概率论与数理统计习题及答案

习题 一

1. 略.见教材习题参考答案.

2.设 A，B，C 为三个事件，试用 A，B，C 的运算关系式表示下列事件：

（1） A 发生，B，C 都不发生；

（2） A 与 B 发生，C 不发生；

（3） A，B，C 都发生；

（4） A，B，C 至少有一个发生；

（5） A，B，C 都不发生；

（6） A，B，C 不都发生；

（7） A，B，C 至多有 2 个发生；

（8） A，B，C 至少有 2 个发生.

【解】（1） $A\overline{B}\,\overline{C}$ （2） $AB\overline{C}$ （3） ABC

（4） $A\cup B\cup C=\overline{AB}\,C\cup\overline{A}\,B\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,BC\cup A\,\overline{B}\,C\cup AB\overline{C}\cup ABC=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

(5) $\overline{AB}\,\overline{C}=\overline{A\bigcup B\bigcup C}$ (6) $\overline{ABC}$

(7) $\overline{A}\,BC\cup A\overline{B}\,C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,C\cup A\,\overline{BC}\cup\overline{A}\,B\,\overline{C}\cup\overline{AB}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

(8) $AB\cup BC\cup CA=AB\overline{C}\cup A\overline{B}\,C\cup\overline{A}\,BC\cup ABC$

3. 略.见教材习题参考答案

4.设 A，B 为随机事件，且 P（A）=0.7,$P(A-B)$=0.3，求 P（$\overline{AB}$）.

【解】 P（$\overline{AB}$）=1–P（AB）=1–[$P(A)$–$P(A-B)$]

=1–[0.7–0.3]=0.6

5.设 A，B 是两事件，且 P（A）=0.6,$P(B)$=0.7,求：

（1） 在什么条件下 P（AB）取到最大值？

（2） 在什么条件下 P（AB）取到最小值？

【解】（1） 当 $AB=A$ 时，P（AB）取到最大值为 0.6.

（2） 当 $A\cup B=\Omega$ 时，P（AB）取到最小值为 0.3.

6.设 A，B，C 为三事件，且 P（A）=P（B）=1/4，P（C）=1/3 且 P（AB）=P（BC）=0，P（AC）=1/12，求 A，B，C 至少有一事件发生的概率.

【解】 P（$A\cup B\cup C$）$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

7. 从 52 张扑克牌中任意取出 13 张，问有 5 张黑桃，3 张红心，3 张方块，2 张梅花的概率是多少？

【解】 $p=\mathrm{C}_{13}^{5}\mathrm{C}_{13}^{3}\mathrm{C}_{13}^{3}\mathrm{C}_{13}^{2}/\mathrm{C}_{52}^{13}$

8. 对一个五人学习小组考虑生日问题：

（1） 求五个人的生日都在星期日的概率； （2） 求五个人的生日都不在星期日的概率；

（3） 求五个人的生日不都在星期日的概率.

【解】（1） 设 A_1={五个人的生日都在星期日}，基本事件总数为 7^5，有利事件仅 1 个，故

P（A_1）$=\frac{1}{7^5}=(\frac{1}{7})^5$ （亦可用独立性求解，下同）

（2） 设 A_2={五个人生日都不在星期日}，有利事件数为 6^5，故

P（A_2）$=\frac{6^5}{7^5}=(\frac{6}{7})^5$

(3) 设 A_3={五个人的生日不都在星期日}

P（A_3）$=1-P(A_1)=1-(\frac{1}{7})^5$

9. 略.见教材习题参考答案.

10.一批产品共 N 件，其中 M 件正品.从中随机地取出 n 件（$n<N$）.试求其中恰有 m 件（$m\leqslant M$）正品（记为 A）的概率.如果：

（1） n 件是同时取出的；

（2） n 件是无放回逐件取出的；

（3） n 件是有放回逐件取出的.

【解】（1） P（A）$=\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}/\mathrm{C}_N^n$

(2) 由于是无放回逐件取出，可用排列法计算.样本点总数有 P_N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种.对于固定的一种正品与次品的抽取次序，从 M 件正品中取 m 件的排列数有 P_M^m 种，从 $N-M$ 件次品中取 $n-m$ 件的排列数为 P_{N-M}^{n-m} 种，故

$$P（A）=\frac{\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{P}_N^n}$$

由于无放回逐渐抽取也可以看成一次取出，故上述概率也可写成

$$P（A）=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}$$

可以看出，用第二种方法简便得多.

（3） 由于是有放回的抽取，每次都有 N 种取法，故所有可能的取法总数为 N^n 种，n

次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种，对于固定的一种正、次品的抽取次序，m 次取得正品，都有 M 种取法，共有 M^m 种取法，$n-m$ 次取得次品，每次都有 $N-M$ 种取法，共有（$N-M$）$^{n-m}$ 种取法，故

$$P(A)=\mathrm{C}_n^m M^m (N-M)^{n-m}/N^n$$

此题也可用贝努里概型，共做了 n 重贝努里试验，每次取得正品的概率为 $\frac{M}{N}$，则取得 m 件正品的概率为

$$P(A)=\mathrm{C}_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

11. 略.见教材习题参考答案.
12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱.每个部件用 3 只铆钉.若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱.求发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【解】设 A={发生一个部件强度太弱}

$$P(A)=\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_3^3/\mathrm{C}_{50}^3=\frac{1}{1960}$$

13. 一个袋内装有大小相同的 7 个球，其中 4 个是白球，3 个是黑球，从中一次抽取 3 个，计算至少有两个是白球的概率.

【解】 设 A_i={恰有 i 个白球}（i=2,3），显然 A_2 与 A_3 互斥.

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{18}{35},\qquad P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{4}{35}$$

故 $$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{22}{35}$$

14. 有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在两批种子中各随机取一粒，求：
   （1） 两粒都发芽的概率；
   （2） 至少有一粒发芽的概率；
   （3） 恰有一粒发芽的概率.

【解】设 A_i={第 i 批种子中的一粒发芽}，（i=1,2）

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.7\times0.8=0.56$

(2) $P(A_1\cup A_2)=0.7+0.8-0.7\times0.8=0.94$

(3) $P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=0.8\times0.3+0.2\times0.7=0.38$

15. 掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止.
   （1） 问正好在第 6 次停止的概率；
   （2） 问正好在第 6 次停止的情况下，第 5 次也是出现正面的概率.

【解】（1） $p_1=C_5^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$ (2) $p_2=\frac{\mathrm{C}_4^1(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^3\frac{1}{4}}{5/32}=\frac{2}{5}$

16. 甲、乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 及 0.6，每人各投了 3 次，求二人进球数相等的概率.

【解】 设 A_i={甲进 i 球}，i=0,1,2,3,B_i={乙进 i 球},i=0,1,2,3,则

$$P(\bigcup_{i=0}^{3} A_i B_{i3}) = (0.3)^3(0.4)^3 + \mathrm{C}_3^1 0.7\times(0.3)^2 \mathrm{C}_3^1 0.6\times(0.4)^2 +$$

$$\mathrm{C}_3^2(0.7)^2\times 0.3\mathrm{C}_3^2(0.6)^2 0.4 + (0.7)^3(0.6)^3$$

=0.32076

17. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

【解】

$$p = 1 - \frac{\mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{10}^4} = \frac{13}{21}$$

18. 某地某天下雪的概率为 0.3，下雨的概率为 0.5，既下雪又下雨的概率为 0.1,求：

（1） 在下雨条件下下雪的概率；（2） 这天下雨或下雪的概率.

【解】 设 A={下雨}，B={下雪}.

（1） $$p(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

（2） $$p(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.5 - 0.1 = 0.7$$

19. 已知一个家庭有 3 个小孩，且其中一个为女孩，求至少有一个男孩的概率（小孩为男为女是等可能的）.

【解】 设 A={其中一个为女孩}，B={至少有一个男孩}，样本点总数为 2^3=8，故

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{6/8}{7/8} = \frac{6}{7}$$

或在缩减样本空间中求，此时样本点总数为 7.

$$P(B|A) = \frac{6}{7}$$

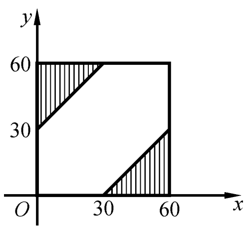
20. 已知 5%的男人和 0.25%的女人是色盲，现随机地挑选一人，此人恰为色盲，问此人是男人的概率（假设男人和女人各占人数的一半）.

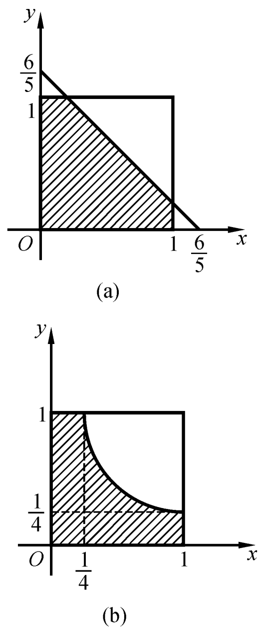
【解】 设 A={此人是男人}，B={此人是色盲}，则由贝叶斯公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A)P(B|A)}$$

$$= \frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05 + 0.5\times 0.0025} = \frac{20}{21}$$

21. 两人约定上午 9：00~10：00 在公园会面，求一人要等另一人半小时以上的概率.





题 21 图　　　　题 22 图

【解】设两人到达时刻为 x,y,则 $0\leqslant x,y\leqslant 60$.事件"一人要等另一人半小时以上"等价于 $|x-y|>30$.

如图阴影部分所示.

$$P=\frac{30^2}{60^2}=\frac{1}{4}$$

22.　从（0，1）中随机地取两个数，求：

（1）　两个数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率;

（2）　两个数之积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

【解】　设两数为 x,y，则 $0<x,y<1$.

（1）　$x+y<\frac{6}{5}$.

$$p_1=1-\frac{\frac{1}{2}\frac{4}{5}\frac{4}{5}}{1}=\frac{17}{25}=0.68$$

(2) $xy=<\frac{1}{4}$.

$$p_2=1-\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

23.　设 P（$\overline{A}$）=0.3,$P(B)$=0.4,$P(A\overline{B})$=0.5，求 P（B | $A\cup\overline{B}$）

【解】　$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(B)-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=\frac{1}{4}$$

24. 在一个盒中装有 15 个乒乓球，其中有 9 个新球，在第一次比赛中任意取出 3 个球，比赛后放回原盒中；第二次比赛同样任意取出 3 个球，求第二次取出的 3 个球均为新球的概率.

【解】 设 A_i={第一次取出的 3 个球中有 i 个新球}，i=0,1,2,3.B={第二次取出的 3 球均为新球}

由全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$$

$$=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

$$=0.089$$

25. 按以往概率论考试结果分析，努力学习的学生有 90%的可能考试及格，不努力学习的学生有 90%的可能考试不及格.据调查，学生中有 80%的人是努力学习的，试问：

（1）考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人？

（2）考试不及格的学生有多大可能是努力学习的人？

【解】设 A={被调查学生是努力学习的}，则 $\overline{A}$={被调查学生是不努力学习的}.由题意知 P（A）=0.8，P（$\overline{A}$）=0.2，又设 B={被调查学生考试及格}.由题意知 P（$B|A$）=0.9，P（$\overline{B}\,|\,\overline{A}$）=0.9，故由贝叶斯公式知

（1）$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.2\times0.1}{0.8\times0.9+0.2\times0.1}=\frac{1}{37}=0.02702$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.702%

(2) $$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.8\times0.1}{0.8\times0.1+0.2\times0.9}=\frac{4}{13}=0.3077$$

即考试不及格的学生中努力学习的学生占 30.77%.

26. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 2∶1.若接收站收到的信息是 A，试问原发信息是 A 的概率是多少？

【解】 设 A={原发信息是 A}，则={原发信息是 B}

C={收到信息是 A}，则={收到信息是 B}

由贝叶斯公式，得

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})}$$

$$=\frac{2/3\times0.98}{2/3\times0.98+1/3\times0.01}=0.99492$$

27. 在已有两个球的箱子中再放一白球，然后任意取出一球，若发现这球为白球，试求箱子中原有一白球的概率（箱中原有什么球是等可能的颜色只有黑、白两种）

【解】设 A_i={箱中原有 i 个白球}（i=0,1,2），由题设条件知 $P(A_i)=\frac{1}{3}$,i=0,1,2.又设 B={抽出一球为白球}.由贝叶斯公式知

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)}$$

$$=\frac{2/3\times1/3}{1/3\times1/3+2/3\times1/3+1\times1/3}=\frac{1}{3}$$

28. 某工厂生产的产品中 96%是合格品，检查产品时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.02，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05，求在被检查后认为是合格品产品确是合格品的概率.

【解】 设 A={产品确为合格品}，B={产品被认为是合格品}

由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|A)}$$

$$=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}=0.998$$

29. 某保险公司把被保险人分为三类：“谨慎的”，“一般的”，“冒失的”.统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05,0.15 和 0.30；如果“谨慎的”被保险人占 20%，“一般的”占 50%，“冒失的”占 30%，现知某被保险人在一年内出了事故，则他是“谨慎的”的概率是多少？

【解】 设 A={该客户是“谨慎的”}，B={该客户是“一般的”}，

C={该客户是“冒失的”}，D={该客户在一年内出了事故}

则由贝叶斯公式得

$$P(A\mid D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D\mid A)}{P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)}$$

$$=\frac{0.2\times0.05}{0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3}=0.057$$

30. 加工某一零件需要经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02,0.03,0.05,0.03，假定各道工序是相互独立的，求加工出来的零件的次品率.

【解】设 A_i={第 i 道工序出次品}（i=1,2,3,4）.

$$P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97=0.124$$

31. 设每次射击的命中率为 0.2，问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9?

【解】设必须进行 n 次独立射击.

$$1-(0.8)^n\geq 0.9$$

即为 $$(0.8)^n\leq 0.1$$

故 $n\geqslant 11$

至少必须进行 11 次独立射击.

32. 证明：若 P（A｜B）$=P(A$｜$\overline{B}$)，则 A，B 相互独立.

【证】 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$ 即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$

亦即 $$P(AB)P(\overline{B})=P(A\overline{B})P(B)$$

$$P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$$

因此 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

故 A 与 B 相互独立.

33. 三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求将此密码破译出的概率.

【解】 设 A_i={第 i 人能破译}（i=1,2,3），则

$$P(\bigcup_{i=1}^{3}A_i)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=0.6$$

34. 甲、乙、丙三人独立地向同一飞机射击，设击中的概率分别是 0.4,0.5,0.7，若只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；若有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机一定被击落，求：飞机被击落的概率.

【解】设 A={飞机被击落}，B_i={恰有 i 人击中飞机}，i=0,1,2,3

由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|B_i)P(B_i)$$

=(0.4×0.5×0.3+0.6×0.5×0.3+0.6×0.5×0.7)0.2+

(0.4×0.5×0.3+0.4×0.5×0.7+0.6×0.5×0.7)0.6+0.4×0.5×0.7

=0.458

35. 已知某种疾病患者的痊愈率为 25%，为试验一种新药是否有效，把它给 10 个病人服用，且规定若 10 个病人中至少有四人治好则认为这种药有效，反之则认为无效，求：

（1） 虽然新药有效，且把治愈率提高到 35%，但通过试验被否定的概率.

（2） 新药完全无效，但通过试验被认为有效的概率.

【解】（1） $p_1=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{10}^{k}(0.35)^k(0.65)^{10-k}=0.5138$

(2) $p_2=\sum_{k=4}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}(0.25)^k(0.75)^{10-k}=0.2241$

36. 一架升降机开始时有 6 位乘客，并等可能地停于十层楼的每一层.试求下列事件的概率：

（1） A=“某指定的一层有两位乘客离开”；

（2） B=“没有两位及两位以上的乘客在同一层离开”；

（3） C=“恰有两位乘客在同一层离开”；

（4） D=“至少有两位乘客在同一层离开”.

【解】 由于每位乘客均可在 10 层楼中的任一层离开，故所有可能结果为 10^6 种.

（1） $P(A)=\frac{\mathrm{C}_6^2 9^4}{10^6}$，也可由 6 重贝努里模型：

$$P(A)=\mathrm{C}_6^2(\frac{1}{10})^2(\frac{9}{10})^4$$

（2） 6 个人在十层中任意六层离开，故

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_{10}^6}{10^6}$$

（3） 由于没有规定在哪一层离开，故可在十层中的任一层离开，有 C_{10}^1 种可能结果，再从六人中选二人在该层离开，有 C_6^2 种离开方式.其余 4 人中不能再有两人同时离开的情况，因此可包含以下三种离开方式：①4 人中有 3 个人在同一层离开，另一人在其余 8 层中任一层离开，共有 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_8^1$ 种可能结果；②4 人同时离开，有 C_9^1 种可能结果；③4 个人都不在同一层离开，有 P_9^4 种可能结果，故

$$P(C)=\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_6^2(\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_8^1+\mathrm{C}_9^1+\mathrm{P}_9^4)/10^6$$

（4） D=$\overline{B}$.故

$$P(D)=1-P(B)=1-\frac{\mathrm{P}_{10}^6}{10^6}$$

37. n 个朋友随机地围绕圆桌而坐，求下列事件的概率：

（1） 甲、乙两人坐在一起，且乙坐在甲的左边的概率；

（2） 甲、乙、丙三人坐在一起的概率；

（3） 如果 n 个人并排坐在长桌的一边，求上述事件的概率.

【解】 （1） $p_1=\frac{1}{n-1}$

(2) $p_2 = \dfrac{3!(n-3)!}{(n-1)!}, n > 3$

(3) $p_1{}' = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}; p_2{}' = \dfrac{3!(n-2)!}{n!}, n \ge 3$

38. 将线段[0，a]任意折成三折，试求这三折线段能构成三角形的概率

【解】 设这三段长分别为 $x,y,a-x-y$.则基本事件集为由

$0<x<a,0<y<a,0<a-x-y<a$ 所构成的图形，有利事件集为由

$$\begin{cases} x+y>a-x-y \\ x+(a-x-y)>y \\ y+(a-x-y)>x \end{cases}$$

构成的图形，即

$$\begin{cases} 0<x<\dfrac{a}{2} \\ 0<y<\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2}<x+y<a \end{cases}$$

如图阴影部分所示，故所求概率为 $p = \dfrac{1}{4}$.

39. 某人有 n 把钥匙，其中只有一把能开他的门.他逐个将它们去试开（抽样是无放回的）.证明试开 k 次（k=1,2,⋯,n）才能把门打开的概率与 k 无关.

【证】 $$p = \frac{\mathrm{P}_{n-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_n^k} = \frac{1}{n}, k = 1, 2, \cdots, n$$

40.把一个表面涂有颜色的立方体等分为一千个小立方体，在这些小立方体中，随机地取出一个，试求它有 i 面涂有颜色的概率 P（A_i）（i=0,1,2,3）.

【解】 设 A_i={小立方体有 i 面涂有颜色}，i=0,1,2,3.

在 1 千个小立方体中，只有位于原立方体的角上的小立方体是三面有色的，这样的小立方体共有 8 个.只有位于原立方体的棱上（除去八个角外）的小立方体是两面涂色的，这样的小立方体共有 12×8=96 个.同理，原立方体的六个面上（除去棱）的小立方体是一面涂色的，共有 8×8×6=384 个.其余 1000–（8+96+384）=512 个内部的小立方体是无色的，故所求概率为

$$P(A_0) = \frac{512}{1000} = 0.512, P(A_1) = \frac{384}{1000} = 0.384,$$

$$P(A_2) = \frac{96}{1000} = 0.096, P(A_4) = \frac{8}{1000} = 0.008.$$

41.对任意的随机事件 A，B，C，试证

P（AB）+P（AC）–P（BC）≤$P(A)$.

