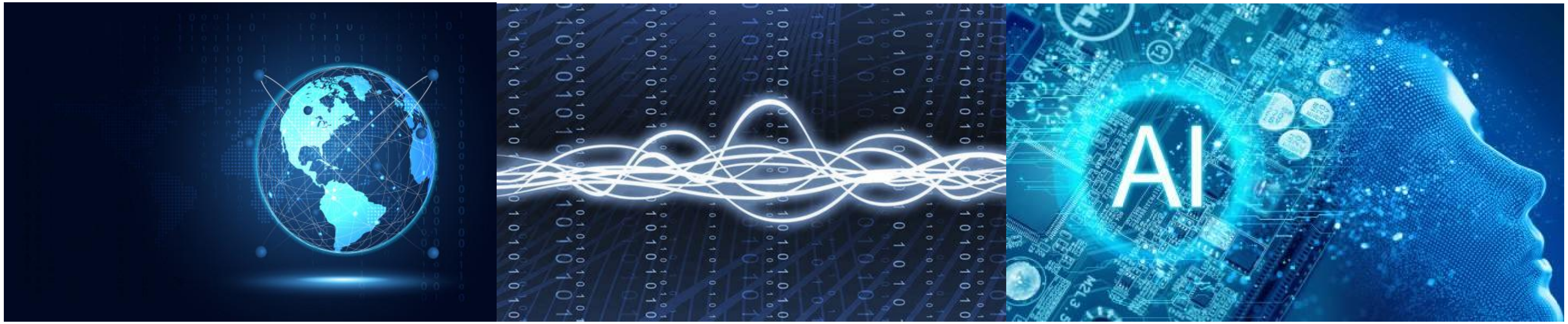


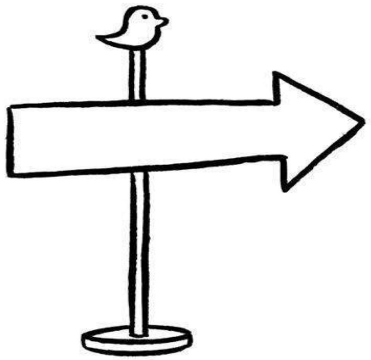
《数字信号处理》

授课教师：王丰
fengwang13@gdut.edu.cn
广东工业大学信息工程学院电子系

提纲-z变换与离散时间傅里叶变换（DTFT）

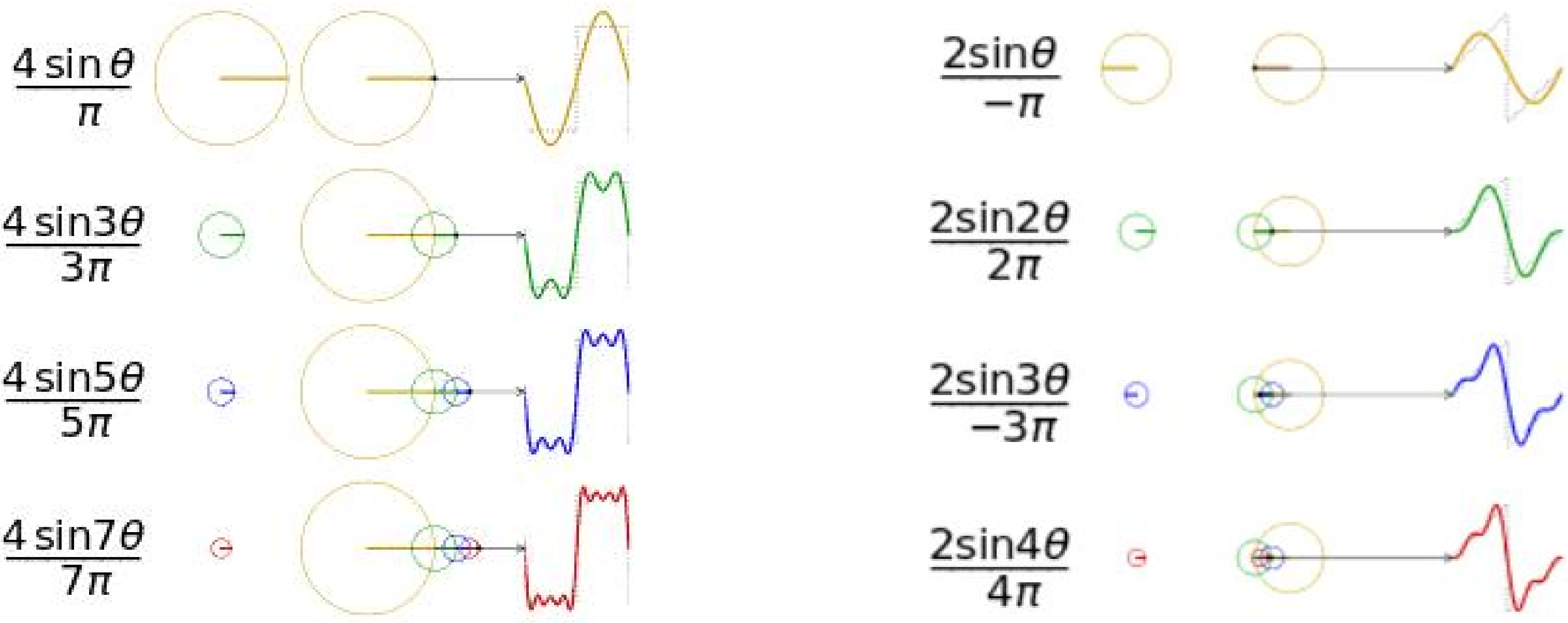
fengwang13@gdut.edu.cn

- 2.1 序列的Z变换
- 2.2 离散时间傅里叶变换(DTFT)
- 2.3 变换之间的关系
- 2.4 离散线性移不变（LSI）系统的频域表征
- 2.5 MATLAB函数及例题（上机）



圆周运动、正弦曲线

fengwang13@gdut.edu.cn



2.1 序列的Z变换(z-transform)

fengwang13@gdut.edu.cn

□z变换的定义

只有幂级数收敛时，才有意义！

$$X(z)=Z\left[x(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

(复变量z的幂级数)

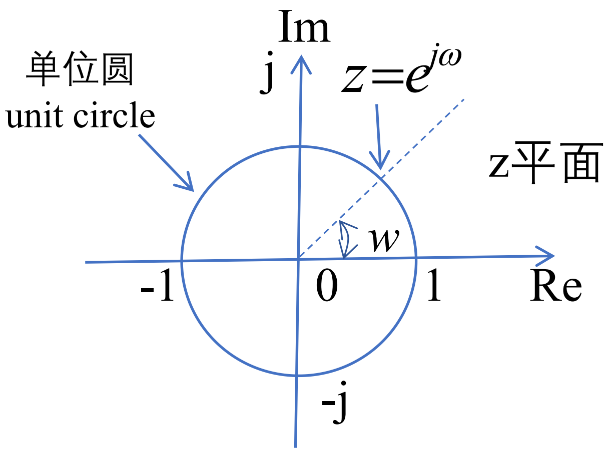
z变换的收敛域

ROC: Region of Convergence

$z=r\cdot e^{j\omega}$

(极坐标表示) → z平面

(复平面)



□z反变换的定义

围线积分

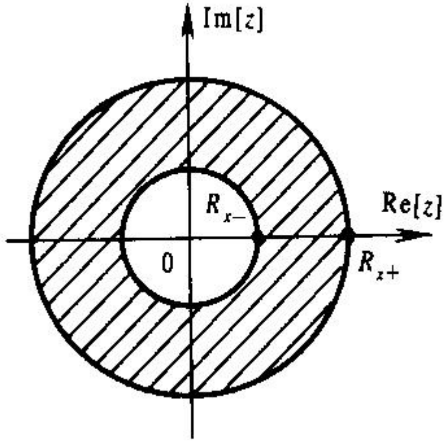
$$x(n)=Z^{-1}\left[X(z)\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

收敛域中围绕原点的一条逆时针旋转的闭合围线

2.1.2 Z变换的收敛域

fengwang13@gdut.edu.cn

- 对于任意序列x(n)，能使X(z)收敛(|X(z)|<∞)的所有z值的集合，称为X(z)的**收敛域ROC**



- z变换公式的幂级数收敛的**充要条件**：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$ **(绝对可和)**

- 对于某一具体的x(n)，|z|值必须在一定范围内才能绝对可和，这个|z|的范围，就是X(z)的收敛域，**收敛域内不能有极点。**

- 对一个确定的序列x(n)，它的z变换X(z)表达式和收敛域二者**共同**唯一确定该序列！

例题

fengwang13@gdut.edu.cn

请计算序列的z变换：1、$x(n)=a^n u(n)$；2、$x(n)=-a^n u(-n-1)$

解：1、 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}},\ RoC:\left|az^{-1}\right|<1,\ 即|z|>|a|$$

2、 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^n=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$RoC:\left|a^{-1}z\right|<1,\ 即|z|<|a|$$

