第二章课后习题

【2.1】同时扔一对均匀的骰子，当得知“两骰子面朝上点数之和为 2”或“面朝上点数之和为 8”或“两骰子面朝上点数是 3 和 4”时，试问这三种情况分别获得多少信息量?

【2.2】居住某地区的女孩中有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 1.6 米以上的，而女孩中身高 1.6 米以上的占总数一半。假如我们得知“身高 1.6 米以上的某女孩是大学生”的消息，问获得多少信息量?

【2.3】设离散无记忆信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 = 0 & a_2 = 1 & a_3 = 2 & a_4 = 3 \\ 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$，其发出的消息为

(202120130213001203210110321010021032011223210)，求

(1) 此消息的自信息是多少?

(2) 在此消息中平均每个符号携带的信息量是多少?

【2.4】设信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.16 & 0.17 \end{bmatrix}$，求此信源的熵，并解释为什么 $H(X) > \log 6$，不满足信源熵的极值性。

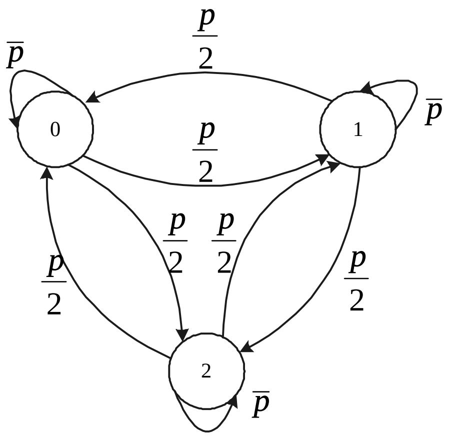
【2.5】设离散无记忆信源 S 其符号集 $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$，知其相应的概率分别为 $(P_1, P_2, ..., P_q)$。设另一离散无记忆信源 S'，其符号集为 S 信源符号集的两倍，$A' = \{a_i, i = 1,2,...,2q\}$，并且各符号的概率分布满足

$$\begin{aligned} P_i' &= (1-e)P_i \quad & i &= 1,2,...,q \\ P_i' &= eP_i & i &= q+1, q+2,...,2q \end{aligned}$$

试写出信源 S' 的信息熵与信源 S 的信息熵的关系。

【2.6】设有一概率空间，其概率分布为$\{p_1, p_2, \ldots,\ p_q\}$，并有$p_1 > p_2$。若取$p_1' = p_1 - e$，$p_2' = p_2 + e$，其中$0 < 2e \le p_1 - p_2$，而其他概率值不变。试证明由此所得新的概率空间的熵是增加的，并用熵的物理意义加以解释。

【2.7】证明离散信源有$H(X_1 \mathbf{L} X_2) \le {}_N \quad (X_1) + H(X_2) + \mathbf{L} + H(X_N)$，并说明等式成立$H$的条件。



【2.8】一阶马尔克夫信源的状态图如右图所示，信源X的符号集为$\{0,1,2\}$并定义$\bar{p} = 1 - p$。

（1） 求信源平稳后的概率分布$P(0)$、$P(1)$和$P(2)$；

（2） 求此信源的熵H_∞；

（3） 近似认为此信源为无记忆时，符号的概率分布等于平稳分布。求近似信源的熵$H(X)$并与H_∞进行比较；

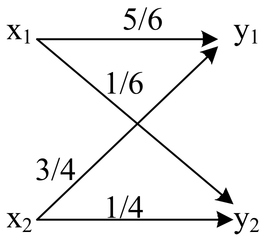
（4） 对一阶马尔克夫信源p取何值时，H_∞取最大值，又当$p = 0$和$p = 1$时结果如何?

