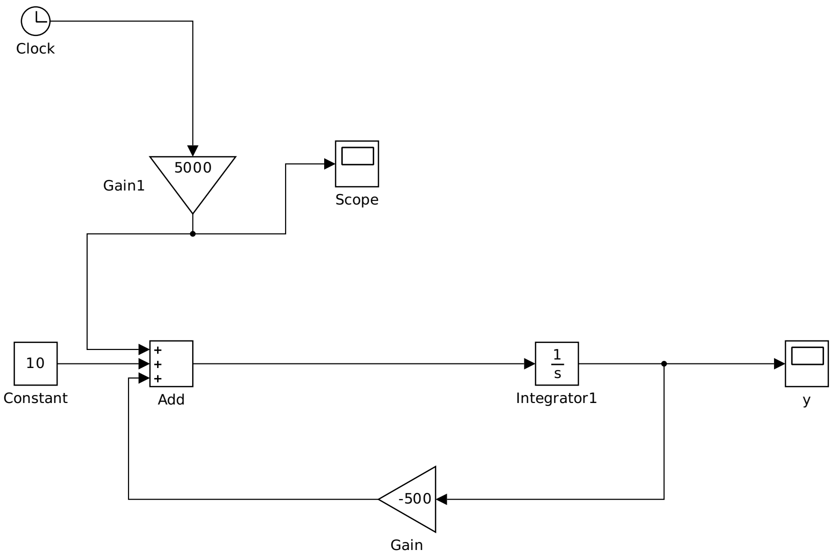
Praktikum 1
Differentialgleichungen

1 Lösung „steifer Differentialgleichungen“ mit Euler/Runge-Kutta (RK 2. Ordng.)

a Geben Sie das Analogrechner-/Simulink-Schaltbild an.



b Geben Sie die Iterationsgleichungen für das Euler-Verfahren an.

$$y_{n+1} = y_n + h * y'(x_n, y_n) \tag{1a}$$

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{1b}$$

c Geben Sie die Iterationsgleichungen für das RK2-Verfahren an.

$$k1 = h * y'(x_n, y_n) \tag{2a}$$

$$k2 = h * y'(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k1}{2}) \tag{2b}$$

$$y_{n+1} = y_n + k2 \tag{2c}$$

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{2d}$$

d Geben Sie die Iterationsgleichungen für das implizite Euler-Verfahren an.

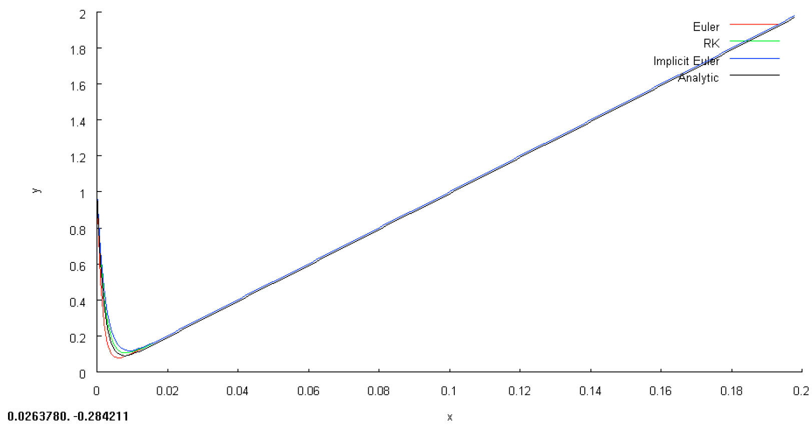
$$y_{n+1} = y_n + h * (10 - 500 * y_{n+1} + 5000 * x_{n+1}) \tag{3a}$$
$$y_{n+1} = y_n + 10 * h - 500 * y_{n+1} * h + 5000 * x_{n+1} * h) \tag{3b}$$
$$y_{n+1} + 500 * y_{n+1} * h = y_n + 10 * h + 5000 * x_{n+1} * h) \tag{3c}$$
$$y_{n+1} * (1 + 500 * h) = y_n + 10 * h + 5000 * x_{n+1} * h) \tag{3d}$$
$$y_{n+1} = \frac{(y_n + 10 * h + 5000 * h * x_n + 1)}{(1 + 500 * h)} \tag{3e}$$

e Schreiben Sie ein Programm „Stiff.ch“, welches die DGL mit allen Verfahren löst und zusammen mit der analytischen Lösung in einem Plot anzeigt.

Die Implementierung ist in Stiff.ch zu finden.

