一、 填空题：（每小题 3 分，合计 18 分）

1. 设向量$\vec{a}$与三个坐标面的夹角分别为ξ,η,ζ，则$\cos^2\xi+\cos^2\eta+\cos^2\zeta=$ <u>2</u>.

2. 设数量场$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$grad\ u|_{(1,0,1)}$ $=\underline{(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})}$.

3. 二次积分$\int_1^4 dx\int_x^4\frac{1}{x\ln y}dy$ $=$ <u>3</u>.

4. Σ为圆柱面$x^2+y^2=1$介于$z=0,z=1$之间部分，则$\iint_\Sigma(x+1)dS=\underline{2\pi}$.

5. 若积分$\int_L(x^4+4xy^\lambda)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$在$xoy$平面内与路径无关，则$\lambda=$ <u>3</u>.

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}x,0\le x<1\\-1,1\le x\le 2\end{cases}$. 已知$S(x)$是$f(x)$在$[0,2]$的余弦级数的和函数，则$S(2022)=$ <u>−1</u>.

二、选择题：（每小题 3 分，合计 30 分）

（注：请考生将选择题答案写入下面表格中.）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	A	D	C	C	B	A	D

1. 空间直线$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-5}$与平面$4x+3y+3z+1=0$的位置关系是（　　）.

   A、互相垂直　B、互相平行　C、不平行也不垂直　D、直线在平面上

2. 曲线$\begin{cases}z=2-x^2\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得的曲面与曲面$z=(x-1)^2+(y-1)^2$的交线在$xoy$面上的投影曲线方程为（　　）

   $A.\begin{cases}x^2+y^2-x-y=0\\z=0\end{cases}$　　$B.\begin{cases}2x^2+y^2-2x-2y=0\\z=0\end{cases}$

   $C.x^2+y^2-x-y=0$　　$D.2x^2+y^2-2x-2y=0$

3. 函数$z=3(x^2+y^2)-x^3$ 的极值点是（　　）.

   A、(0, 0)与（2, 0）　B、(2, 0)　C、(0, 0)　D、无

4. 若$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿x轴反方向的方向导数A，则$f(x,y)$ 在该点对x的偏导数（　　）.

   A、不一定存在　B、为A　C、为$-A$　D、一定不存在

5. 设$I_1=\iint_D\ln^3(x+y)dxdy,I_2=\iint_D(x+y)^3dxdy,I_3=\iint_D[\sin(x+y)]^3dxdy$，其中$D$由$x=0,$　$y=0,$ $x+y=\frac{1}{2},x+y=1$所围成，则I_1,I_2,I_3的大小顺序为（　　）.

   A、$I_1<I_2<I_3$　B、$I_3<I_2<I_1$　C、$I_3<I_1<I_2$　D、$I_1<I_3<I_2$

6. 已知L是曲线$x^2+y^2=a^2$，则曲线积分$\int_L(x+y)^2ds=$（　　）.

   A、a^2　B、a^3　C、$2\pi a^3$　D、πa^4

7. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径是 1，则级数在$x=3$点（　　）.

   A、绝对收敛　B、条件收敛　C、发散　D、不能确定敛散性

8. 曲面$x^2+\cos(xy)+yz+x=0$在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为（　　）.

A、$x+y+z=2$　B、$x-y+z=-2$　C、$x-2y+z=-3$　D、$x-y-z=0$

9. 设Σ为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧，则$\oiint_{\Sigma} zdxdy$ =（　　　）.

A、$\dfrac{4}{3}\pi R^3$　　B、0　　C、π　　D、$\dfrac{2}{3}\pi R^3$

10. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ＿＿＿＿＿＿ .

A、一定绝对收敛；　B、一定条件收敛；　C、一定发散；D、可能收敛也可能发散.

三、计算题:（每小题 7 分，共 35 分）

1、求过直线$L:\begin{cases} x-z+4=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$，并与平面$x-4y-8z+12=0$交成二面角为$\dfrac{\pi}{4}$的平面方程。

解：平面束方程为$\left(x-z+4\right)+\lambda(x+5y+z)=0 \Rightarrow \left(1+\lambda\right)x+5\lambda y+\left(\lambda-1\right)z+4=0$

又有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\left|\left\{\left(1+\lambda\right),5\lambda,\left(\lambda-1\right)\right\}\cdot\left\{1,-4,-8\right\}\right|}{\sqrt{\left(1+\lambda\right)^2+25\lambda^2+\left(1-\lambda\right)^2}\cdot\sqrt{1+16+64}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\left|1-3\lambda\right|}{9\sqrt{2+27\lambda^2}}\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{4}{3}$$

所以，所求的平面方程为　$x+20y+7z-12=0$或$x-z+4=0$

2、设$z=z(x,y)$是由方程$\varphi(x-az,y-bz)=0$所确定的隐函数，其中φ可微，求$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：令$F(x,y,z)=\varphi(x-az,y-bz)$，则$F_x=\varphi_1'$，$F_y=\varphi_2'$，$F_z=-a\varphi_1'-b\varphi_2'$，

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{\varphi_1'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{\varphi_2'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}$，

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a\varphi_1'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}+\frac{b\varphi_2'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}=1$$

3、设$f(x,\ y)$为连续函数，且$f(x,\ y)=\dfrac{\sin y}{y}-\iint\limits_D f(u,\ v)dudv$，其中$D$是由直线　$x=0,\ y=\pi,\ y=x$围成的区域，求$f(x,\ y)$.