第三章课后习题

【3.1】 设信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

通过一干扰信道，接收符号为$Y=[y_1, y_2]$，信道传递概率如下图所示，求



（1）信源 X 中事件 x_1 和 x_2 分别含有的自信息；

（2）收到消息 $y_j (j=1,2)$ 后，获得的关于 $x_i (i=1,2)$ 的信息量；

（3）信源 X 和信源 Y 的信息熵；

（4）信道疑义度 $H(X|Y)$ 和噪声熵 $H(Y|X)$；

（5）接收到消息 Y 后获得的平均互信息。

【3.2】 设二元对称信道的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

（1）若 P(0)=3/4，P(1)=1/4，求 $H(X)$，$H(X|Y)$，$H(Y|X)$ 和 $I(X;Y)$；

（2）求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布。

【3.3】 求下列两个信道的信道容量，并加以比较

$$(1)\ \begin{bmatrix} \overline{p}-e & p-e & 2e \\ p-e & \overline{p}-e & 2e \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} \overline{p}-e & p-e & 2e & 0 \\ p-e & \overline{p}-e & 0 & 2e \end{bmatrix}$$

【3.4】 试证明$H(X)$是输入概率分布$P(x)$的上凸函数。

证明:

$$H(X)=-\sum_{X}P(x)\log P(x)$$

设存在两个概率分布$P_1(x)$和$P_2(x)$，目标是要证明

$$qH(P_1(x))+\bar{q}H(P_2(x))\le H(qP_1(x)+\bar{q}P_2(x))$$

【3.5】 从平均互信息的表达式证明，当信道和信源都是无记忆时，有

$$I(X^N;Y^N)=NI(X;Y)$$

第五章课后习题

【5.1】有一信源，它有六个可能的输出，其概率分布如下表所示，表中给出了对应的码 A、B、C、D、E 和 F。

表 5.2

消息	$P(a_i)$	A	B	C	D	E	F
a_1	1/2	000	0	0	0	0	0
a_2	1/4	001	01	10	10	10	100
a_3	1/16	010	011	110	110	1100	101
a_4	1/16	011	0111	1110	1110	1101	110
a_5	1/16	100	01111	11110	1011	1110	111
a_6	1/16	101	011111	111110	1101	1111	011

（1） 求这些码中哪些是惟一可译码；

（2） 求哪些码是非延长码（即时码）；

（3） 求对所有惟一可译码求出其平均码长 $\overline{L}$。

【5.2】根据下列的 r 和码长 l_i,判断是否存在这样条件的即时码，为什么？如果有，试构造出一个这样的码。

(1) $r = 2$，码长 $l_i = 1$，2，3，3，4；

(2) r = 2，码长 l_i = 1，3，3，3，4，5，5；

(3) r = 4，码长 l_i = 1，1，1，2，2，3，3，3，4；

(4) r = 5，码长 l_i = 1，1，1，1，1，3，4。

【5.3】求概率分布为(1/3,1/5,1/5,2/15,2/15)信源的二元霍夫曼码。讨论此码对于概率分布为(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5)的信源也是最佳二元码。

【5.4】设二元霍夫曼码为(00,01,10,11)和(0,10,110,111)，求出可以编得这样霍夫曼码的信源的所有概率分布。

【5.5】设信源符号集

$$\begin{bmatrix} S \\ P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

(1) 求$H(S)$和信源冗余度；

(2) 设码符号为$X=\{0,1\}$，编出S的紧致码，并求S的紧致码的平均码长$\overline{L}$；

(3) 把信源的N次无记忆扩展信源S^N编成紧致码，试求出$N=2,3,4,\infty$时的平均码长$\frac{\overline{L}_N}{N}$；

(4) 计算上述$N=1,2,3,4$这四种码的编码效率和码冗余度。

【5.6】设有两个信源X和Y如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ P(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ 0.49 & 0.14 & 0.14 & 0.07 & 0.07 & 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$$

(1) 分别用霍夫曼码编成二元变长惟一可译码，并计算其编码效率；

(2) 分别用香农编码法编成二元变长惟一可译码，并计算编码效率；

(3) 分别用费诺编码方法编成二元变长惟一可译码，并计算编码效率；

(4) 从X、Y两种不同信源来比较这三种编码方法的优缺点。

第六章课后习题

【6.1】设有一离散信道，其信道传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

并设 $P(x_1)=\frac{1}{2}$，$P(x_2)=P(x_3)=\frac{1}{4}$，试分别按最小错误概率准则与最大似然译码准则确定译码规则，并计算相应的平均错误概率。

【6.2】设某二元码为 $C=\{11100,01001,10010,00111\}$

（1） 计算此码的最小距离 $d_{\min}$；

（2） 计算此码的码率 R，假设码字等概率分布；

（3） 采用最小距离译码准则，试问接收序列 10000，01100 和 00100 应译成什么码字?

（4） 此码能纠正几位码元的错误?