廣東工業大學
Guangdong University of Technology

通信原理

第二章 随机过程

目 录

广东工业大学 Guangdong University of Technology

重点

随机过程的定义

平稳随机过程的特点

高斯随机过程的性质

高斯白噪声

随机过程通过线性系统时，输出和输入的关系

2.1 随机过程概述

2.1.1 随机过程的定义

- 定义：

1）所有样本函数$\xi_i(t)$的集合

2）随机变量$\xi(t_i)$的集合

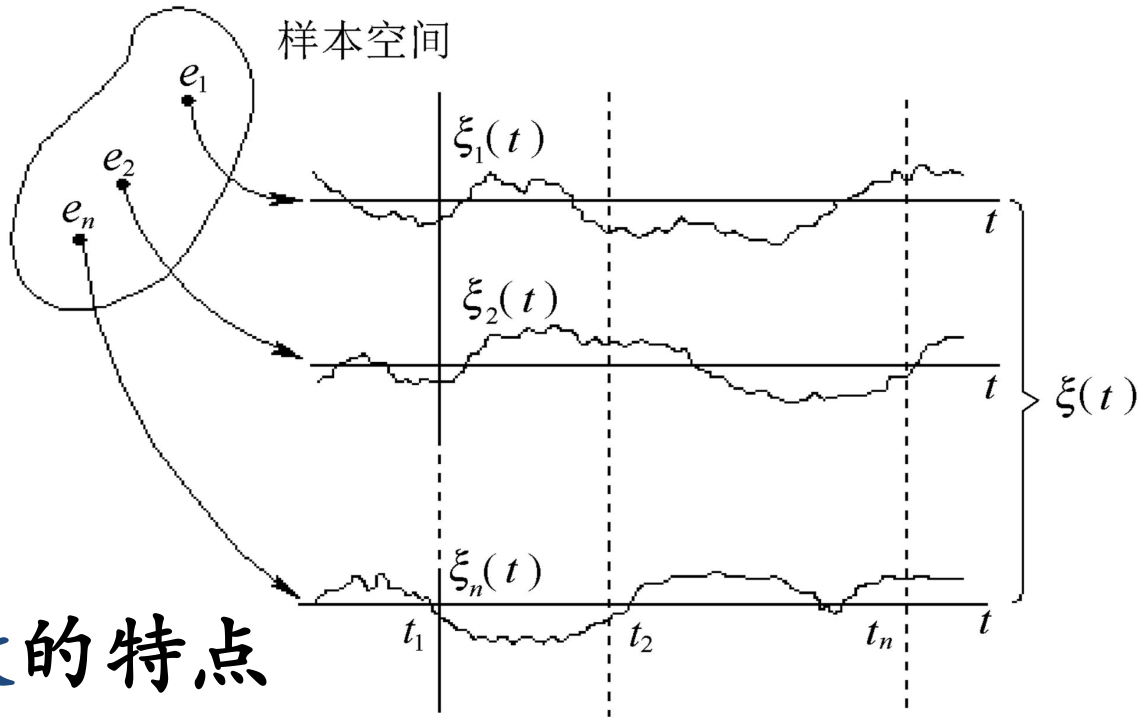


图 2.1 随机试验样本函数的总体

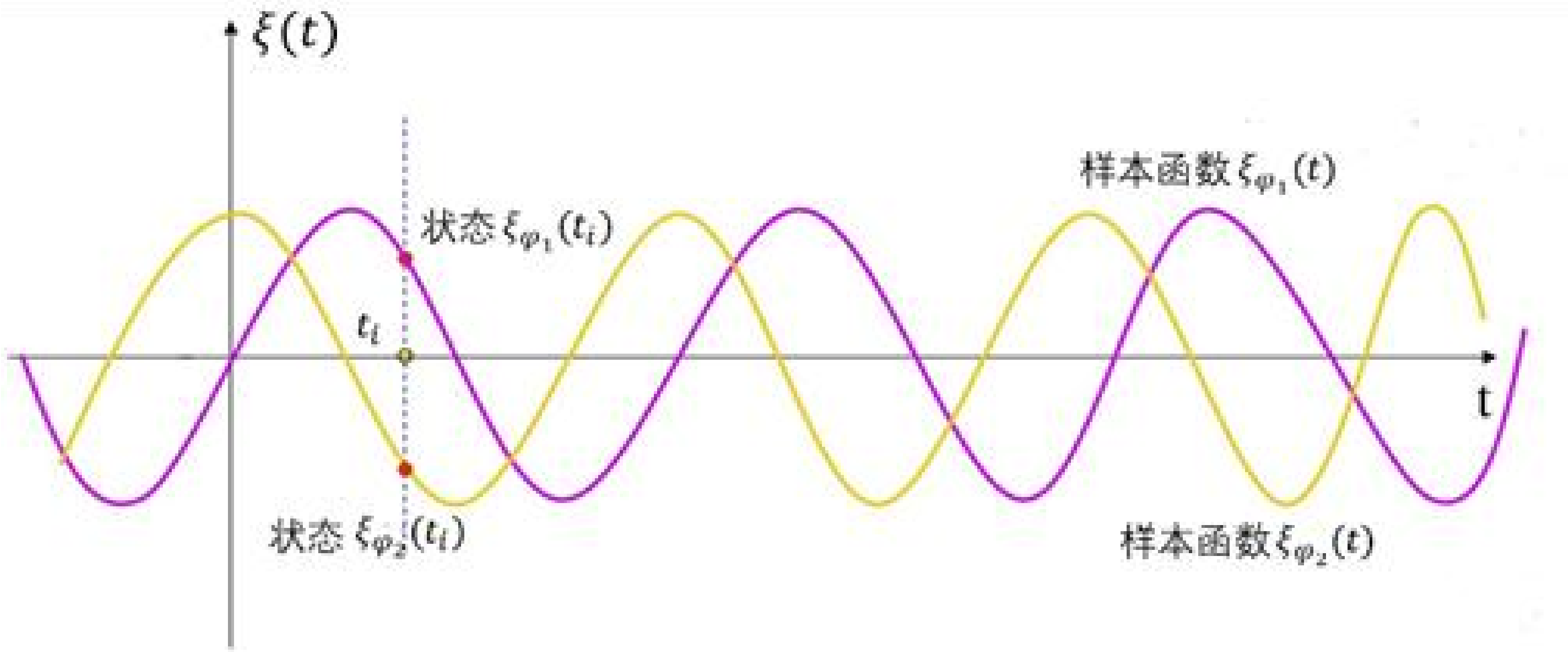
- 属性：兼有随机变量和时间函数的特点

即随机变量$\xi(t_i)$在时间上的连续变化

- 特性描述：分布函数、数字特征

2.1 随机过程概述

例：具有随机初始相位的余弦信号$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$，其中$A$和$\omega_0$均为正常数，初始相位$\theta$是在$(-\pi, \pi)$上服从均匀分布的随机变量，$\xi(t)$就是一个随机过程。



2.1 随机过程概述

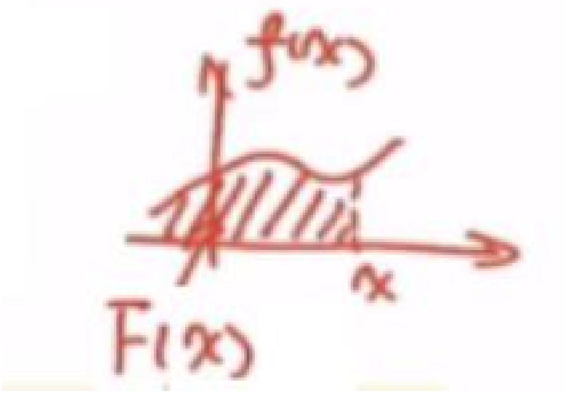
2.1.2 随机过程的统计描述

- **一维分布函数和概率密度函数**

$$F_1(x,t)=P[\xi(t)\leqslant x]$$

注：一般记法为$F(x_1,t_1)=P[\xi(t_1)\le x_1]$

$$f_1(x,t)=\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}$$



性质：

$$\begin{cases} 0\le F_1(x,t)\le 1 \\ F_1(-\infty,t)=0, F_1(+\infty,t)=1 \\ x_2>x_1, F_1(x_1,t)>F_1(x_2,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x,t)\ge 0 \\ F_1(x,t)=\int_{-\infty}^{x} f_1(x',t)dx' \\ P[a_1\le \xi(t)\le a_2]=\int_{a_1}^{a_2} f_1(x,t)dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,t)dx=1 \end{cases}$$

2.1 随机过程概述

- 二维分布函数和概率密度函数

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2,)=P\{\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2\}$$

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\cdot\partial x_2}$$

- n维分布函数和概率密度函数

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)$$
$$=P\{\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\cdots,\xi(t_n)\le x_n\}$$

$$f_n(x_1,\ x_2,\cdots,\ \mathrm{x}_n;\ t_1,\ t_2,\cdots,\ \mathrm{t}_n)$$
$$=\frac{\partial^n F_n(x_1,\ x_2,\cdots,\ \mathrm{x}_n;\ t_1,\ t_2,\cdots,\ \mathrm{t}_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial \mathrm{x}_n}$$