例题

fengwang13@gdut.edu.cn

例：已知某序列是2个实指数序列之和： $x(n)=5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ **计算z变换。**

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right)z^{-n}$$

$$=5\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)z^{-n}-3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)z^{-n}$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n-3\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$=\boxed{5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n}-\boxed{3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z\right)^n}$$

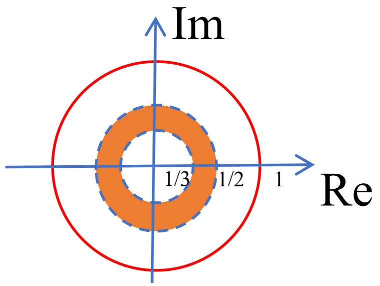
$$=\frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{8-\frac{7}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

收敛域ROC的确定：2个和式都必须收敛因此，

$$\text{ROC1}:\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1,\ \text{即}|z|>\frac{1}{3}$$

$$\text{ROC2}:\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z\right|<1,\ \text{即}|z|<\frac{1}{2}$$

$$\text{ROC}=\text{ROC1}\cap\text{ROC2}:\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$



练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

计算序列 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$ **的z变换。**

【答案】 $X(z)=\dfrac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{\left(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)\left(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)}, ROC:|z|>\frac{1}{3}$

z变换收敛域ROC的性质

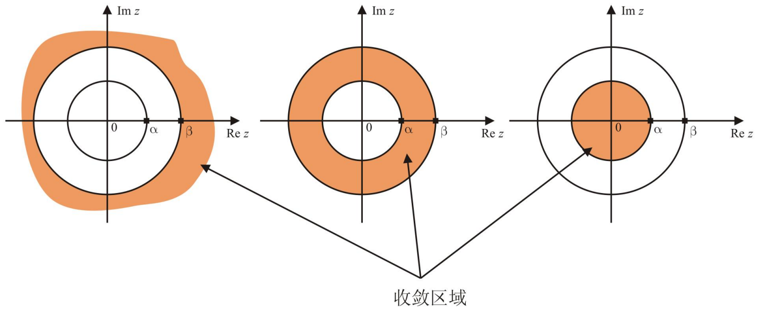
fengwang13@gdut.edu.cn

- 1、X(z)的收敛域是在z平面内**以原点为中心的圆环**
  - 特殊情况1：内圆半径=0
  - 特殊情况2：外圆半径=∞
- 2、**收敛域不包含任何极点**
- 3、若x(n)是**右边**序列，则收敛域在**圆外**；若x(n)是**左边**序列，则收敛域在**圆内**

思考：请讨论与该X(z)有关的所有可能的收敛域，其中

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

【答案】共3种可能：



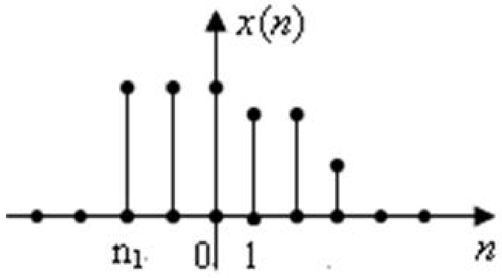
2.1.3 4种典型序列的Z变换的收敛域

fengwang13@gdut.edu.cn

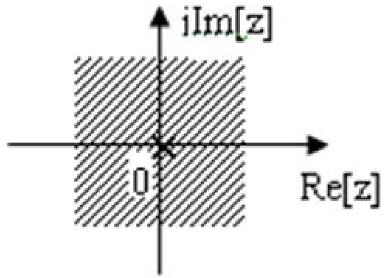
1有限长序列

$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$



(a) $x(n)(n_1<0、n_2>0)$



(b) $X(z)$收敛域($z=0$、$z=\infty$除外)

只要级数每一项收敛，则有限和$\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$有界，收敛域至少为$z\in(0,\infty)$

当$n_1 \ge 0$时，收敛域不包括0点，即 $0<|z|\le\infty$

当$n_2 \le 0$时，收敛域不包括∞点，即$0\le|z|<\infty$

当$n_1<0<n_2$时，收敛域不包含0、∞点，即$0<|z|<\infty$

注：当$n\ge 0$时，$|z^{-n}|=1/|z^n|$，只要$z\ne 0$，则$|z^{-n}|<\infty$

同样，当$n<0$时，$|z^{-n}|=|z^{|n|}|$，只要$z\ne\infty$，则$|z^{-n}|<\infty$

所以收敛域$0<|z|<\infty$也就是除$z=0, z=\infty$外的开域$(0,\infty)$，即所谓“有限z平面”。

2.1.3 4种典型序列的Z变换的收敛域

fengwang13@gdut.edu.cn

2、右边序列

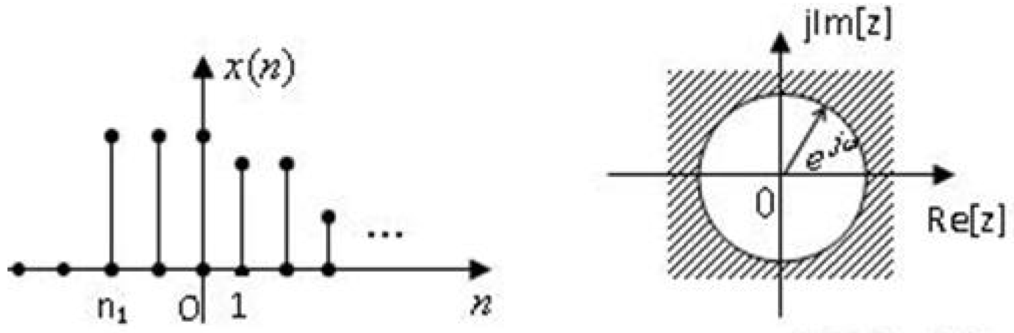
$$x(n)=0 \quad n<n_1$$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

当$n_1 \ge 0$时，收敛域：$R_c<|z|\le\infty$

当$n_1 < 0$时，收敛域：$R_c<|z|<\infty$



(a) $x(n)$ ($n_1<0$)

(b) $X(z)$收敛域(不包括$z=\infty$)

2.1.3 4种典型序列的Z变换的收敛域

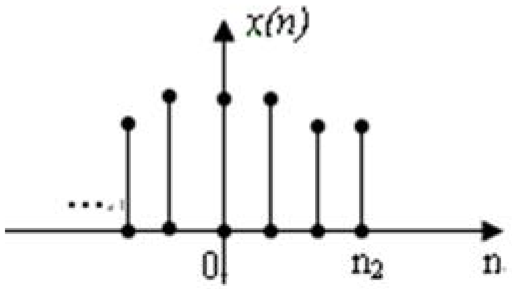
fengwang13@gdut.edu.cn

3、左边序列

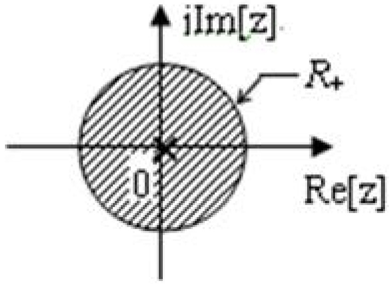
$$x(n)=0 \quad n>n_2$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0} x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$



(a) $x(n)\,(n_2>0)$



(b) $X(z)$收敛域(不包括$z=0$)

□当$n_2 \le 0$时，ROC：$0 \le |z| < R_x$

□当$n_2 > 0$时，ROC：$0 < |z| < R_x$

2.1.3 4种典型序列的Z变换的收敛域

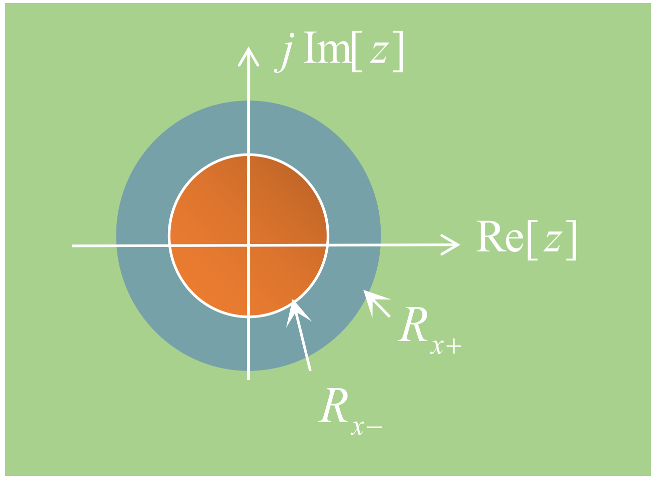
fengwang13@gdut.edu.cn

4 双边序列：n为任意值时，x(n)皆有值

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}}_{RoC:0\le z<R_{x^+}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}}_{RoC:R_{x^-}<|z|\le\infty}$$

- 当$R_{x^-}\ge R_{x^+}$时，$RoC:\varnothing$

  当$R_{x^-}<R_{x^+}$时，$RoC:R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$



练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

- 序列$x(n)= a^n u(n)+a^{-n} u(-n-1)$，其中实数a满足$|a|<1$，其收敛域为________

(答案：$|a|<|z|<|a|^{-1}$)

