第二章课后习题

【2.1】同时扔一对均匀的骰子，当得知“两骰子面朝上点数之和为 2”或“面朝上点数之和为 8”或“两骰子面朝上点数是 3 和 4”时，试问这三种情况分别获得多少信息量?

解:

“两骰子总点数之和为 2”有一种可能，即两骰子的点数各为 1，由于二者是独立的，因此该种情况发生的概率为 $P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，该事件的信息量为:

$$I=\log 36\approx 5.17\text{ 比特}$$

“两骰子总点数之和为 8”共有如下可能：2 和 6、3 和 5、4 和 4、5 和 3、6 和 2，概率为 $P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 5=\frac{5}{36}$，因此该事件的信息量为:

$$I=\log\frac{36}{5}\approx 2.85\text{ 比特}$$

“两骰子面朝上点数是 3 和 4”的可能性有两种:3 和 4、4 和 3，概率为 $P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{18}$，因此该事件的信息量为:

$$I=\log 18\approx 4.17\text{ 比特}$$

【2.2】居住某地区的女孩中有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 1.6 米以上的，而女孩中身高 1.6 米以上的占总数一半。假如我们得知“身高 1.6 米以上的某女孩是大学生”的消息，问获得多少信息量?

解:

设 A 表示女孩是大学生，$P(A)=0.25$；

B 表示女孩身高 1.6 米以上，$P(B\mid A)=0.75$，$P(B)=0.5$

“身高 1.6 米以上的某女孩是大学生”的发生概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.25\times 0.75}{0.5}=0.375$$

已知该事件所能获得的信息量为

$$I=\log\frac{1}{0.375}\approx 1.415\text{ 比特}$$

【2.3】设离散无记忆信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1=0 & a_2=1 & a_3=2 & a_4=3 \\ 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$，其发出的消息为

(202120130213001203210110321010021032011223210)，求

(1) 此消息的自信息是多少?

(2) 在此消息中平均每个符号携带的信息量是多少?

解:

信源是无记忆的，因此，发出的各消息之间是互相独立的，此时发出的消息的自信息即为各消息的自信息之和。根据已知条件，发出各消息所包含的信息量分别为:

$$I(a_0=0)=\log\frac{8}{3}=1.415\text{ 比特}$$

$$I(a_1=1)=\log 4=2\text{ 比特}$$

$$I(a_2=2)=\log 4=2\text{ 比特}$$

$$I(a_3=3)=\log 8=3\text{ 比特}$$

在发出的消息中，共有 14 个“0”符号，13 个“1”符号，12 个“2”符号，6 个“3”符号，则得到消息的自信息为:

$$I=14\times 1.415+13\times 2+12\times 2+6\times 3\approx 87.81\text{ 比特}$$

45 个符号共携带 87.81 比特的信息量，平均每个符号携带的信息量为

$$I=\frac{87.81}{45}=1.95\text{ 比特/符号}$$

注意: 消息中平均每个符号携带的信息量有别于离散平均无记忆信源平均每个符号携带的信息量，后者是信息熵，可计算得

$$H(X)=-\sum P(x)\log P(x)=1.91\text{比特/符号}$$

【2.4】设信源$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.16 & 0.17 \end{bmatrix}$，求此信源的熵，并解释为什么$H(X) > \log 6$，不满足信源熵的极值性。

解:

$$H(X) = -\sum P(x)\log P(x) = 2.65 > \log 6$$

原因是给定的信源空间不满足概率空间的完备集这一特性，因此不满足极值条件。

【2.5】设离散无记忆信源 S 其符号集 $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$，知其相应的概率分别为$(P_1, P_2, ..., P_q)$。设另一离散无记忆信源$S'$，其符号集为$S$信源符号集的两倍，$A' = \{a_i, i = 1,2,...,2q\}$，并且各符号的概率分布满足

$$\begin{aligned} &P_i' = (1-e)P_i \quad && i = 1,2,...,q \\ &P_i' = eP_i && i = q+1, q+2, ..., 2q \end{aligned}$$

试写出信源S'的信息熵与信源S的信息熵的关系。

解:

$$\begin{aligned} H(S') &= -\sum P(x)\log P(x) \\ &= -\sum (1-e)P_i \log(1-e)P_i - \sum eP_i \log eP_i \\ &= -(1-e)\sum P_i \log(1-e) - (1-e)\sum P_i \log P_i - e\sum P_i \log e - e\sum P_i \log P_i \\ &= -(1-e)\log(1-e) - e\log e + H(S) \\ &= H(S) + H(e, 1-e) \end{aligned}$$

【2.6】设有一概率空间，其概率分布为$\{p_1, p_2, ..., \ p_q\}$，并有$p_1 > p_2$。若取$p_1' = p_1 - e$，$p_2' = p_2 + e$，其中$0 < 2e \le p_1 - p_2$，而其他概率值不变。试证明由此所得新的概率空间的熵是增加的，并用熵的物理意义加以解释。

解:

设新的信源为X'，新信源的熵为:

$$H(X') = -\sum p_i \log p_i = -(p_1 - e)\log(p_1 - e) - (p_2 + e)\log(p_2 + e) - \mathbf{L} - p_q \log p_q$$

原信源的熵

$$H(X) = -\sum p_i \log p_i = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \mathbf{L} - p_q \log p_q$$