解：设　$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=A$　，　则　$A=\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}dxdy-A\iint\limits_D dxdy$

$$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^{\pi}dy\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin ydy=2$$

$$\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\pi^2$$

由于　$A=2-A\dfrac{\pi^2}{2}$，　$A=\dfrac{4}{2+\pi^2}$

所以　$f(x,y)=\dfrac{\sin y}{y}-\dfrac{4}{2+\pi^2}$.

4、计算$\int_L (x^2-3y)dx-xdy$，其中L是由点（0，1）经圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$的下半圆周到点（2，1）的路径。

解：添加直线$L_1: y=1(0\le x\le 2)$，方向（2，1）点到（0，1）点，则

$$\int_L (x^2-3y)dx-xdy=\oint_{L+L_1} - \int_{L_1}$$

$$=\iint_D (-1-(-3))dxdy-\int_2^0 (x^2-3)dx$$

$$=\pi-\frac{10}{3}$$

5、计算曲面积分$I=\iint_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$ ，其中Σ是曲面$z=1-x^2-y^2,(z\ge 0)$上侧.

解:取Σ_1为xOy平面上被圆$x^2+y^2=1$所围部分的下侧，记Ω为由Σ与Σ_1围成的空间闭区域，

则$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由高斯公式知

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\mathrm{d}z=$$

$$12\pi\int_0^1[\tfrac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)]\mathrm{d}r=2\pi$$

而$\iint_{\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$

故$I=2\pi-3\pi=-\pi.$

四、（9 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$的收敛域、和函数$S(x)$ ，并求级数$\sum_{n=2}^{\infty} n(\frac{-1}{2})^n$的和$s$。

解：1）设$t=x-1$，则原式=$\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$，

先求收敛域，$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ，当$x=\pm 1$时发散，所以收敛域为（-1，1）

即 $-1<x-1<1$，所以收敛域为：$(0,2)$

2） $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}((x-1)^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n)'=(\frac{x-1}{2-x})'=\frac{1}{(2-x)^2}$， （$0<x<2$）

对于$\sum_{n=2}^{\infty} n(\frac{-1}{2})^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}S(\frac{1}{2})=\frac{5}{18}$，

五、(**8** 分) **(**以下题目二选一，多做不多给分**)**

1、一根绳长 2 m，截成三段，分别折成圆、正三角形与正方形，问：这三段分别为多长时使所得的面积总和最小，并求该最小值.

解：设圆的周长为x，正三角形周长为y，正方形的周长z，则由题设可知$x+y+z=2$，目标函数为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16},$$

故目标函数的拉格朗日函数为$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2),$

则有 $\begin{cases} L_x' = \dfrac{x}{2\pi} + \lambda = 0, \\ L_y' = \dfrac{2\sqrt{3}y}{36} + \lambda = 0, \\ L_z' = \dfrac{2z}{16} + \lambda = 0, \\ L_\lambda' = x + y + z - 2 = 0, \end{cases}$

解得

$x = \dfrac{2\pi}{\pi + 3\sqrt{3} + 4}, y = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3} + 4}, z = \dfrac{8}{\pi + 3\sqrt{3} + 4}$. 即驻点唯一.由实际问题可知最小值存在，

故此时面积总和最小，其值为 $S = \dfrac{1}{\pi + 3\sqrt{3} + 4}$.

2、将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体体积最大？

解：设长为 x，宽为 y，假设绕宽边旋转，则实际上是要求体积 $V = \pi x^2 y$ 在条件 $x + y = p$ 下的条件极值，为此构造 $L(x, y) = \pi x^2 y + \lambda(x + y - p)$.

解方程组 $\begin{cases} L_x = 2xy\pi + \lambda = 0, \\ L_y = \pi x^2 + \lambda = 0, \\ x + y = p, \end{cases}$ 得 $x = \dfrac{2}{3}p,\ y = \dfrac{p}{3}$.

由问题可知，圆柱体的最大体积一定存在，故当矩形的长、宽分别为 $\dfrac{2p}{3}$ 与 $\dfrac{p}{3}$ 时，绕宽边旋转体积最大，其值为 $\dfrac{4}{27}\pi p^3$.