【证】 $$P(A) \ge P[A(B \cup C)] = P(AB \cup AC)$$

$$= P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

$$\geq P(AB)+P(AC)-P(BC)$$

42. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

【解】 设 A_i={杯中球的最大个数为 i},i=1,2,3.

将 3 个球随机放入 4 个杯子中，全部可能放法有 4^3 种，杯中球的最大个数为 1 时，每个杯中最多放一球，故

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_4^3 3!}{4^3}=\frac{3}{8}$$

而杯中球的最大个数为 3，即三个球全放入一个杯中，故

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$$

因此 $$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

或 $$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}$$

43. 将一枚均匀硬币掷 $2n$ 次，求出现正面次数多于反面次数的概率.

【解】掷 $2n$ 次硬币，可能出现：A={正面次数多于反面次数}，B={正面次数少于反面次数}，C={正面次数等于反面次数}，A，B，C 两两互斥.

可用对称性来解决.由于硬币是均匀的，故 P（A）=P（B）.所以

$$P(A)=\frac{1-P(C)}{2}$$

由 $2n$ 重贝努里试验中正面出现 n 次的概率为

$$P(C)=C_{2n}^n(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^n$$

故 $$P(A)=\frac{1}{2}[1-\mathrm{C}_{2n}^n\frac{1}{2^{2n}}]$$

44. 掷 n 次均匀硬币，求出现正面次数多于反面次数的概率.

【解】设 A={出现正面次数多于反面次数}，B={出现反面次数多于正面次数}，由对称性知 P（A）=P（B）

（1） 当 n 为奇数时，正、反面次数不会相等.由 P（A）+P（B）=1 得 P（A）=P（B）=0.5

(2) 当 n 为偶数时，由上题知

$$P(A)=\frac{1}{2}[1-\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}(\frac{1}{2})^n]$$

45. 设甲掷均匀硬币 n+1 次，乙掷 n 次，求甲掷出正面次数多于乙掷出正面次数的概率.

【解】 令甲$_{正}$=甲掷出的正面次数，甲$_{反}$=甲掷出的反面次数.

乙$_{正}$=乙掷出的正面次数，乙$_{反}$=乙掷出的反面次数.

显然有

$\overline{(甲_{正}>乙_{正})}$=（甲$_{正}$≤乙$_{正}$）=（n+1−甲$_{反}$≤n−乙$_{反}$）

=（甲$_{反}$≥1+乙$_{反}$）=（甲$_{反}$>乙$_{反}$）

由对称性知 P（甲$_{正}$>乙$_{正}$）=P（甲$_{反}$>乙$_{反}$）

因此 P(甲$_{正}$>乙$_{正}$)=$\frac{1}{2}$

46. 证明“确定的原则”（Sure−thing）：若 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

【证】由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,得

$$\frac{P(AC)}{P(C)}\ge\frac{P(BC)}{P(C)},$$

即有 $$P(AC)\ge P(BC)$$

同理由 $$P(A|\overline{C})\ge P(B|\overline{C}),$$

得 $$P(A\overline{C})\ge P(B\overline{C}),$$

故 $$P(A)=P(AC)+P(A\overline{C})\ge P(BC)+P(B\overline{C})=P(B)$$

47.一列火车共有 n 节车厢，有 $k(k\geqslant n)$个旅客上火车并随意地选择车厢.求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

【解】 设 A_i={第 i 节车厢是空的},（i=1,⋯,n）,则

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=(1-\frac{1}{n})^k$$

$$P(A_iA_j)=(1-\frac{2}{n})^k$$

$$\cdots$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=(1-\frac{n-1}{n})^k$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}$ 是 1，2，⋯，n 中的任 n−1 个.

显然 n 节车厢全空的概率是零，于是

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=n(1-\frac{1}{n})^k=\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k$$

$$S_2=\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^k$$

$$\cdots$$

$$S_{n-1}=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots i_{n-1}\le n}P(A_{i1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

$$S_n=0$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}S_n$$

$$=\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k-\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^k+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

故所求概率为

$$1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k+\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^i-\cdots+(-1)^{n+1}\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

48.设随机试验中，某一事件 A 出现的概率为 ε >0.试证明：不论 ε >0 如何小，只要不断地独立地重复做此试验，则 A 迟早会出现的概率为 1.

【证】

在前 n 次试验中，A 至少出现一次的概率为

$$1-(1-\varepsilon)^n\to 1(n\to\infty)$$

49.袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）.在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽.试问这只硬币是正品的概率是多少？

【解】设 A={投掷硬币 r 次都得到国徽}

B={这只硬币为正品}

由题知
$$P(B)=\frac{m}{m+n},P(\overline{B})=\frac{n}{m+n}$$

$$P(A\,|\,B)=\frac{1}{2^r},P(A\,|\,\overline{B})=1$$

则由贝叶斯公式知

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(B)P(A\,|\,B)+P(B)P(A\,|\,B)}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\cdot 1}=\frac{m}{m+2^r n}$$

50.巴拿赫（Banach）火柴盒问题：某数学家有甲、乙两盒火柴，每盒有 N 根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取一根.试求他首次发现一盒空时另一盒恰有 r 根的概率是多少？第一次用完一盒火柴时（不是发现空）而另一盒恰有 r 根的概率又有多少？

【解】以 B_1、B_2 记火柴取自不同两盒的事件，则有 $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$.（1）发现一盒已空，另一盒恰剩 r 根，说明已取了 $2n-r$ 次，设 n 次取自 B_1 盒（已空），$n-r$ 次取自 B_2 盒，第 $2n-r+1$ 次拿起 B_1，发现已空。把取 $2n-r$ 次火柴视作 $2n-r$ 重贝努里试验，则所求概率为

$$p_1=2\mathrm{C}_{2n-r}^n(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^{n-r}\cdot\frac{1}{2}=\mathrm{C}_{n-r}^n\frac{1}{2^{2r-r}}$$

式中 2 反映 B_1 与 B_2 盒的对称性（即也可以是 B_2 盒先取空）.

（2） 前 $2n-r-1$ 次取火柴，有 $n-1$ 次取自 B_1 盒，$n-r$ 次取自 B_2 盒，第 $2n-r$ 次取自 B_1 盒，故概率为

$$p_2=2\mathrm{C}_{2n-r-1}^{n-1}(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2})^{n-r}\frac{1}{2}=\mathrm{C}_{2n-r-1}^{n-1}(\frac{1}{2})^{2n-r-1}$$

51. 求 n 重贝努里试验中 A 出现奇数次的概率.

【解】　设在一次试验中 A 出现的概率为 p.则由

$$(q+p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + C_n^n p^n q^0 = 1$$

$$(q-p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^n p^n q^0$$

以上两式相减得所求概率为

$$\begin{aligned} p_1 &= C_n^1 pq^{n-1} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}[1-(q-p)^n] \\ &= \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] \end{aligned}$$

若要求在 n 重贝努里试验中 A 出现偶数次的概率，则只要将两式相加，即得

$$p_2 = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n].$$

52.设 A，B 是任意两个随机事件，求 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}$的值.

【解】因为（$A\cup B$）∩（$\overline{A}\cup\overline{B}$）=$A\overline{B}\cup\overline{A}B$

$$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = AB\cup\overline{AB}$$

所求

$$\begin{aligned} &(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) \\ &= [(A\overline{B}\bigcup\overline{A}B)\bigcap(AB+\overline{AB})] \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

故所求值为 0.

53.设两两相互独立的三事件，A，B 和 C 满足条件：

$ABC=\Phi$，$P(A)=P(B)=P(C)< 1/2$，且 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)$.

【解】由 $P(A\bigcup B\bigcup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$= 3P(A) - 3[P(A)]^2 = \frac{9}{16}$$

故 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$,按题设 $P(A)<\frac{1}{2}$,故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

54.设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，求 $P(A)$.

【解】

$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A\bigcup B}) = 1 - P(A\bigcup B) = \frac{1}{9} \qquad ①$$

$$P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B) \qquad ②$$

故

$$P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$$

故

$$P(A) = P(B) \qquad ③$$

由 A,B 的独立性，及①、③式有

$$\frac{1}{9}=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=1-2P(A)+[P(A)]^2$$

$$=[1-P(A)]^2$$

故 $$1-P(A)=\pm\frac{1}{3}$$

故 $$P(A)=\frac{2}{3}\text{或}P(A)=\frac{4}{3}\text{（舍去）}$$

即 P（A）$=\frac{2}{3}$.

55.随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率为多少？

【解】利用几何概率来求，图中半圆面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$.阴影部分面积为

$$\frac{\pi}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2$$

故所求概率为

$$p=\frac{\frac{\pi}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

56. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

【解】 设 A={两件中至少有一件是不合格品}，B={另一件也是不合格品}

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}$$

57.设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份.随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

（1） 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

（2） 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

【解】设 A_i={报名表是取自第 i 区的考生}，i=1,2,3.

B_j={第 j 次取出的是女生表}，j=1,2.

则 $$P(A_i)=\frac{1}{3},i=1,2,3$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}$$

(1) $p = P(B_1) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1 \mid A_i) = \frac{1}{3}(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25}) = \frac{29}{90}$

(2) $q = P(B_1 \mid \overline{B}_2) = \frac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(B_2)}$

而 $$P(\overline{B}_2) = \sum_{i=1}^{3} P(\overline{B}_2 \mid A_i)P(A_i)$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25}) = \frac{61}{90}$$

$$P(B_1\overline{B_2}) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1\overline{B}_2 \mid A_i)P(A_i)$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} + \frac{5}{25} \times \frac{20}{24}) = \frac{2}{9}$$

故 $$q = \frac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}} = \frac{20}{61}$$

58. 设 A，B 为随机事件，且 P（B）>0,$P(A|B)$=1,试比较 $P(A\cup B)$与 $P(A)$的大小. (2006 研考)

解：因为 $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B)$$

所以 $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) = P(A).$$

习题二

1.一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1，2，3，4，5，在其中同时取 3 只，以 *X* 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 *X* 的分布律.

【解】

$$X=3,4,5$$

$$P(X=3)=\frac{1}{\mathrm{C}_5^3}=0.1$$

$$P(X=4)=\frac{3}{\mathrm{C}_5^3}=0.3$$

$$P(X=5)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_5^3}=0.6$$

故所求分布律为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

2.设在 15 只同类型零件中有 2 只为次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样，以 *X* 表示取出的次品个数，求：

（1） *X* 的分布律；

（2） *X* 的分布函数并作图；

(3)

$$P\{X\le\frac{1}{2}\},P\{1<X\le\frac{3}{2}\},P\{1\le X\le\frac{3}{2}\},P\{1<X<2\}.$$

【解】

$$X=0,1,2.$$

$$P(X=0)=\frac{\mathrm{C}_{13}^3}{\mathrm{C}_{15}^3}=\frac{22}{35}.$$

$$P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{13}^2}{\mathrm{C}_{15}^3}=\frac{12}{35}.$$

$$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_{13}^1}{\mathrm{C}_{15}^3}=\frac{1}{35}.$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

（2） 当 $x<0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=0$

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)=\frac{22}{35}$

当 1≤x<2 时，F（x）=P（X≤x）=$P(X=0)+P(X=1)=\frac{34}{35}$

当 x≥2 时，F（x）=P（X≤x）=1

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{22}{35}, & 0\le x<1\\ \frac{34}{35}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

(3)

$$P(X\le\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})=\frac{22}{35},$$
$$P(1<X\le\frac{3}{2})=F(\frac{3}{2})-F(1)=\frac{34}{35}-\frac{34}{35}=0$$
$$P(1\le X\le\frac{3}{2})=P(X=1)+P(1<X\le\frac{3}{2})=\frac{12}{35}$$
$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)-P(X=2)=1-\frac{34}{35}-\frac{1}{35}=0.$$

3.射手向目标独立地进行了 3 次射击，每次击中率为 0.8，求 3 次射击中击中目标的次数的分布律及分布函数，并求 3 次射击中至少击中 2 次的概率.

【解】

设 X 表示击中目标的次数.则 X=0，1，2，3.

$$P(X=0)=(0.2)^3=0.008$$
$$P(X=1)=\mathrm{C}_3^1 0.8(0.2)^2=0.096$$
$$P(X=2)=\mathrm{C}_3^2(0.8)^2 0.2=0.384$$
$$P(X=3)=(0.8)^3=0.512$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	0.008	0.096	0.384	0.512

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.008, & 0\le x<1\\ 0.104, & 1\le x<2\\ 0.488, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=0.896$$

4.（1） 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=a\frac{\lambda^k}{k!},$$

其中 k=0，1，2，…，$\lambda>0$ 为常数，试确定常数 a.

（2） 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=a/N,\quad k=1，2，\cdots，N,$$

试确定常数 a.

【解】（1） 由分布律的性质知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=a\cdot e^{\lambda}$$

故 $$a=e^{-\lambda}$$

(2) 由分布律的性质知

$$1=\sum_{k=1}^{N}P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=a$$

即 $$a=1.$$

5.甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6,0.7,今各投 3 次，求：

（1） 两人投中次数相等的概率;

（2） 甲比乙投中次数多的概率.

【解】分别令 X、Y 表示甲、乙投中次数，则 $X\sim b$（3，0.6）,$Y\sim b(3,0.7)$

(1) $$\begin{aligned}P(X=Y)&=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+\\&\quad P(X=3,Y=3)\\&=(0.4)^3(0.3)^3+C_3^1 0.6(0.4)^2C_3^1 0.7(0.3)^2+\\&\quad C_3^2(0.6)^2 0.4C_3^2(0.7)^2 0.3+(0.6)^3(0.7)^3\\&=0.32076\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(X>Y)&=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=3,Y=0)+\\&\quad P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)\\&=C_3^1 0.6(0.4)^2(0.3)^3+C_3^2(0.6)^2 0.4(0.3)^3+\\&\quad (0.6)^3(0.3)^3+C_3^2(0.6)^2 0.4C_3^1 0.7(0.3)^2+\\&\quad (0.6)^3C_3^1 0.7(0.3)^2+(0.6)^3C_3^2(0.7)^2 0.3\\&=0.243\end{aligned}$$

6.设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为 0.02，且设各

飞机降落是相互独立的.试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01(每条跑道只能允许一架飞机降落)?

【解】设 X 为某一时刻需立即降落的飞机数，则 $X \sim b(200,0.02)$，设机场需配备 N 条跑道，则有

$$P(X > N) < 0.01$$

即
$$\sum_{k=N+1}^{200} \mathrm{C}_{200}^{k} (0.02)^{k} (0.98)^{200-k} < 0.01$$

利用泊松近似

$$\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4.$$

$$P(X \geq N) \approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-4} 4^{k}}{k!} < 0.01$$

查表得 $N \geqslant 9$.故机场至少应配备 9 条跑道.

7.有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆车在一天的某时段出事故的概率为 0.0001,在某天的该时段内有 1000 辆汽车通过,问出事故的次数不小于 2 的概率是多少(利用泊松定理）?

【解】设 X 表示出事故的次数，则 $X \sim b$（1000，0.0001）

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-0.1} - 0.1 \times \mathrm{e}^{-0.1}$$

8.已知在五重贝努里试验中成功的次数 X 满足 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求概率 $P\{X=4\}$.

【解】设在每次试验中成功的概率为 p，则

$$\mathrm{C}_5^1 p(1-p)^4 = \mathrm{C}_5^2 p^2 (1-p)^3$$

故
$$p = \frac{1}{3}$$

所以
$$P(X = 4) = \mathrm{C}_5^4 (\frac{1}{3})^4 \frac{2}{3} = \frac{10}{243}.$$

9.设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号，

（1） 进行了 5 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率;

（2） 进行了 7 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率.

【解】（1） 设 X 表示 5 次独立试验中 A 发生的次数，则 X~6（5，0.3）

$$P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \mathrm{C}_5^k (0.3)^k (0.7)^{5-k} = 0.16308$$

(2) 令 Y 表示 7 次独立试验中 A 发生的次数，则 $Y \sim b$（7，0.3）

$$P(Y \geq 3) = \sum_{k=3}^{7} \mathrm{C}_7^k (0.3)^k (0.7)^{7-k} = 0.35293$$

10.某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为（1/2）t 的泊松分

布，而与时间间隔起点无关（时间以小时计）.

（1） 求某一天中午 12 时至下午 3 时没收到呼救的概率；

（2） 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次呼救的概率.

【解】（1）$P(X=0)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ (2) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$

11.设 $P\{X=k\}=\mathbf{C}_2^k p^k(1-p)^{2-k}$， $k=0,1,2$

$P\{Y=m\}=\mathbf{C}_4^m p^m(1-p)^{4-m}$， $m=0,1,2,3,4$

分别为随机变量 X，Y 的概率分布，如果已知 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，试求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

【解】因为 $P(X\geq 1)=\dfrac{5}{9}$，故 $P(X<1)=\dfrac{4}{9}$.

而 $$P(X<1)=P(X=0)=(1-p)^2$$

故得 $$(1-p)^2=\frac{4}{9},$$

即 $$p=\frac{1}{3}.$$

从而 $$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^4=\frac{65}{81}\approx 0.80247$$

12.某教科书出版了 2000 册，因装订等原因造成错误的概率为 0.001，试求在这 2000 册书中恰有 5 册错误的概率.

【解】令 X 为 2000 册书中错误的册数，则 $X\sim b(2000,0.001)$.利用泊松近似计算,

$$\lambda=np=2000\times 0.001=2$$

得 $$P(X=5)\approx\frac{\mathrm{e}^{-2}2^5}{5!}=0.0018$$

13.进行某种试验，成功的概率为 $\dfrac{3}{4}$，失败的概率为 $\dfrac{1}{4}$.以 X 表示试验首次成功所需试验的次数，试写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率.

【解】 $X=1,2,\cdots,k,\cdots$

$$P(X=k)=(\frac{1}{4})^{k-1}\frac{3}{4}$$

$$P(X=2)+P(X=4)+\cdots+P(X=2k)+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+(\frac{1}{4})^3\frac{3}{4}+\cdots+(\frac{1}{4})^{2k-1}\frac{3}{4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{5}$$

14.有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了保险公司的人寿保险.在一年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日须交 12 元保险费，而在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金.求：

（1） 保险公司亏本的概率;

（2） 保险公司获利分别不少于 10000 元、20000 元的概率.

【解】以“年”为单位来考虑.

（1） 在 1 月 1 日，保险公司总收入为 2500×12=30000 元.

设 1 年中死亡人数为 X，则 $X\sim b(2500,0.002)$，则所求概率为

$$P(2000X>30000)=P(X>15)=1-P(X\leq 14)$$

由于 n 很大，p 很小，$\lambda=np=5$，故用泊松近似，有

$$P(X>15)\approx 1-\sum_{k=0}^{14}\frac{\mathrm{e}^{-5}5^k}{k!}\approx 0.000069$$

(2) P(保险公司获利不少于 10000)

$$=P(30000-2000X\geq 10000)=P(X\leq 10)$$

$$\approx\sum_{k=0}^{10}\frac{\mathrm{e}^{-5}5^k}{k!}\approx 0.986305$$

即保险公司获利不少于 10000 元的概率在 98%以上

P（保险公司获利不少于 20000）$=P(30000-2000X\geq 20000)=P(X\leq 5)$

$$\approx\sum_{k=0}^{5}\frac{\mathrm{e}^{-5}5^k}{k!}\approx 0.615961$$

即保险公司获利不少于 20000 元的概率约为 62%

15.已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）A 值；（2）$P\{0<X<1\}$； (3) $F(x)$.