因此有，

$$H(X)-H(X')=(p_1-e)\log(p_1-e)+(p_2+e)\log(p_2+e)-p_1\log p_1-p_2\log p_2$$

令 $f(x)=(p_1-x)\log(p_1-x)+(p_2+x)\log(p_2+x)$， $x\in\left(0,\dfrac{p_1-p_2}{2}\right]$，则

$$f'(x)=\log\frac{p_2+x}{p_1-x}\le 0$$

即函数 $f(x)$ 为减函数，因此有 $f(0)\ge f(e)$，即

$$(p_1-e)\log(p_1-e)+(p_2+e)\log(p_2+e)\le p_1\log p_1+p_2\log p_2$$

因此 $H(X)\le H(X')$ 成立。

【解释】

当信源符号的概率趋向等概率分布时，不确定性增加，即信息熵是增加的。

【2.7】证明离散信源有 $H(X_1 \cdots X_2)\le H_N \quad (X_1)+H(X_2)+\cdots+H(X_N)$，并说明等式成立的条件。

证明:

$$H(X_1X_2\cdots X_N)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\cdots+H(X_N|X_1X_2\cdots X_{N-1})$$

而

$$\begin{aligned}
&H(X_N|X_1X_2\cdots X_{N-1})\\
&=-\sum_{X_1}\sum_{X_2}\cdots\sum_{X_N}P(x_1x_2\cdots x_N)\log P(x_N|x_1x_2\cdots x_{N-1})\\
&=-\sum_{X_1}\sum_{X_2}\cdots\sum_{X_{N-1}}P(x_1x_2\cdots x_{N-1})\sum_{X_N}P(x_N|x_1x_2\cdots x_{N-1})\log P(x_N|x_1x_2\cdots x_{N-1})\\
&\le-\sum_{X_1}\sum_{X_2}\cdots\sum_{X_{N-1}}P(x_1x_2\cdots x_{N-1})\sum_{X_N}P(x_N|x_1x_2\cdots x_{N-1})\log P(x_N)\\
&=H(X_N)
\end{aligned}$$

即

$$H(X_2|X_1)\le H(X_2)$$

$$H(X_3|X_1X_2)\le H(X_3)$$

……

代入上述不等式，有

$$H(X_1X_2\cdots X_N)\le H(X_1)+H(X_2)+\cdots+H(X_N)$$

等号成立的条件是:

$$P(x_N \mid x_1x_2\cdots x_{N-1}) = P(x_N)$$

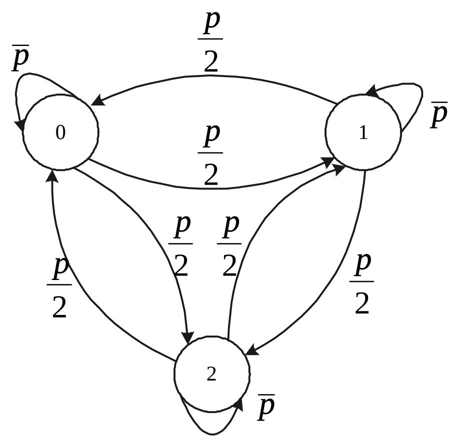
$$P(x_{N-1} \mid x_1x_2\cdots x_{N-2}) = P(x_{N-1})$$

……

$$P(x_2 \mid x_1) = P(x_2)$$

即离散平稳信源输出的 N 长的随机序列之间彼此统计无依赖时，等式成立。

【2.8】一阶马尔克夫信源的状态图如右图所示，信源 X 的符号集为 $\{0,1,2\}$ 并定义 $\bar{p}=1-p$ 。



（1） 求信源平稳后的概率分布 $P(0)$、 $P(1)$ 和 $P(2)$；

（2） 求此信源的熵 H_∞；

（3） 近似认为此信源为无记忆时，符号的概率分布等于平稳分布。求近似信源的熵 $H(X)$ 并与 H_∞ 进行比较;

（4） 对一阶马尔克夫信源 p 取何值时， H_∞ 取最大值，又当 $p=0$ 和 $p=1$ 时结果如何?

解:

根据切普曼—柯尔莫哥洛夫方程，可得

$$\begin{cases} P(0) = \bar{p}P(0) + \dfrac{p}{2}P(1) + \dfrac{p}{2}P(2) \\ P(1) = \dfrac{p}{2}P(0) + \bar{p}P(1) + \dfrac{p}{2}P(2) \\ P(2) = \dfrac{p}{2}P(0) + \dfrac{p}{2}P(1) + \bar{p}P(2) \\ P(0) + P(1) + P(2) = 1 \end{cases}$$

解得: $P(0) = P(1) = P(2) = \dfrac{1}{3}$

该一阶马尔克夫信源的信息熵为:

$$H_\infty = \sum Q(E_i)H(X \mid E_i) = -\bar{p}\log\bar{p} - p\log p + p \text{ 比特/符号}$$

当信源为无记忆信源，符号的概率分布等于平稳分布，此时信源的概率空间为:

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

此时信源的信息熵为$H(X) = \log 3 = 1.585$比特/符号

由上述计算结果可知：$H(X) \geq H(\infty)$。

求一阶马尔克夫信源熵H_∞的最大值，$H_\infty = -\overline{p}\log\overline{p} - p\log p + p$，有

$$\frac{dH_\infty}{dp} = \log\frac{2(1-p)}{p}$$

可得，当$p = \frac{2}{3}$时，H_∞达到最大值，此时最大值为$\log 3 = 1.585$比特/符号。

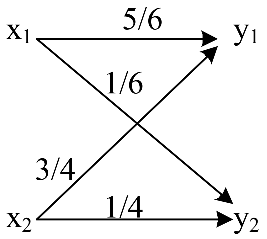
当$p = 0$时，$H_\infty = 0$比特/符号；$p = 1$时，$H_\infty = 1$比特/符号