- 单位抽样序列δ(n)的收敛域是整个z平面。　(正确)

- 序列$x_1(n)=a^n u(n)$和$x_2(n)=-a^n u(-n-1)$的z变换相同，但收敛域不同。　(正确)

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

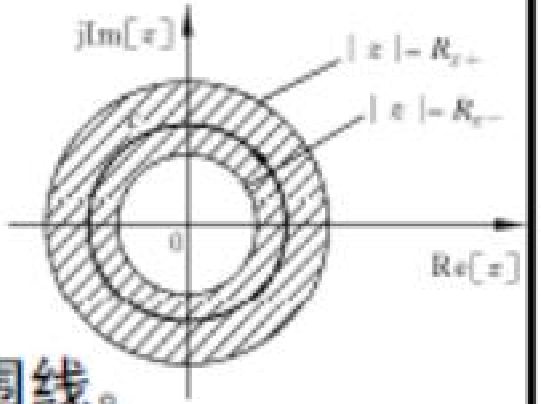
z 反变换：从 $X(z)$ 中还原出原序列 $x(n)=Z^{-1}[X(z)]$

- 实质：求 $X(z)$ 幂级数展开式的系数
- z 反变换的求解方法：围线积分法（留数法）、部分分式展开法、长除法（幂级数法）

设 $x(n)$ 的 z 变换为幂级数 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则 $X(z)$ 的 z 反变换为围线积分：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \quad c\in(R_{x-},R_{x+})$$



其中围线 c 是在 $X(z)$ 的收敛域中

环绕原点的一条逆时针旋转的闭合单围线。

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

1. 围线积分法（留数法）

- 围线积分可用留数法求解

若函数 $F(z)=X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 上连续，在 c 以内有 K 个极点 z_k，而在 c 以外有 M 个极点 z_m，且分母多项式 z 的阶次比分子多项式 z 的阶次高二阶或二阶以上，则有：

$$x(n)=\sum_k \mathrm{Res}[F(z)]_{z=z_k} \quad \text{或} \quad x(n)=-\sum_m \mathrm{Res}[F(z)]_{z=z_m}$$

单阶极点的留数：$\mathrm{Res}[F(z)]_{z=z_r}=[(z-z_r)F(z)]_{z=z_r}$

多重 (l 阶) 极点的留数：

$$\mathrm{Res}[F(z)]_{z=z_r}=\frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}[(z-z_r)^l F(z)]_{z=z_r}$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

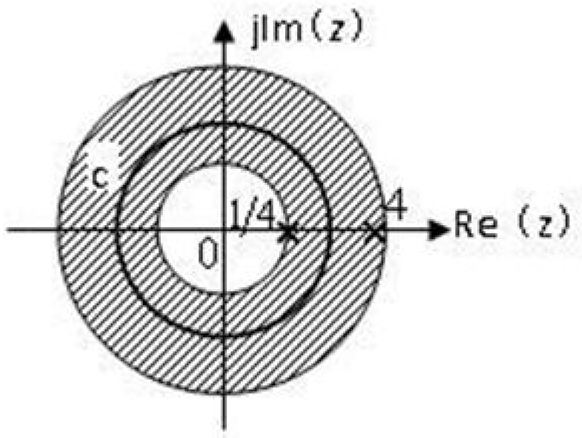
例2.7 试用留数法求 $X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}, \frac{1}{4}<|z|<4$ 的z反变换

解：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}dz$$

$$=\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}\right]_{z=z_k}$$

c为 $X(z)$ 收敛域内的围线



2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

(1) 当 $n \geq -1$时，围线c内只有一个一阶极点 $z=\dfrac{1}{4}$，则

$$x(n)=\mathrm{Res}\left[\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z^{n+1}}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right]_{z=\frac{1}{4}}=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{n},\quad n\geq -1$$

(2)当$n \leq -2$ 时，围线c外只有一个一阶极点$z=4$，而c内有一个一阶极点 $z=\dfrac{1}{4}$ 以及$-(n+1)$阶极点 $z=0$，即 $\dfrac{z^{n+1}}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$

$$x(n)=-\mathrm{Res}\left[(z-4)\frac{z^{n+1}}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right]_{z=4}=\frac{1}{15}(4)^{n+2},\quad n\leq -2$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

综合上述分析，得

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{15}(\dfrac{1}{4})^{n}, & n\geq -1\\ \dfrac{1}{15}(4)^{n+2}, & n\leq -2\end{cases}$$

或 $$x(n)=\frac{4^{-n}}{15}u(n+1)+\frac{4^{n+2}}{15}u(-n-2)$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

当$n<-1$时

$F(z)$在围线c内有一阶极点$z=\dfrac{1}{4}$和$-(n+1)$阶极点$z=0$

而围线c外只有一阶极点$z=4$，且$F(z)$的分母多项式

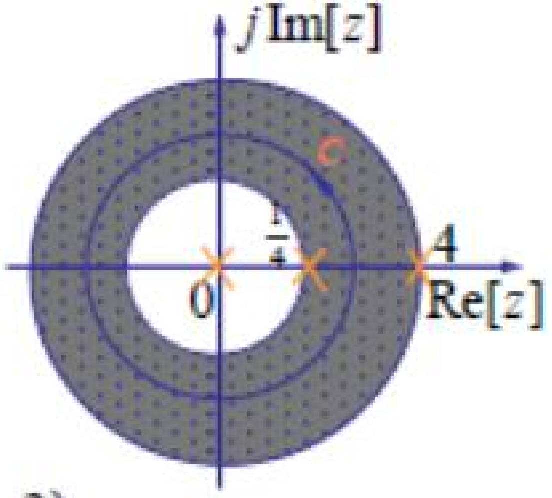
阶次高于分子多项式阶次两次以上

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=4}$$

$$=-\left[(z-4)\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}\right]_{z=4}$$

$$=\frac{4^{n+2}}{15}$$

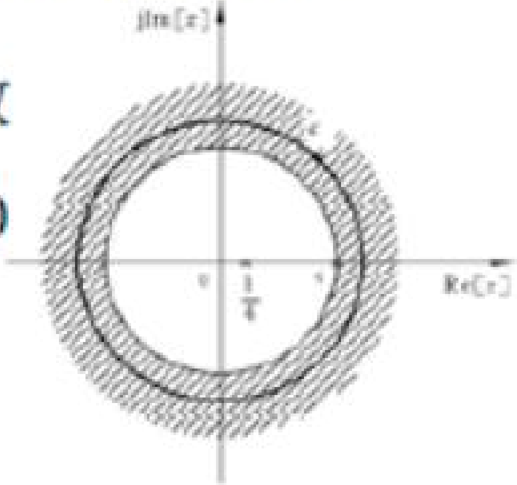
$$\therefore x(n)=\frac{4^{-n}}{15}u(n+1)+\frac{4^{n+2}}{15}u(-n-2)$$



2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

例7：$X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$，$|z|>4$，求$z$反变换



解：$\because \lim\limits_{z\to\infty} X(z)=-1$，在$z=\infty$处收敛

$\therefore x(n)$是因果序列：$x(n)=0$，$n<0$

当$n\geq 0$时 $F(z)=\dfrac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$

在围线c内有一阶极点$z=4,\dfrac{1}{4}$

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z)]_{z=4}+\mathrm{Res}[F(z)]_{z=1/4}=\frac{1}{15}(4^{-n}-4^{n+2})$$

$$\therefore x(n)=\frac{1}{15}(4^{-n}-4^{n+2})u(n)$$

2.1.4 常用的Z变换对

fengwang13@gdut.edu.cn

TABLE 4.1 *Some common z-transform pairs*

Sequence	*Transform*	*ROC*
$\delta(n)$	1	$\forall\, z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-b^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-bz^{-1}}$	$\|z\| < \|b\|$
$[a^n \sin\omega_0 n]\, u(n)$	$\dfrac{(a\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$[a^n \cos\omega_0 n]\, u(n)$	$\dfrac{1-(a\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-nb^n u(-n-1)$	$\dfrac{bz^{-1}}{(1-bz^{-1})^2}$	$\|z\| < \|b\|$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

2. 部分分式展开法

若 $X(z)$ 可以表示成 z^{-1} 的有理分式：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{j=1}^{r}\frac{C_j}{(1-z_i z^{-1})^j}$$

- 利用部分分式的 z 反变换和可以得到 $X(z)$ 的 z 反变换

用留数定理求系数：

$$A_k=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_k}\qquad k=1,2,\cdots,N-r$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

例题 已知

$$X(z)=\frac{5z}{(z^2+z-6)}\quad,\quad 2<|z|<3$$

利用部分分式展开法求z反变换 $x(n)$ 。

解 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{(z-2)(z+3)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1=\left[(z-2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=1$$

$$A_2=\left[(z+3)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-3}=-1$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