【解】（1） 由$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A$$

故 $$A=\frac{1}{2}.$$

(2) $p(0<X<1)=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$

(3) 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_0^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

故 $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & x\ge 0\end{cases}$$

16.设某种仪器内装有三只同样的电子管，电子管使用寿命 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{100}{x^2}, & x\ge 100,\\ 0, & x<100.\end{cases}$$

求：（1） 在开始 150 小时内没有电子管损坏的概率；

（2） 在这段时间内有一只电子管损坏的概率；

（3） F（x）.

【解】

（1） $$P(X\le 150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

$$p_1=[P(X>150)]^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

(2) $$p_2=\mathrm{C}_3^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

(3) 当 x<100 时 F（x）=0

当 x≥100 时 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{100}f(t)\mathrm{d}t+\int_{100}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{100}{x}$$

故 $$F(x)=\begin{cases}1-\frac{100}{x}, & x\ge 100\\ 0, & x<0\end{cases}$$

17.在区间［0，a］上任意投掷一个质点，以 X 表示这质点的坐标，设这质点落在［0，a］中任意小区间内的概率与这小区间长度成正比例，试求 X 的分布函数.

【解】 由题意知 X~∪[0,a]，密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0\le x\le a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故当 x<0 时 F（x）=0

当 0≤x≤a 时 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}\frac{1}{a}\mathrm{d}t=\frac{x}{a}$$

当 x>a 时，F（x）=1

即分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

18.设随机变量 X 在[2，5]上服从均匀分布.现对 X 进行三次独立观测，求至少有两次的观测值大于 3 的概率.

【解】X~U[2,5]，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\le x\le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(X>3)=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

故所求概率为

$$p=\mathrm{C}_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+\mathrm{C}_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}$$

19.设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$.某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开.他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

【解】依题意知 $X\sim E(\frac{1}{5})$，即其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\end{cases}$$

该顾客未等到服务而离开的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}$$

$Y\sim b(5,\mathrm{e}^{-2})$,即其分布律为

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_5^k(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5$$
$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.5167$$

20.某人乘汽车去火车站乘火车，有两条路可走.第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 X 服从 N（40，10^2）；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间 X 服从 N（50，4^2）.

（1） 若动身时离火车开车只有 1 小时，问应走哪条路能乘上火车的把握大些？

（2） 又若离火车开车时间只有 45 分钟，问应走哪条路赶上火车把握大些？

【解】（1） 若走第一条路，X~N（40，10^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-40}{10}<\frac{60-40}{10}\right)=\varPhi(2)=0.97727$$

若走第二条路，X~N（50，4^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{60-50}{4}\right)=\varPhi(2.5)=0.9938++$$

故走第二条路乘上火车的把握大些.

（2） 若 X~N（40，10^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-40}{10}<\frac{45-40}{10}\right)=\varPhi(0.5)=0.6915$$

若 X~N（50，4^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{45-50}{4}\right)=\varPhi(-1.25)$$

$$=1-\varPhi(1.25)=0.1056$$

故走第一条路乘上火车的把握大些.

21.设 X~N（3，2^2），

（1） 求 $P\{2<X\le5\}$，$P\{-4<X\le10\}$，$P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$;

（2） 确定 c 使 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

【解】（1） $P(2<X\le5)=P\left(\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{5-3}{2}\right)$

$$=\varPhi(1)-\varPhi\left(-\frac{1}{2}\right)=\varPhi(1)-1+\varPhi\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=0.8413-1+0.6915=0.5328$$

$$P(-4<X\le10)=P\left(\frac{-4-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{10-3}{2}\right)$$

$$=\varPhi\left(\frac{7}{2}\right)-\varPhi\left(-\frac{7}{2}\right)=0.9996$$

$$P(|X|>2)=P(X>2)+P(X<-2)$$

$$=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{2-3}{2}\right)+P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{-2-3}{2}\right)$$
$$=1-\varPhi\left(-\frac{1}{2}\right)+\varPhi\left(-\frac{5}{2}\right)=\varPhi\left(\frac{1}{2}\right)+1-\varPhi\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$=0.6915+1-0.9938=0.6977$$

$$P(X>3)=P(\frac{X-3}{2}>\frac{3-3}{2})=1-\varPhi(0)=0.5$$

(2) c=3

22.由某机器生产的螺栓长度（cm）X~N（10.05,0.06^2）,规定长度在 10.05±0.12 内为合格品,

求一螺栓为不合格品的概率.

【解】$P(|X-10.05|>0.12)=P\left(\left|\dfrac{X-10.05}{0.06}\right|>\dfrac{0.12}{0.06}\right)$

$$\begin{aligned}&=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=2[1-\Phi(2)]\\&=0.0456\end{aligned}$$

23.一工厂生产的电子管寿命 X（小时）服从正态分布 N（160，σ^2），若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.8$，允许 σ 最大不超过多少？

【解】$P(120<X\le 200)=P\left(\dfrac{120-160}{\sigma}<\dfrac{X-160}{\sigma}\le\dfrac{200-160}{\sigma}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\ge 0.8$$

故 $$\sigma\le\frac{40}{1.29}=31.25$$

24.设随机变量 X 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+B\mathrm{e}^{-xt}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

（1） 求常数 A，B；

（2） 求 $P\{X\leqslant 2\}$，$P\{X>3\}$；

（3） 求分布密度 f（x）.

【解】（1）由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

（2） $P(X\le 2)=F(2)=1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$

$$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-\mathrm{e}^{-3\lambda})=\mathrm{e}^{-3\lambda}$$

(3) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

25.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 F（x），并画出 f（x）及 F（x）.

【解】当 $x<0$ 时 F（x）=0

当 $0\leqslant x<1$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$$

当 1≤x<2 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x (2-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2x-1$$

当 x≥2 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=1$

故
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

26.设随机变量 X 的密度函数为

（1） $f(x)$=$\underline{a}$e$^{-\ |x|}$, λ >0;

(2) $f(x)=\begin{cases}bx, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

试确定常数 a,b，并求其分布函数 F（x）.

【解】（1） 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 知 $1=\int_{-\infty}^{\infty} a\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x=2a\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{2a}{\lambda}$

故
$$a=\frac{\lambda}{2}$$

即密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x} & x\le 0\end{cases}$$

当 x≤0 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}$

当 x>0 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x+\int_0^x\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$$=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

故其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}, & x\le 0\end{cases}$$

(2) 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 bx\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$

得 b=1

即 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 x⩽0 时 F（x）=0

当 0<x<1 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^x x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$$

当 1⩽x<2 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^x\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$$

当 x⩾2 时 F（x）=1

故其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x<1\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

27.求标准正态分布的上 α 分位点，

（1）α =0.01，求 z_α；

（2）α =0.003，求 z_α， $z_{\alpha/2}$.

【解】（1） $P(X>z_\alpha)=0.01$

即 $1-\varPhi(z_\alpha)=0.01$

即 $\varPhi(z_\alpha)=0.09$

故 $z_\alpha = 2.33$

（2） 由 $P(X > z_\alpha) = 0.003$ 得

$$1 - \Phi(z_\alpha) = 0.003$$

即 $\Phi(z_\alpha) = 0.997$

查表得 $z_\alpha = 2.75$

由 $P(X > z_{\alpha/2}) = 0.0015$ 得

$$1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = 0.0015$$

即 $\Phi(z_{\alpha/2}) = 0.9985$

查表得 $z_{\alpha/2} = 2.96$

28.设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求 $Y=X^2$ 的分布律.

【解】 Y 可取的值为 0，1，4，9

$$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$$

$$P(Y=4) = P(X=-2) = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=9) = P(X=3) = \frac{11}{30}$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4	9
P_k	1/5	7/30	1/5	11/30

29.设 $P\{X=k\}=(\frac{1}{2})^k$, $k=1,2,\cdots$,令

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{当}X\text{取偶数时} \\ -1, & \text{当}X\text{取奇数时}. \end{cases}$$

求随机变量 X 的函数 Y 的分布律.

【解】 $P(Y=1) = P(X=2) + P(X=4) + \cdots + P(X=2k) + \cdots$

$$=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^{2k}+\cdots$$
$$=(\frac{1}{4})/(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\frac{2}{3}$$

30.设 X~N（0，1）.

（1） 求 $Y=e^X$ 的概率密度；

（2） 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度；

（3） 求 $Y=|X|$ 的概率密度.

【解】(1) 当 y≤0 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 y>0 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^x\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\int_{-\infty}^{\ln y}f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y}f_x(\ln y)=\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\ln^2 y/2},y>0$$

(2) $P(Y=2X^2+1\ge 1)=1$

当 y≤1 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 y>1 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X^2+1\le y)$

$$=P\left(X^2\le\frac{y-1}{2}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{(y-1)/2}}^{\sqrt{(y-1)/2}}f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-1)/4},y>1$$

(3) $P(Y\ge 0)=1$

当 y≤0 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 y>0 时 $F_Y(y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

$$=\int_{-y}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y)$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}, y>0$$

31.设随机变量 $X\sim U$（0,1），试求：

（1） $Y=\mathrm{e}^X$ 的分布函数及密度函数；

（2） $Z=-2\ln X$ 的分布函数及密度函数.

【解】（1） $P(0<X<1)=1$

故 $P(1<Y=\mathrm{e}^X<\mathrm{e})=1$

当 $y\le 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $1<y<\mathrm{e}$ 时 $F_Y(y)=P(\mathrm{e}^X\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\int_0^{\ln y}\mathrm{d}x=\ln y$$

当 $y\geqslant \mathrm{e}$ 时 $F_Y(y)=P(\mathrm{e}^X\le y)=1$

即分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \ln y, & 1<y<\mathrm{e}\\ 1, & y\ge \mathrm{e}\end{cases}$$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2） 由 P（0<X<1）=1 知

$$P(Z>0)=1$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\le z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(-2\ln X\le z)$

$$=P(\ln X\le -\frac{z}{2})=P(X\ge \mathrm{e}^{-z/2})$$

$$=\int_{\mathrm{e}^{-z/2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z/2}$$

即分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1\text{-}e^{-z/2}, & z>0\end{cases}$$

故 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-z/2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

32.设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

【解】$P(0<Y<1)=1$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$

$$\begin{aligned}&=P(0<X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X<\pi)\\&=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2+1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)^2\\&=\frac{2}{\pi}\arcsin y\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

33.设随机变量 X 的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<\underline{\quad(1)\quad},\\ \underline{\quad(2)\quad}, & x\ge\underline{\quad(3)\quad}.\end{cases}$$

试填上(1),(2),(3)项.

【解】由 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ 知②填 1。

由右连续性 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)=1$ 知 $x_0=0$，故①为 0。

从而③亦为 0。即

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

34.同时掷两枚骰子，直到一枚骰子出现 6 点为止，求抛掷次数 X 的分布律.

【解】设 A_i={第 i 枚骰子出现 6 点}。（i=1,2）,$P(A_i)=\dfrac{1}{6}$.且 A_1 与 A_2 相互独立。再设 C={每次抛掷出现 6 点}。则

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

故抛掷次数 X 服从参数为 $\dfrac{11}{36}$ 的几何分布。

35.随机数字序列要多长才能使数字 0 至少出现一次的概率不小于 0.9?

【解】令 X 为 0 出现的次数，设数字序列中要包含 n 个数字，则

$X\sim b(n,0.1)$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\mathrm{C}_n^0(0.1)^0(0.9)^n\geq 0.9$$

即 $$(0.9)^n\leq 0.1$$

得 $$n\geqslant 22$$

即随机数字序列至少要有 22 个数字。

36.已知

$$F（x）=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+\dfrac{1}{2}, & 0\leq x<\dfrac{1}{2},\\ 1, & x\geq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

则 F（x）是（　　）随机变量的分布函数.

（A）　连续型；　　　　（B）离散型；

（C）　非连续亦非离散型.

【解】因为 F（x）在（$-\infty,+\infty$）上单调不减右连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,所以 F（x）是一个分布函数。

但是 F（x）在 x=0 处不连续，也不是阶梯状曲线，故 F（x）是非连续亦非离散型随机变量的分布函数。选（C）

37.设在区间[a,b]上，随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\sin x$，而在[a,b]外，$f(x)=0$，则区间 [a,b]

等于（　　）

(A)　$[0, \pi/2]$;　　　　(B)　$[0, \pi]$;

(C)　$[-\pi/2, 0]$;　　　　(D)　$[0, \frac{3}{2}\boldsymbol{\pi}]$.

【解】 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上 $\sin x \geqslant 0$，且$\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = 1$.故 $f(x)$是密度函数。

在$[0,\pi]$上$\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = 2 \neq 1$.故 $f(x)$不是密度函数。

在$[-\frac{\pi}{2},0]$上$\sin x \leq 0$，故 $f(x)$不是密度函数。

在$[0,\frac{3}{2}\pi]$上，当$\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi$时，$\sin x<0$，$f(x)$也不是密度函数。

故选（A）。

38.设随机变量 $X \sim N$（0，σ^2），问：当σ取何值时，X 落入区间（1，3）的概率最大？

【解】 因为$X \sim N(0,\sigma^2), P(1 < X < 3) = P(\frac{1}{\sigma} < \frac{X}{\sigma} < \frac{3}{\sigma})$

$$= \Phi(\frac{3}{\sigma}) - \Phi(\frac{1}{\sigma}) \overset{令}{=\!=} g(\sigma)$$

利用微积分中求极值的方法，有

$$g'(\sigma) = (-\frac{3}{\sigma^2})\Phi'(\frac{3}{\sigma}) + \frac{1}{\sigma^2}\Phi'(\frac{1}{\sigma})$$

$$= -\frac{3}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-9/2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-1/2\sigma^2}[1 - 3\mathrm{e}^{-8/2\sigma^2}] \overset{令}{=} 0$$

得$\sigma_0^2 = \frac{4}{\ln 3}$,则　　　　$\sigma_0 = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$

又　　　　$g''(\sigma_0) < 0$

故$\sigma_0 < \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$为极大值点且惟一。

故当$\sigma = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$时 X 落入区间（1，3）的概率最大。

39.设在一段时间内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 P（λ），每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数 Y 的分布律.

【解】 $P(X = m) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, m = 0,1,2,\cdots$

设购买某种物品的人数为 Y，在进入商店的人数 $X=m$ 的条件下，$Y \sim b(m,p)$，即

$$P(Y=k \mid X=m)=\mathrm{C}_m^k p^k(1-p)^{m-k}, k=0,1,\cdots,m$$

由全概率公式有

$$P(Y=k)=\sum_{m=k}^{\infty} P(X=m) P(Y=k \mid X=m)$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{m=k}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \cdot \mathrm{C}_m^k p^k(1-p)^{m-k} \\
&=\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{k!(m-k)!} p^k(1-p)^{m-k} \\
&=\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!} \\
&=\frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&=\frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p}, k=0,1,2, \cdots
\end{aligned}$$

此题说明：进入商店的人数服从参数为 λ 的泊松分布，购买这种物品的人数仍服从泊松分布，但参数改变为 λp.

40.设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布.证明：$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 在区间（0，1）上服从均匀分布.

【证】 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0\end{cases}$$

由于 P（X>0）=1，故 $0<1-\mathrm{e}^{-2X}<1$，即 P（$0<Y<1$）=1

当 $y \leqslant 0$ 时，F_Y（y）=0

当 $y \geqslant 1$ 时，F_Y（y）=1

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P(Y \leq y)=P(\mathrm{e}^{-2x} \geq 1-y)$

$$\begin{aligned}
&=P\left(X \leq-\frac{1}{2} \ln (1-y)\right) \\
&=\int_0^{-\frac{1}{2} \ln (1-y)} 2 \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d} x=y
\end{aligned}$$

即 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

即 $Y \sim U$（0，1）

41.设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{2}{9}, & 3\le x\le 6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=2/3$，求 k 的取值范围. (2000 研考)

【解】 由 $P（X\geqslant k）=\dfrac{2}{3}$ 知 $P（X<k）=\dfrac{1}{3}$

若 $k<0, P(X<k)=0$

若 $0\leqslant k\leqslant 1, P(X<k)=\int_0^k \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{k}{3}\le\dfrac{1}{3}$

当 $k=1$ 时 $P（X<k）=\dfrac{1}{3}$

若 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时 $P（X<k）=\int_0^1 \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^k 0\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$

若 $3<k\leqslant 6$，则 $P（X<k）=\int_0^1 \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_3^k \dfrac{2}{9}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{9}k-\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{1}{3}$

若 $k>6$,则 $P（X<k）=1$

故只有当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时满足 $P（X\geqslant k）=\dfrac{2}{3}$.

42.设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

求 X 的概率分布. （1991 研考）

【解】 由离散型随机变量 X 分布律与分布函数之间的关系，可知 X 的概率分布为

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

43.设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率为 19/27，求 A 在一次试验中出现的概率.

【解】 令 X 为三次独立试验中 A 出现的次数，若设 $P（A）=p$,则

$$X\sim b(3,p)$$

由 $P（X\geqslant 1）=\dfrac{19}{27}$ 知 $P（X=0）=（1-p）^3=\dfrac{8}{27}$

故 $p=\dfrac{1}{3}$

44.若随机变量 X 在（1，6）上服从均匀分布，则方程 $y^2+Xy+1=0$ 有实根的概率是多少？

【解】

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1<x<6 \\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$P(X^2-4\geq 0)=P(X\geq 2)+P(X\leq -2)=P(X\geq 2)=\frac{4}{5}$$

45.若随机变量 X~N（2，σ²），且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}$=______________.

【解】$0.3=P(2<X<4)=P(\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma})$

$$=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)=\Phi(\frac{2}{\sigma})-0.5$$

故 $$\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$$

因此 $$P(X<0)=P(\frac{X-2}{\sigma}<\frac{0-2}{\sigma})=\Phi(-\frac{2}{\sigma})$$

$$=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.2$$

46.假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.7 可以直接出厂；以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立）.求

（1） 全部能出厂的概率 α；

（2） 其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

（3）其中至少有两台不能出厂的概率 θ.