第三章课后习题

【3.1】 设信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

通过一干扰信道，接收符号为$Y = [y_1, y_2]$，信道传递概率如下图所示，求



（1）信源 X 中事件 x_1 和 x_2 分别含有的自信息；

（2）收到消息 $y_j\,(j=1,2)$ 后，获得的关于 $x_i\,(i=1,2)$ 的信息量；

（3）信源 X 和信源 Y 的信息熵；

（4）信道疑义度 $H(X|Y)$ 和噪声熵 $H(Y|X)$；

（5）接收到消息 Y 后获得的平均互信息。

解:

（1）信源 X 中事件 x_1 和 x_2 分别含有的自信息分别为:

$$I(x_1) = \log\frac{1}{P(x_1)} = -\log 0.6 = 0.737 \text{ 比特}$$

$$I(x_2) = \log\frac{1}{P(x_2)} = -\log 0.4 = 1.32 \text{ 比特}$$

（2）根据给定的信道以及输入概率分布，可得

$$P(y_1) = \sum_X P(x_i)P(y_1|x_i) = 0.8$$
$$P(y_2) = \sum_X P(x_i)P(y_2|x_i) = 0.2$$

所求的互信息量分别为:

$$I(x_1;y_1) = \log\frac{P(y_1|x_1)}{P(y_1)} = \log\frac{5/6}{0.8} = \log\frac{25}{24} = 0.059 \text{ 比特}$$

$$I(x_2;y_1)=\log\frac{P(y_1|x_2)}{P(y_1)}=\log\frac{3/4}{0.8}=\log\frac{15}{16}=-0.093\text{ 比特}$$

$$I(x_1;y_2)=\log\frac{P(y_2|x_1)}{P(y_2)}=\log\frac{1/6}{0.2}=\log\frac{5}{6}=-0.263\text{ 比特}$$

$$I(x_2;y_2)=\log\frac{P(y_2|x_2)}{P(y_2)}=\log\frac{1/4}{0.2}=\log\frac{5}{4}=0.322\text{ 比特}$$

（3）信源 X 以及 Y 的熵为：

$$H(X)=-\sum_X P(x)\log P(x)=-0.6\log 0.6-0.4\log 0.4=0.971\text{ 比特/符号}$$

$$H(Y)=-\sum_Y P(y)\log P(y)=-0.8\log 0.8-0.2\log 0.2=0.722\text{ 比特/符号}$$

（4）信道疑义度 $H(X\mid Y)=-\sum_X P(x)\sum_Y P(y\mid x)\log P(x\mid y)$

而相关条件概率 $P(x|y)$ 计算如下：

$$P(x_1\mid y_1)=\frac{P(x_1,y_1)}{P(y_1)}=\frac{P(y_1\mid x_1)P(x_1)}{P(y_1)}=\frac{0.5}{0.8}=\frac{5}{8}$$

$$P(x_2\mid y_1)=\frac{3}{8}$$

$$P(x_1\mid y_2)=\frac{P(x_1,y_2)}{P(y_2)}=\frac{P(y_2\mid x_1)P(x_1)}{P(y_2)}=\frac{0.6/6}{0.2}=\frac{1}{2}$$

$$P(x_2\mid y_2)=\frac{1}{2}$$

由此计算出信道疑义度为：

$$H(X\mid Y)=-0.6\left[\frac{5}{6}\log\frac{5}{8}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{2}\right]-0.4\left[\frac{3}{4}\log\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}\right]=0.9635\text{ 比特/符号}$$

噪声熵为：

$$\begin{aligned}&H(Y\mid X)=-\sum P(x)P(y\mid x)\log P(y\mid x)\\&=-0.6\left[\frac{5}{6}\log\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right]-0.4\left[\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right]\\&=0.7145\text{比特/符号}\end{aligned}$$

（5）接收到信息 Y 后获得的平均互信息为：

$$I(X;Y)=H(X)-H(X\mid Y)=0.0075\text{ 比特/符号}$$

【3.2】 设二元对称信道的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

（1）若 P(0)=3/4，P(1)=1/4，求$H(X)$，$H(X|Y)$，$H(Y|X)$和$I(X;Y)$；

（2）求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布。

解:

（1）根据已知条件，有

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_X P(x_i)\log P(x_i) \\ &= -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} \\ &= 0.811\text{比特/符号} \end{aligned}$$

$$P(y=0) = \sum_X P(x)P(y=0|x) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$P(y=1) = \sum_X P(x)P(y=1|x) = \frac{5}{12}$$

$$P(x=0|y=0) = \frac{P(x=0)P(y=0|x=0)}{P(y=0)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}{7/12} = \frac{6}{7}$$

$$P(x=1|y=0) = \frac{1}{7}$$

$$P(x=0|y=1) = \frac{P(x=0)P(y=1|x=0)}{P(y=1)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}{5/12} = \frac{3}{5}$$

$$P(x=1|y=1) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_X P(x)\sum_Y P(y|x)\log P(y|x) \\ &= -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\right) \\ &= 0.918\text{比特/符号} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(X|Y) &= -\sum_X P(x)\sum_Y P(y|x)\log P(x|y) \\
&= -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\log\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\log\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{5}\right) \\
&= 0.749\text{比特/符号}
\end{aligned}
$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.062\ \text{比特/符号}$$