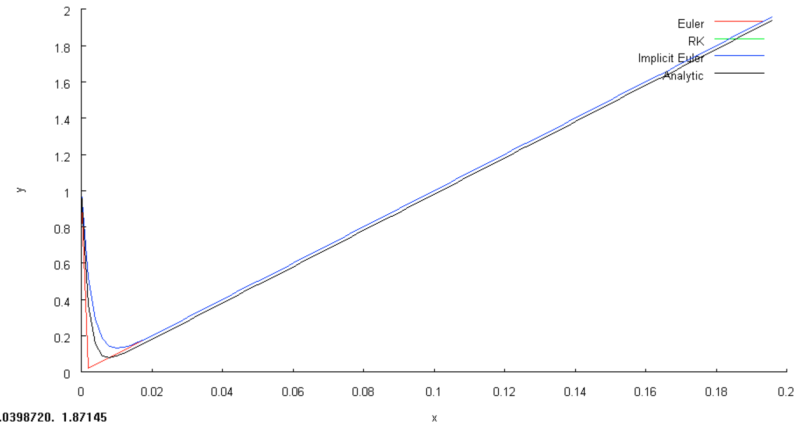
Bei einer Schrittweite von $h = 0.0001$ sind alle Verfahren ziemlich gut, dennoch ist der Euler am weitesten von der analytischen Funktion entfernt.

0001.png



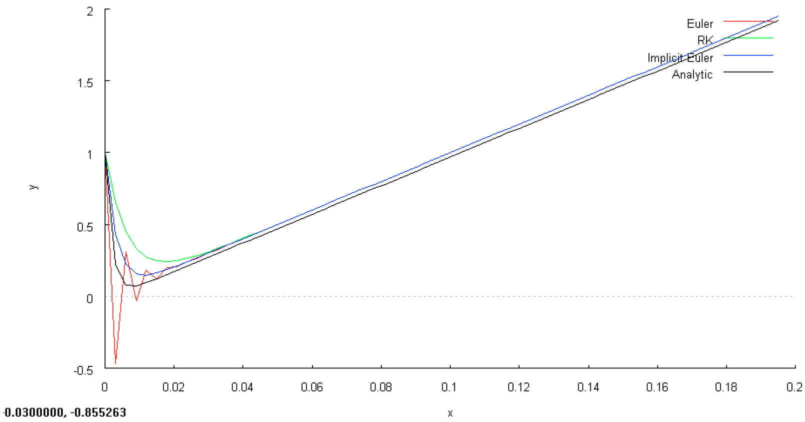
Bei einer Schrittweite von $h = 0.0001$ schwingt der Euler sehr stark, jedoch normalisiert sich die Darstellung mit steigendem X-Wert. Implizit Euler und RK sind gut.

0002.png



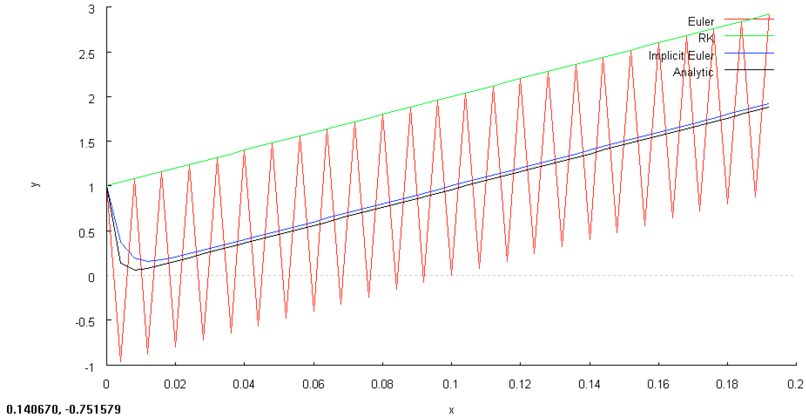
Bei einer Schrittweite von $h = 0.0002$ zeigt Euler keine Kurve mehr, RK und Implizit Euler zeigen eine gute Darstellung.

0003.png



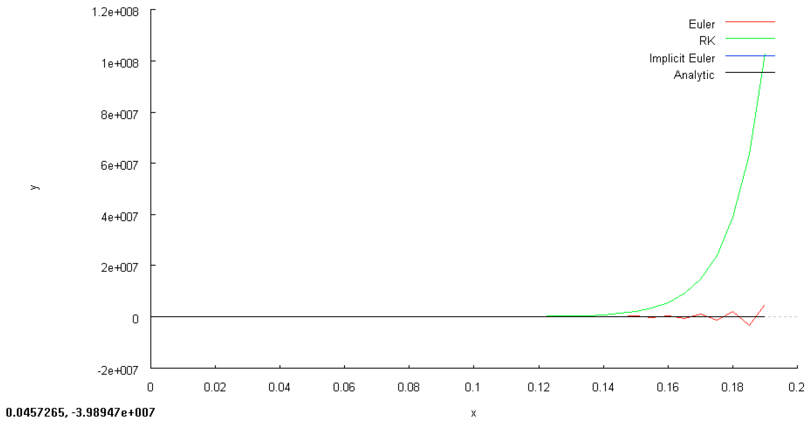
Bei einer Schrittweite von $h = 0.0003$ schwingt der Euler sehr stark. RK und Implizit Euler zeigen eine gute Darstellung.