【解】设 A={需进一步调试}，B={仪器能出厂}，则

$\overline{A}$={能直接出厂}，AB={经调试后能出厂}

由题意知 $B=\overline{A}\cup AB$，且

$$P(A)=0.3, P(B\,|\,A)=0.8$$
$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=0.3\times 0.8=0.24$$
$$P(B)=P(\overline{A})+P(AB)=0.7+0.24=0.94$$

令 X 为新生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X~6（n，0.94），
故

$$\alpha=P(X=n)=(0.94)^n$$
$$\beta=P(X=n-2)=\mathrm{C}_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2$$
$$\theta=P(X\leq n-2)=1-P(X=n-1)-P(X=n)$$

$$=1-n(0.94)^{n-1}0.06-(0.94)^n$$

47.某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

【解】设 X 为考生的外语成绩，则 X~N（72，σ²）

$$0.023 = P(X \geq 96) = P\left(\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{96-72}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\frac{24}{\sigma})$$

故 $$\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$$

查表知 $\frac{24}{\sigma} = 2$,即 σ =12

从而 X~N（72，12^2）

故 $$P(60 \leq X \leq 84) = P\left(\frac{60-72}{12} \leq \frac{X-72}{12} \leq \frac{84-72}{12}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$
$$= 0.682$$

48.在电源电压不超过 200V、200V~240V 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2（假设电源电压 X 服从正态分布 N（220，25^2））.试求：

（1） 该电子元件损坏的概率 α;

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200~240V 的概率 β

【解】设 A_1={电压不超过 200V}，A_2={电压在 200~240V}，

A_3={电压超过 240V}，B={元件损坏}。

由 X~N（220，25^2）知

$$P(A_1) = P(X \leq 200)$$

$$= P\left(\frac{X-220}{25} \leq \frac{200-220}{25}\right)$$
$$= \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 0.212$$

$$P(A_2) = P(200 \leq X \leq 240)$$

$$= P\left(\frac{200-220}{25} \leq \frac{X-220}{25} \leq \frac{240-220}{25}\right)$$
$$= \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 0.576$$

$$P(A_3) = P(X > 240) = 1 - 0.212 - 0.576 = 0.212$$

由全概率公式有

$$\alpha = P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = 0.0642$$

由贝叶斯公式有

$$\beta = P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} \approx 0.009$$

49.设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量 Y=e^{2X} 的概率密度 $f_Y(y)$.

【解】 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

因为 P（$1<X<2$）=1,故 P（$e^2<Y<e^4$）=1

当 $y\leqslant e^2$ 时 F_Y（y）=$P(Y\leqslant y)$=0.

当 $e^2<y<e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{2X}\le y)$

$$=P(1<X\le \frac{1}{2}\ln y)$$

$$=\int_1^{\frac{1}{2}\ln y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln y-1$$

当 $y\geqslant e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

即
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le e^2\\ \frac{1}{2}\ln y-1, & e^2<y<e^4\\ 1, & y\ge e^4\end{cases}$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

50.设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathbf{e}^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=e^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$. (1995 研考)

【解】P（$Y\geqslant 1$）=1

当 y≤1 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\int_0^{\ln y}e^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{y}$$

即
$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{1}{y}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

51.设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求 $Y=1-\sqrt[3]{x}$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

【解】$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(X\ge(1-y)^3)$

$$=\int_{(1-y)^3}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x\Big|_{(1-y)^3}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(1-y)^3\right]$$

故
$$f_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$$

52.假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 N（t）服从参数为 λt 的泊松分布.

（1） 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

（2） 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q.（1993 研考）

【解】（1） 当 $t<0$ 时，$F_T(t)=P(T\le t)=0$

当 $t\geqslant 0$ 时，事件$\{T>t\}$与$\{N(t)=0\}$等价，有

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

即
$$F_T(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

即间隔时间 T 服从参数为 λ 的指数分布。

（2） $$Q=P(T>16\,|\,T>8)=P(T>16)/P(T>8)=\frac{\mathrm{e}^{-16\lambda}}{\mathrm{e}^{-8\lambda}}=\mathrm{e}^{-8\lambda}$$

53.设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=1/8$，$P\{X=1\}=1/4$.在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$\{-1，1\}$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求 X 的分布函数 F（x）$=P\{X\leqslant x\}$.　　　　(1997 研考)

【解】显然当 $x<-1$ 时 F（x）=0；而 $x\geqslant 1$ 时 F（x）=1

由题知 $P(-1<X<1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

当$-1<x<1$ 时，$P(X\le x\,|-1<X<1)=\frac{x+1}{2}$

此时 $F(x)=P(X\le x)$

$$= P(X \le ,-1 < X < 1) + P(X \le x, X = -1) + P(X \le x, X = 1)$$
$$= P(X \le x, -1 < X < 1) + P(X \le x, x = -1)$$
$$= P(X \le x \mid -1 < X < 1)P(-1 < X < 1) + P(X = -1)$$
$$= \frac{x+1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}(x+1) + \frac{1}{8}$$

当 $x=-1$ 时，$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) = \frac{1}{8}$

故 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{5}{16}(x+1) + \frac{1}{8}, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

54. 设随机变量 X 服从正态分 N（μ_1,σ_1^2),Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，试比较 σ_1 与 σ_2 的大小. (2006 研考)

解： 依题意 $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$，$\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$，则

$$P\{|X-\mu_1| < 1\} = P\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\},$$

$$P\{|Y-\mu_2| < 1\} = P\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right| < \frac{1}{\sigma_2}\}.$$

因为 $P\{|X-\mu_1| < 1\} > P\{|Y-\mu_2| < 1\}$，即

$$P\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\} > P\{\left|\frac{Y-\mu_1}{\sigma_2}\right| < \frac{1}{\sigma_2}\},$$

所以有 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1 < \sigma_2$.

习题三

1.将一硬币抛掷三次，以 X 表示在三次中出现正面的次数，以 Y 表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值.试写出 X 和 Y 的联合分布律.

【解】X 和 Y 的联合分布律如表：

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$C_3^1 \cdot \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$C_3^2 \cdot \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3/8$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

2.盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数.求 X 和 Y 的联合分布律.

【解】X 和 Y 的联合分布律如表：

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	$\frac{C_3^3 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$	$\frac{C_3^3 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
2	P(0 黑,2 红,2 白)= $C_2^2 \cdot C_2^2/C_7^4=\frac{1}{35}$	$\frac{C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	0

3.设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

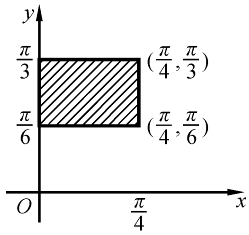
求二维随机变量（X，Y）在长方形域 $\left\{0<x\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}<y\le\frac{\pi}{3}\right\}$ 内的概率.

【解】如图 $P\{0<X\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}<Y\le\frac{\pi}{3}\}\xlongequal{\text{公式(3.2)}}$

$$F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})-F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})-F(0,\frac{\pi}{3})+F(0,\frac{\pi}{6})$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$



题 3 图

说明：也可先求出密度函数，再求概率。

4.设随机变量（X，Y）的分布密度

$$f(x,y)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1） 常数 A；

（2） 随机变量（X，Y）的分布函数；

（3） $P\{0\le X<1，0\le Y<2\}$.

【解】（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{12}=1$

得 $A=12$

（2） 由定义，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^y 12\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}) & y>0,x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $P\{0\le X<1,0\le Y<2\}$

$$=P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}$$

$$=\int_0^1\int_0^2 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8})\approx 0.9499.$$

5.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1） 确定常数 k；

（2） 求 $P\{X<1，Y<3\}$；

（3） 求 $P\{X<1.5\}$；

（4） 求 $P\{X+Y\le 4\}$.

【解】（1） 由性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 8k = 1,$$

故 $R = \dfrac{1}{8}$

（2） $P\{X<1, Y<3\} = \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

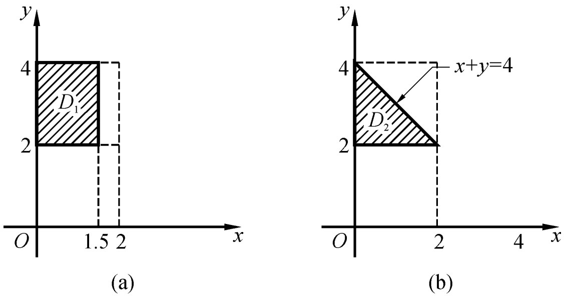
$$= \int_0^1\int_2^3 \frac{1}{8}k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$

(3) $P\{X<1.5\} = \iint\limits_{x<1.5} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{如图a}}{=\!=\!=} \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{1.5}\mathrm{d}x\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y = \frac{27}{32}.$$

(4) $P\{X+Y\le 4\} = \iint\limits_{X+Y\le 4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{如图b}}{=\!=\!=} \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^2\mathrm{d}x\int_2^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$

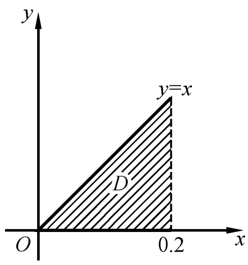


题 5 图

6.设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，0.2）上服从均匀分布，Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5\mathbf{e}^{-5y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：（1） X 与 Y 的联合分布密度；（2） $P\{Y\le X\}$.



题 6 图

【解】（1） 因 X 在（0，0.2）上服从均匀分布，所以 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0.2}, & 0<x<0.2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而

$$f_Y(y)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

所以

$$f(x,y)\underline{\underline{X,Y独立}}f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{0.2}\times 5\mathrm{e}^{-5y}\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}25\mathrm{e}^{-5y}, & 0<x<0.2且y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\underline{\underline{如图}}\iint\limits_{D}25\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{0.2}\mathrm{d}x\int_0^x 25\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y=\int_0^{0.2}(-5\mathrm{e}^{-5x}+5)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.3679.$$

7.设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F（x，y）=\begin{cases}(1-\mathbf{e}^{-4x})(1-\mathbf{e}^{-2y}), & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求（X，Y）的联合分布密度.

【解】 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}8\mathrm{e}^{-(4x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

8.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1,0\le y\le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

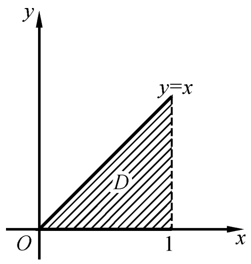
求边缘概率密度.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

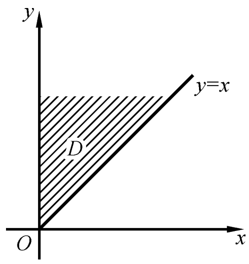
$$=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)\mathrm{d}y\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)\mathrm{d}x\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



题 8 图



题 9 图

9.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}\mathbf{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

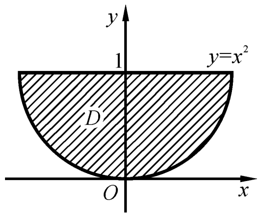
求边缘概率密度.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-x}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 10 图

10.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1） 试确定常数 c；

（2） 求边缘概率密度.

【解】（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\underset{\text{如图}}{=\!=\!=}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}cx^2y\mathrm{d}y=\frac{4}{21}c=1.$$

得 $c=\dfrac{21}{4}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

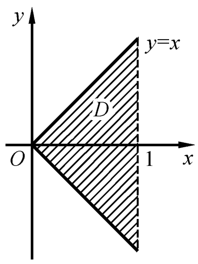
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

11.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \textbf{其他}.\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$．



题 11 图

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1\mathrm{d}x=1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1}1\mathrm{d}x=1-y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ \frac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

12.袋中有五个号码 1，2，3，4，5，从中任取三个，记这三个号码中最小的号码为 X，最大的号码为 Y.

（1） 求 X 与 Y 的联合概率分布；

（2） X 与 Y 是否相互独立？

【解】（1） X 与 Y 的联合分布律如下表

X \ Y	3	4	5	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$	$\frac{2}{C_5^3}=\frac{2}{10}$	$\frac{3}{C_5^3}=\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
2	0	$\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$	$\frac{2}{C_5^3}=\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	

(2) 因 $P\{X=1\}\cdot P\{Y=3\}=\frac{6}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{6}{100}\neq\frac{1}{10}=P\{X=1,Y=3\}$,

故 X 与 Y 不独立

13.设二维随机变量（X，Y）的联合分布律为

Y \ X	2	5	8
0.4	0.15	0.30	0.35
0.8	0.05	0.12	0.03

（1）求关于 X 和关于 Y 的边缘分布；

（2） X 与 Y 是否相互独立？

【解】（1）X 和 Y 的边缘分布如下表

Y \ X	2	5	8	$P\{Y=y_i\}$
0.4	0.15	0.30	0.35	0.8
0.8	0.05	0.12	0.03	0.2
$P\{X=x_i\}$	0.2	0.42	0.38	

(2) 因 $P\{X=2\}\cdot P\{Y=0.4\}=0.2\times 0.8=0.16\neq 0.15=P(X=2,Y=0.4)$,

故 X 与 Y 不独立.

14.设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布，Y 的概率密度为

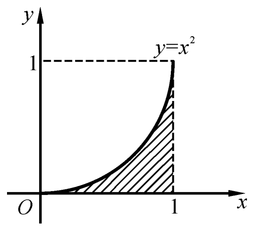
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的联合概率密度；

（2） 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率.

【解】（1） 因 $f_X(x)==\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)==\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\text{故 } f(x,y)\underline{\underline{X,Y\text{独立}}}f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2} & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 14 图

(2) 方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的条件是

$$\Delta=(2X)^2-4Y\geq 0$$

故 $X^2\geq Y$,

从而方程有实根的概率为：

$$P\{X^2\geq Y\}=\iint\limits_{x^2\geq y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}\mathrm{d}y$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]$$

$$=0.1445.$$

15.设 X 和 Y 分别表示两个不同电子器件的寿命（以小时计），并设 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

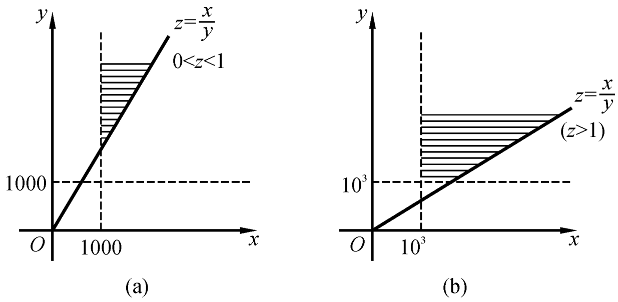
【解】如图,Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\dfrac{X}{Y}\le z\}$

(1) 当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$

（2） 当 $0<z<1$ 时，（这时当 $x=1000$ 时,$y=\dfrac{1000}{z}$）(如图 a)

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\ge\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{yz}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=\frac{z}{2}$$



题 15 图

(3) 当 $z\ge 1$ 时，（这时当 $y=10^3$ 时，$x=10^3z$）（如图 b）

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\ge\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{10^3}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{zy}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{10^3}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2z}$$

即
$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2z}, & z\ge 1,\\ \dfrac{z}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故
$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2z^2}, & z\ge 1,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

16.设某种型号的电子管的寿命(以小时计)近似地服从 $N(160,20^2)$分布.随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

【解】设这四只寿命为 $X_i(i=1,2,3,4)$，则 $X_i \sim N$（160，20^2），

从而

$$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)\ge 180\}\underline{\underline{X_i之间独立}}P\{X_1\ge 180\}\cdot P\{X_2\ge 180\}$$

$$P\{X_3\ge 180\}\cdot P\{X_4\ge 180\}$$

$$=[1-P\{X_1<180\}]\cdot[1-P\{X_2<180\}]\cdot[1-P\{X_3<180\}]\cdot[1-P\{X_4<180\}]$$

$$=[1-P\{X_1<180\}]^4=\left[1-\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)\right]^4$$

$$=[1-\Phi(1)]^4=(0.158)^4=0.00063.$$

17.设 X，Y 是相互独立的随机变量，其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k)，k=0，1，2，\dots，$$

$$P\{Y=r\}=q(r)，r=0，1，2，\dots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k)，i=0，1，2，\dots.$$

【证明】因 X 和 Y 所有可能值都是非负整数，

所以

$$\{Z=i\}=\{X+Y=i\}$$

$$=\{X=0,Y=i\}\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}$$

于是

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}\underline{\underline{X,Y相互独立}}\sum_{k=0}^{i}P\{X=k\}\cdot P\{Y=i-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k)$$

18.设 X，Y 是相互独立的随机变量，它们都服从参数为 n，p 的二项分布.证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $2n$，p 的二项分布.

【证明】方法一：$X+Y$ 可能取值为 0，1，2，…，$2n$.

$$P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)\cdot P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}\binom{n}{k-i}p^{k-i}q^{n-k+i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}p^{k}q^{2n-k}$$

$$=\binom{2n}{k}p^{k}q^{2n-k}$$

方法二：设 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n;\mu_1',\mu_2',\ldots$，$\mu_n'$均服从两点分布（参数为 p），则

$X=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$，$Y=\mu_1'+\mu_2'+\ldots+\mu_n'$,

$X+Y=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+\mu_1'+\mu_2'+\ldots+\mu_n'$,

所以，$X+Y$ 服从参数为（$2n,p$)的二项分布.

19.设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2 \mid Y=2\}$，$P\{Y=3 \mid X=0\}$；

（2） 求 $V=\max$（X，Y）的分布律；

（3） 求 $U=\min$（X，Y）的分布律；

（4） 求 $W=X+Y$ 的分布律.

【解】（1）$P\{X=2\,|\,Y=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}$

$$=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{\sum_{i=0}^{5}P\{X=i,Y=2\}}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=3\,|\,X=0\}=\frac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{\sum_{j=0}^{3}P\{X=0,Y=j\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3};$$

（2）$P\{V=i\}=P\{\max(X,Y)=i\}=P\{X=i,Y<i\}+P\{X\le i,Y=i\}$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i\},\qquad i=0,1,2,3,4,5$$

所以 V 的分布律为

V=max(X,Y)	0	1	2	3	4	5
P	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) $P\{U=i\}=P\{\min(X,Y)=i\}$

$$=P\{X=i,Y\geq i\}+P\{X>i,Y=i\}$$
$$=\sum_{k=i}^{3}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=i+1}^{5}P\{X=k,Y=i\} \qquad i=0,1,2,3,$$

于是

U=min(X,Y)	0	1	2	3
P	0.28	0.30	0.25	0.17

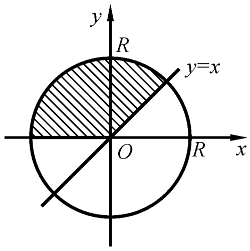
(4)类似上述过程，有

W=X+Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

20.雷达的圆形屏幕半径为 R，设目标出现点（X，Y）在屏幕上服从均匀分布.

（1） 求 $P\{Y>0\mid Y>X\}$；

（2） 设 M=max{X，Y}，求 $P\{M>0\}$.



题 20 图

【解】因（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\leq R^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）$P\{Y>0\mid Y>X\}=\dfrac{P\{Y>0,Y>X\}}{P\{Y>X\}}$

$$=\frac{\iint\limits_{\substack{y>0\\y>x}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{y>x}f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

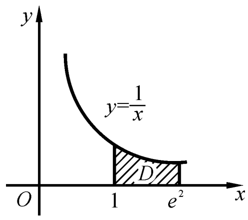
$$=\frac{\int_{\pi/4}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}{\int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4};$$

(2) $P\{M>0\}=P\{\max(X,Y)>0\}=1-P\{\max(X,Y)\le 0\}$

$$=1-P\{X\le 0,Y\le 0\}=1-\iint\limits_{\substack{x\le 0\\ y\le 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

21.设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0$，$x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成，二维随机变量（X，Y）在区域 D 上服从均匀分布，求（X，Y）关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为多少？



题 21 图

【解】区域 D 的面积为 $S_0=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}=2$.（$X,Y$）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le \mathrm{e}^2, 0<y\le \frac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（X，Y）关于 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{1/x}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}, & 1\le x\le \mathrm{e}^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

22.设随机变量 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量（X，Y）联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值.试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P\{Y=y_j\}=p_j$	1/6			1

【解】因 $P\{Y=y_j\}=P_j=\sum_{i=1}^{2}P\{X=x_i,Y=y_j\}$,

故 $P\{Y=y_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_2,Y=y_1\}$,

从而 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.