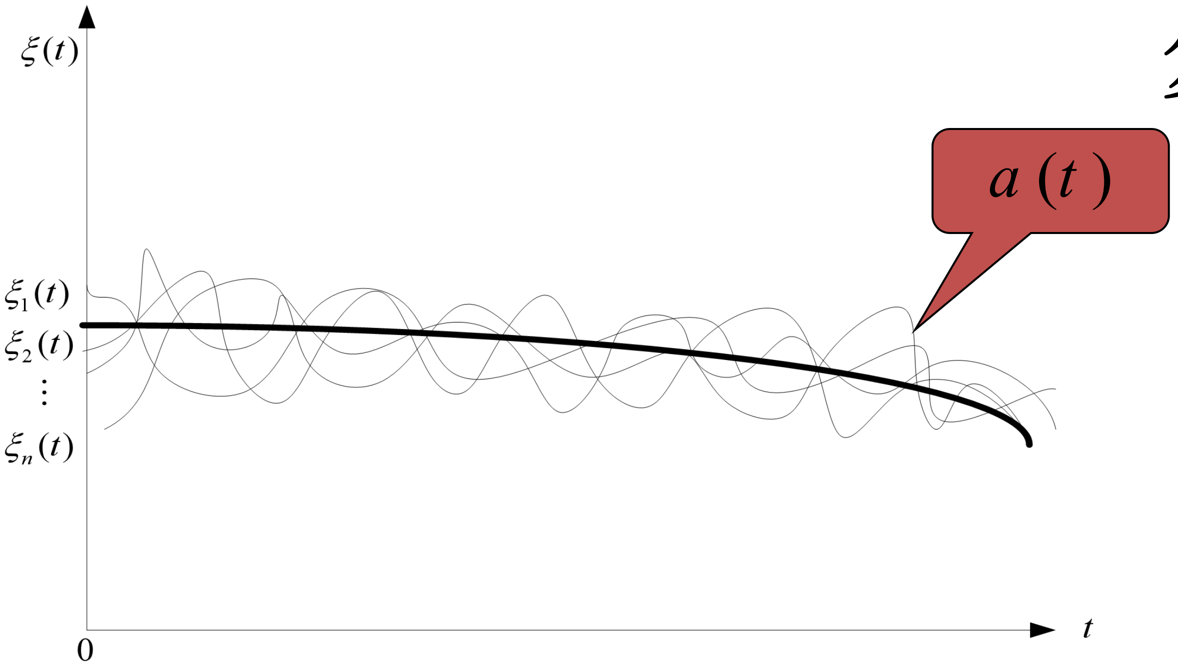
维数越大，对随机过程统计特性的描述就越充分！

2.1 随机过程概述

2.1.3 随机过程的数字特征

1.数学期望（均值）--摆动中心

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)\,dx = a(t)$$ --t的确定函数



复习：随机变量数学期望的性质：

$$E[C] = C$$

$$E[aX_1 + bX_2] = aE[X_1] + bE[X_2]$$

若独立，$E[X_1 \bullet X_2] = E[X_1] \bullet E[X_2]$

2.1 随机过程概述

2.方差--偏离数学期望的程度

$$D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\}$$

$$= E\left[\xi^2(t) - 2a(t)\xi(t) + a^2(t)\right]$$

$$= E[\xi^2(t)] - 2a(t)E[\xi(t)] + a^2(t)$$

$$= E[\xi^2(t)] - a^2(t)$$

$$= \sigma^2(t)$$

当$a(t) = 0$时： $\sigma^2(t) = E[\xi^2(t)]$

2.1 随机过程概述

复习：随机变量方差的性质：

$D[C]=0$ 常数的方差为0

$$D[CX]=C^2D[X], D[C+X]=D[X]$$

对于两个随机变量X_1、X_2，有：

$$D[aX_1+bX_2]=a^2D[X_1]+b^2D[X_2]+2abCov[X_1,X_2]$$

对于两个不相关随机变量X_1、X_2，有：

$$D[aX_1+bX_2]=a^2D[X_1]+b^2D[X_2]$$

2.1 随机过程概述

期望、方差只能反映孤立时刻的数字特性，不能反映不同时刻的内在联系

3. 自相关函数--反映不同时刻随机过程取值的相关性

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

4. 自协方差函数--反映不同时刻随机过程取值的统计相关性

$$C(t_1,t_2)=E\{[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2-a(t_2)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2)$，当$a(t_1)=a(t_2)=0$，$C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)$

令$\tau=t_2-t_1$，则有：$R(t_1,t_2)=R(t_1,t_1+\tau)$，一般$\tau\uparrow$，相关性$\downarrow$

2.1 随机过程概述

5. 互相关函数--不同过程的关联程度

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

6. 互协方差函数

$$C_{\xi\eta}(t_1,t_2) = E\{[\xi(t_1) - a_\xi(t_1)][\eta(t_2 - a_\eta(t_2))]\}$$

从以上可见，随机过程的数字特征都与时刻$t_1, t_2, \cdots$有关。

2.2 平稳随机过程

2.2.1 平稳随机过程的定义

定义：平稳过程的任意n维概率密度函数满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\Delta t,t_2+\Delta t,\cdots,t_n+\Delta t) \quad (2.15)$$

即统计特性与起点无关（不随时间的推移而变化）。

- 一维分布则与时间t无关：

$$f_1(x;t)=f_1(x;t+\Delta t)=f_1(x)$$

- 二维分布只与时间间隔τ有关：

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)=f_2(x_1,x_2;\tau)$$

2.2 平稳随机过程

- 均值与时间t无关：

$$a(t) = E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = a \qquad (2.18)$$

- 相关函数只与时间间隔τ有关：

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_1+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau)$$

$$(2.19)$$

满足式2.15为强平稳（狭义平稳），满足2.18、2.19为弱平稳（广义平稳）。通信系统中的信号与噪声，一般为（弱）平稳过程。

2.2 平稳随机过程

例2.2判断例2.1中的随机过程$\xi(t) = Acos(\omega_0 t + \theta)$是否平稳。

【解】先求ξ(t)的数学期望和相关函数

$$a(t) = E[\xi(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_c t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\omega_c t\cos\theta - \sin\omega_c t\sin\theta)d\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi}[\cos\omega_c t\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta - \sin\omega_c t\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta]$$

$$= 0$$

2.2 平稳随机过程

自相关函数

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$$

$$=E[A\cos(\omega_c t_1+\theta)\cdot A\cos(\omega_c t_2+\theta)]$$

$$=\frac{A^2}{2}E\{\cos\omega_c(t_2-t_1)+\cos[\omega_c(t_2+t_1)+2\theta]\}$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_2-t_1)+\frac{A^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos[\omega_c(t_2+t_1)+2\theta]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_2-t_1)$$

令$t_2 - t_1 = \tau$，得到

$$R(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau=R(\tau)$$

可见，ξ(t)的数学期望为常数，而自相关函数与t无关，只与时间间隔τ有关，所以ξ(t)是广义平稳过程。

2.2 平稳随机过程

例：已知X(t),Y(t)都是统计独立的平稳随机过程，均值分别为a_X和a_Y，自相关函数分别为 $R_X(\tau), R_Y(\tau)$，Z(t)=X(t)+Y(t)是否平稳?