得： $$X(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z+3}=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|>2\leftrightarrow 2^n u(n)$$

$$\frac{1}{1+3z^{-1}},|z|<2\leftrightarrow (-3)^n u(-n-1)$$

因此， $x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

3. 幂级数展开法（长除法）

- 一般 $X(z)$ 是有理分式，可利用分子多项式除以分母多项式（长除法法）得到幂级数展开式，从而得到 $x(n)$。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\cdots+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+\cdots$$

先根据收敛域判断 $x(n)$ 的性质，

再展开成相应的 z 的幂级数

	$x(n)$	将$X(z)$展成z的	$X(z)$的分子分母按z的
$\|z\|>R_{x-}$	因果序列	负幂级数	降幂排列
$\|z\|<R_{x+}$	左边序列	正幂级数	升幂排列

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

例 9：$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$，ROC1: $|z|>|a|$

解：由 Roc 判定 $x(n)$是因果序列，用长除法展成 z 的负幂级数

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\dots \\
\hline
1-az^{-1} & 1 \\
 & 1-az^{-1} \\
\hline
 & az^{-1} \\
 & az^{-1}-a^2z^{-2} \\
\hline
 & a^2z^{-2}
\end{array}
$$

$$x[n]=\{1,a,a^2,\dots\}$$

↑

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\dots$$

2.1.4 Z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

ROC2: $|z| < |a|$

解：由 Roc 判定 $x(n)$是左边序列，用长除法展成 z 的正幂级数

$$
\begin{array}{r l}
 & -a^{-1}z - a^{-2}z^{2} - \dots \\ \hline
-az^{-1}+1 \,) & 1 \\
 & 1 - a^{-1}z \\ \hline
 & a^{-1}z \\
 & a^{-1}z - a^{2}z^{2} \\ \hline
 & a^{2}z^{2}
\end{array}
$$

$$x[n] = \{\dots, -a^{-2}, -a^{-1}, 0\}$$

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^{2} - \dots$$

- 若 $X(z)$ 的 Roc 为环状?

$x(n)$ 是双边序列，极点分别对应右边序列、左边序列

将 $X(z)$ 展成部分分式，分别做长除法

练一练:部分分式法求z反变换

fengwang13@gdut.edu.cn

已知 $X(z)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$，请根据与该X(z)有关的所有可能的收敛域，求x(n)

【答案】共3种可能

单选题 1分

设置

在求z反变换时，采用围线积分，若围线c外没有极点，则序列x(n)是因果序列。

A 正确

B 错误

提交

2.1.5 Z变换的性质与定理

fengwang13@gdut.edu.cn

1、线性：$ax(n)+by(n) \Leftrightarrow aX(z)+bY(z)$　R1∩R2

- 如果这些线性组合中某些零点与极点互相抵消，则收敛域可能扩大。

2、序列的移位：$x(n-m) \Leftrightarrow z^{-m}X(z)$　R

3、初值定理：对因果序列，$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$

4、终值定理：若 $x(n)$ 是因果序列，且其 z 变换的极点均在单位圆内部，最多只有一个一阶极点在 z=1 上，则 $x(n)$ 在 n 趋于无穷时的终值等于：

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

2.1.5 Z变换的性质与定理

fengwang13@gdut.edu.cn

5、序列的卷积和（时域卷积和定理）

$$x(n)*y(n) \Leftrightarrow X(z)Y(z) \quad R1 \cap R2$$

- 如果收敛域边界上一个 z 变换的零点与另一个 z 变换的极点可互相抵消，则收敛域还可扩大。

6、z 域尺度变换（乘以指数序列）

$$a^n x(n) \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right) \quad |a|R$$

7、z 域求导数（序列的线性加权）

$$nx(n) \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z) \quad R$$

8、共轭序列 $x^*(n) \Leftrightarrow X^*(z^*) \quad R$

9、翻褶序列 $x(-n) \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \quad 1/R$

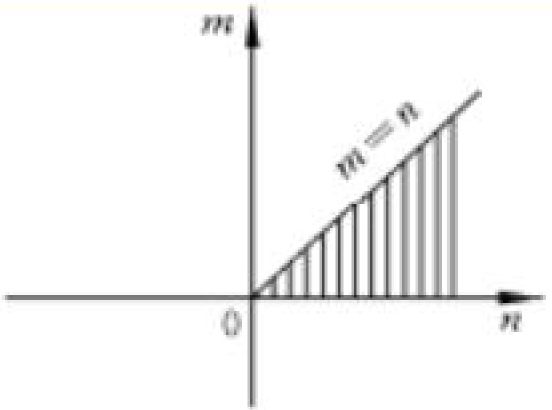
2.1.5 Z变换的性质与定理

fengwang13@gdut.edu.cn

10、因果序列累加特性

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)\Leftrightarrow\frac{z}{z-1}X(z)$$

$$|z|>\max[R_{x-},1]$$



11、序列相乘（z 域复卷积定理）

$$x(n)h(n)\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})H(v)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{h-}<|z|<R_{x+}R_{h+}$$

12、Parseval 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)h^{*}(n)\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^{*}(\frac{1}{v^{*}})v^{-1}dv$$

多选题 1分

设置

序列$x(n)=\sin(0.3\pi n)u(n)$的极点有

A $e^{j0.3\pi}$

B $e^{-j0.3\pi}$

C 1

D 0

E ∞

提交

多选题 1分

设置

已知$x(n)=3^{-n}u(n)+3^{n}u(-n-1)$，找出$X(z)$的所有极点________

A 0

B 3

C 1/3

D ∞

提交

2.1.5 Z变换的性质与定理

fengwang13@gdut.edu.cn

例 10：已知LSI系统的单位抽样响应：

$$h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1),$$

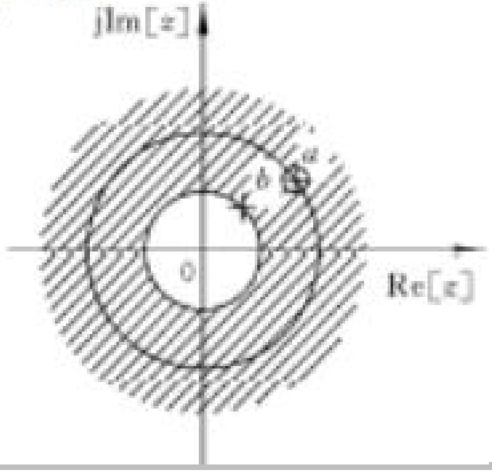
求系统输入$x(n)=a^n u(n)$的响应。

解：$X(z)=\dfrac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$

$$H(z)=\frac{z}{z-b}-az^{-1}\frac{z}{z-b}=\frac{z-a}{z-b} \quad |z|>|b|$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-b} \quad |z|>|b|$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=Z^{-1}[Y(z)]=b^n u(n)$$



练一练：$x(n)=nu(n)$的z变换

fengwang13@gdut.edu.cn

- 提示：用间接方法求解!

已知：$u(n)\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ 两边同时对z^{-1}求导

$\sum_{n=0}^{\infty}n(z^{-1})^{n-1}=\dfrac{1}{(1-z^{-1})^2}$ 两边同时乘以z^{-1}：

可得：$\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot z^{-n}=\dfrac{z}{(z-1)^2}=X(z)$ $ROC:|z|>1$

单选题 1分

设置

若系统函数$H_1(z)H_2(z)=1$,则称此两系统互为逆系统。

请问：互为逆系统的两个系统的单位抽样响应一定满足$h1(n)*h2(n)=\delta(n)$，对吗?

A 对

B 不对

提交

LSI系统的Input-Output模型

fengwang13@gdut.edu.cn

Input=
冲激函数/单位抽样序列

Laplace变换/z变换：系统函数H(s)/H(z)

Input=
特征函数

思考:

1、求h(n)
2、阐述该系统功能与实现

答:
1、δ(n-3)
2、移位为3的延时器，可由3个单位延时器的串联而成

2.1.6 利用Z变换求解差分方程

fengwang13@gdut.edu.cn

常系数线性差分方程的一般形式为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

取 z 变换 $\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$

则系统函数

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

2.1.6 基于Z变换的LSI系统分析

fengwang13@gdut.edu.cn

例 11：已知离散LSI系统的差分方程：

（设系统初始状态为零）

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中：$x(n)$为输入，$y(n)$为输出。

1）求系统函数，指出系统的零极点；

2）若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；

3）求该因果稳定系统的单位抽样响应。

2.1.6 基于Z变换的LSI系统分析

fengwang13@gdut.edu.cn

解：1）对差分方程两边取z变换：

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

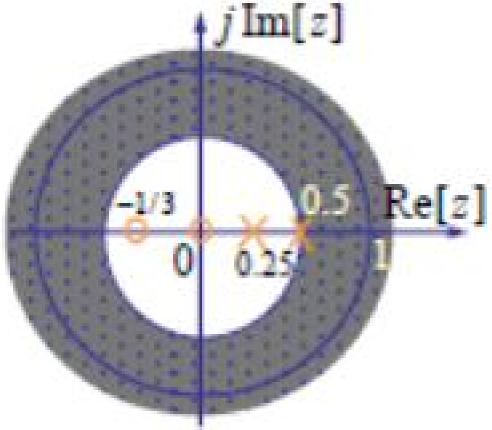
系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：$z=-\frac{1}{3}$，0　极点：$z=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$