而 X 与 Y 独立，故 $P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=P\{X=x_i,Y=y_i\}$，

从而 $P\{X=x_1\}\times\dfrac{1}{6}=P\{X=x_1,Y=y_1\}=\dfrac{1}{24}$.

即：$P\{X=x_1\}=\dfrac{1}{24}/\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}$.

又 $P\{X=x_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_1,Y=y_2\}+P\{X=x_1,Y=y_3\}$,

即 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{8}+P\{X=x_{1,}Y=y_3\}$,

从而 $P\{X=x_1,Y=y_3\}=\dfrac{1}{12}$.

同理 $P\{Y=y_2\}=\dfrac{1}{2}$, $\qquad P\{X=x_2,Y=y_2\}=\dfrac{3}{8}$

又 $\sum\limits_{j=1}^{3}P\{Y=y_j\}=1$,故 $P\{Y=y_3\}=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

同理 $P\{X=x_2\}=\dfrac{3}{4}$.

从而

$$P\{X=x_2,Y=y_3\}=P\{Y=y_3\}-P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

故

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

23.设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p（$0<p<1$），且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；（2）二维随机变量（X，Y）的概率分布.

【解】(1) $P\{Y=m\mid X=n\}=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$.

(2) $P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}\cdot P\{Y=m\mid X=n\}$

$$=\mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{n-m} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\lambda^n, n \le m \le n, n=0,1,2,\cdots.$$

24.设随机变量 X 和 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，

求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

【解】设 F（y）是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$G(u)=P\{X+Y\le u\}=0.3P\{X+Y\le u \mid X=1\}+0.7P\{X+Y\le u \mid X=2\}$$

$$=0.3P\{Y\le u-1 \mid X=1\}+0.7P\{Y\le u-2 \mid X=2\}$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$G(u)=0.3P\{Y\le u-1\}+0.7P\{Y\le u-2\}$$

$$=0.3F(u-1)+0.7F(u-2).$$

由此，得 U 的概率密度为

$$g(u)=G'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)$$

$$=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$$

25. 25. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，求 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}$.

解：因为随即变量服从[0，3]上的均匀分布，于是有

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3, \\ 0, & x<0, x>3; \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0\le y\le 3, \\ 0, & y<0, y>3. \end{cases}$$

因为 X，Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{9}, & 0\le x\le 3, 0\le y\le 3, \\ 0, & x<0, y<0, x>3, y>3. \end{cases}$$

推得 $$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=\frac{1}{9}.$$

26. 设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

Y \ X	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 X 的数学期望 $E(X)=-0.2, P\{Y\le 0 \mid X\le 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$.求：

（1） a,b,c 的值；
（2） Z 的概率分布；
（3） $P\{X=Z\}$.

解 (1) 由概率分布的性质知，

$$a+b+c+0.6=1 \quad \text{即} \quad a+b+c=0.4.$$

由 $E(X)=-0.2$，可得

$$-a+c=-0.1.$$

再由
$$P\{Y\le 0 \mid X\le 0\}=\frac{P\{X\le 0,Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5,$$

得
$$a+b=0.3.$$

解以上关于 a，b，c 的三个方程得

$$a=0.2, b=0.1, c=0.1.$$

(2) Z 的可能取值为–2，–1，0，1，2，

$$P\{Z=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=0.2,$$

$$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=-1\}=0.1,$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.3,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.3,$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1,$$

即 Z 的概率分布为

Z	–2	–1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3)
$$P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0.1+b+0.2=0.1+0.1+0.2=0.4.$$

习题四

1.设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	1/8	1/2	1/8	1/4

求 E（X），E（X^2），E（$2X+3$）.

【解】(1) $E(X)=(-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

(2) $E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{8}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$;

(3) $E(2X+3)=2E(X)+3=2\times\frac{1}{2}+3=4$

2.已知 100 个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中的次品数的数学期望、方差.

【解】设任取出的 5 个产品中的次品数为 X，则 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{C_{90}^5}{C_{100}^5}=0.583$	$\frac{C_{10}^1C_{90}^4}{C_{100}^5}=0.340$	$\frac{C_{10}^2C_{90}^3}{C_{100}^5}=0.070$	$\frac{C_{10}^3C_{90}^2}{C_{100}^5}=0.007$	$\frac{C_{10}^4C_{90}^1}{C_{100}^5}=0$	$\frac{C_{10}^5}{C_{100}^5}=0$

故 $E(X)=0.583\times0+0.340\times1+0.070\times2+0.007\times3+0\times4+0\times5$

$=0.501,$

$$D(X)=\sum_{i=0}^{5}[x_i-E(X)]^2P_i$$

$=(0-0.501)^2\times0.583+(1-0.501)^2\times0.340+\cdots+(5-0.501)^2\times0$

$=0.432.$

3.设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

且已知 E（X）=0.1,$E(X^2)$=0.9,求 P_1，P_2，P_3.

【解】因 $P_1+P_2+P_3=1$ ……①,

又 $E(X)=(-1)P_1+0\cdot P_2+1\cdot P_3=P_3-P_1=0.1$ ……②,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot P_1+0^2\cdot P_2+1^2\cdot P_3=P_1+P_3=0.9$ ……③

由①②③联立解得 $P_1=0.4,P_2=0.1,P_3=0.5.$

4.袋中有 N 只球，其中的白球数 X 为一随机变量，已知 E（X）=n，问从袋中任取 1 球为白球的概率是多少？

【解】记 A={从袋中任取 1 球为白球}，则

$$P(A)\stackrel{\text{全概率公式}}{=}\sum_{k=0}^{N}P\{A|X=k\}\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}P\{X=k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}kP\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{N}\cdot E(X)=\frac{n}{N}.$$

5.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x\le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 E（X），D（X）.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=1.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

故 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}.$$

6.设随机变量 X，Y，Z 相互独立，且 E（X）=5，E（Y）=11，E（Z）=8，求下列随机变量的数学期望.

（1） U=2X+3Y+1；

（2） V=YZ −4X.

【解】(1) $E[U]=E(2X+3Y+1)=2E(X)+3E(Y)+1$

$$=2\times 5+3\times 11+1=44.$$

(2) $E[V]=E[YZ-4X]=E[YZ]-4E(X)$

$$\xlongequal{\text{因}Y,Z\text{独立}}E(Y)\cdot E(Z)-4E(X)$$

$$=11\times 8-4\times 5=68.$$

7.设随机变量 X，Y 相互独立，且 E（X）=E（Y）=3，D（X）=12，D（Y）=16，求 E（3X −2Y），D（2X −3Y）.

【解】(1) $E(3X-2Y)=3E(X)-2E(Y)=3\times 3-2\times 3=3.$

(2) $D(2X-3Y)=2^2D(X)+(-3)^2DY=4\times 12+9\times 16=192.$

8.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试确定常数 k，并求 $E(XY)$.

【解】因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x k\mathrm{d}y=\frac{1}{2}k=1,$ 故 k=2

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x 2y\mathrm{d}y=0.25.$$

9.设 X，Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(XY)$.

【解】方法一：先求 X 与 Y 的均值

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$E(Y)=\int_5^{+\infty}y\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y\overset{\text{令}z=y-5}{=\!=\!=}5\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z+\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z=5+1=6.$$

由 X 与 Y 的独立性，得

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

方法二：利用随机变量函数的均值公式.因 X 与 Y 独立，故联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-(y-5)}, & 0\le x\le 1, y>5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是

$$E(XY)=\int_5^{+\infty}\int_0^1 xy\cdot 2x\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\cdot\int_5^{+\infty}y\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

10.设随机变量 X，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2\mathbf{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathbf{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求（1） $E(X+Y)$；（2） $E(2X-3Y^2)$.

【解】$(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=[-x\mathrm{e}^{-2x}]_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}y\cdot 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}y^2\cdot 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{2}{4^2}=\frac{1}{8}.$$

从而(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

$$(2)\ E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

11.设随机变量 X 的概率密度为

$$f（x）=\begin{cases} cx\mathbf{e}^{-k^2x^2}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

求（1） 系数 c;（2） E（X）;（3） D（X）.

【解】(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{c}{2k^2}=1$ 得 $c=2k^2$.

$$(2)\quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}(x)=\int_0^{+\infty} x\cdot 2k^2x\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2k^2\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2k}.$$

$$(3)\quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}(x)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot 2k^2x\mathrm{e}^{-k^2x^2}\ \frac{1}{k^2}.$$

故 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{k^2}-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right)^2=\frac{4-\pi}{4k^2}.$$

12.袋中有 12 个零件，其中 9 个合格品，3 个废品.安装机器时，从袋中一个一个地取出（取出后不放回），设在取出合格品之前已取出的废品数为随机变量 X，求 E（X）和 D（X）.

【解】设随机变量 X 表示在取得合格品以前已取出的废品数，则 X 的可能取值为 0，1，2，3.为求其分布律，下面求取这些可能值的概率，易知

$$P\{X=0\}=\frac{9}{12}=0.750,\qquad P\{X=1\}=\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=0.204,$$

$$P\{X=2\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=0.041,\qquad P\{X=3\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=0.005.$$

于是，得到 X 的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
P	0.750	0.204	0.041	0.005

由此可得 $E(X)=0\times 0.750+1\times 0.204+2\times 0.041+3\times 0.005=0.301.$

$$E(X^2)=0^2\times 750+1^2\times 0.204+2^2\times 0.041+3^2\times 0.005=0.413$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.413-(0.301)^2=0.322.$$

13.一工厂生产某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f（x）=\begin{cases} \frac{1}{4}\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$$

为确保消费者的利益，工厂规定出售的设备若在一年内损坏可以调换.若售出一台设备，工厂获利 100 元，而调换一台则损失 200 元，试求工厂出售一台设备赢利的数学期望.

【解】厂方出售一台设备净盈利 Y 只有两个值：100 元和 -200 元

$$P\{Y=100\}=P\{X\ge 1\}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1/4}$$

$$P\{Y=-200\}=P\{X<1\}=1-\mathrm{e}^{-1/4}.$$

故 $E(Y)=100\times\mathrm{e}^{-1/4}+(-200)\times(1-\mathrm{e}^{-1/4})=300\mathrm{e}^{-1/4}-200=33.64$ (元).

14.设 X_1，X_2，…，X_n 是相互独立的随机变量，且有 E（X_i）$=\mu$，D（X_i）$=\sigma^2$，i=1，2，…，n，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2\text{，}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

（1） 验证 $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$；

（2） 验证 $S^2=\dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-n\overline{X}^2)$；

（3） 验证 E（S^2）$=\sigma^2$.

【证】(1) $E(\overline{X})=E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{1}{n}\cdot nu=u.$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)\xlongequal{X_i\text{之间相互独立}}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}DX_i$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

(2) 因

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+\overline{X}^2-2\overline{X}X_i)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\overline{X}^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\overline{X}^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

故 $S^2=\dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$.

(3) 因 $E(X_i)=u, D(X_i)=\sigma^2$,故 $E(X_i^2)=D(X_i)+(EX_i)^2=\sigma^2+u^2.$

同理因 $E(\overline{X})=u, D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$,故 $E(\overline{X}^2)=\dfrac{\sigma^2}{n}+u^2$.

从而

$$E(s^2)=E\left[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)\right]=\frac{1}{n-1}[E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n\cdot(\sigma^2+u^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+u^2\right)\right]=\sigma^2.$$

15.对随机变量 X 和 Y，已知 D（X）=2，D（Y）=3，Cov(X,Y)= −1,

计算：Cov（3X −2Y+1，X+4Y −3）.

【解】$\mathrm{Cov}(3X-2Y+1,X+4Y-3)=3D(X)+10\mathrm{Cov}(X,Y)-8D(Y)$

$$=3\times2+10\times(-1)-8\times3=-28$$

(因常数与任一随机变量独立，故 Cov(X,3)=Cov(Y,3)=0,其余类似).

16.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

【解】设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0.$$

同理 $E(Y)$=0.

而 $\quad\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]\cdot[y-E(Y)]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0,$$

由此得 $\rho_{XY}=0$,故 X 与 Y 不相关.

下面讨论独立性，当|x|≤1 时，$f_X(x)\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$

当|y|≤1 时，$f_Y(y)\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$.

显然 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$.

故 X 和 Y 不是相互独立的.

17.设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

【解】 联合分布表中含有零元素，X 与 Y 显然不独立，由联合分布律易求得 X，Y 及 XY 的分布律，其分布律如下表

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

XY	-1	0	1
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

由期望定义易得 E（X）=E（Y）=E（XY）=0.

从而 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$,再由相关系数性质知 $\rho_{XY}=0$,

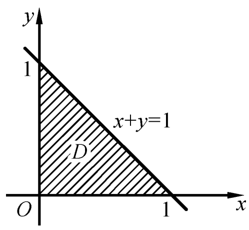
即 X 与 Y 的相关系数为 0，从而 X 和 Y 是不相关的.

又 $P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\neq\frac{1}{8}=P\{X=-1,Y=-1\}$

从而 X 与 Y 不是相互独立的.

18.设二维随机变量（X，Y）在以（0，0），（0，1），（1，0）为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求 Cov（X，Y），ρ_{XY}.

【解】如图，$S_D=\frac{1}{2}$，故（X，Y）的概率密度为



题 18 图

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(X)=\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\cdot 2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=\iint_D x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

从而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$.

同理 $E(Y)=\frac{1}{3},D(Y)=\frac{1}{18}$.

而 $$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{12}.$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$

从而 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\times\sqrt{\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}$$

19.设（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求协方差 Cov（X，Y）和相关系数 ρ_{XY}.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}x\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$

$$E(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2.$$

从而

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

同理 $E(Y)=\frac{\pi}{4}, D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$

又 $E(XY)=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}xy\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-1,$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi-4}{4}\right)^2.$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\left(\frac{\pi-4}{4}\right)^2}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=-\frac{(\pi-4)^2}{\pi^2+8\pi-32}=-\frac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}.$$

20.已知二维随机变量（X，Y）的协方差矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，试求 $Z_1=X-2Y$ 和 $Z_2=2X-Y$ 的相关系数.

【解】 由已知知：$D(X)=1,D(Y)=4,\mathrm{Cov}(X,Y)=1.$

从而

$$D(Z_1)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4\times4-4\times1=13,$$
$$D(Z_2)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=4\times1+4-4\times1=4,$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{Cov}(X-2Y,2X-Y)$$

$$=2\mathrm{Cov}(X,X)-4\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+2\mathrm{Cov}(Y,Y)$$
$$=2D(X)-5\mathrm{Cov}(X,Y)+2D(Y)=2\times1-5\times1+2\times4=5.$$

故 $\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\cdot\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{5}{\sqrt{13}\times\sqrt{4}}=\frac{5}{26}\sqrt{13}.$

21.对于两个随机变量 V，W，若 E（V^2），E（W^2）存在，证明：

$$[E(VW)]^2 \le E(V^2)E(W^2).$$

这一不等式称为柯西许瓦兹（Couchy –Schwarz）不等式.

【证】令 $g(t)=E\{[V+tW]^2\}, t\in R.$

显然

$$0 \le g(t)=E[(V+tW)^2]=E[V^2+2tVW+t^2W^2]$$

$$=E[V^2]+2t\cdot E[VW]+t^2\cdot E[W^2], \forall t\in R.$$

可见此关于 t 的二次式非负，故其判别式 $\Delta \le 0$，

即 $0 \ge \Delta=[2E(VW)]^2-4E(W^2)\cdot E(V^2)$

$$=4\{[E(VW)]^2-E(V^2)\cdot E(W^2)\}.$$

故 $[E(VW)]^2 \le E(V^2)\cdot E(W^2)\}.$

22.假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从参数 $\lambda=1/5$ 的指数分布.设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 F（y）.

【解】设 Y 表示每次开机后无故障的工作时间，由题设知设备首次发生故障的等待时间

$X\sim E(\lambda), E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=5.$

依题意 $Y=\min(X,2)$.

对于 $y<0, f(y)=P\{Y\le y\}=0$.

对于 $y\ge 2, F(y)=P(X\le y)=1$.

对于 $0\le y<2$,当 $x\ge 0$ 时，在 $(0,x)$ 内无故障的概率分布为

$P\{X\le x\}=1-e^{-\lambda x}$,所以

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}=P\{X\le y\}=1-e^{-y/5}.$$

23.已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放乙箱后，求：（1）乙箱中次品件数 Z 的数学期望；（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【解】（1） Z 的可能取值为 0，1，2，3，Z 的概率分布为

$$P\{Z=k\}=\frac{C_3^k\cdot C_3^{3-k}}{C_6^3}, \quad k=0,1,2,3.$$

$Z=k$	0	1	2	3
P_k	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此，$E(Z)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2}.$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取出一件产品是次品”，根据全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{Z=k\}\cdot P\{A|Z=k\}$$

$$=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}.$$

24.假设由自动线加工的某种零件的内径 X（毫米）服从正态分布 N（μ,1），内径小于 10 或大于 12 为不合格品，其余为合格品.销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T（单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系

$$T=\begin{cases}-1, & 若X<10,\\ 20, & 若10\le X\le 12,\\ -5, & 若X>12.\end{cases}$$

问：平均直径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

【解】 $E(T)=-P\{X<10\}+20P\{10\le X\le 12\}-5P\{X>12\}$

$$\begin{aligned}&=-P\{X-u<10-u\}+20P\{10-u\le X-u\le 12-u\}-5P\{X-u>12-u\}\\ &=-\Phi(10-u)+20[\Phi(12-u)-\Phi(10-u)]-5[1-\Phi(12-u)]\\ &=25\Phi(12-u)-21\Phi(10-u)-5.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}u}=25\varphi(12-u)\times(-1)-21\varphi(10-u)\times(-1)\overset{令}{=\!=}0(这里\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}),$$

得
$$25\mathrm{e}^{-(12-u)^2/2}=21\mathrm{e}^{-(10-u)^2/2}$$

两边取对数有

$$\ln 25-\frac{1}{2}(12-u)^2=\ln 21-\frac{1}{2}(10-u)^2.$$

解得
$$u=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}=11-\frac{1}{2}\ln 1.19\approx 10.9128\,(毫米)$$

由此可得，当 u=10.9 毫米时，平均利润最大.

25.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \boldsymbol{\pi},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\pi/3$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.（2002 研考）

【解】令
$$Y_i=\begin{cases}1, & X>\frac{\pi}{3},\\ 0, & X\le\frac{\pi}{3}.\end{cases}\qquad (i=1,2,3,4)$$

则 $Y=\sum_{i=1}^{4}Y_i\sim B(4,p)$.因为

$$p=P\{X>\frac{\pi}{3}\}=1-P\{X\le\frac{\pi}{3}\}及P\{X\le\frac{\pi}{3}\}=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以 $E(Y_i)=\dfrac{1}{2}, D(Y_i)=\dfrac{1}{4}, E(Y)=4\times\dfrac{1}{2}=2,$

$$D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1=E(Y^2)-(EY)^2,$$

从而 $E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=1+2^2=5.$

26.两台同样的自动记录仪，每台无故障工作的时间 $T_i(i=1,2)$服从参数为 5 的指数分布，首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自动开启.试求两台记录仪无故障工作的总时间 $T=T_1+T_2$ 的概率密度 $f_T(t)$，数学期望 E（T）及方差 D（T）.

【解】由题意知：

$$f_i(t)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

因 T_1,T_2 独立，所以 $f_T(t)=f_1(t)*f_2(t)$.

