, *\}$ ist ein Unterring

(2) $M_2 := \{a_{ij} {\in} Mat_K(n{\times}n) : a_{ij} = 0, i{\geq}j + k, j{\geq}i + k, k \in \mathbb{N} \subset Mat_K(n{\times}n)$

$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2$ (für $k = 2$, $A * B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} {\notin} M_2$

$\Rightarrow M_2$ ist kein Unterring.

(3) $M_3 := \{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in K, \} \subset Mat_K(2 \times 2)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} {\in} M_3, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} {\in} M_3 \Rightarrow A * B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 * b_2 \\ 0 & b_1 * b_2 \end{pmatrix} {\in} M_3$

$\Rightarrow M_3$ ist ein Unterring.