解：$E[Z(t)] = E[X(t)+Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = a_X + a_y$

故Z(t)的期望为常数。

$$R_z(t,t+\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)] = E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}$$

$$= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + Y(t)X(t+\tau) + Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] + E[X(t)Y(t+\tau)] + E[Y(t)X(t+\tau)] + E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] + 2E[X(t)]E[Y(t)] + E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$= R_X(\tau) + 2a_x a_y + R_Y(\tau)$$

可见，Z(t)自相关函数只与时间间隔有关。综上，Z(t)平稳

2.2 平稳随机过程

2.2.2 各态历经性（遍历性）

定义：设$x(t)$是平稳过程$\xi(t)$的任一实现，它的时间平均值：

$$\overline{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$\overline{R(\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

若遍历则：$\begin{cases} a = \overline{a} \\ R(\tau) = \overline{R(\tau)} \end{cases}$

意义：
- 统计平均值=时间平均值（替代）
- 使计算大为简化

注意：遍历过程 $\underset{\text{未必}}{\overset{\text{必}}{\rightleftarrows}}$ 平稳过程

2.2 平稳随机过程

例2.3 判断例2.1中的随机过程$\xi(t) = A cos(\omega_0 t + \theta)$是否具有各态历经性。

【解】由例2.2已经求得ξ(t)的统计平均值：

$$a(t) = E[\xi(t)] = 0$$

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

各态历经性考查：求ξ(t)的时间平均值

$$\overline{a} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t+\theta)dt = 0$$

2.2 平稳随机过程

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t+\theta)\cdot A\cos[\omega_c(t+\tau)+\theta]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\{\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_c\tau dt + \int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_c t+\omega_c\tau+2\theta)dt\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

比较统计平均与时间平均，有

$$a=\overline{a}, R(\tau)=\overline{R}(\tau)$$

因此，随机相位余弦波是各态历经的。

2.2 平稳随机过程

2.2.3 平稳过程的自相关函数和功率谱密度

1.平稳过程的自相关函数 $R(\tau)=E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$

1. $R(0)=E[\xi^2(t)]$ --平均功率

2. $R(\infty)=E^2[\xi(t)]=\mathrm{a}^2$ --直流功率

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau)=\lim_{\tau\to\infty} E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=E[\xi(t)]\cdot E[\xi(t+\tau)]=E^2[\xi(t)]$$

3. $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$ --交流功率

4. $R(\tau)=R(-\tau)$ --偶函数

5. $|R(\tau)|\le R(0)$ --上界,与自身相关性最大

2.2 平稳随机过程

2. 平稳过程的功率谱密度

样本的功率谱

$$P_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

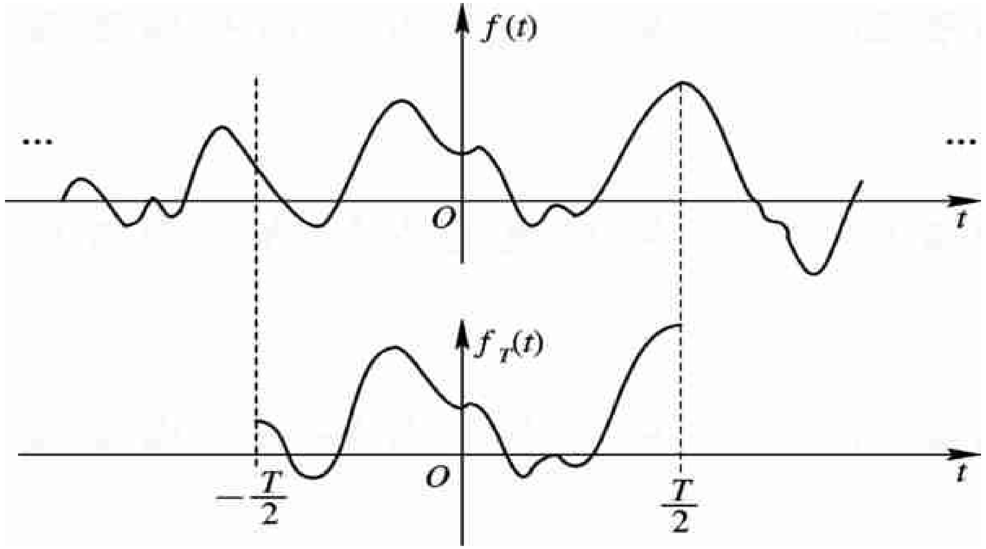


图 2-3　功率信号$f(t)$及其截短函数

过程的功率谱

$$P_\xi(\omega) = E[P_f(\omega)] = \lim_{T\to\infty} \frac{E|F_T(\omega)|^2}{T}$$

统计平均

很难直接计算！

2.2 平稳随机过程

平稳过程的功率谱密度与自相关函数呈傅里叶变换对：

$$P_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

$$P_\xi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(f)\,e^{j2\pi f\tau}\,df$$

维纳-辛钦定理

$$R(\tau)\Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

平均功率计算方法：

$$\boxed{S=R(0)=E[\xi^2(t)]}$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(f)\mathrm{d}f}$$

功率谱密度性质：

1）偶函数 $P_\xi(-f)=P_\xi(f)$

2）非负性 $P_\xi(f)\geq 0$

3）单边、双边功率谱密度互换

$$P_{\xi单边}(f)=\begin{cases}2P_{\xi双边}(f), & f\geq 0\\ 0, & f<0\end{cases}$$

2.2 平稳随机过程

例2.4 求例2.1中的随相信号$\xi(t) = A cos(\omega_0 t + \theta)$的功率谱密度$P_\xi(\omega)$及平均功率S

【解】ξ(t) 的相关函数为

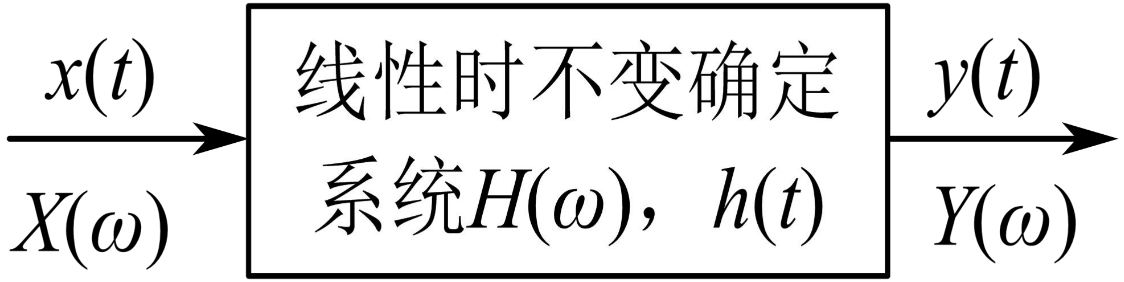
$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