2）由于系统为因果稳定系统，

故收敛域：$|z|>\frac{1}{2}$



2.1.6 基于Z变换的LSI系统分析

fengwang13@gdut.edu.cn

3) 对$H(z)$求z反变换即得单位抽样响应$h(n)$，

用部分分式法

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{A_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1=Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{2}}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$$

2.1.6 基于Z变换的LSI系统分析

fengwang13@gdut.edu.cn

$$A_2 = Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

根据Roc：$|z| > \frac{1}{2}$，得

$$h(n) = \left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

2.2 离散时间傅里叶变换（DTFT）

fengwang13@gdut.edu.cn

DTFT：Discrete-Time Fourier Transform

2.2.1 DTFT 的定义

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

- 时域离散
- 频谱连续、周期

$$x(n) = \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

比较 z 变换和 DTFT 的定义：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

- 序列的 Fourier 变换是序列的 z 变换在单位圆上的值

关键点：

1、$X(e^{jw})$是$x(n)$的频谱密度，简称"频谱"，可分解为：幅度谱、相位谱；亦或实部谱、虚部谱

2、$X(e^{jw})$是w以2π为周期的周期函数

3、DTFT存在条件：$x(n)$绝对可和

2.2 离散时间傅里叶变换（DTFT）

fengwang13@gdut.edu.cn

例12：计算矩形序列的 DTFT

$$x(n)=R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & otherwise\quad n\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\quad\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\quad X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{e^{-jN\omega/2}(e^{jN\omega/2}-e^{-jN\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}=\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega}$$

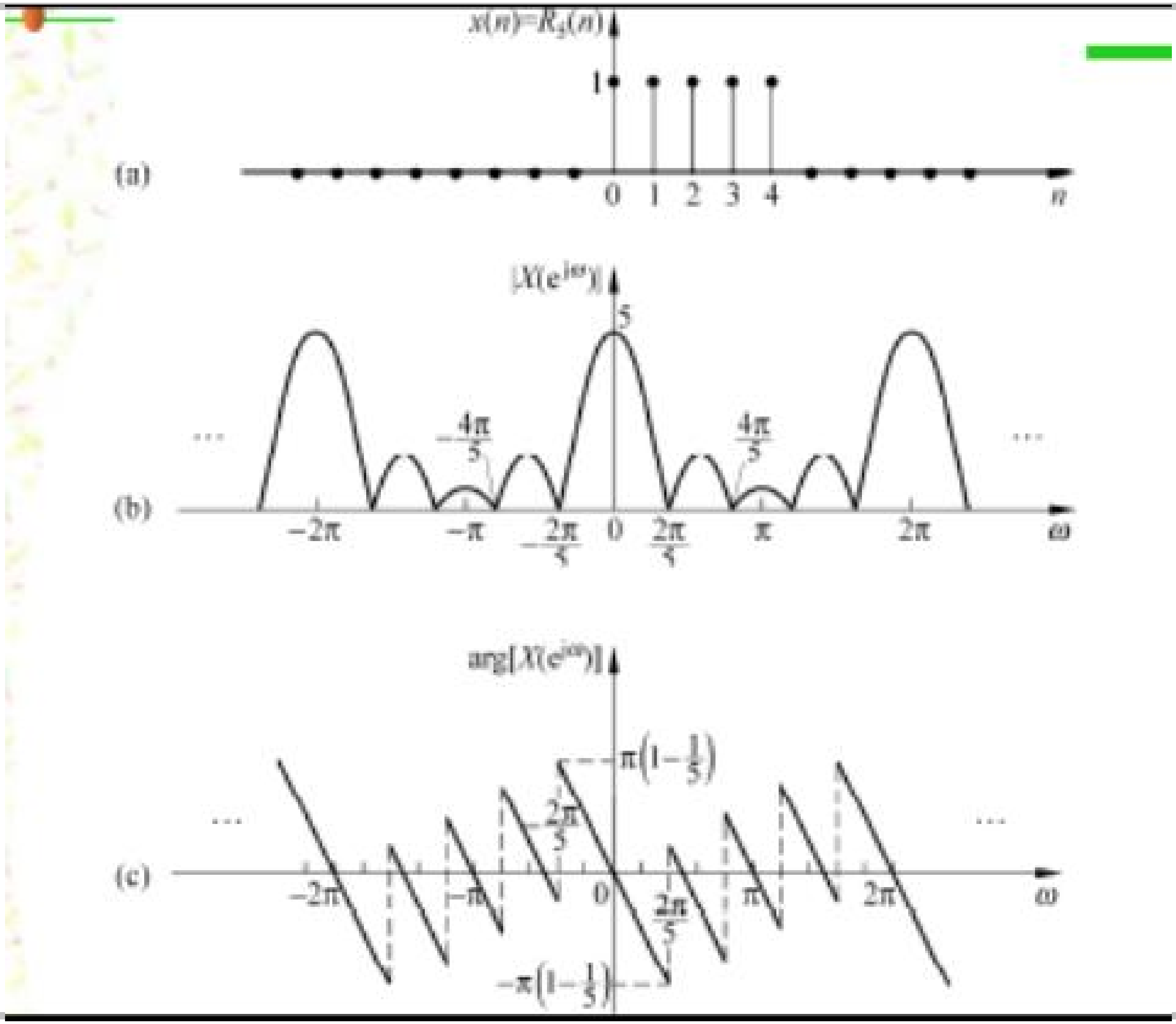
常用的DTFT变换对!

幅频特性: $\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$ （类似 Sa(·)函数）

相频特性: $\varphi(\omega)=-\frac{(N-1)\omega}{2}$ （线性相位）

2.2 离散时间傅里叶变换（DTFT）

fengwang13@gdut.edu.cn



2.2 离散时间傅里叶变换（DTFT）

fengwang13@gdut.edu.cn

例13：$x(n)=a^n u(n)$，$|a|<1$，计算其 DTFT。

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{1-az^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\omega}}\qquad Z\rightarrow \mathrm{DTFT}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-jn\omega}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega})$$

$$\omega:(-\pi,\pi)$$

由此可以得到 DTFT 的幅频特性和相频特性

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega)=-tg^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$

2.2.2 DTFT的主要性质

fengwang13@gdut.edu.cn

1、线性 $a_1x_1(n)+a_2x_2(n) \Leftrightarrow a_1X_1(e^{j\omega})+a_2X_2(e^{j\omega})$

2、序列的移位 $x(n-n_0) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$

3、乘以复指数序列（调制性）$e^{j\omega_0 n}x(n) \Leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

4、时域卷积定理 $x(n)*y(n) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

5、频域卷积定理 $x(n)y(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

2.2.2 DTFT的主要性质

fengwang13@gdut.edu.cn

6、序列的线性加权 $nx(n) \Leftrightarrow j\dfrac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

7、乘以指数序列 $a^n x(n) \Leftrightarrow X(\dfrac{1}{a}e^{j\omega})$

8、 Parseval Theory：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

9、序列的翻褶 $x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

10、序列的共轭 $x^*(n) \Leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

2.2.3 DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn

- 任一复序列 $x(n)$ 可分解成共轭对称分量 $x_e(n)$ 与共轭反对称分量 $x_o(n)$ 之和： $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

共轭对称序列（分量）$x_e(n)$ 满足：$x_e(n)=x_e^*(-n)$

- 共轭对称序列的**实部偶对称，虚部奇对称**

共轭反对称序列（分量）$x_o(n)$ 满足：$x_o(n)=-x_o^*(-n)$

- 共轭反对称序列的**实部奇对称，虚部偶对称**

其中：
$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$
$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

序列		Fourier 变换
$x(n)$	$\Leftrightarrow$	$X(e^{j\omega})$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Leftrightarrow$	$X_e(e^{j\omega})$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Leftrightarrow$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_e(n)$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$	$\Leftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

2.2.3 实序列DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn

若 $x(n)$ 是实序列：$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

⇩ ⇩

偶对称序列 $x_e(n)=x_e(-n)$ $x_o(n)=-x_o(-n)$ 奇对称序列

$$x_e(n)=\frac{x(n)+x(-n)}{2} \qquad x_o(n)=\frac{x(n)-x(-n)}{2}$$

同样，$x(n)$ 的 Fourier 变换 $X(e^{j\omega})$ 也可分解成：

$$X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

其中：

$$X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega})=-X_o^*(e^{-j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})]$$

2.2.3 DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn

实数序列的对称性质

实数序列的 Fourier 变换满足共轭对称性

$$X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$$

实部是 ω 的偶函数 $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$

虚部是 ω 的奇函数 $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=-\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$