（2）此信道是对称信道，因此其信道容量为:

$$C=1-H(p)=1-H(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=0.082\ \text{比特/符号}$$

根据对称信道的性质可知，当 $P(0)=P(1)=\frac{1}{2}$ 时，信道的传输率 $I(X;Y)$ 达到信道容量。

【3.3】 求下列两个信道的信道容量，并加以比较

$$(1)\ \begin{bmatrix} \bar{p}-e & p-e & 2e \\ p-e & \bar{p}-e & 2e \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} \bar{p}-e & p-e & 2e & 0 \\ p-e & \bar{p}-e & 0 & 2e \end{bmatrix}$$

解: 这两个信道均是准对称信道，当输入符号等概率时，平均互信息达到信道容量，具体如下:

（1）该准对称信道的信道容量为:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \max\{H(Y)\}-H(\bar{p}-e,p-e,2e) \\
&= -\frac{1-2e}{2}\log\frac{1-2e}{2}-\frac{1-2e}{2}\log\frac{1-2e}{2}-2e\log 2e-H(\bar{p}-e,p-e,2e) \\
&= (1-2e)\log\frac{2}{1-2e}+(p-e)\log(p-e)+(\bar{p}-e)\log(\bar{p}-e)
\end{aligned}
$$

（2）该准对称信道的信道容量为:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \max\{H(Y)\}-H(\bar{p}-e,p-e,2e) \\
&= -\frac{1-2e}{2}\log\frac{1-2e}{2}-\frac{1-2e}{2}\log\frac{1-2e}{2}-e\log e-e\log e-H(\bar{p}-e,p-e,2e) \\
&= (1-2e)\log\frac{2}{1-2e}+(p-e)\log(p-e)+(\bar{p}-e)\log(\bar{p}-e)+2e \\
&= C_1+2e
\end{aligned}
$$

【3.4】 试证明$H(X)$是输入概率分布$P(x)$的上凸函数。

证明:

$$H(X)=-\sum_{X}P(x)\log P(x)$$

设存在两个概率分布$P_1(x)$和$P_2(x)$，目标是要证明

$$qH(P_1(x))+\bar{q}H(P_2(x))\le H(qP_1(x)+\bar{q}P_2(x))$$

证明过程如下:

$$\begin{aligned}
&qH(P_1(x))+\bar{q}H(P_2(x))-H(qP_1(x)+\bar{q}P_2(x))\\
&=-q\sum P_1(x)\log P_1(x)-\bar{q}\sum P_2(x)\log P_2(x)+\sum\left(qP_1(x)+\bar{q}P_2(x)\right)\log P(x)\\
&=q\sum P_1(x)\log\frac{P(x)}{P_1(x)}+\bar{q}\sum P_2(x)\log\frac{P(x)}{P_2(x)}\\
&\le q\log e\sum P_1(x)\left(\frac{P(x)}{P_1(x)}-1\right)+\bar{q}\log e\sum P_2(x)\left(\frac{P(x)}{P_2(x)}-1\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

【3.5】 从平均互信息的表达式证明，当信道和信源都是无记忆时，有

$$I(X^N;Y^N)=NI(X;Y)$$

证明：设$a_k=\left(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_N}\right),b_h=\left(b_{h_1}b_{h_2}\cdots b_{h_N}\right)$，按照给定信道和信源均是无记忆，

有

$$P(a_k)=P(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_N})=P(a_{k_1})P(a_{k_2})\cdots P(a_{k_N})$$

$$P(b_h\mid a_k)=P(b_{h_1}b_{h_2}\cdots b_{h_N}\mid a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_N})=P(b_{h_1}\mid a_{k_1})P(b_{h_2}\mid a_{k_2})\cdots P(b_{h_N}\mid a_{k_N})$$

$$\begin{aligned}
P(b_h)\ &=P(a_k)P(b_h\mid a_k)\\
&=P(a_{k_1})P(a_{k_2})\cdots P(a_{k_N})P(b_{h_1}\mid a_{k_1})P(b_{h_2}\mid a_{k_2})\cdots P({}_{h_N}\mid a_{k_N})\\
&=P(b_{h_1})P(b_{h_2})\cdots P({}_{h_N})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I(X^N;Y^N)=H(Y^N)-H(Y^N\mid X^N)\\
&=-\sum P(b_j)\log P(b_j)+\sum P(a_ib_j)\log P(b_j\mid a_i)\\
&=\sum P(a_ib_j)\log\frac{P(b_j\mid a_i)}{P(b_j)}\\
&=\sum P(a_ib_j)\log\frac{P(b_{h_1}\mid a_{k_1})P(b_{h_2}\mid a_{k_2})\cdots P(b_{h_N}\mid a_{k_N})}{P(b_{h_1})P(b_{h_2})\cdots P({}_{h_N})}\\
&=\sum P(a_ib_j)\log\frac{P(b_{h_1}\mid a_{k_1})}{P(b_{h_1})}+\cdots+\sum P(a_ib_j)\log\frac{P(b_{h_N}\mid a_{k_N})}{P(b_{h_N})}\\
&=I(X_1;Y_1)+I(X_2;Y_2)+\cdots+I(X_N;Y_N)
\end{aligned}$$