$$\because R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$\therefore P_\xi(\omega) = \frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$S = R(0) = \frac{A^2}{2}$$

2.3 平稳随机过程与线性时不变系统



样本：$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

随机过程：$\eta(t)=\xi(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\xi(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

设$\xi(t)$是平稳随机过程，求$\eta(t)$的统计特性

2.3 平稳随机过程与线性时不变系统

1）数学期望：

$$a_\eta = E[\eta(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[\xi(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= a_\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{d}\tau = a_\xi H(0)$$

2）自相关函数：

$$R_\eta(t,t+\tau) = E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\xi(t-u)du \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)\xi(t+\tau-v)dv]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t-u)\xi(t+\tau-v)h(u)h(v)dudv\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[\xi(t-u)\xi(t+\tau-v)]h(u)h(v)dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv$$

$$\overset{\Delta}{=} R_\eta(\tau)$$

2.3 平稳随机过程与线性时不变系统

可见，输出过程的数学期望与时间 t无关，自相关函数只依赖时间间隔，故输出过程也是平稳的

3）功率谱密度：

$$P_\eta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_\eta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_\xi(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

令 $\tau'=\tau+u-v$

$$P_\eta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_\xi(\tau')h(u)h(v)dudv\right]e^{-j\omega(\tau'-u-v)}d\tau'$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{j\omega u}du\bullet\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)e^{-j\omega v}dv\bullet\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$

$$=H^*(\omega)\bullet H(\omega)\bullet P_\xi(\omega)$$

$$=|H(\omega)|^2\bullet P_\xi(\omega)$$

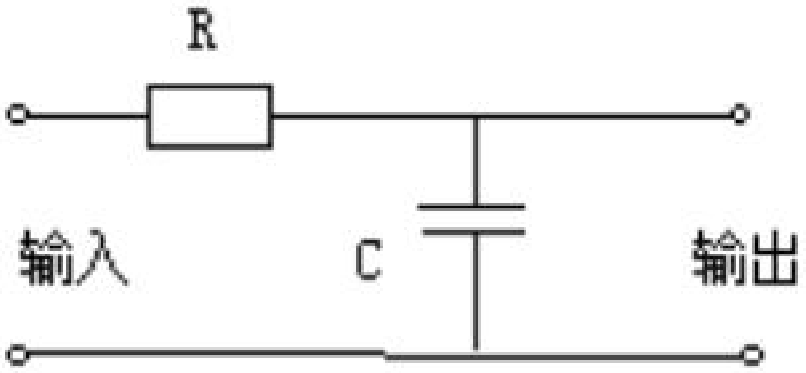
即：$P_\eta(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot P_\xi(\omega)$

2.3 平稳随机过程与线性时不变系统

例： 设RC低通滤波器如图所示，假设输入是均值为0、功率谱密度为$\frac{n_0}{2}$的白噪声，

1） 求输出过程的功率谱密度和自相关函数

2） 求输出噪声的一维概率密度函数



解：1）滤波器的传输函数为：

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega CR}$$

2.3 平稳随机过程与线性时不变系统

因此输出过程的功率谱密度为:

$$P_o(\omega)=P_i(\omega)\left|H(\omega)\right|^2=\frac{n_0}{2}\bullet\frac{1}{1+(\omega RC)^2},$$

根据 $R_o(\tau)\Leftrightarrow P_o(\omega)$, 并利用 $e^{-a|\tau|}\Leftrightarrow\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

得相关函数为: $R_o(\tau)=\dfrac{n_0}{4RC}e^{-\frac{1}{RC}|\tau|}$

2）输入为高斯过程，输出也是高斯过程。

$$E[n_o(t)]=E[n_i(t)]\bullet H(0)=0$$

$$D[n_o(t)]=R_o[0]-R_o[\infty]=\frac{n_0}{4RC}-0=\frac{n_0}{4RC}$$

2.4 高斯随机过程

2.4.1 高斯过程的定义

高斯过程$\xi(t)$是指它的任意n维（$n=1,2,\cdots$）概率密度函数服从高斯分布：

$$f_n(x_1,x_2\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|B|^{1/2}}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

式中，$a_k=E[\xi(t_k)]$；$\sigma_k^2=E[\xi(t_k)-a_k]^2$；

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$为归一化协方差矩阵的行列式;

$|B|_{jk}$为行列式$|B|$中元素b_{jk}的代数余子式;

b_{jk}为归一化协方差函数：$b_{jk}=\frac{E\{[\xi(t_j)-a_j][\xi(t_k)-a_k]\}}{\sigma_j\sigma_k}$。