当 $t<0$ 时，$f_T(t)=0$;

当 $t\geq 0$ 时，利用卷积公式得

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\cdot f_2(t-x)\mathrm{d}x=\int_0^t 5\mathrm{e}^{-5x}\cdot 5\mathrm{e}^{-5(t-x)}\mathrm{d}x=25t\mathrm{e}^{-5t}$$

故得

$$f_T(t)=\begin{cases}25t\mathrm{e}^{-5t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

由于 $T_i \sim E(5)$,故知 $E(T_i)=\dfrac{1}{5}$,$D(T_i)=\dfrac{1}{25}$　$(i=1,2)$

因此，有 $E(T)=E(T_1+T_2)=\dfrac{2}{5}$.

又因 T_1,T_2 独立，所以 D（T）$=D$（T_1+T_2）$=\dfrac{2}{25}$.

27.设两个随机变量 X，Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，求随机变量$|X-Y|$的方差.

【解】设 $Z=X-Y$，由于 $X\sim N\left(0,\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right), Y\sim N\left(0,\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right),$

且 X 和 Y 相互独立，故 $Z\sim N$（0，1）.

因

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2$$

$$=E(Z^2)-[E(Z)]^2,$$

而

$$E(Z^2)=D(Z)=1, E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

所以 $$D(|X-Y|)=1-\frac{2}{\pi}.$$

28.某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时，即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 E（X）和 D（X）.

【解】记 $q=1-p$,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=q^{i-1}p, i=1,2,\dots$,

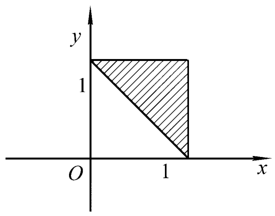
故 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

又 $$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=\sum_{i=2}^{\infty}(i^2-i)q^{i-1}p+\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p$$

$$=pq(\sum_{i=2}^{\infty}q^i)''+\frac{1}{p}=pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''+\frac{1}{p}$$

$$=\frac{2pq}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{1+q}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}.$$

所以 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$



题 29 图

29.设随机变量 X 和 Y 的联合分布在点（0，1），（1，0）及（1，1）为顶点的三角形区域上服从均匀分布.（如图），试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

【解】$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

$=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)\cdot E(Y)]$.

由条件知 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & t<0.\end{cases}\qquad G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\ge 1\}.$$

从而 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x.$$

因此

$$E(X)=\int_0^1 xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2}, E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

同理可得 $\quad E(Y)=\dfrac{3}{2},D(Y)=\dfrac{1}{18}.$

$$E(XY)=\iint\limits_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是 $\qquad D(U)=D(X+Y)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}.$

30.设随机变量 U 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1，\\ 1, & 若U>-1，\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1，\\ 1, & 若U>1.\end{cases}$$

试求（1）X 和 Y 的联合概率分布；（2）D（$X+Y$）.

【解】(1）为求X和Y的联合概率分布，就要计算(X，Y)的4个可能取值$(-1,-1)$,$(-1,1)$,$(1,-1)$及$(1,1)$的概率.

$P\{x=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}$

$$=P\{U\le -1\}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}$$

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=P\{\varnothing\}=0,$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}$

$$=P\{-1<U\le 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}.$$

故得 X 与 Y 的联合概率分布为

$$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

(2) 因$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2$,而 $X+Y$ 及（$X+Y$）^{2} 的概率分布相应为

$$X+Y\sim\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\qquad (X+Y)^2\sim\begin{bmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

从而$E(X+Y)=(-2)\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{4}=0,$

$$E[(X+Y)^2]=0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=2,$$

所以$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2.$

31.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-|x|}$，（$-\infty<x<+\infty$）

(1) 求 E（X）及 D（X）；

（2） 求 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$,并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

（3） 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立，为什么？

【解】(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0.$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-0)^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2.$$

(2) $\mathrm{Cov}(X,|X)=E(X\cdot|X|)-E(X)\cdot E(|X|)=E(X\cdot|X|)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,|\,x\,|\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

所以 X 与 $|X|$ 互不相关.

(3) 为判断 $|X|$ 与 X 的独立性，需依定义构造适当事件后再作出判断，为此，对定义域 $-\infty<x<+\infty$ 中的子区间（0,+∞）上给出任意点 x_0，则有

$$\{-x_0<X<x_0\}=\{|X|<x_0\}\subset\{X<x_0\}.$$

所以 $0<P\{|X|<x_0\}<P\{X<x_0\}<1.$

故由

$$P\{X<x_0,|X|<x_0\}=P\{|X|<x_0\}>P\{|X|<x_0\}\cdot P\{X<x_0\}$$

得出 X 与 $|X|$ 不相互独立.

32.已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N（1，3^2）和 N（0，4^2），且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-1/2$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

（1） 求 Z 的数学期望 E（Z）和方差 D（Z）；

（2） 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

（3） 问 X 与 Z 是否相互独立，为什么？

【解】(1) $E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}.$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y),$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=-6$$

所以 $$D(Z)=1+4-6\times\frac{1}{3}=3.$$

(2) 因 $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\dfrac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\times(-6)=\frac{9}{3}-3=0,$$

所以 $$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.$$

(3) 由 $\rho_{XZ}==0$，得 X 与 Z 不相关.又因 $Z\sim N\left(\dfrac{1}{3},3\right), X\sim N(1,9)$，所以 X 与 Z 也相互独立.

33.将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 表示正面向上和反面向上的次数.试求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

【解】由条件知 $X+Y=n$，则有 D（$X+Y$）$=D$（n）$=0$.

再由 $X\sim B(n,p),Y\sim B(n,q)$，且 $p=q=\dfrac{1}{2}$,

从而有 $$D(X)=npq=\frac{n}{4}=D(Y)$$

所以 $$0=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

$$=\frac{n}{2}+2\rho_{XY}\cdot\frac{n}{4},\quad 故\ \rho_{XY}=-1.$$

34.设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	−1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

试求 X 和 Y 的相关系数 ρ.

【解】由已知知 $E(X)=0.6,E(Y)=0.2$，而 XY 的概率分布为

YX	−1	0	1
P	0.08	0.72	0.2

所以 E（XY）$= -0.08+0.2=0.12$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.12-0.6\times0.2=0$

从而 $$\rho_{XY}=0$$

35.对于任意两事件 A 和 B，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$,则称

$\rho=\dfrac{P(AB)-P(A)\cdot P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$ 为事件 A 和 B 的相关系数.试证：

（1） 事件 A 和 B 独立的充分必要条件是 $\rho=0$；

（2） $|\rho|\le1$.

【证】（1）由 ρ 的定义知，$\rho=0$ 当且仅当 $P(AB)-P(A)\cdot P(B)=0$.

而这恰好是两事件 A、B 独立的定义，即 $\rho=0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.

(2) 引入随机变量 X 与 Y 为

$$X=\begin{cases}1, 若A发生,\\ 0, 若\overline{A}发生;\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, 若B发生,\\ 0, 若\overline{B}发生.\end{cases}$$

由条件知，X 和 Y 都服从 0 –1 分布，即

$$X\sim\begin{cases}0 & 1\\ 1-P(A) & P(A)\end{cases}\qquad Y\sim\begin{cases}0 & 1\\ 1-P(B) & P(B)\end{cases}$$

从而有 $E(X)=P(A),E(Y)=P(B)$,

$D(X)=P(A)\cdot P(\overline{A}),D(Y)=P(B)\cdot P(\overline{B})$,

$\mathrm{Cov}(X,Y)=P(AB)-P(A)\cdot P(B)$

所以，事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关系数.于是由二元随机变量相关系数的基本性质可得$|\rho|\le 1$.

36. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，F（x,y）为二维随机变量（X，Y）的分布函数，求：

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(3) $F(-\frac{1}{2},4)$.

解： (1) Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}.$$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=0$， $f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1\le y<4$ 时， $F_Y(y)=P\{-1\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{y}$

$$f_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y≥4$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=0\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, 1\le y<4,\\ 0, \quad\quad \text{其他}.\end{cases}$$

(2)
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{5}{6}),$$

$$E(XY)=E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3 f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{7}{8},$$

故
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}.$$

(3)
$$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\le-\frac{1}{2},Y\le4\}=P\{X\le-\frac{1}{2},X^2\le4\}$$

$$=P\{X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le2\}=P\{-2\le X\le-\frac{1}{2}\}$$

$$=P\{-1\le X\le-\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}.$$

习题五

1.一颗骰子连续掷 4 次，点数总和记为 X.估计 $P\{10<X<18\}$.

【解】设 X_i 表每次掷的点数，则 $X=\sum_{i=1}^{4}X_i$

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2},$$

$$E(X_i^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6},$$

从而 $$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}.$$

又 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布.

从而 $E(X)=E(\sum_{i=1}^{4}X_i)=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=4\times\frac{7}{2}=14,$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{4}X_i)=\sum_{i=1}^{4}D(X_i)=4\times\frac{35}{12}=\frac{35}{3}.$$

所以 $$P\{10<X<18\}=P\{|X-14|<4\}\geq 1-\frac{35/3}{4^2}\approx 0.271,$$

2. 假设一条生产线生产的产品合格率是 0.8.要使一批产品的合格率达到在 76%与 84%之间的概率不小于 90%，问这批产品至少要生产多少件？

【解】令 $X_i\begin{cases}1,若第i个产品是合格品,\\0,其他情形.\end{cases}$

而至少要生产 n 件，则 $i=1,2,\ldots,n$,且

X_1，X_2，…，X_n 独立同分布，$p=P\{X_i=1\}=0.8$.

现要求 n,使得

$$P\{0.76\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\leq 0.84\}\geq 0.9.$$

即

$$P\{\frac{0.76n-0.8n}{\sqrt{n\times0.8\times0.2}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-0.8n}{\sqrt{n\times0.8\times0.2}}\leq\frac{0.84n-0.8n}{\sqrt{n\times0.8\times0.2}}\}\geq 0.9$$

由中心极限定理得

$$\Phi\left(\frac{0.84n-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right)-\Phi\left(\frac{0.76n-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right)\geq 0.9,$$

整理得$\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{10}\right)\ge 0.95$, 查表$\dfrac{\sqrt{n}}{10}\ge 1.64$,

$n\ge 268.96$, 故取 $n=269$.

3. 某车间有同型号机床 200 部，每部机床开动的概率为 0.7，假定各机床开动与否互不影响，开动时每部机床消耗电能 15 个单位.问至少供应多少单位电能才可以 95%的概率保证不致因供电不足而影响生产.

【解】要确定最低的供应的电能量，应先确定此车间同时开动的机床数目最大值 m，而 m 要满足 200 部机床中同时开动的机床数目不超过 m 的概率为 95%,于是我们只要供应 $15m$ 单位电能就可满足要求.令 X 表同时开动机床数目，则 $X\sim B$（200，0.7），

$$E(X)=140, D(X)=42,$$

$$0.95=P\{0\le X\le m\}=P(X\le m)=\Phi\left(\frac{m-140}{\sqrt{42}}\right).$$

查表知 $\dfrac{m-140}{\sqrt{42}}=1.64$, $,m=151$.

所以供电能 151×15=2265（单位）.

4. 一加法器同时收到 20 个噪声电压 V_k（k=1，2，…，20），设它们是相互独立的随机变量，且都在区间（0，10）上服从均匀分布.记 $V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求 $P\{V>105\}$的近似值.

【解】易知:$E(V_k)=5, D(V_k)=\dfrac{100}{12}, k=1,2,\ldots,20$

由中心极限定理知，随机变量

$$Z=\frac{\sum_{k=1}^{20}V_k-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}\times 20}}=\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}\times 20}}\overset{\text{近似的}}{\sim}N(0,1).$$

于是 $P\{V>105\}=P\left\{\dfrac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}\times 20}}>\dfrac{105-20\times 5}{\frac{10}{\sqrt{12}}\times\sqrt{20}}\right\}$

$$=P\left\{\frac{V-100}{\frac{10}{\sqrt{12}}\times\sqrt{20}}>0.387\right\}\approx 1-\Phi(0.387)=0.348,$$

即有 $P\{V>105\}\approx 0.348$

5. 有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m.现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？

【解】设 100 根中有 X 根短于 3m，则 X~B（100，0.2）

从而

$$P\{X \geq 30\} = 1 - P\{X < 30\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$$

6. 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8.医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言.

（1） 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

（2） 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

【解】 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{人治愈}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, 100.$

令 $X = \sum_{i=1}^{100} X_i.$

(1) X~B(100,0.8)，

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 75\} = 1 - P\{X \leq 75\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944.$$

(2) X~B(100,0.7)，

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 75\} = 1 - P\{X \leq 75\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(\frac{5}{\sqrt{21}}) = 1 - \Phi(1.09) = 0.1379.$$

7. 用 Laplace 中心极限定理近似计算从一批废品率为 0.05 的产品中，任取 1000 件，其中有 20 件废品的概率.

【解】令 1000 件中废品数 X，则

p=0.05,n=1000,X~B(1000,0.05)，

$E(X)$=50，$D(X)$=47.5.

故

$$P\{X = 20\} = \frac{1}{\sqrt{47.5}} \varphi\left(\frac{20 - 50}{\sqrt{47.5}}\right) = \frac{1}{6.895} \varphi\left(-\frac{30}{6.895}\right)$$

$$= \frac{1}{6.895} \varphi\left(\frac{30}{6.895}\right) = 4.5 \times 10^{-6}.$$

8. 设有 30 个电子器件.它们的使用寿命 T_1，…，T_{30} 服从参数 λ=0.1[单位：（小时）-1]的指数

分布，其使用情况是第一个损坏第二个立即使用，以此类推.令 T 为 30 个器件使用的总计时间，求 T 超过 350 小时的概率.

【解】 $E(T_i)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0.1}=10, \qquad D(T_i)=\frac{1}{\lambda^2}=100,$

$$E(T)=10\times 30=300, \qquad D(T)=3000.$$

故

$$P\{T>350\}\approx 1-\Phi\left(\frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right)=1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)=1-\Phi(0.913)=0.1814.$$

9. 上题中的电子器件若每件为 a 元，那么在年计划中一年至少需多少元才能以 95%的概率保证够用（假定一年有 306 个工作日，每个工作日为 8 小时）.

【解】 设至少需 n 件才够用.则 $E(T_i)=10$，$D(T_i)=100$，

$$E(T)=10n，D(T)=100n.$$

从而 $P\{\sum_{i=1}^{n}T_i\ge 306\times 8\}=0.95,$ 即 $0.05\approx\Phi\left(\frac{306\times 8-10n}{10\sqrt{n}}\right).$

故

$$0.95=\Phi\left(\frac{10n-2448}{10\sqrt{n}}\right), \quad 1.64=\frac{n-244.8}{\sqrt{n}}, \quad n\approx 272.$$

所以需 $272a$ 元.

10. 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1 名家长、2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05,0.8,0.15.若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数相与独立，且服从同一分布.

（1） 求参加会议的家长数 X 超过 450 的概率？

（2） 求有 1 名家长来参加会议的学生数不多于 340 的概率.

【解】（1） 以 $X_i(i=1,2,\dots,400)$记第 i 个学生来参加会议的家长数.则 X_i 的分布律为

X_i	0	1	2
P	0.05	0.8	0.15

易知 E（X_i=1.1）,$D(X_i)=0.19,i=1,2,\dots,400$.

而 $X=\sum_{i}^{400}X_i$,由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{i}^{400}X_i-400\times 1.1}{\sqrt{400\times 0.19}}=\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{4\times 19}}\overset{\text{近似地}}{\sim}N(0,1).$$

于是 $P\{X>450\}=1-P\{X\le 450\}\approx 1-\Phi\left(\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{4\times 19}}\right)$

$$=1-\Phi(1.147)=0.1357.$$

(2) 以 Y 记有一名家长来参加会议的学生数.则 $Y\sim B(400,0.8)$ 由拉普拉斯中心极限定理得

$$P\{Y \le 340 \approx \Phi\left(\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right)=\Phi(2.5)=0.9938.$$

11. 设男孩出生率为 0.515，求在 10000 个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率？

【解】用 X 表 10000 个婴儿中男孩的个数，则 X~B（10000，0.515） 要求女孩个数不少于男孩个数的概率，即求

$P\{X \le 5000\}$. 由中心极限定理有

$$P\{X \le 5000\}\approx\Phi\left(\frac{5000-10000\times 0.515}{\sqrt{10000\times 0.515\times 0.485}}\right)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)=0.00135.$$

12. 设有 1000 个人独立行动，每个人能够按时进入掩蔽体的概率为 0.9.以 95%概率估计，在一次行动中：

（1）至少有多少个人能够进入？

（2）至多有多少人能够进入？

【解】用 X_i 表第 i 个人能够按时进入掩蔽体（i=1,2,…,1000）.

令 $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_{1000}$.

(1) 设至少有 m 人能够进入掩蔽体，要求 $P\{m\le S_n\le 1000\}\ge 0.95$，事件

$$\{m\le S_n\}=\left(\frac{m-1000\times 0.9}{\sqrt{1000\times 0.9\times 0.1}}\le\frac{S_n-900}{\sqrt{90}}\right).$$

由中心极限定理知：

$$P\{m\le S_n\}=1-P\{S_n<m\}\approx 1-\Phi\left(\frac{m-1000\times 0.9}{\sqrt{1000\times 0.9\times 0.1}}\right)\ge 0.95.$$

从而 $$\Phi\left(\frac{m-900}{\sqrt{90}}\right)\le 0.05,$$

故 $$\frac{m-900}{\sqrt{90}}=-1.65,$$

所以 m=900-15.65=884.35≈884 人

(2) 设至多有 M 人能进入掩蔽体，要求 $P\{0\le S_n\le M\}\ge 0.95$.

$$P\{S_n\le M\}\approx\Phi\left(\frac{M-900}{\sqrt{90}}\right)=0.95.$$

查表知 $\frac{M-900}{\sqrt{90}}$=1.65,M=900+15.65=915.65≈916 人.

13. 在一定保险公司里有 10000 人参加保险，每人每年付 12 元保险费，在一年内一个人死亡的概率为 0.006,死亡者其家属可向保险公司领得 1000 元赔偿费.求：

（1） 保险公司没有利润的概率为多大；

（2） 保险公司一年的利润不少于 60000 元的概率为多大？

【解】设 X 为在一年中参加保险者的死亡人数，则 X~B（10000，0.006）.

(1) 公司没有利润当且仅当“1000X=10000×12”即“X=120”.

于是所求概率为

$$P\{X=120\}\approx\frac{1}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}}\varphi\left(\frac{120-10000\times0.006}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{59.64}}\varphi\left(\frac{60}{\sqrt{59.64}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{59.64}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(60/\sqrt{59.64})^2}$$

$$=0.0517\times\mathrm{e}^{-30.1811}\approx0$$

(2) 因为“公司利润≥60000”当且仅当“0≤X≤60” 于是所求概率为

$$P\{0\le X\le60\}\approx\Phi\left(\frac{60-10000\times0.006}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}}\right)-\Phi\left(\frac{0-10000\times0.006}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}}\right)$$

$$=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{60}{\sqrt{59.64}}\right)\approx0.5.$$

14. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 0.5 试根据契比雪夫不等式给出 $P\{|X-Y|\ge6\}$的估计. （2001 研考）

【解】令 $Z=X-Y$，有

$$E(Z)=0,D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XP}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=3.$$

所以

$$P\{|Z-E(Z)|\ge6\}=P\{|X-Y|\ge6\}\le\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

15. 某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数.

