Aufgabe 37 *Ein Modul ohne Dimension*

Zeigen sie:

(a) $\mathbb{Z}$ ist ein Modul (über $\mathbb{Z}$)

Dass $\{\mathbb{Z}, +, *\}$ ein Ring ist, haben wir bereits in der Vorlesung gelernt. Daraus folgt, dass $\{\mathbb{Z}, +\}$ eine abelsche Gruppe ist.

(M1) $m * (r * s) = (m * r) * s$

Dies folgt aus Geltung des Assoziativgesetzes bezgl. Multiplikation für Ringe.

(M2) $(r + s) * m = r * m + s * m$

(M3) $r * (m + n) = r * m + r * n$

Dies (und M2) folgt aus der Geltung des Distributivgesetzes für Ringe.

(M4) $1 * m = m$

Dies folgt aus der Existenz des Einselementes für Ringe.

(b) Ebenso sind $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ Moduln (über $\mathbb{Z}$)

Beweis: $\lambda\mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ist ein Modul (im Folgenden gilt: $m, r, s \in \mathbb{Z}, m, n \in \lambda\mathbb{Z}$

(M1) $m * (r * s) = m * (r * s)$

Dies folgt daraus, dass $\mathbb{Z}$ ein Ring ist.

(M2) $(r + s) * m = r * m + s * m$

$\forall m \in \lambda\mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} : m = \lambda x \Rightarrow (r+s)*m = (r+s)*\lambda*x = r*\lambda*x+s*\lambda*x = r*m+s*m$

(M3) $r * (m + n) = r * m + r * n$

$m = \lambda x, n = \lambda y \Rightarrow r * (m + n) = r * (\lambda x + \lambda y) = \lambda rx + \lambda ry = rm + rn$

(M4) $1 * m = m$

$m = \lambda x \Rightarrow 1 * m = 1 * \lambda x = \lambda x = m$

Für $\lambda = 2$ oder $\lambda = 3$ folgt die Behauptung

(c) $\{1\}$ ist ein unverkürztes Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$

Damit ein Erzeugendensystem vorliegt, muss gelten, dass $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists \lambda \in \mathbb{Z} : \lambda * 1 = x \Rightarrow \lambda = x$. Dies ist trivial, da $\mathbb{Z}$ alle Zahlen in $\mathbb{Z}$ enthlt. Dass 1 unverkrzbar ist, ist ebenfalls klar, da $\emptyset$ natürlich nichts erzeugen kann.

(d) $\{2, 3\}$ ist ebenso ein unverkürztes Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$

Dies lässt sich zeigen, indem man festlegt, dass $\lambda_2 = -\lambda_3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \exists \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_2 * 2 + \lambda_3 * 3 = x \Rightarrow -\lambda_3 * 2 + \lambda_3 * 3 = \lambda_3 * 1 = x$. Damit ist $\{2, 3\}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem und unverkürzbar, da $\{2\}$ oder $\{3\}$ z.B. nicht die 1 erzeugen können.

Aufgabe 38 *Strukturen auf $Hom_K(V, V)$*

Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen sie:

(a) $End_K(V)$, mit Punktweise Addition und Verkettung als Multiplikation, ist ein Ring, und $\forall f,g{\in}End_K(V), \forall\lambda{\in}K : (\lambda f)\circ g = \lambda(f\circ g) = f\circ(\lambda g)$; ein K-Vektorraum, der außerdem eine Ringstruktur trägt, so dass diese Verträglichkeitsbedingung gilt, heißt K-Algebra.
$E := End_K(V)$. Für einen Ring muss gelten:

$\{E, +\}$ ist eine abelsche Gruppe

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Da die Addition in E auf die Addition in K zurückgeführt werden kann und $\{K, +\}$ eine abelsche Gruppe ist, ist $\{E, +\}$ ebenfalls eine abelsche Gruppe

Die Multiplikation ist assoziativ

$(f\circ g)\circ h = f(g(h)) = f(g\circ h) = f\circ(g\circ h)$

Das Distributivgesetz gilt

$(f\circ(g + h))(x) = f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g)(x)) + (f\circ h)(x)$
$((f + g)\circ h)(x) = (f + g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f\circ h)(x) + (f\circ g)(x)$

Zusatz: $(\lambda f)\circ g = \lambda(f\circ g) = f\circ(\lambda g)$

$(\lambda f)\circ g = (\lambda f)(g) = f(\lambda g) = f\circ(\lambda g) = \lambda f(g) = \lambda(f\circ g)$

(b) $A := Aut_K(V)$ ist eine Gruppe bezgl. Verkettung, aber für $V \neq \{0\}$ kein K-Vektorraum.
1.$\{A, \circ\}$ ist eine Gruppe:

Geltung des Assoziativgesetzes $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

$(f\circ g)\circ h = (f(g))\circ h = f(g(h)) = f(g\circ h) = f\circ(g\circ h)$

Neutrales Element $e : V{\to}V, x{\to}x$

$\Rightarrow (f\circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$

Inverses Element

Da jedes f bijektiv ist, existiert $f^{-1} : V{\to}V$ mit $f(f^{-1}(x)) = x$
$\Rightarrow f\circ f^{-1}(x) = x = e(x) \Rightarrow (f\circ f^{-1}) = e$

Kommutativität

Die Gruppe ist nicht abelsch, da im Allgemeinen die Komposition von Abbildungen nicht kommutiert.
Beispiel: $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^1, f(x) = x + 1, g(x) = x^3, f(g(x)) = x^3 + 1, g(f(x)) = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1{\neq}f(g(x))$