2.4 高斯随机过程

2.4.2 高斯过程的重要性质和高斯随机变量

1. 高斯过程的重要性质

①其统计特性完全由数字特征决定。

② 若广义平稳，则狭义平稳。

③若互不相关，则统计独立；

④若干个高斯过程的代数和仍是高斯型

⑤ 高斯过程经过线性系统后仍是高斯过程

2.4 高斯随机过程

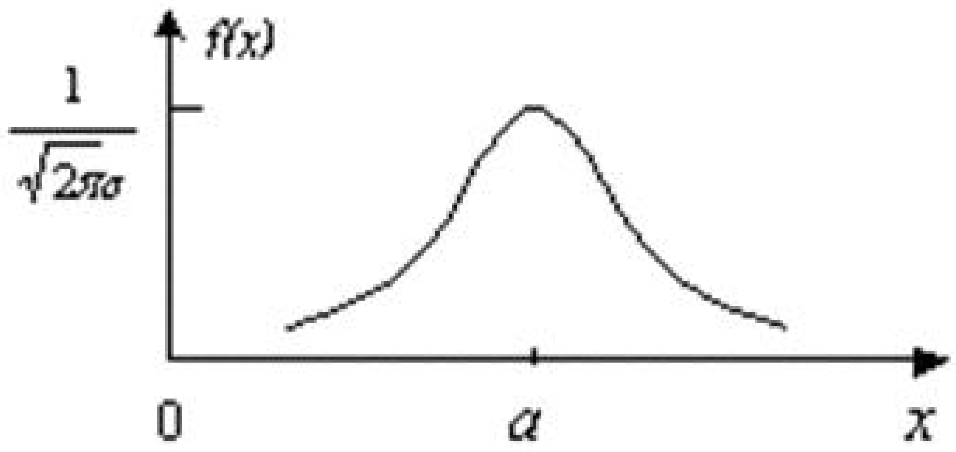
2. 高斯随机变量

高斯过程的一维分布，称为高斯随机变量。

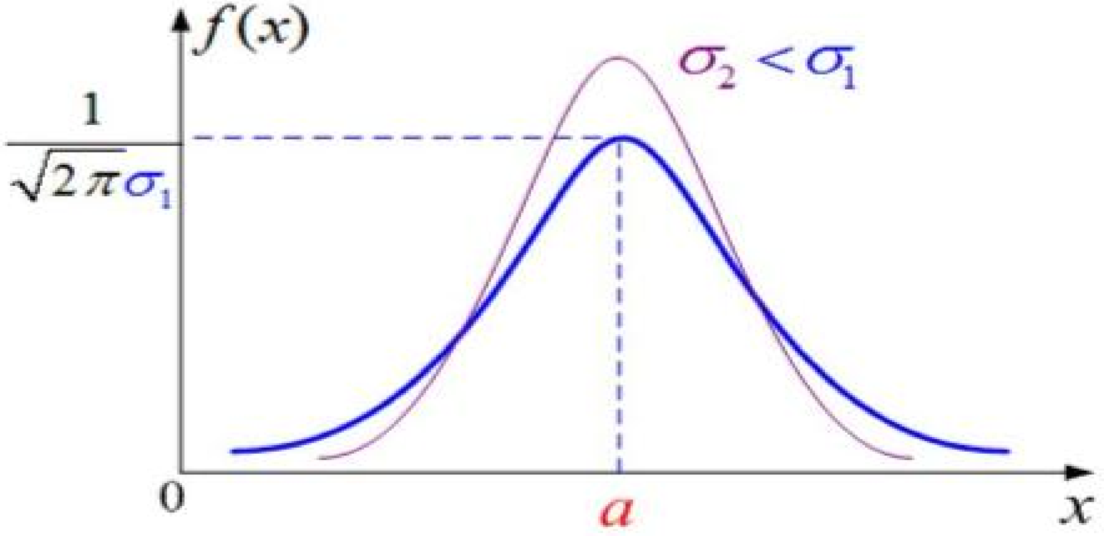
一维概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

记为$X\sim N(a,\sigma^2)$



2.4 高斯随机过程



$f(x)$具有以下性质：

（1）$f(x)$ 对称于直线$x = a$；

（2）$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}$；

（3）a表示分布中心，σ表示集中程度；

（4）当$a = 0$，$\sigma = 1$时，为标准化正态分布：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad 记为X \sim N(0,1)$$

2.4 高斯随机过程

高斯变量的标准化/归一化：

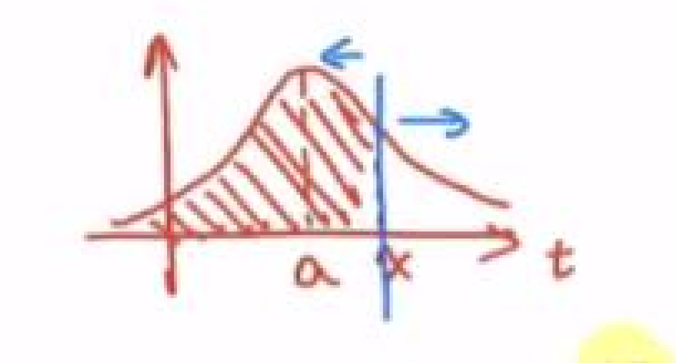
$$X \sim N(a,\sigma^2) \xrightarrow{Y=\frac{X-a}{\sigma}} Y \sim N(0,1)$$

$$P(X \le x) = P(Y \le \frac{x-a}{\sigma})$$

给定任意高斯变量X，都可以经过归一化变为标准正态分布Y.