第五章课后习题

【5.1】有一信源，它有六个可能的输出，其概率分布如下表所示，表中给出了对应的码 A、B、C、D、E 和 F。

表 5.2

消息	$P(a_i)$	A	B	C	D	E	F
a_1	1/2	000	0	0	0	0	0
a_2	1/4	001	01	10	10	10	100
a_3	1/16	010	011	110	110	1100	101
a_4	1/16	011	0111	1110	1110	1101	110
a_5	1/16	100	01111	11110	1011	1110	111
a_6	1/16	101	011111	111110	1101	1111	011

(1) 求这些码中哪些是惟一可译码；

(2) 求哪些码是非延长码（即时码）；

(3) 求对所有惟一可译码求出其平均码长 $\overline{L}$ 。

解:

（1）上述码字中，A 为等长码，且为非奇异码，因此码 A 为惟一可译码；码 B 中，根据惟一可译码的判断方法，可求得其尾随后缀集合为 $\{1,11,111,1111,11111\}$，且其中任何后缀均不为码字，因此码 B 是惟一可译码。码 C 为逗点码，因此码 C 为惟一可译码；码 D 不是惟一可译码，因为其尾随后缀集合中包含 0，而 0 又是码字；码 E 的尾随后缀集合为空集，因此码 E 是惟一可译码；码 F 不是惟一可译码，因为其尾随后缀集合中包含 0，而 0 又是码字，因此 F 不是惟一可译码。

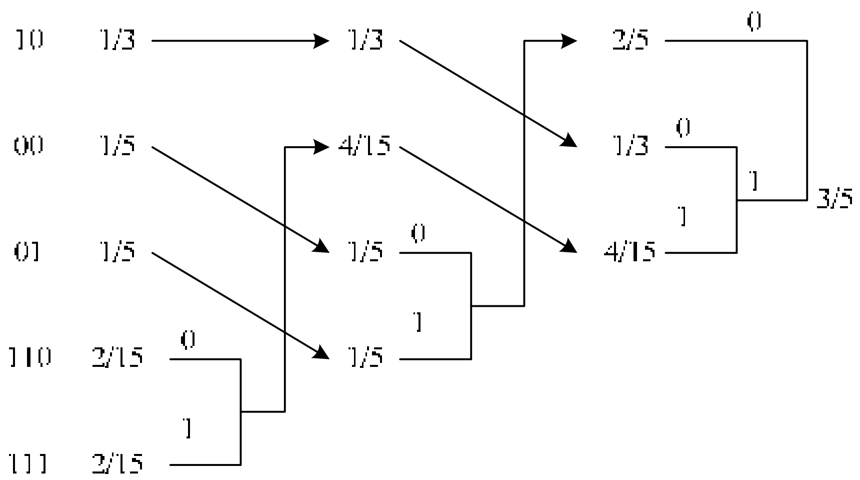
（2）码 A、C、E 是即时码（非延长码）

（3）码 A 的平均码长为 3；码 B 的平均码长为 2.125；码 C 的平均码长为 2.125；码 F 的平均码长为 2。

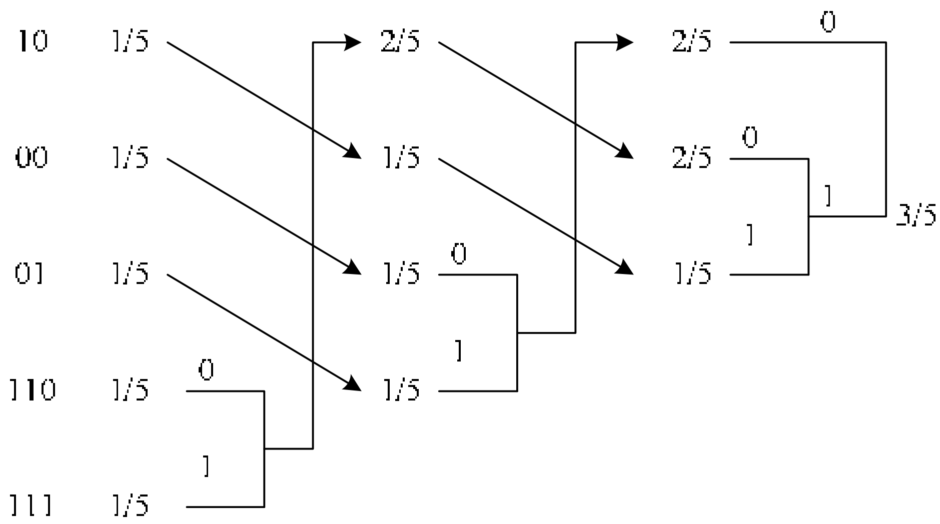
【5.3】求概率分布为(1/3,1/5,1/5,2/15,2/15)信源的二元霍夫曼码。讨论此码对于概率分布为(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5)的信源也是最佳二元码。

解:

概率分布为(1/3,1/5,1/5,2/15,2/15)信源二元霍夫曼编码过程如下:



同样，对于概率分布为(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5)的信源，编码过程如下:

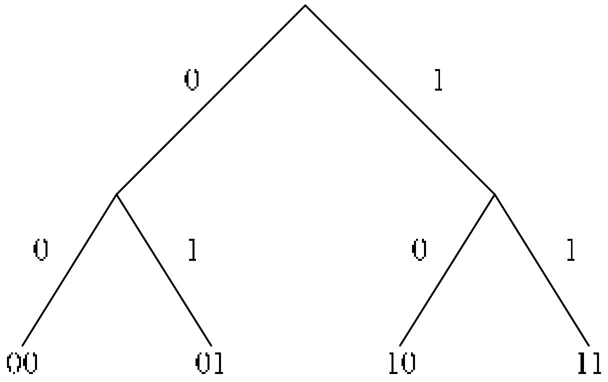


可见，二者的码字完全相同。

【5.4】设二元霍夫曼码为(00,01,10,11)和(0,10,110,111)，求出可以编得这样霍夫曼码的信源的所有概率分布。

解:

二元霍夫曼编码的过程必定是信源缩减的过程，编码为(00,01,10,11)的信源，其码树如下图所示。



假设四个信源符号的概率分别是 p_1, p_2, p_3, p_4，假设 $p_1 \ge p_2 \ge p_3 \ge p_4$，则必定有如下条件成立

$$p_1 \le p_3 + p_4$$

$$p_2 \le p_3 + p_4$$

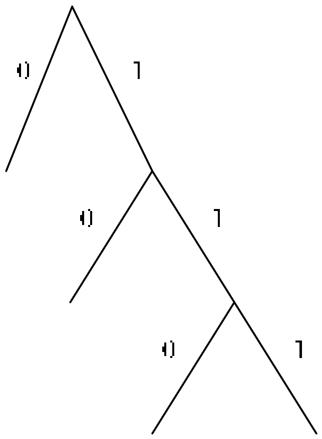
又 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$，即 $p_3 + p_4 \ge \frac{1}{3}$，因此要构造上述编码，必定要满足

$$p_3 + p_4 \ge \frac{1}{3}$$

$$p_1 \le p_3 + p_4$$

$$p_2 \le p_3 + p_4$$

而编码为(0,10,110,111)的码树如下图所示:



如果按上述情况进行编码，必定要满足 $p_2 \le p_1$， $p_3 + p_4 < p_1$，根据 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ 可得， $p_1 > \frac{1}{3}$。因此完成上述编码的概率分布为:

$$p_1 > \frac{1}{3}$$

$$p_2 \le p_1$$

$$p_3 + p_4 < p_1$$

【5.5】设信源符号集

$$\begin{bmatrix} S \\ P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

（1） 求 $H(S)$ 和信源冗余度;

（2） 设码符号为 $X = \{0,1\}$，编出 S 的紧致码，并求 S 的紧致码的平均码长 $\overline{L}$；

（3） 把信源的 N 次无记忆扩展信源 S^N 编成紧致码，试求出 $N = 2,3,4,\infty$ 时的平均码长 $\frac{\overline{L}_N}{N}$；

（4） 计算上述 $N = 1,2,3,4$ 这四种码的编码效率和码冗余度。

解:

（1） 信源熵为

$$H(S) = -\sum P(x) \log P(x) = 0.469 \text{ 比特/符号}$$

因此得信源冗余度为

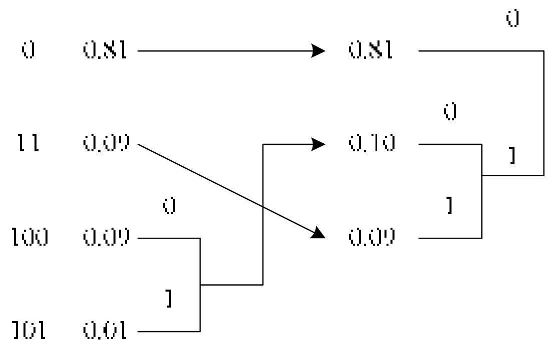
$$g = 1 - \frac{H(S)}{\log r} = 0.531$$

（2）对其进行紧致码编码，二个信源符号一个编码为 0，一个编码为 1，因此平均码长为 1 码符号/信源符号；

（3）对原码字进行二次扩展，其信源空间为：

$$\begin{bmatrix} S^2 \\ P(a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 s_1 & s_1 s_2 & s_2 s_1 & s_2 s_2 \\ 0.01 & 0.09 & 0.09 & 0.81 \end{bmatrix}$$

进行 Huffman 编码，得码字如下：



平均码长为：

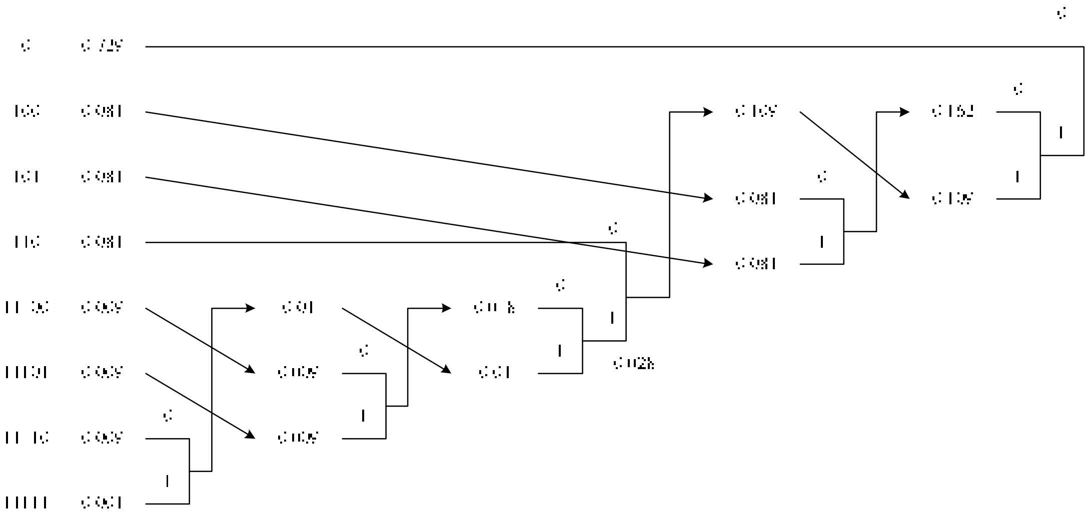
$$\overline{L}_2 = 0.81 + 0.18 + 0.27 + 0.03 = 1.29$$