（1） 写出 X 的概率分布；

（2） 利用中心极限定理，求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似值.（1988 研考）

【解】（1） X 可看作 100 次重复独立试验中，被盗户数出现的次数，而在每次试验中被盗户出现的概率是 0.2，因此，X~B(100,0.2)，故 X 的概率分布是

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_{100}^{k}0.2^k0.8^{100-k},\quad k=1,2,\cdots,100.$$

(2) 被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率即为事件{14≤X≤30}的概率.由中心极限定理，得

$$P\{14\le X\le30\}\approx\Phi\left(\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right)-\Phi\left(\frac{14-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right)$$

$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=0.994-[-9.33]=0.927.$$

16. 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的.假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克，若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.

【解】设 X_i（i=1,2,…,n）是装运 i 箱的重量（单位：千克），n 为所求的箱数，由条件知，可把 X_1，X_2，…，X_n 视为独立同分布的随机变量，而 n 箱的总重量 $T_n=X_1+X_2+\dots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和，由条件知：

$$E(X_i)=50, \qquad \sqrt{D(X_i)}=5,$$

$$E(T_n)=50n, \qquad \sqrt{D(T_n)}=5\sqrt{n}.$$

依中心极限定理，当 n 较大时，$\dfrac{T_n-50n}{5\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$,故箱数 n 取决于条件

$$P\{T_n \le 5000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977=\Phi(2).$$

因此可从 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2$ 解出 n<98.0199,

即最多可装 98 箱.

习题六

1.设总体 $X \sim N$（60，15^2），从总体 X 中抽取一个容量为 100 的样本，求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 3 的概率.

【解】$\mu=60, \sigma^2=15^2, n=100$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

即
$$Z=\frac{\overline{X}-60}{15/10} \sim N(0,1)$$

$$P(|\overline{X}-60|>3)=P(|Z|>30/15)=1-P(|Z|<2)$$

$$=2[1-\Phi(2)]=2(1-0.9772)=0.0456.$$

2.从正态总体 N（4.2，5^2）中抽取容量为 n 的样本，若要求其样本均值位于区间（2.2,6.2）内的概率不小于 0.95，则样本容量 n 至少取多大？

【解】

$$Z=\frac{\overline{X}-4}{5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P(2.2<\overline{X}<6.2)=P(\frac{2.2-4.2}{5}\sqrt{n}<Z<\frac{6.2-4.2}{5}\sqrt{n})$$

$$=2\Phi(0.4\sqrt{n})-1=0.95,$$

则 $\Phi(0.4\sqrt{n})=0.975$，故 $0.4\sqrt{n}>1.96$,

即 $n>24.01$，所以 n 至少应取 25

3.设某厂生产的灯泡的使用寿命 $X \sim N$（1000，σ^2）（单位：小时），随机抽取一容量为 9 的样本，并测得样本均值及样本方差.但是由于工作上的失误，事后失去了此试验的结果，只记得样本方差为 $S^2=100^2$，试求 P（$\overline{X}>1062$）.

【解】$\mu=1000, n=9$，$S^2=100^2$

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-1000}{100/3} \sim t(8)$$

$$P(\overline{X}>1062)=P(t>\frac{1062-1000}{100/3})=P(t>1.86)=0.05$$

4.从一正态总体中抽取容量为 10 的样本，假定有 2%的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上，求总体的标准差.

【解】$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，由 $P(|\overline{X}-\mu|>4)=0.02$ 得

$$P|Z|>4(\sigma/n)=0.02,$$

故 $2\left[1-\Phi\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)\right]=0.02$, 即 $\Phi\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=0.99.$

查表得 $$\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}=2.33,$$

所以 $$\sigma=\frac{4\sqrt{10}}{2.33}=5.43.$$

5.设总体 $X\sim N$（μ，16），X_1，X_2，…，X_{10} 是来自总体 X 的一个容量为 10 的简单随机样本，S^2 为其样本方差，且 P（$S^2>a$）=0.1，求 a 之值.

【解】$\chi^2=\dfrac{9S^2}{16}\sim\chi^2(9), P(S^2>a)=P\left(\chi^2>\dfrac{9a}{16}\right)=0.1.$

查表得 $$\frac{9a}{16}=14.684,$$

所以 $$a=\frac{14.684\times 16}{9}=26.105.$$

6.设总体 X 服从标准正态分布，X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本，试问统计量

$$Y=\frac{(\frac{n}{5}-1)\sum_{i=1}^{5}X_i^{\,2}}{\sum_{i=6}^{n}X_i^{\,2}}，n>5$$

服从何种分布？

【解】$\chi_i^2=\sum_{i=1}^{5}X_i^2\sim\chi^2(5), \chi_2^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim X^2(n-5)$

且 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立.

所以

$$Y=\frac{X_1^2/5}{X_2^2/n-5}\sim F(5,n-5)$$

7.求总体 $X\sim N$（20，3）的容量分别为 10，15 的两个独立随机样本平均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

【解】令 $\overline{X}$ 的容量为 10 的样本均值，$\overline{Y}$ 为容量为 15 的样本均值,则 $\overline{X}\sim N(20,310)$, $\overline{Y}\sim N(20,\dfrac{3}{15})$，且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立.

则 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{15}\right)=N(0,0.5),$

那么 $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{0.5}}\sim N(0,1)$,

所以

$$P(|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3)=P\left(|Z|>\frac{0.3}{\sqrt{0.5}}\right)=2[1-\Phi(0.424)]$$

$$=2(1-0.6628)=0.6744.$$

8.设总体 $X\sim N$（0，σ^2）,$X_1,\ldots,X_{10},\ldots,X_{15}$ 为总体的一个样本.则 $Y=\dfrac{X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_{10}{}^2}{2\left(X_{11}{}^2+X_{12}{}^2+\cdots+X_{15}{}^2\right)}$ 服从____________分布,参数为__________.

【解】 $\dfrac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$, i=1,2,…,15.

那么 $\chi_1^2=\sum\limits_{i=1}^{10}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10),\chi_2^2=\sum\limits_{i=11}^{15}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(5)$

且 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立,

所以

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{X_1^2/10}{X_2^2/5}\sim F(10,5)$$

所以 $Y\sim F$ 分布，参数为（10,5）.

9.设总体 $X\sim N$（μ_1,σ^2）,总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2),X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 和 Y_1，Y_2，…，X_{n_2} 分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【解】令 $S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y}),$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2=(n_1-1)S_1^2,\sum\limits_{j=1}^{n_2}(y_j-\overline{y})^2=(n_2-1)S_2^2,$

又 $\chi_1^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1),\chi_2^2=\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1),$

那么

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\frac{1}{n_1+n_2-2}\cdot E(\sigma^2\chi_1^2+\sigma^2\chi_2^2)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}[E(\chi_1^2)+E(\chi_2^2)]$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)+(n_2-1)]=\sigma^2$$

10.设总体 $X\sim N$（μ,σ^2），X_1，X_2，…，X_{2n}（$n\geq 2$）是总体 X 的一个样本，$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，令

$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，求 EY.

【解】令 $Z_i=X_i+X_{n+i}$, $i=1,2,\ldots,n$.则

$Z_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)(1\leq i\leq n)$,且 $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ 相互独立.

令 $$Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{n},\ S^2=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2/n-1,$$

则 $$\overline{X}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{X_i}{2n}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{2}\overline{Z},$$

故 $$\overline{Z}=2\overline{X}$$

那么

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=(n-1)S^2,$$

所以

$$E(Y)=(n-1)ES^2=2(n-1)\sigma^2.$$

11. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$,X_1，X_2，…，X_n 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，求 $E(S^2)$.

解： 由题意，得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x},\ x<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x},x\geq 0,\end{cases}$$

$$E(S^2)=D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

于是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2,$$

所以

$$E(S^2)=2\,.$$

习题七

1.设总体 X 服从二项分布 b（n，p），n 已知，X_1，X_2，…，X_n 为来自 X 的样本，求参数 p 的矩法估计.

【解】$E(X)=np, E(X)=A_1=\overline{X}$, 因此 $np=\overline{X}$

所以 p 的矩估计量 $$\hat{p}=\frac{\overline{X}}{n}$$

2.设总体 X 的密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X_1，X_2，…，X_n 为其样本，试求参数 θ 的矩法估计.

【解】$E(X)=\dfrac{2}{\theta^2}\displaystyle\int_0^\theta x(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\theta^2}\left(\theta\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^\theta=\dfrac{\theta}{3}$,

令 $E(X)=A_1=\overline{X}$,因此 $\dfrac{\theta}{3}=\overline{X}$

所以 θ 的矩估计量为 $$\hat{\theta}=3\overline{X}.$$

3.设总体 X 的密度函数为 f（x，θ），X_1，X_2，…，X_n 为其样本，求 θ 的极大似然估计.

（1） $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta\mathrm{e}^{-\theta x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

（2） $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【解】（1） 似然函数 $L=\displaystyle\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\theta x_i}=\theta^n\mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{e}^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}$

$$g=\ln L=n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^n x_i$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=0$ 知

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

(2) 似然函数 $L=\theta^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1},0<x_i<1,i$=1,2,⋯,n.

$$\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\ln\prod_{i=1}^{n}x_i$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+\ln\prod_{i=1}^{n}x_i=0$ 知

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\ln\prod_{i=1}^{n}x_i}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

4.从一批炒股票的股民一年收益率的数据中随机抽取 10 人的收益率数据，结果如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
收益率	0.01	-0.11	-0.12	-0.09	-0.13	-0.3	0.1	-0.09	-0.1	-0.11

求这批股民的收益率的平均收益率及标准差的矩估计值.

【解】 $\overline{x}=-0.094\quad s=0.101893\quad n=9$

$$EX=\overline{x}=-0.094.$$

由 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2,E(X^2)=A_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n}$ 知 $\hat{\sigma}^2+[E(\hat{X})]^2=A_2$,即有

$$\hat{\sigma}=\sqrt{A_2-[E(\hat{X})]^2}+\sqrt{\frac{1}{10}[\sum_{i=1}^{10}X_i^2-10(\overline{X})^2]}$$

于是 $$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{9}{10}}s=\sqrt{0.9}\times0.10189=0.0966$$

所以这批股民的平均收益率的矩估计值及标准差的矩估计值分别为-0.94 和 0.966.

5.随机变量 X 服从[0，θ]上的均匀分布，今得 X 的样本观测值：0.9,0.8,0.2,0.8,0.4,0.4,0.7,0.6，求 θ 的矩法估计和极大似然估计，它们是否为 θ 的无偏估计.

【解】(1) $E(X)=\frac{\theta}{2}$,令 $E(X)=\overline{X}$，则

$$\hat{\theta}=2\overline{X}\text{ 且 }E(\hat{\theta})=2E(\overline{X})=2E(X)=\theta,$$

所以 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=2\overline{x}=2\times0.6=1.2$ 且 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 是一个无偏估计.

(2) 似然函数 $L=\prod_{i=1}^{8} f(x_i,\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^8$,i=1,2,⋯,8.

显然 $L=L(\theta)\downarrow(\theta>0)$，那么 $\theta=\max\limits_{1\le i\le 8}\{x_i\}$ 时，$L=L(\theta)$最大,

所以 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$=0.9.

因为 $E(\hat{\theta})=E(\max\limits_{1\le i\le 8}\{x_i\})\neq\theta$,所以 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le 8}\{x_i\}$ 不是 θ 的无偏计.

6.设 X_1，X_2，⋯，X_n 是取自总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，$\hat{\sigma}^2=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，

问 k 为何值时 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

【解】令 $Y_i=X_{i+1}-X_i$, i=1,2,⋯,n-1,

则 $$E(Y_i)=E(X_{i+1})-E(X_i)=\mu-\mu=0, D(Y_i)=2\sigma^2,$$

于是 $$E\hat{\sigma}^2=E[k(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i^2)]=k(n-1)EY_1^2=2\sigma^2(n-1)k,$$

那么当 $E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2$,即 $2\sigma^2(n-1)k=\sigma^2$ 时,

有 $$k=\frac{1}{2(n-1)}.$$

7.设 X_1，X_2 是从正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 中抽取的样本

$$\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2;\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2;\quad \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2;$$

试证 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量，并求出每一估计量的方差.

【证明】（1） $E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2\right)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\frac{2}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu,$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\mu,$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\mu,$$

所以 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 均是 μ 的无偏估计量.

(2) $D(\hat{\mu}_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2 D(X_1)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 D(X_2)=\frac{4}{9}X\sigma^2=\frac{5\sigma^2}{9},$

$$D(\hat{\mu}_2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2 D(X_1)+\left(\frac{3}{4}\right)^2 D(X_2)=\frac{5\sigma^2}{8},$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(D(X_1)+D(X_2)\right)=\frac{\sigma^2}{2},$$

8.某车间生产的螺钉，其直径 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，由过去的经验知道 $\sigma^2=0.06$,今随机抽取 6 枚，测得其长度（单位 mm）如下：

14.7　15.0　14.8　14.9　15.1　15.2

试求 μ 的置信概率为 0.95 的置信区间.

【解】 $n=6$, $\sigma^2=0.06$, $\alpha=1-0.95=0.05$,

$$\bar{x}=14.95, u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.25}=1.96,,$$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(14.95\pm 0.1\times 1.96)=(14.754,15.146).$$

9.总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$， σ^2 已知，问需抽取容量 n 多大的样本，才能使 μ 的置信概率为 $1-\alpha$，且置信区间的长度不大于 L？

【解】 由 σ^2 已知可知 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{x}\pm u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

于是置信区间长度为 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{\alpha/2}$,

那么由 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{\alpha/2}\leqslant L$,得 $n\geqslant\frac{4\sigma^2(u_{\alpha/2})^2}{L^2}$

10.设某种砖头的抗压强度 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，今随机抽取 20 块砖头，测得数据如下（$kg\cdot cm^{-2}$）：

64	69	49	92	55	97	41	84	88	99
84	66	100	98	72	74	87	84	48	81

（1） 求 μ 的置信概率为 0.95 的置信区间.

（2） 求 σ^2 的置信概率为 0.95 的置信区间.

【解】 $\bar{x}=76.6, s=18.14, \alpha=1-0.95=0.05, n=20,$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(19)=2.093,$$
$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(19)=32.852, \chi^2_{0.975}(19)=8.907$$

(1) μ 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(76.6\pm\frac{18.14}{\sqrt{20}}\times 2.093\right)=(68.11,85.089)$$

(2) σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{19}{32.852}\times 18.14^2,\frac{19}{8.907}\times 18.14^2\right)=(190.33,702.01)$$

11.设总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 其中$\theta>-1$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是 X 的一个样本，求 θ 的矩估计量及极大似然估计量.

【解】(1)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

又

$$\overline{X}=E(X)=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

故

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$$

所以 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}.$

(2) 似然函数

$$L=L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod\limits_{i=1}^n x_i^{\theta} & 0<x_i<1 \quad (i=1,2,\cdots,n)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

取对数

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln x_i \quad (0<x_i<1;1\le i\le n),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0,$$

所以 θ 的极大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i}.$

12.设总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体 X 的一个样本

（1） 求 θ 的矩估计量；

（2） 求 $D(\hat{\theta})$.

【解】(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$,

令 $$EX=\bar{X}=\frac{\theta}{2},$$

所以 θ 的矩估计量 $$\hat{\theta}=2\bar{X}.$$

(2) $D(\hat{\theta})=D(2\bar{X})=4D(\bar{X})=\frac{4}{n}DX$, ,

又

$$E(X^2)=\int_0^{\theta}\frac{6x^3(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{6\theta^2}{20}=\frac{3\theta^2}{10},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20},,$$

所以

$$D(\hat{\theta})=\frac{\theta^2}{5n}.$$

13.设某种电子元件的使用寿命 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2\mathbf{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>0)$为未知参数，又设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是总体 X 的一组样本观察值，求 θ 的极大似然估计值.

【解】似然函数

$$L=L(\theta)=\begin{cases}2^n\cdot\mathrm{e}^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} & x_i\ge 0; i=1,2,\cdots,n;\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

$$\ln L=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta), x_i\ge\theta; i=1,2,\cdots,n,$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$知$\ln L(\theta)\uparrow$,

那么当 $\hat{\theta}=\min\limits_{|1\le i\le n|}\{x_i\}$时 $\ln L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta>0}\ln L(\theta)$

所以 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$

14. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\dfrac{1}{2})$是未知参数，利用总体的如下样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

【解】

$$(1)E(X)=3-4\theta,\text{令}E(X)=\overline{x}\text{得}\hat{\theta}=\frac{3-\overline{x}}{4}$$

又
$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{8}\frac{x_i}{8}=2$$

所以 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{4}=\dfrac{1}{4}.$

（2） 似然函数 $L=\prod_{i=1}^{8}P(x_i,\theta)=4\theta^6(1-\theta^2)(1-2\theta)^4.$

$$\ln L=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-\theta),$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0,$$

解 $6-28\theta+24\theta^2=0$

得
$$\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}.$$

由于
$$\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2},$$

所以 θ 的极大似然估计值为
$$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{2}.$$

15. 设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha^\beta}{x^\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha.\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,\alpha>0$，设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本

（1） 当 $\alpha=1$ 时，求 β 的矩估计量；

（2） 当 $\alpha=1$ 时，求 β 的极大似然估计量；

（3） 当 $\beta=2$ 时，求 α 的极大似然估计量.

【解】

当 $\alpha=1$ 时， $f(x,\beta)=F_x^1(x,1,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x\ge 1;\\ 0, & x<1.\end{cases}$

当 β=2 时，$f(x,\alpha)=F_x^1(x,\alpha,2)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x\ge\alpha;\\ 0, & x<\alpha.\end{cases}$

(1) $E(X)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\beta}{x^\beta}\mathrm{d}x=\dfrac{\beta}{1-\beta}x^{1-\beta}\Big|_1^{+\infty}=\dfrac{\beta}{\beta-1}$

令 $E(X)=\bar{X}$,于是 $\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$,

所以 β 的矩估计量 $\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(2) 似然函数

$$L=L(\beta)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\beta)=\begin{cases}\beta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i^{-(\beta+1)}\right), & x_i>1,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\ln L=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^n\ln x_i=0,$$

所以 β 的极大似然估计量 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}$.

(3) 似然函数

$$L=\prod_{i=1}^n f(x_i,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^3}, & x_i\ge\alpha,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $L=L(\alpha)\uparrow$,

那么当 $\hat{\alpha}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$ 时, $L=L(\hat{\alpha})=\max\limits_{a>0}L(\alpha)$,

所以 α 的极大似然估计量 $\hat{\alpha}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$.

16. 从正态总体 X~N（3.4，6^2）中抽取容量为 n 的样本，如果其样本均值位于区间（1.4，5.4）内的概率不小于 0.95，问 n 至少应取多大？

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}}\mathbf{e}^{-t^2/2}\mathbf{d}t$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
φ(z)	0.9	0.95	0.975	0.99

【解】$\bar{X} \sim N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right)$,则 $Z = \frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} = P\left\{\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}} < Z < \frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{3} < Z < \frac{\sqrt{n}}{3}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geq 0.95$$

于是 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975$ 则 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96$,

∴ $n \geqslant 35$.

17. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\ \theta)=\begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1-\theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数（$0<\theta<1$）,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数.求：

（1） θ 的矩估计；

（2） θ 的最大似然估计.