2.4 高斯随机过程

3. 正态分布函数与误差函数



正态分布函数

$$F(x)=P(\xi \le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

标准正态分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

积分式无闭合形式，只有数值解，需要经过处理后通过查表求解概率。

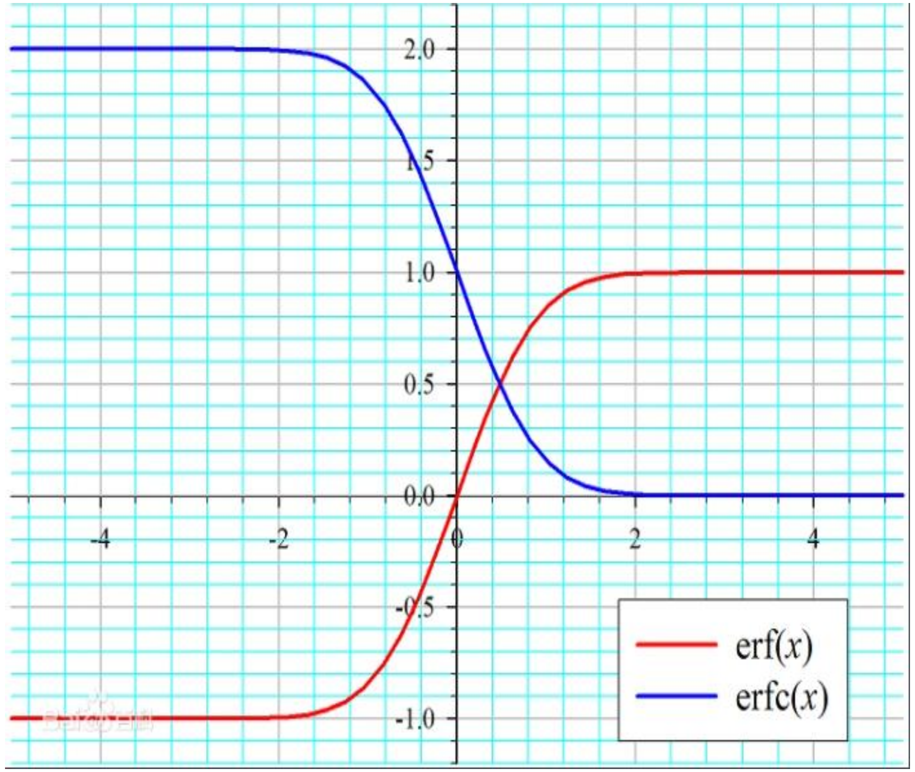
2.4 高斯随机过程

广东工业大学 Guangdong University of Technology

误差函数： $$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

主要性质：增 函数：erf(0)=0，erf(∞)=1，

奇函数： erf(-x)=-erf(x)



补误差函数： $$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

主要性质：减函数： erfc(0)=1， erfc(∞)=0，

$$\mathbf{erfc}(-x)=2-\mathbf{erfc}(x) \qquad \mathbf{erfc}(x)=1-\mathbf{erf}(x)$$

2.4 高斯随机过程

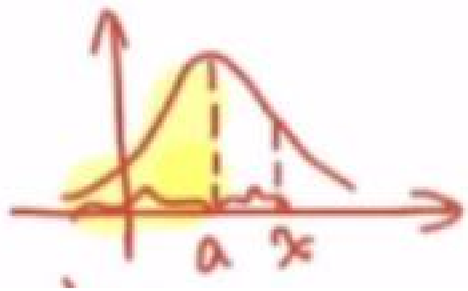
利用误差函数，可将正态分布函数F(x)表示为：

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathbf{erf}\,\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \text{当} x \geq a \text{时} \\ 1-\dfrac{1}{2}\mathbf{erfc}\,\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \text{当} x < a \text{时}\end{cases}$$

意义：误差函数的简明特性有助于分析通信系统的抗噪声性能。

2.4 高斯随机过程

证明： $x \ge a$时



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz+\int_{a}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}}e^{-u^2}du \qquad (令u=\frac{z-a}{\sqrt{2}\sigma})$$

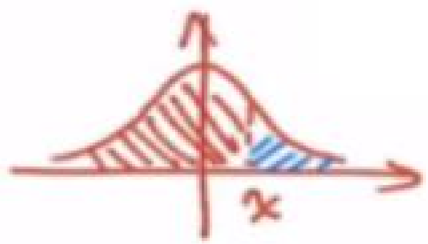
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf\left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right]$$

2.4 高斯随机过程

补充：

Q函数：

$$X \sim N(0,1) \quad Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



$$\because F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad \therefore Q(x) = 1 - F(x)$$