$$\frac{\overline{L}_2}{N} = 0.645\text{ 码符号/信源符号}$$

对原信源进行三次扩展，得扩展信源空间为

$$\begin{bmatrix} s_1 s_1 s_1 & s_1 s_1 s_2 & s_1 s_2 s_1 & s_1 s_2 s_2 & s_2 s_1 s_1 & s_2 s_1 s_2 & s_2 s_2 s_1 & s_2 s_2 s_2 \\ 0.729 & 0.081 & 0.081 & 0.1^2 0.9 & 0.081 & 0.1^2 0.9 & 0.1^2 0.9 & 0.1^3 \end{bmatrix}$$

进行 Huffman 编码，码字如下：



扩展信源的平均码长为：

$$\overline{L}_3 = 0.729 + 0.081*9 + 0.009*15 + 0.005 = 1.598$$

$$\frac{\overline{L}_3}{N} = 0.532667 \text{ 码符号/信源符号}$$

四次扩展信源略；

当 $N \to \infty$ 时，根据香农第一定理，平均码长为：

$$\frac{\overline{L}_N}{N} = \frac{H(S)}{\log r} = 0.469 \text{ 码符号/信源符号}$$

（5） 编码效率为：$h = \dfrac{H(S)}{\dfrac{\overline{L}_N}{N}\log r} = \dfrac{H(S)}{\overline{L}}$

因此有

不进行信源扩展时，编码效率为：$h = \dfrac{H(S)}{\overline{L}} = 0.469$

进行一次扩展时，编码效率为：$h = \dfrac{H(S)}{\overline{L}} = 0.727$

进行二次扩展时，编码效率为：$h = \dfrac{H(S)}{\overline{L}} = 0.880476$

当 $N \to \infty$ 时，编码效率趋向于 1。

因此，从本题结论可看出，对于变长紧致码，扩展信源的次数不需很大时就可以达到高效的无失真编码，这一点与等长码有很大的不同。

【5.6】设有两个信源 X 和 Y 如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ P(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ 0.49 & 0.14 & 0.14 & 0.07 & 0.07 & 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$$

（1） 分别用霍夫曼码编成二元变长惟一可译码，并计算其编码效率；

（2） 分别用香农编码法编成二元变长惟一可译码，并计算编码效率；

（3） 分别用费诺编码方法编成二元变长惟一可译码，并计算编码效率；

（4） 从 X 、Y 两种不同信源来比较这三种编码方法的优缺点。

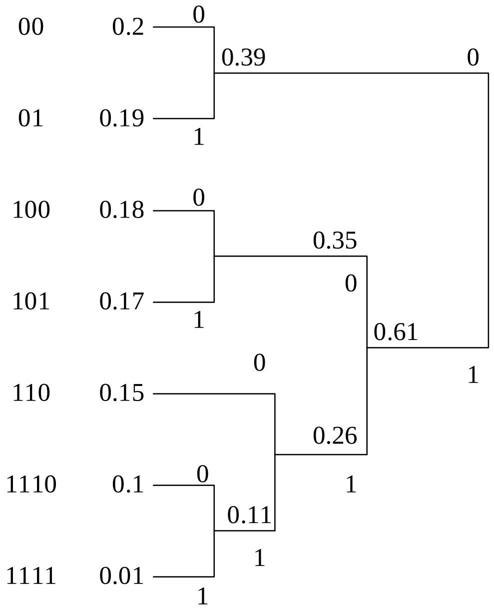
解：

第一个信源：

信源熵为：

$$H(X) = -\sum P(x)\log P(x) = 2.60868 \text{ 比特}$$

对其进行二元霍夫曼编码，如下所示：



平均码长为：

$$\overline{L} = 0.39*2 + 0.55*3 + 0.11*4 = 2.72 \text{ 码符号/信源符号}$$

编码效率为：

$$h = \frac{H(X)}{\overline{L}} = 0.95907$$

对其进行费诺编码，如下所示：

<table>
<tr><td>00</td><td>0.2</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>010</td><td>0.19</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>011</td><td>0.18</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.17</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>110</td><td>0.15</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1110</td><td>0.1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1111</td><td>0.01</td><td>1</td></tr>
</table>

平均码长为：

$$\overline{L} = 0.4 + 0.37 * 3 + 0.34 + 0.45 + 0.44 = 2.74 \text{码符号/信源符号}$$

编码效率为：

$$h = \frac{H(X)}{\overline{L}} = 0.95207$$

对其进行香农编码，如下所示。

概率	码长	累积概率分布	二进制小数	码字
0.2	3	0	0.0	000
0.19	3	0.2	0.001100110011	001
0.18	3	0.39	0.011000111101	011
0.17	3	0.57	0.100100011110	100
0.15	3	0.74	0.101111010111	101
0.1	4	0.89	0.111000111101	1110
0.01	7	0.99	0.111111010111	1111111