Sei $G, F{\in}Aut_K(V) : G(x) = -F(x) \Rightarrow (G + F)(x) = G(x) + F(x) = G(x) - G(x) = 0$ und somit nicht surjektiv für $V \neq \{0\}$

Aufgabe 39 U, V, W seien Vektorräume, $F{\in}Hom_K(V, W), G{\in}Hom_K(U, V)$. Zeigen sie:

(a) Falls F ein Vektorraum-Isomorphismus ist, dann gilt $F^{-1} \in Hom_K(W,V)$

Da F bijektiv ist, existiert eine Abbildung $F^{-1} : W \to V$. $\forall x,y \in W : \exists a,b \in V : x = F(a), y = F(b) \Rightarrow F^{-1}(x+y) = F^{-1}(F(a)+F(b)) = F^{-1}(F(a+b)) = a+b = F^{-1}(F(a))+F^{-1}(F(b)) = F(x) + F(y)$. Somit ist F^{-1} ein Homomorphismus $W \to V$.

(b) Ist I eine Indexmenge und $(v_j)_{j\in I} \in V$, dann gilt:

(i) $(v_j)_{j\in I}$ ist linear abhängig $\Rightarrow (F(v_j))_{j\in I}$ ist linear abhängig.
$\exists (\lambda_j)_{j\in I} : \sum_{j\in I} \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \sum_{j\in I} F(\lambda_j v_j) = F(\sum_{j\in I} \lambda_j v_j) = F(0) = 0$

(ii) $(F(v_j))_{j\in I}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow (v_j)_{j\in I}$ ist linear unabhängig.
In (i) haben wir $A \Rightarrow B$ bewiesen. Daraus folgt direkt $\neg B \Rightarrow \neg A$, also genau die geforderte Aussage.

(c)

(i) Ist $\tilde{V} \subset V$ ein Untervektorraum, dann ist auch $F(\tilde{V}) \subset W$ ein Untervektorraum; Insbesondere ist $F(V) = im(F) \subset W$ ein Untervektorraum.
Dass $F(\tilde{V})$ eine Teilmenge von W ist, ist klar. Da $\tilde{V} \neq \emptyset$, ist auch $F(\tilde{V}) \neq \emptyset$. Weiterhin gilt:
$\forall v, w \in F(\tilde{V}) : \exists a, b \in \tilde{V} : F(a) = v, F(b) = w \Rightarrow v + w = F(a) + F(b) = F(a+b) \in F(\tilde{V})$, da $a + b \in \tilde{V}$
$\forall w \in F(\tilde{V}) : \exists a \in \tilde{V} : F(a) = w \Rightarrow \lambda w = \lambda F(a) = F(\lambda a) \in F(\tilde{V})$, da $\lambda a \in \tilde{V}$.
Beweis für $F(V)$ Untervektorraum von W erfolgt analog.

(ii) Ist $\tilde{W} \subset W$ ein Untervektorraum, dann ist auch $F^{-1}(\tilde{W}) \subset V$ ein Untervektorraum; insbesondere ist $ker(F) = F^{-1}(0) \subset V$ ein Untervektorraum.
Dass $F^{-1}(\tilde{W})$ eine Teilmenge von V ist, ist klar. Da $\tilde{W} \neq \emptyset$, ist auch $F^{-1}(\tilde{W}) \neq \emptyset$
$\forall a, b \in F^{-1}(\tilde{W}) : a + b = F^{-1}(F(a)) + F^{-1}(F(b)) = F^{-1}(F(a) + F(b)) \in F^{-1}(\tilde{W})$, da $(F(a) + F(b)) \in \tilde{W}$ und $(F(F^{-1}(\tilde{W})) = \tilde{W}$
$\forall a \in F^{-1}(\tilde{W}), \forall \lambda \in K : \lambda * a = F^{-1}(F(\lambda * a)) = F(\lambda F^{-1}(a)) \in F^{-1}(\tilde{W})$, da $a \in \tilde{W}$
$\ker(F)$ ist nicht leer, da $0 \in \ker(F)$.
$\forall a, b \in \ker(F) : F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow F(a+b) = F(a) + F(b) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (a+b) \in \ker(F)$
$\forall a \in \ker(F), \lambda \in K : F(\lambda * a) = \lambda * F(a) = \lambda * 0 = 0 \Rightarrow \lambda * a \in \ker(F)$

(iii) Ist F ein Isomorphismus, dann gilt $F(\tilde{V}) \cong \tilde{V}$ für jeden Untervektorraum $\tilde{V} \subset V$
Da F bijektiv ist, existiert die Abbildung $G := F^{-1}, G(F(x)) = x$, die ebenfalls bijektiv und somit ein Isomorphismus ist. Somit existiert ein Isomorphismus von $\tilde{V}$ auf einen Untervektorraum $\tilde{W} \subset W$ und der Isomorphismus G von $\tilde{W} = F(\tilde{V}$ auf $\tilde{V}$. Somit sind $F(\tilde{V})$ und $\tilde{V}$ isomorph.

(d) $\dim(im(F)) = \dim(F(V)) \leq \dim(V)$ $n := \dim(V)$ somit existieren in V genau n linear unabhängige Vektoren, die eine Basis von V bilden. Diese Vektorenfamilie nennen wir $(v_k)_{k<n}$. Damit ist für jeden Vektor $w \in V$ $(v_k)_{k<n} \cup w$ linear abhängig und somit auch $F(v_k)_{k<n} cup F(w)$. Somit ist $F(v_k)_{k<n}$, falls es linear unabängig ist, auch maximal. Ist $F((v_k)_{k<n})$ linear abhängig, so können wir Reihenweise Vektoren entfernen, bis lienare unabhängigkeit gegeben ist. Daraus folgt $\dim(F(V)) \leq \dim(V)$.