0004.png



Bei einer Schrittweite von $h = 0.0004$ schwingt der Euler kontinuerlich, RK zeigt nur noch eine Gerade. Implizit Euler zeigt eine gute Darstellung.

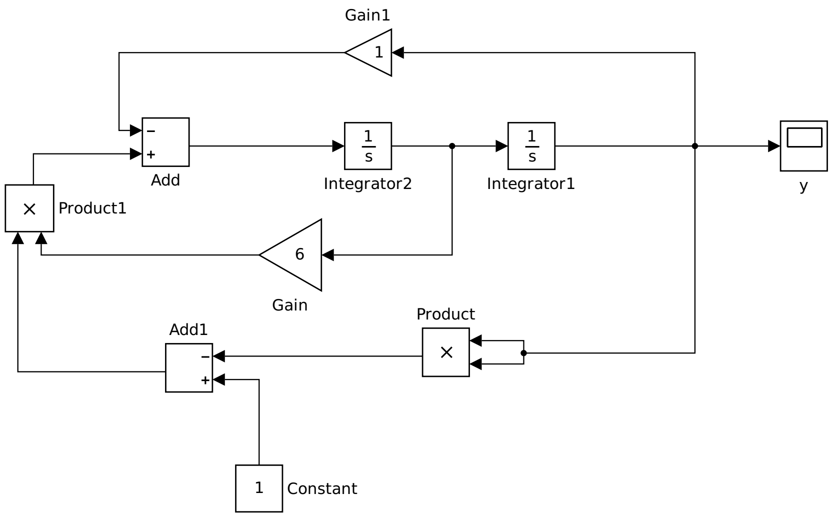
0005.png



Bei $h = 0.0005$ werden die Y-Werte des RK sehr hoch.

2 Lösung einer (nichtlinearen) DGL 2. Ordnung (Van-der-Pol-DGL) mit RK 2

a Geben Sie das Analogrechner-/Simulink-Schaltbild an.



b Geben Sie die DGL 2. Ordnung als 2 DGLn 1. Ordnung an.

Zerlegung der DGL y' in $y1'$ und $y2'$:

$$y'' = 6 * (1 - y^2) * y' - y \tag{4}$$

$$y1' = 6 * (1 - y2^2) * y1 - y2 \tag{5}$$

$$y2' = y1 \tag{6}$$

c Geben Sie die Iterationsgleichungen für das Euler-Verfahren an.

$$y1_{n+1} = y1_n + h * y1'(y1_n, y2_n) \tag{7}$$

$$y2_{n+1} = y2_n + h * y2'(y2_n) \tag{8}$$

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{9}$$

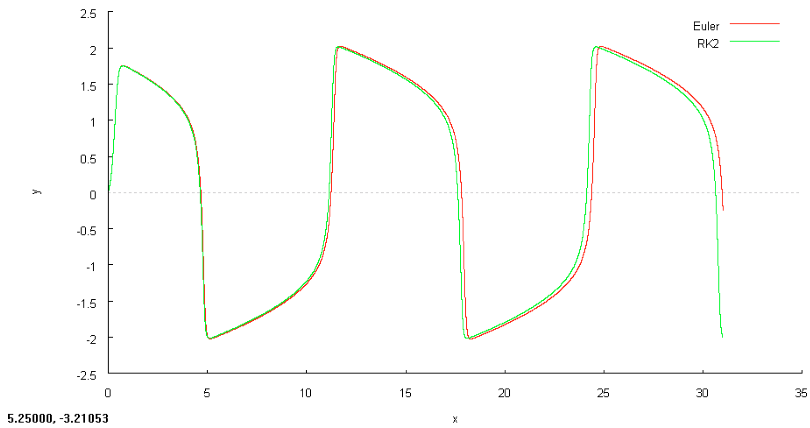
d Geben Sie die Iterationsgleichungen für das RK2-Verfahren an.

$$k1 = h * y1'(y1_n, y2_n); \tag{10}$$
$$l1 = h * y2'(y1_n); \tag{11}$$
$$k2 = h * y1'(y1_n + l1/2, y2_n + l1/2); \tag{12}$$
$$l2 = h * y2'(y1_n + k1/2); \tag{13}$$
$$y1_{n+1} = y1_n + k2 \tag{14}$$
$$y2_{n+1} = y2_n + l2 \tag{15}$$
$$x_{n+1} = x_n + h \tag{16}$$