解 (1) 由于

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^1 \theta x \mathrm{d}x + \int_1^2 (1-\theta) x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta .$$

令 $\frac{3}{2} - \theta = \overline{X}$，解得 $\theta = \frac{3}{2} - \overline{X}$，

所以参数 θ 的矩估计为

$$\theta = \frac{3}{2} - \overline{X} .$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N} ,$$

取对数，得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n-N) \ln(1-\theta),$$

两边对 θ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$,得 $\theta=\frac{N}{n}$,

所以θ的最大似然估计为

$$\theta=\frac{N}{n}.$$

习题八

1. 已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布 $N(4.55,0.108^2)$.现在测了 5 炉铁水，其含碳量（%）分别为

4.28　　4.40　　4.42　　4.35　　4.37

问若标准差不改变，总体平均值有无显著性变化（α=0.05）？

【解】

$$
\begin{aligned}
&H_0:\mu=\mu_0=4.55; H_1:\mu\neq\mu_0=4.55.\\
&n=5,\alpha=0.05,Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96,\sigma=0.108\\
&\bar{x}=4.364,\\
&Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{(4.364-4.55)}{0.108}\times\sqrt{5}=-3.851,\\
&|Z|>Z_{0.025}.
\end{aligned}
$$

所以拒绝 H_0，认为总体平均值有显著性变化.

2. 某种矿砂的 5 个样品中的含镍量（%）经测定为：

3.24　　3.26　　3.24　　3.27　　3.25

设含镍量服从正态分布，问在α=0.01 下能否接收假设：这批矿砂的含镍量为 3.25.

【解】设

$$
\begin{aligned}
&H_0:\mu=\mu_0=3.25; H_1:\mu\neq\mu_0=3.25.\\
&n=5,\alpha=0.01,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(4)=4.6041\\
&\bar{x}=3.252,s=0.013,\\
&t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{(3.252-3.25)}{0.013}\times\sqrt{5}=0.344,\\
&|t|<t_{0.005}(4).
\end{aligned}
$$

所以接受 H_0，认为这批矿砂的含镍量为 3.25.

3. 在正常状态下，某种牌子的香烟一支平均 1.1 克，若从这种香烟堆中任取 36 支作为样本；测得样本均值为1.008（克），样本方差 s^2=0.1(g^2).问这堆香烟是否处于正常状态.已知香烟（支）的重量（克）近似服从正态分布（取α=0.05）.

【解】设

$$
\begin{aligned}
&H_0:\mu=\mu_0=1.1; H_1:\mu\neq\mu_0=1.1.\\
&n=36,\alpha=0.05,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301,n=36,\\
&\bar{x}=1.008,s^2=0.1,\\
&t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{(1.008-1.1)}{\sqrt{0.1}}\times 6=1.7456,\\
&|t|=1.7456<t_{0.025}(35)=2.0301.
\end{aligned}
$$

所以接受 H_0，认为这堆香烟（支）的重要（克）正常.

4.某公司宣称由他们生产的某种型号的电池其平均寿命为 21.5 小时，标准差为 2.9 小时.在实验室测试了该公司生产的 6 只电池，得到它们的寿命（以小时计）为 19，18，20，22，16，25，问这些结果是否表明这种电池的平均寿命比该公司宣称的平均寿命要短？设电池寿命近

似地服从正态分布（取α=0.05）.

【解】

$$H_0:\mu\ge 21.5; H_1:\mu<21.5.$$
$$\mu_0=21.5, n=6, \alpha=0.05, z_{0.05}=1.65, \sigma=2.9, \overline{x}=20,$$
$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{(20-21.5)}{2.9}\times\sqrt{6}=-1.267,$$
$$z>-z_{0.05}=-1.65.$$

所以接受 H_0，认为电池的寿命不比该公司宣称的短.

5.测量某种溶液中的水分，从它的 10 个测定值得出 $\overline{x}$ =0.452(%),s=0.037(%).设测定值总体为正态，μ 为总体均值，σ 为总体标准差，试在水平α=0.05 下检验.

（1） H_0：μ=0.5(%)；H_1：μ＜0.5(%).

（2）$H_0':\sigma$ =0.04(%)； $H_1':\sigma$＜0.04(%).

【解】(1)

$$\mu_0=0.5; n=10, \alpha=0.05, t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.8331,$$
$$\overline{x}=0.452, s=0.037,$$
$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{(0.452-0.5)}{0.037}\times\sqrt{10}=-4.10241,$$
$$t<-t_{0.05}(9)=-1.8331.$$

所以拒绝 H_0，接受 H_1.

(2)

$$\sigma_0^2=(0.04)^2, n=10, \alpha=0.05, \chi^2_{1-\alpha}=\chi^2_{0.95}(9)=3.325,$$
$$\overline{x}=0.452, s=0.037,$$
$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9\times0.037^2}{0.04^2}=7.7006,$$
$$\chi^2>\chi^2_{0.95}(9).$$

所以接受 H_0，拒绝 H_1.

6.某种导线的电阻服从正态分布 N（μ，0.0052）.今从新生产的一批导线中抽取 9 根，测其电阻，得 s=0.008 欧.对于α=0.05，能否认为这批导线电阻的标准差仍为 0.005?

【解】

$$H_0:\sigma=\sigma_0=0.005; H_1:\sigma=\sigma_0\ne0.005.$$
$$n=9, \alpha=0.05, s=0.008,$$
$$\chi^2_{\alpha/2}(8)=\chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{1-\alpha/2}(8)=\chi^2_{0.975}(8)=2.088,$$
$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times0.008^2}{(0.005)^2}=20.48, \chi^2>\chi^2_{0.025}(8).$$

故应拒绝 H_0，不能认为这批导线的电阻标准差仍为 0.005.

7.有两批棉纱，为比较其断裂强度，从中各取一个样本，测试得到：

第一批棉纱样本：n_1=200， $\overline{x}$ =0.532kg, s_1=0.218kg；

第二批棉纱样本：n_2=200， $\overline{y}$ =0.57kg, s_2=0.176kg.

设两强度总体服从正态分布，方差未知但相等，两批强度均值有无显著差异？(α =0.05)

【解】

$$H_0:\mu_1=\mu_2;H_1:\mu_1\neq\mu_2.$$
$$n_1=n_2=200,\alpha=0.05,$$
$$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(398)\approx z_{0.025}=1.96,$$
$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{199\times(0.218^2+0.176^2)}{398}}=0.1981,$$
$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(0.532-0.57)}{0.1981\times\sqrt{\frac{1}{200}+\frac{1}{200}}}=-1.918;$$
$$|t|<t_{0.025}(398).$$

所以接受 H_0，认为两批强度均值无显著差别.

8.两位化验员 A，B 对一种矿砂的含铁量各自独立地用同一方法做了 5 次分析，得到样本方差分别为 0.4322(%^{2})与 0.5006(%^{2}).若 A，B 所得的测定值的总体都是正态分布，其方差分别为 σ_A^2，σ_B^2，试在水平 α =0.05 下检验方差齐性的假设

$$H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2;H_1:\sigma_A^2\neq\sigma_B^2.$$

【解】

$$n_1=n_2=5,\alpha=0.05,s_1^2=0.4322,s_2^2=0.5006,$$
$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(4,4)=9.6,$$
$$F_{0.975}(4,4)=\frac{1}{F_{0.025}(4.4)}=\frac{1}{9.6}=0.1042,$$
$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0.4322}{0.5006}=0.8634.$$

那么 $F_{0.975}(4,4)<F<F_{0.025}(4,4).$

所以接受 H_0，拒绝 H_1.

9~12. 略

习题九

1　灯泡厂用 4 种不同的材料制成灯丝，检验灯线材料这一因素对灯泡寿命的影响.若灯泡寿命服从正态分布，不同材料的灯丝制成的灯泡寿命的方差相同，试根据表中试验结果记录，在显著性水平 0.05 下检验灯泡寿命是否因灯丝材料不同而有显著差异？

		试验批号							
		1	2	3	4	5	6	7	8
灯丝	A_1	1600	1610	1650	1680	1700	1720	1800	
材料	A_2	1580	1640	1640	1700	1750			
水平	A_3	1460	1550	1600	1620	1640	1660	1740	1820
	A_4	1510	1520	1530	1570	1600	1680		

【解】

$$r=4, n=\sum_{i=1}^{r} n_i = 26;$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}^2-\frac{T_{..}^2}{n}=69895900-69700188.46=195711.54,$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{n_i}T_{i.}^2-\frac{T_{..}^2}{n}=69744549.2-69700188.46=44360.7,$$

$$S_E=S_T-S_A=151350.8,$$

$$F=\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)}=\frac{44360.7/3}{151350.8/22}=2.15,$$

$$F_{0.05}(3,22)=3.05>F.$$

故灯丝材料对灯泡寿命无显著影响.

表 9-1-1 方差分析表

方差来源	平方和 S	自由度	均方和 $\overline{S}$	F 值
因素影响	44360.7	3	14786.9	2.15
误差	151350.8	22	6879.59	
总和	195711.54	25		

2. 一个年级有三个小班，他们进行了一次数学考试，现从各个班级随机地抽取了一些学生，记录其成绩如下：

I	II	III
73　66	88　77	68　41
89　60	78　31	79　59
82　45	48　78	56　68

43　　93	91　　62	91　　53
80　　36	51　　76	71　　79
73　　77	85　　96	71　　15
	74　　80	87
	56	

试在显著性水平 0.05 下检验各班级的平均分数有无显著差异.设各个总体服从正态分布，且方差相等.

【解】

$$r=3, n=\sum_{i=1}^{r} n_i = 40,$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2-\frac{T_{..}^2}{n}=199462-185776.9=13685.1,$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{n_i}T_{i.}^2-\frac{T_{..}^2}{n}=186112.25-185776.9=335.35,$$

$$S_E=S_T-S_A=13349.65,$$

$$F=\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)}=\frac{167.7}{360.8}=0.465$$

$$F_{0.05}(2,37)=3.23>F.$$

故各班平均分数无显著差异.

表 9-2-1 方差分析表

方差来源	平方和 S	自由度	均方和 $\bar{S}$	F 值
因素影响	335.35	2	167.68	0.465
误差	13349.65	37	360.80	
总和	13685	39		

3. 下面记录了 3 位操作工分别在不同机器上操作 3 天的日产量.

操作工 / 机器	甲	乙	丙
A_1	15　15　17	19　19　16	16　18　21
A_2	17　17　17	15　15　15	19　22　22
A_3	15　17　16	18　17　16	18　18　18
A_4	18　20　22	15　16　17	17　17　17

取显著性水平 α=0.05,试分析操作工之间，机器之间以及两者交互作用有无显著差异？

【解】

由已知 r=4,s=3,t=3.

$T_{...},T_{ij},T_{i..},T_{.j.}$ 的计算如表 9-3-1.

表 9-3-1

T_{ij} 操作工 / 机器	甲	乙	丙	$T_{i..}$
A_1	47	54	55	156
A_2	51	45	63	159
A_3	48	51	54	153
A_4	60	48	51	159
$T_{.j.}$	206	198	223	627

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}=11065-10920.25=144.75,$$

$$S_A=\frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r}T_{i..}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}=10923-10920.25=2.75,$$

$$S_B=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s}T_{.j.}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}=10947.42-10920.25=27.17,$$

$$S_{A\times B}=\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}T_{ij.}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{rst}\right)-S_A-S_B=73.50,$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B}=41.33.$$

表 9-3-2 得方差分析表

方差来源	平方和 S	自由度	均方和 $\bar{S}$	F 值
因素 A（机器）	2.75	3	0.92	F_A=053
因素 B（操作工）	27.17	2	13.58	F_B=7.89
交互作用 A×B	73.50	6	12.25	$F_{A\times B}$=7.12
误差	4.33	24	1.72	
总和	1094.75			

$$F_{0.05}(3,24)=3.01, F_{0.05}(2,24)=3.40, F_{0.05}(6,24)=2.51.$$

接受假设 H_{01}，拒绝假设 H_{02},H_{03}.

即机器之间无显著差异，操作之间以及两者的交互作用有显著差异.

4. 为了解 3 种不同配比的饲料对仔猪生长影响的差异，对 3 种不同品种的猪各选 3 头进行试验，分别测得其 3 个月间体重增加量如下表所示，取显著性水平 $\alpha=0.05$，试分析不同饲料与不同品种对猪的生长有无显著影响？假定其体重增长量服从正态分布，且各种配比的方差相等.

体重增长量		因素 *B*（品种）		
		B_1	B_2	B_3
因素 *A*（饲料）	A_1	51	56	45
	A_2	53	57	49
	A_3	52	58	47

【解】由已知 $r=s=3$,经计算 $\bar{x}=52$, $\bar{x}_{1.}=50.66$, $\bar{x}_{2.}=53$

$\bar{x}_{3.}=52.34$, $\bar{x}_{.1}=52$, $\bar{x}_{.2}=57$, $\bar{x}_{.3}=47$,

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2=162;$$

$$S_A=s\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2=8.73,$$

$$S_B=r\sum_{j=1}^{r}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2=150,$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B=3.27.$$

表 9-4-1 得方差分析表

方差来源	平方和 S	自由度	均方和 $\bar{S}$	F 值
饮料作用	8.68	2	4.34	5.23
品种作用	150	2	75	90.36
试验误差	3.32	4	0.83	
总和	162			

由于 $F_{0.05}(2,4)=6.94>F_A, F_{0.05}(2,4)<F_B$.

因而接受假设 H_{01},拒绝假设 H_{02}.

即不同饲料对猪体重增长无显著影响,猪的品种对猪体重增长有显著影响.

5.研究氯乙醇胶在各种硫化系统下的性能（油体膨胀绝对值越小越好）需要考察补强剂（*A*）、防老剂（*B*）、硫化系统（*C*）3 个因素（各取 3 个水平），根据专业理论经验，交互作用全忽略，根据选用 $L_9(3^4)$表作 9 次试验及试验结果见下表：

表头设计					试验
列号 试验号	1	2	3	4	结果
1	1	1	1	1	7.25
2	1	2	2	2	5.48
3	1	3	3	3	5.35
4	2	1	2	3	5.40
5	2	2	3	1	4.42

6	2	3	1	2	5.90
7	3	1	3	2	4.68
8	3	2	1	3	5.90
9	3	3	2	1	5.63

(1) 试作最优生产条件的直观分析，并对 3 因素排出主次关系.

(2) 给定 α=0.05,作方差分析与(1)比较.

【解】(1) 对试验结果进行极差计算，得表 9-5-1.

表 9-5-1

T_{1j}	18.08	17.33	19.05	17.30	
T_{2j}	15.72	15.80	16.51	16.06	T=50.01
T_{3j}	16.21	16.88	14.45	16.65	
R_j	2.36	1.53	4.46	1.24	

由于要求油体膨胀越小越好，所以从表 9-5-1 的极差 R_j 的大小顺序排出因素的主次顺序为：主→次 B,A,C

最优工艺条件为：$A_2B_2C_3$.

(2) 利用表 9-5-1 的结果及公式 $S_j=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}T_{ij}^2-\frac{T^2}{P}$,得表 9-5-2.

表 9-5-2

	A 1	B 2	C 3	4	
S_j	1.034	0.412	3.539	0.256	$S_T=5.241$

表 9-5-2 中第 4 列为空列，因此 $S_e=S_4=0.256$,其中 $f_e=2$，所以 $\frac{S_e}{f_e}$ =0.128 方差分析表如表 9-5-3.

表 9-5-3

方差来源	s_j	f_j	s_j/f_j	$F=\frac{s_j}{f_j}/\frac{s_e}{f_e}$	显著性
A	1.034	2	0.517	4.039	
B	0.412	2	0.206	1.609	
C	3.539	2	1.769	13.828	
e	0.256	2	0.128		

由于 $F_{0.05}(2,2)=19.00$，故因素 C 作用较显著，A 次之，B 较次，但由于要求油体膨胀越小越好，所以主次顺序为：BAC，这与前面极差分析的结果是一致的.

6. 某农科站进行早稻品种试验（产量越高越好），需考察品种（A），施氮肥量（B），氮、磷、钾肥比例（C），插植规格（D）4 个因素，根据专业理论和经验，交互作用全忽略，早稻试验方案及结果分析见下表：

因素试验号	A 品种	B 施氮肥量	C 氮、磷、钾肥比例	D 插植规格	试验指标 产量
1	1（科 6 号）	1(20)	1(2∶2∶1)	1(5×6)	19.0
2	1	2(25)	2(3∶2∶3)	2(6×6)	20.0
3	2(科 5 号)	1	1	2	21.9
4	2	2	2	1	22.3
5	1(科 7 号)	1	2	1	21.0
6	1	2	1	2	21.0
7	2(珍珠矮)	1	2	2	18.0
8	2	2	1	1	18.2

(1) 试作出最优生产条件的直观分析，并对 4 因素排出主次关系.

(2) 给定 α=0.05,作方差分析，与(1)比较.

【解】被考察因素有 4 个：A，B，C，D 每个因素有两个水平，所以选用正交表 L_8（2^7），进行极差计算可得表 9-6-1.

表 9-6-1

列号 水平 试验号	1	A 2	3	B 4	C 5	D 6	7	试验结果
1	1	1	1	1	1	1	1	19.0
2	1	1	1	2	2	2	2	20.0
3	1	2	2	1	1	2	2	21.9
4	1	2	2	2	2	1	1	22.3
5	2	1	2	1	2	1	2	21.0
6	2	1	2	2	1	2	1	21.0
7	2	2	1	1	2	2	1	18.0
8	2	2	1	2	1	1	2	18.2
T_{1j}	83.2	81.0	75.2	79.9	80.1	80.5	80.3	T=161.4
T_{2j}	78.2	80.4	86.2	81.5	81.3	80.9	81.1	
R_j	5.0	0.6	11.0	1.6	1.2	0.4	0.8	

从表 9-6-1 的极差 R_j 的大小顺序排出因素的主次为：$\overset{\text{主}\to\text{次}}{B,C,A,D}$

最优方案为：$A_1B_2C_2D_2$

(2) 利用表 9-6-1 的结果及公式 $s_j=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}T_{ij}^2-\frac{T^2}{P}$ 得表 9-6-2.

表 9-6-2

	1	A 2	3	B 4	C 5	D 6	7	
s_j	3.125	0.045	15.125	0.320	0.180	0.020	0.080	$S_T=18.895$

表 9-6-2 中第 1,3,7 列为空列，因此 $s_e=s_1+s_3+s_7=18.330, f_e=3$,所以 $\frac{s_e}{f_e}=6.110$.而在上表中其他列中 $\frac{s_j}{f_j}<\frac{s_e}{f_e}$.故将所有次均并入误差，可得

$$s_e^{\Delta}=s_T=18.895,\ f_e^{\Delta}=7.$$

整理得方差分析表为表 9-6-3.

表 9-6-3

方差来源	s_j	f_j	$\frac{s_j}{f_j}$	$F=\frac{s_j}{f_j}/\frac{s_e^{\Delta}}{f_e^{\Delta}}$	显著性
A	0.045	1	0.045	0.017	
B	0.320	1	0.320	0.119	
C	0.180	1	0.180	0.067	
D	0.020	1	0.020	0.007	
e	18.330	3	6.110		
e^{Δ}	18.895	7	2.699		

由于 $F_{0.05}(1.7)=5.59$，故 4 因素的影响均不显著，但依顺序为：$\overset{\text{主}\to\text{次}}{B,C,A,D}$ 与（1）中极差分析结果一致.