幅度是 ω 的偶函数 $|X(e^{j\omega})|=|X(e^{-j\omega})|$

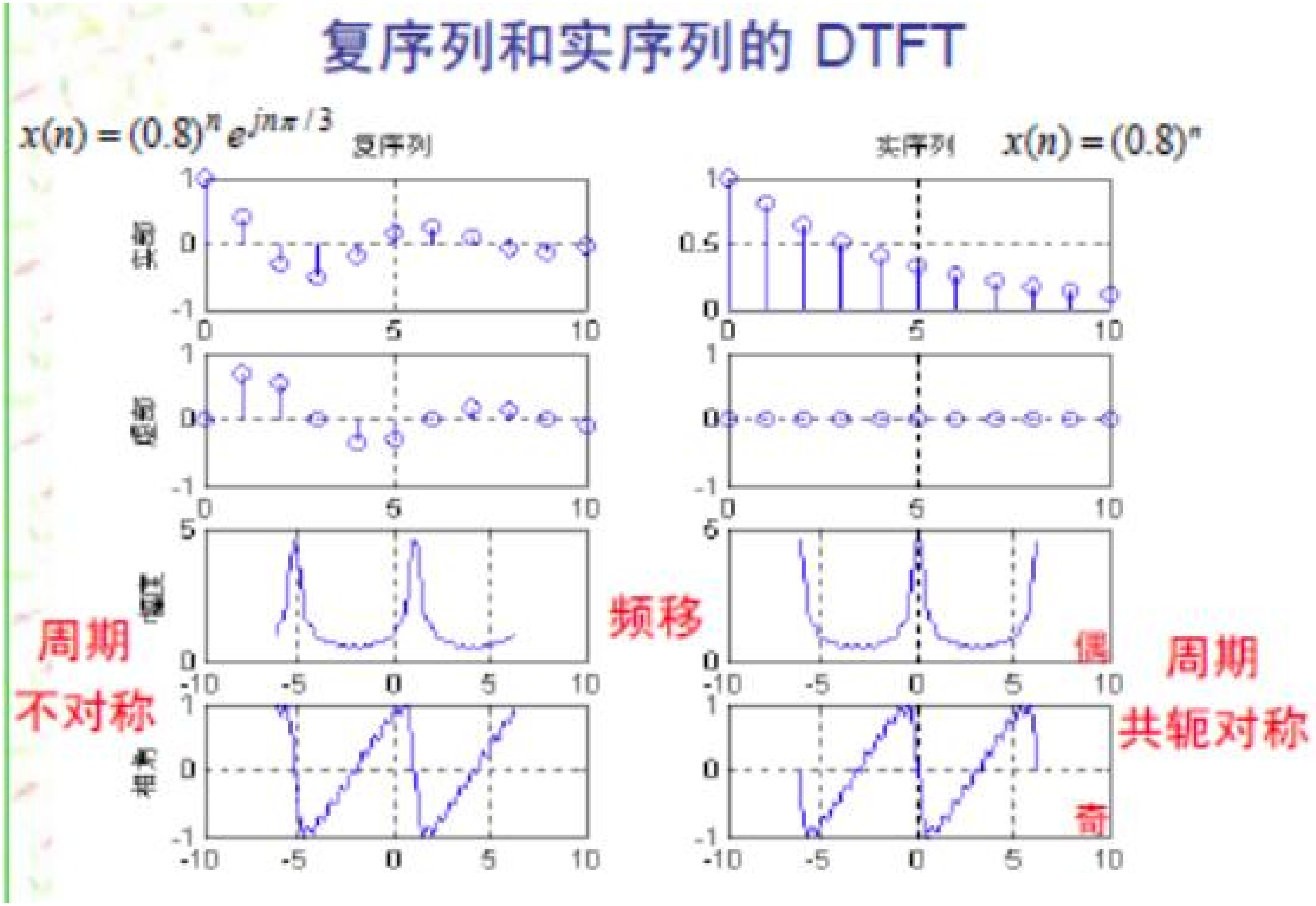
相角是 ω 的奇函数 $\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{-j\omega})]$

$$x_e(n) \Longleftrightarrow \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$x_o(n) \Longleftrightarrow j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

2.2.3 DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn



2.2.3 DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn

例 14：DTFT 性质的使用：计算积分 I 的值。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1-ae^{j\omega})(1-be^{j\omega})}d\omega\text{，}\quad |a|<1,\quad |b|<1$$

解：根据 $a^n u(n)\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ $\qquad b^n u(n)\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$

利用时域卷积定理有：

$$a^n u(n)*b^n u(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}e^{jn\omega}d\omega$$

上式卷积 n=0 时就是积分 I 的值：

$$I=2\pi a^n u(n)*b^n u(n)\big|_{n=0}=2\pi\sum_{m=0}^{n}a^m b^{n-m}\big|_{n=0}=2\pi a^0 b^0=2\pi$$

2.2.3 DTFT的对称性质

fengwang13@gdut.edu.cn

例15：若 $h(n)$ 是实因果序列，其 DTFT 的实部为：$H_R(e^{j\omega})=1+\cos\omega$，求序列 $h(n)$ 及其 DTFT $H(e^{j\omega})$。

解：$$H_R(e^{j\omega})=1+\cos\omega=1+\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$=FT[h_e(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_e(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_e(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=-1\\ 1, & n=0\\ \frac{1}{2}, & n=1\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}0, & n<0\\ h_e(n), & n=0\\ 2h_e(n), & n=1\end{cases}=\begin{cases}1, & n=0\\ 1, & n=1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=1+e^{-j\omega}$$

填空题 4分

设置

已知$x(n)=\{2,1,\underline{-1},0,3,2,0,-3,-4\}$，在不计算x(n)的DTFT $X(e^{jw})$下，直接确定：X(1)= [填空1] , X(-1)= [填空2] ,

$\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$ = [填空3] ,

$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega$ = [填空4]

Hint: $1=e^{j0}$, $-1=e^{j\pi}$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

给定计算题： 若序列h(n)是实因果序列，h(0)=1，其DTFT的虚部为：$H_I(e^{j\omega}) = -\sin\omega$，求序列h(n)及其DTFT $H(e^{j\omega})$。

答案： h(n)={ $\underline{1}$, 1}

$$H\left(e^{jw}\right) = 1 + \cos w - j\sin w$$

2.2.4 周期序列的DTFT

fengwang13@gdut.edu.cn

- 如果引入冲激函数，一些既不是绝对可和的，也不是均方可和的序列，如周期序列、单位阶跃序列 $u(n)$，其 Fourier 变换可用冲激函数的形式表示出来。

1、复指数序列的 Fourier 变换

$$e^{j\omega_0 n} \Leftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi i), \quad -\pi<\omega_0<\pi$$

- 复指数序列（复正弦型序列）$e^{j\omega_0 n}$ 的 Fourier 变换，是以 ω_0 为中心，以 2π 的整数倍为间距的一系列冲激函数，每个冲激函数的积分面积为 2π
- 思考：DTFT[$\cos(\omega_0 n+\phi)$]、DTFT[$\sin(\omega_0 n+\phi)$]

单选题 1分

设置

判断：$\mathrm{DTFT}[\cos(w_0 n+\phi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi\left[\delta\left(w-w_0-\phi-2\pi m\right)+\delta\left(w+w_0+\phi-2\pi m\right)\right]$

A 正确

B 错误

提交

2.2.4 周期序列的DTFT

fengwang13@gdut.edu.cn

2、常数序列的 Fourier 变换

$$1=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-i)\Leftrightarrow\sum_{i=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-2\pi i)$$

- 常数序列的Fourier变换，是以 ω=0 为中心，以2π的整数倍为间距的一系列冲激函数，每个冲激函数的积分面积为 2π

3、周期为 N 的单位抽样序列串的 Fourier 变换

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)\Leftrightarrow\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

- 周期为 N 的单位抽样序列，其 Fourier 变换是频率在 ω=2π/N 的整数倍上（即 2πk/N）的一系列冲激函数之和，每个冲激函数的积分面积为 2π/N

2.2.4 周期序列的DTFT

fengwang13@gdut.edu.cn

4、一般性周期为 N 的周期性序列的 Fourier 变换

$$\tilde{x}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n-iN)=x(n)*\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)$$

$$x(n)\Leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)\Leftrightarrow\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\tilde{x}(n)\Leftrightarrow X(e^{j\omega})\left(\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)\right)$$

$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

2.2.4 周期序列的DTFT

fengwang13@gdut.edu.cn

- 周期性序列 $\tilde{x}(n)$（周期为N）的 Fourier 变换是一系列冲激函数串，其冲激函数的积分面积等于$\tilde{X}(k)$乘以 $2\pi/N$。
- $\tilde{X}(k)$ 是 $x(n)$ [$\tilde{x}(n)$ 的一个周期] 的 Fourier 变换 $X(e^{j\omega})$ 在频域中 $\omega=2\pi/N$ 的整数倍的各抽样点上的抽样值。
- 即：$\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

DFS

2.2.4 周期序列的DTFT

fengwang13@gdut.edu.cn

$$\because \mathrm{DTFT}\{x(n)\}=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