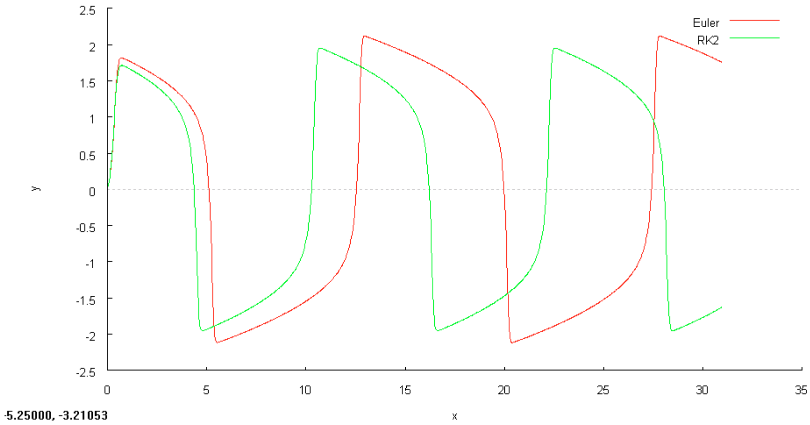
e Schreiben Sie ein Programm "VanDerPol.ch", welches die DGL mit beiden Verfahren löst und in einem Plot anzeigt.

Die Implementierung ist in VanDerPol.ch zu finden.

Der Plot zeigt bei einer Schrittweite von $h = 0.001$ bei Euler und RK eine sehr genaue Darstellung.



Bei einer Schrittweite von $h = 0.2$ sind Euler und RK sehr ungenau, wobei RK noch etwas näher an der korrekten Darstellung ist.



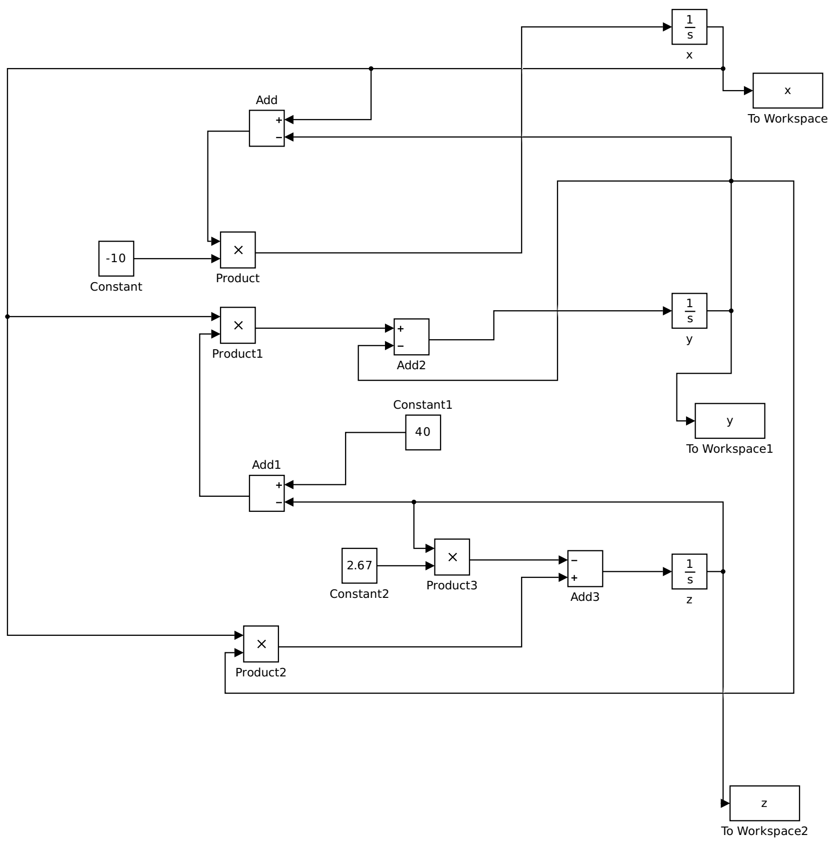
3 Lösung eines Differentialgleichungssystems (Lorenz-Attraktor) mit RK 2

a **Geben Sie die Iterationsgleichungen für das RK2-Verfahren an.**

b **Schreiben Sie ein Programm Lorenz.ch", welches das DGL-System löst. Geben Sie im 1. Plot die Funktion x(t) aus: Geben Sie im 2. Plot z(x) aus.**

c **Realisieren Sie das Differentialgleichungssystem mit MAT-Lab/Simulink**

Versuchsdurchführung


1
s
x
x
To Workspace
Add
+
−
-10
Constant
Product
Product1
+
−
Add2
1
s
y
y
To Workspace1
Constant1
40
Add1
+
−
2.67
Constant2
Product3
−
+
Add3
1
s
z
Product2
z
To Workspace2