其平均码长为：

$$\overline{L} = 0.89 * 3 + 0.4 + 0.07 = 3.14 \text{码符号/信源符号}$$

编码效率为：

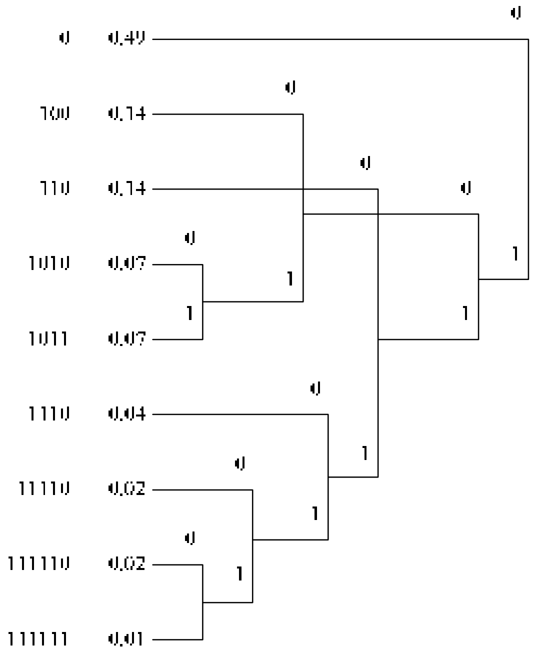
$$h = \frac{H(X)}{\overline{L}} = 0.83079$$

第二个信源：

信源熵为：

$$H(Y) = -\sum P(y) \log P(y) = 2.31356 \text{比特}$$

对其进行二元霍夫曼编码，如下所示。



平均码长为：

$$\overline{L} = 0.49 + 0.28 * 3 + 0.18 * 4 + 0.02 * 5 + 0.03 * 6 = 2.33 \text{码符号/信源符号}$$

编码效率为：

$$h = \frac{H(Y)}{\overline{L}} = 0.99294$$

对其进行费诺编码，如下所示。

<table>
<tr><td>0</td><td>0.49</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>100</td><td>0.14</td><td rowspan="8">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>101</td><td>0.14</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1100</td><td>0.07</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1101</td><td>0.07</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1110</td><td>0.04</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11110</td><td>0.02</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>111110</td><td>0.02</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>111111</td><td>0.01</td><td>1</td></tr>
</table>

平均码长为：

$$\overline{L} = 0.49 + 0.28 * 3 + 0.18 * 4 + 0.02 * 5 + 0.03 * 6 = 2.33 \text{码符号/信源符号}$$

编码效率为：

$$h=\frac{H(Y)}{\bar{L}}=0.99294$$

对其进行香农编码，如下所示：

概率	码长	累积概率分布	二进制小数	码字
0.49	2	0	0.0	00
0.14	3	0.49	0.011111010111	011
0.14	3	0.63	0.101000010100	101
0.07	4	0.77	0.110001010001	1100
0.07	4	0.84	0.110101110000	1101
0.04	5	0.91	0.111010001111	11101
0.02	6	0.95	0.111100110011	111100
0.02	6	0.97	0.111110000101	111110
0.01	7	0.99	0.111111010111	1111110

平均码长为：

$$\bar{L}=0.49*2+0.28*3+0.14*4+0.04*5+0.04*6+0.01*7=2.89$$

编码效率为：

$$h=\frac{H(Y)}{\bar{L}}=0.80054$$

从上述编码中可以看出，霍夫曼编码的平均码长最短，编码效率最高，香农编码的平均码长最长，其编码效率最低，费诺编码居中。

第六章课后习题

【6.1】设有一离散信道，其信道传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

并设 $P(x_1)=\frac{1}{2}$，$P(x_2)=P(x_3)=\frac{1}{4}$，试分别按最小错误概率准则与最大似然译码准则确定译码规则，并计算相应的平均错误概率。

解:

假设输入符号集和输出符号集分别为 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $\{y_1,y_2,y_3\}$。

按照最大似然译码规则，选择如下:

$$\begin{aligned} F(y_1)&=x_1 \\ F(y_2)&=x_2 \\ F(y_3)&=x_3 \end{aligned}$$

平均错误概率为:

$$\begin{aligned} P_E &= \sum_{X}\sum_{Y-x^*\text{对应的}y_j} P(x_i)P(y_j\mid x_i) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

如果需要按照最小错误概率译码，需要首先求出其联合概率矩阵:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

最小错误概率译码规则应如下：

$$
\begin{aligned}
F(y_1) &= x_1 \\
F(y_2) &= x_1 \\
F(y_3) &= x_3
\end{aligned}
$$

此时错误概率为：

$$
\begin{aligned}
P_E &= \sum_{X} \sum_{Y-x^*\text{对应的}y_j} P(x_i)P(y_j \mid x_i) \\
&= \sum_{X} \sum_{Y-x^*\text{对应的}y_j} P(x_i, y_j) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \\
&= \frac{11}{24}
\end{aligned}
$$

【6.2】设某二元码为 $C = \{11100, 01001, 10010, 00111\}$

（1） 计算此码的最小距离 $d_{\min}$；

（2） 计算此码的码率 R，假设码字等概率分布；

（3） 采用最小距离译码准则，试问接收序列 10000，01100 和 00100 应译成什么码字?

（4） 此码能纠正几位码元的错误?

解：

（1） 此码字的最小距离 $d_{\min} = 3$；

（2） 此码字的码率 $R = \dfrac{\log M}{n} = \dfrac{2}{5}$ 比特/码符号；

（3） 采用最小距离译码，10000 应译成 10010；01100 应译成 11100；00100 译成 11100、00111 均可；

（4） 由于 $d_{\min} = 3 = 2 \times 1 + 1$，因此此码能纠正 1 位码元的错误。