ε 满足 $0<\varepsilon<2\pi/N$

从 $\omega=0$ 之前开始抽样；
在 $\omega=2\pi$ 之前结束抽样；
此区间共有 N 个抽样值：
$0\le k\le N-1$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{N}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)d\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

IDFS

2.3 变换的关系

fengwang13@gdut.edu.cn

若：模拟信号为 $x_a(t)$，其理想抽样信号为 $\hat{x}_a(t)$

抽样序列为 $x(n)=x_a(nT)$

$$\hat{X}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-jk\Omega_s)$$ $\Omega_s=2\pi f_s$ 为抽样角频率

- 理想抽样信号的 Laplace 变换是原模拟信号的 Laplace 变换沿 s 平面虚轴以 $\Omega=\Omega_s$ 为周期的周期延拓，幅度上有 $1/T$ 的加权。

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\hat{X}_a(s)\Big|_{s=j\Omega}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-j\frac{2\pi}{T}k)$$

2.3 变换的关系

fengwang13@gdut.edu.cn

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}=X(e^{j\Omega T})=\hat{X}_a(j\Omega)$$

- DTFT 是原模拟信号频谱的周期延拓，幅度加权 $1/T$。

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

- 抽样序列在单位圆上的 z 变换，就等于其理想抽样信号的 Fourier 变换。

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)\xleftrightarrow{LT}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}_a(s)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-nsT}\\ X(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\end{aligned}\right\}\text{对比}$$

2.3 变换的关系

fengwang13@gdut.edu.cn

当 $z=e^{sT}$：$X(z)\big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s)$

两变换之间的关系，就是由复变量 s 平面到复变量 z 平面的映射，其映射关系为

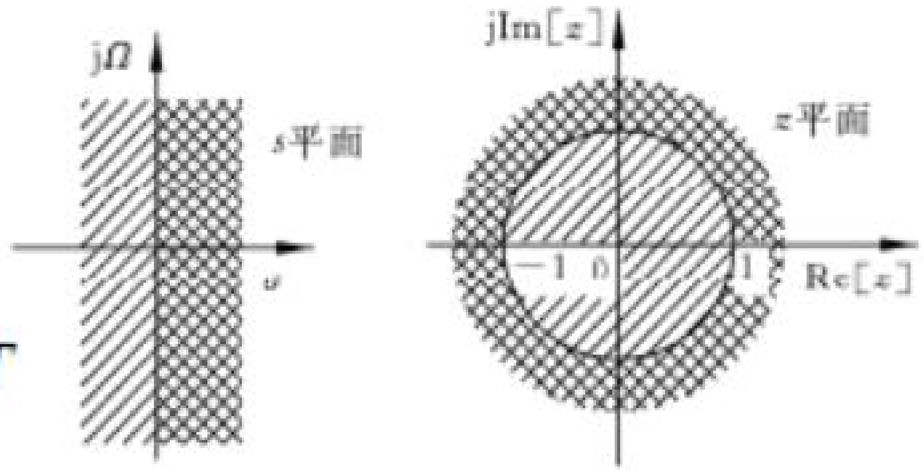
$$z=e^{sT}, \qquad s=\frac{1}{T}\ln z$$

$$s=\sigma+j\Omega$$

$$z=re^{j\omega}$$

$$re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\Omega)T}$$

$$\therefore r=e^{\sigma T},\quad \omega=\Omega T$$



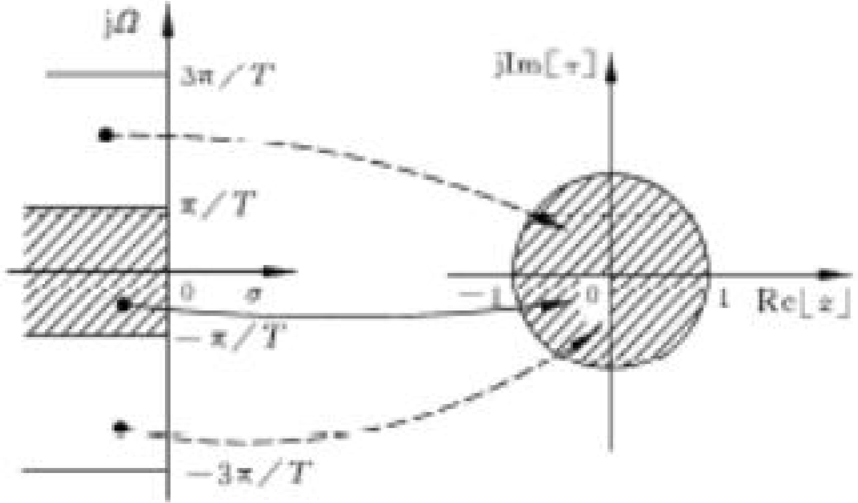
2.3 变换的关系

fengwang13@gdut.edu.cn

$\omega = \Omega T$

s 平面		z 平面	
$\Omega=0$	s 平面实轴	$\omega=0$	z平面正实轴
$\Omega=\Omega_0$	平行于实轴的直线	$\omega=\Omega_0 T$	始于原点的辐射线
$\Omega: -\pi/T \to \pi/T$		$\omega: \ -\pi \to \pi$	
$\Omega: -3\pi/T \to -\pi/T$ $\pi/T \to 3\pi/T$		$\omega: \ -\pi \to \pi$	

s 平面到 z 平面的映射是多值映射



根据$z=e^{sT}$,请判断：s平面的负实轴对应于z平面的单位圆内部

A 正确

B 错误

提交

练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

已知$x_a(t)=2\cos(2000\pi)$，现用采用频率fs=5000Hz对其抽样，得到抽样信号$\hat{x}_a(t)$和序列x(n)，请计算：

1、$\hat{x}_a(t)$和x(n)的表达式

2、FT[$\hat{x}_a(t)$]、DTFT[x(n)]

Ans:

1、

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)\delta\left(t-\frac{1}{5000}n\right)$$

$$x(n)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

2、

$$FT\left[\hat{x}_a(t)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)e^{-j\frac{wn}{5000}}$$

$$x(n)=\frac{1}{1-e^{-j\left(w-\frac{2}{5}\right)}}+\frac{1}{1-e^{-j\left(w+\frac{2}{5}\right)}}$$

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

2.4.1 LSI 系统的描述

系统函数 $H(z)$： 单位抽样响应 $h(n)$ 的 z 变换

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$：

单位圆上的系统函数，单位抽样响应 $h(n)$ 的 DTFT

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\mathrm{DTFT}[h(n)]$$

fengwang13@gdut.edu.cn

2.4.2 LSI 系统的因果、稳定条件

零极点分布与系统的因果性

- 因果系统的充分必要条件：系统的脉冲响应必须是因果序列。
- 在变换域的特征是它的 z 变换在无穷远处收敛。因此因果系统的极点不可能在无穷远处，只能在 z 平面上一个有界区域内。$R_{x-} < |z| \leq \infty$
- 如果系统函数用的是多项式分式形式，则因果性的要求是 $N \geq M$，即在正幂形式时分母上 z 的最高次数（在负幂形式时为 z^{-1} 的最低次数）大于分子上 z 或 z^{-1} 的对应次数。

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

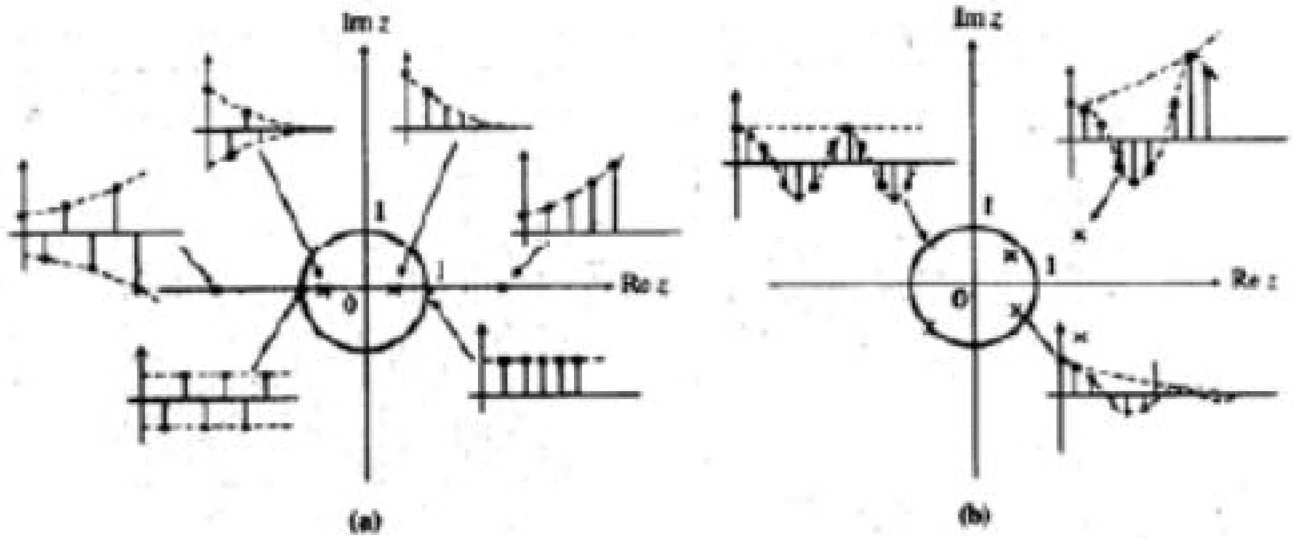
零极点分布与系统的稳定性

- 在单位圆内的单极点和重极点：
  当 $n\to\infty$ 时，脉冲响应趋向于零。
- 在单位圆外的单极点和重极点：
  当 $n\to\infty$ 时，脉冲响应趋向于无穷大。
- 在单位圆上的单极点：
  当 $n\to\infty$ 时，脉冲响应趋向于常数和等幅振荡。
- 在单位圆上的重极点：
  当 $n\to\infty$ 时，脉冲响应趋向于无穷大。
- LTI 系统稳定的充要条件是：系统的极点位于单位圆内部，收敛域包括单位圆 $|z|=1$。

关键点

LSI是因果稳定系统的充要条件：
系统函数H(z)的全部极点，都在z平面单位圆之内。

零极点分布与系统的稳定性



$h(n)$ 的 z 变换的 Roc：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty$

练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

例：已知一因果LSI系统函数$H(z)=(z^{-1}-a)/(1-az^{-1})$，其中a是实数

(1)该系统收敛域；【$|z|>|a|$】

(2)能使该系统稳定的a的取值范围；【$|a|<1$】

(3)写出系统差分方程；【$y(n)=ay(n-1)+x(n-1)-ax(n)$】

(4)证明系统频率响应的幅度是常数。【$|H(e^{jw})|=1$】

单选题 1分

设置

给定一个因果LSI系统，其极点有：$0.2e^{j\pi}$, 0.2, 0.4, $2e^{j\pi/2}$, $2e^{-j\pi/2}$,1.5

请问，在收敛域为下列何种情况下，系统为因果系统?

A $|z|>0.2$

B $|z|>0.4$

C $|z|>2$

D $|z|>1.5$

提交

设置

给定一个LSI系统，现有极点：$0.2e^{j\pi}$, $0.2e^{-j\pi/3}$, 0.4, $2e^{j\pi/2}$, $2e^{-j\pi/2}$,1.5

请问，在收敛域为下列何种情况下，系统为稳定系统?

A $0.2<|z|<0.4$

B $0.4<|z|<1.5$

C $1.5<|z|<2$

D $|z|>2$

提交

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

2.4.3 LSI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的特点

- 用正余弦函数作为一种特征函数来研究系统的行为，其表现就是系统的频率特性。

1）LSI 系统对复指数序列的稳态响应：

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

$$= e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

- 复指数输入序列所产生的输出序列 $y(n)$ 是具有同样频率的复指数函数，只是乘了一个复数常数 $H(e^{j\omega})$

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

2）LSI 系统对正弦序列的稳态响应

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

$$y(n) = A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\}$$

输出同频(ω_0)正弦序列

幅度受频率响应幅度$\left|H(e^{j\omega})\right|$加权

相位为输入相位与系统相位响应之和

3）LSI 系统对任意输入序列的稳态响应

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

2.4 练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

例17：设一阶系统的差分方程：

$$y(n)=x(n)+ay(n-1) \qquad |a|<1,\ a\text{为实数}$$

求系统的频率响应。（注：该系统具有因果稳定性）

解：两边求z变换，得

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a| \qquad \therefore h(n)=a^n u(n)$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$$

幅度响应：$|H(e^{j\omega})|=(1+a^2-2a\cos\omega)^{-1/2}$

相位响应：$\arg[H(e^{j\omega})]=-\arctan\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$

练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

已知一非因果稳定LSI系统，满足3y(n-1)-10y(n)+3y(n+1)=x(n)，计算该系统的单位抽样响应h(t)。

Ans:

$$h(n)=-\frac{3}{8}\left(3^n u(-n-1)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right)$$

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

2.4.4 频率响应的几何确定法

利用 $H(z)$ 在 z 平面上的零极点分布

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=Kz^{(N-M)}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

- 当 $N>M$ 时，$H(z)$ 在 $z=0$ 处有 $(N-M)$ 阶零点
- 当 $N<M$ 时，$H(z)$ 在 $z=0$ 处有 $(N-M)$ 阶极点

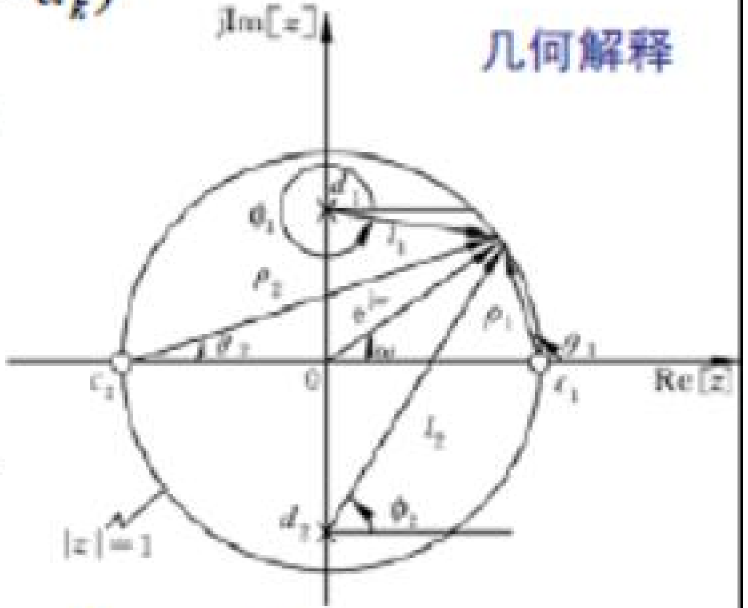
2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = Ke^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega}-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)} = |H(e^{j\omega})|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

几何解释



令 $\overline{c_m} = e^{j\omega} - c_m = \rho_m e^{j\theta_m}$

$\overline{d_k} = e^{j\omega} - d_k = l_k e^{j\phi_k}$

则频率响应的

幅度：$|H(e^{j\omega})| = |K|\dfrac{\prod_{m=1}^{M}\rho_m}{\prod_{k=1}^{N}l_k}$

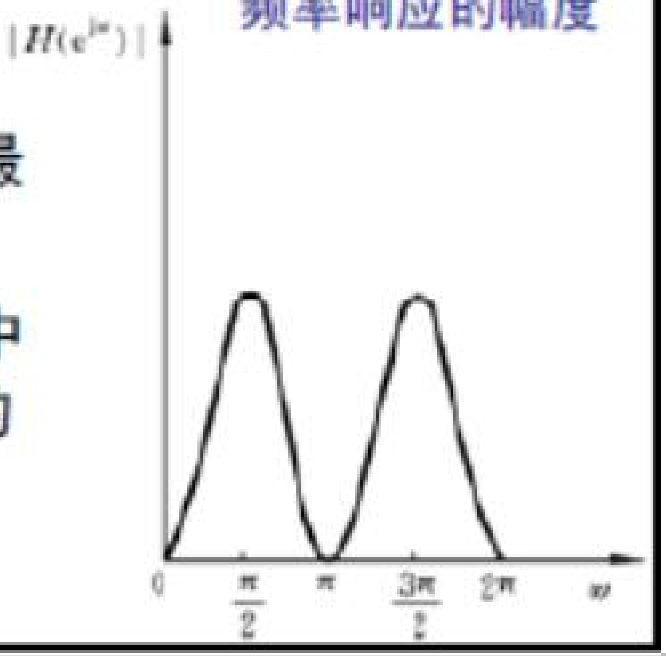
相角：$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M}\theta_m - \sum_{k=1}^{N}\phi_k + (N-M)\omega$

2.4 离散LSI系统的频域表征

fengwang13@gdut.edu.cn

- 零点位置影响凹谷点的位置与深度
  - 零点在单位圆上，谷点为零
  - 零点趋向于单位圆，谷点趋向于零
- 极点位置影响凸峰的位置和深度
  - 极点趋向于单位圆，峰值趋向于无穷
  - 极点在单位圆外，系统不稳定
- 在一个周期中，$\omega=0, 2\pi$ 表示最低频率，$\omega=\pi$ 表示最高频率。
- $\omega=0, 2\pi$ 是低通滤波器的通带中心频率，$\omega=\pi$ 是高通滤波器的通带中心频率

频率响应的幅度



作业

fengwang13@gdut.edu.cn

- 2.1（1、3、12）
- 2.3（3、4）【长除法】
- 2.9（1、3、4、5、7）
- 2.12（1、2、4）
- 2.13
- 2.24

【作业要求】手写作业拍照扫描，或直接平板电子笔手写导出，保存成pdf格式，命名格式：第1章DSP作业-姓名，上传到：
http://drive.gdut.edu.cn/l/UHk2rN