$$X \sim N(a,\sigma^2) \xrightarrow{Y = \frac{X-a}{\sigma}} Y \sim N(0,1)$$

$$Q(x) = 1 - F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

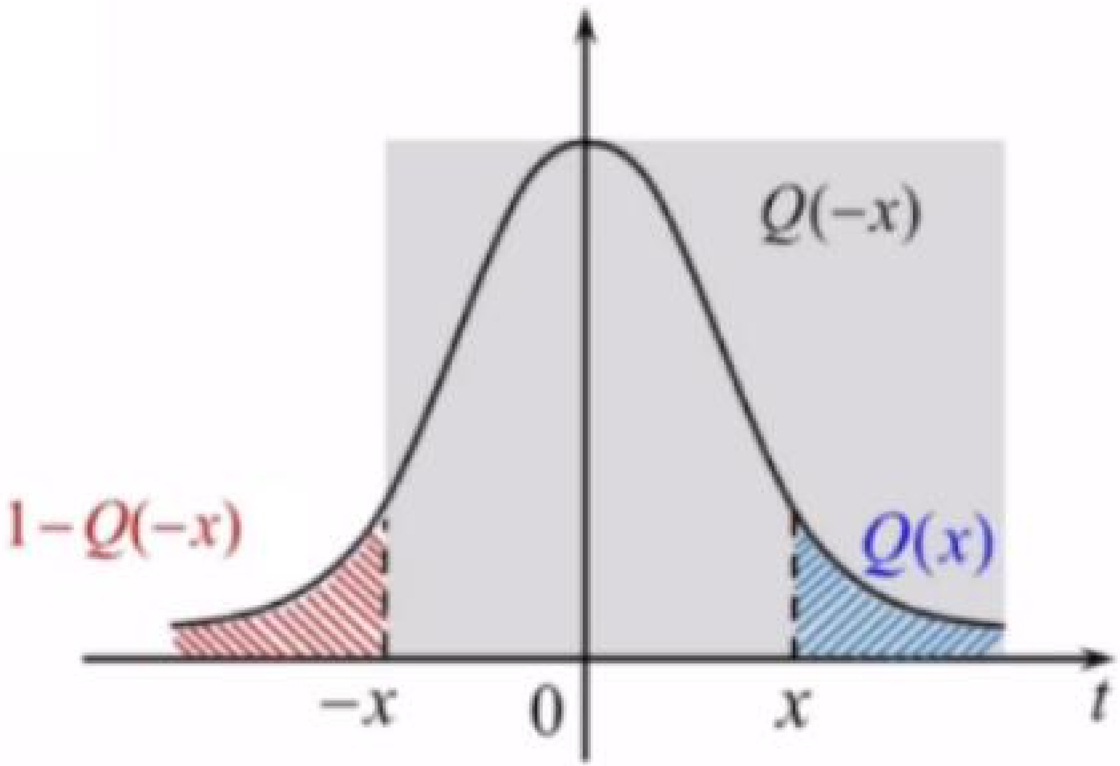
给定任意高斯变量X,经过归一化变为标准正态分布Y后，可以利用Q函数查表求有关的概率。

2.4 高斯随机过程

Q函数性质：

$$Q(0)=\frac{1}{2}$$

$$Q(x)=1-Q(-x)$$



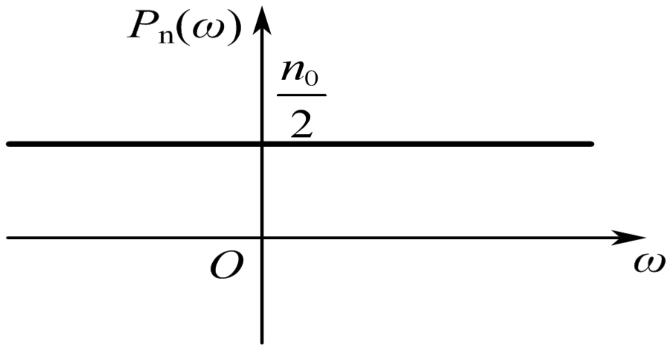
2.4 高斯随机过程

2.4.3 白噪声

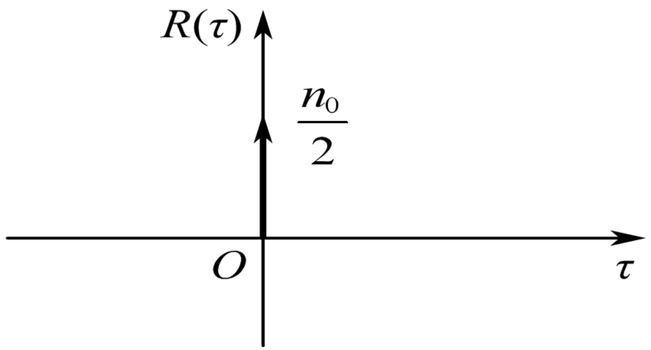
1. 理想白噪声：功率谱密度在整个频域为常数

$$P_n(f)=\frac{n_0}{2}\ (-\infty<\omega<\infty)$$

$$R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$



（a）



（b）

白噪声仅在 $\tau=0$ 时才相关

2. 高斯白噪声：概率分布服从高斯分布，且功率谱密度在整个频域为常数。

2.4 高斯随机过程

例：已知随机过程 $Y(t)=X_1\cos\omega_0 t - X_2\sin\omega_0 t, X_1, X_2$ 互相独立且均为均值为0，方差为 σ^2 的高斯变量。

1）求 $E[Y(t)], E[Y^2(t)]$

2）求Y(t)的一维概率密度函数f(y)

3）求Y(t)的相关函数 $R(t_1,t_2)$ 和协方差函数 $B(t_1,t_2)$

解：1) $E[Y(t)]=E[X_1\cos\omega_0 t - X_2\sin\omega_0 t]=E[X_1]\cos\omega_0 t - E[X_2]\sin\omega_0 t = 0$

$$E[Y^2(t)]=E[(X_1\cos\omega_0 t - X_2\sin\omega_0 t)^2]$$

$$=E[(X_1{}^2\cos^2\omega_0 t - 2X_1X_2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t + X_2{}^2\sin^2\omega_0 t)]$$

$$=\cos^2\omega_0 tE[(X_1{}^2] - 2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 tE[X_1]E[X_2] + \sin^2\omega_0 tE[X_2{}^2]$$

2.4 高斯随机过程

$$E[Y^2(t)]=\cos^2\omega_0 tE[(X_1{}^2]-2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 tE[X_1]E[X_2]+\sin^2\omega_0 tE[X_2{}^2]$$

$$=\cos^2\omega_0 tE[(X_1{}^2]+\sin^2\omega_0 tE[X_2{}^2]$$

$$\because D[X_1]=E\left[X_1{}^2\right]-E^2[X_1]=\sigma^2 \therefore E\left[X_1{}^2\right]=\sigma^2+E^2[X_1]=\sigma^2,\text{同理}E\left[X_2{}^2\right]=\sigma^2$$

$$E[Y^2(t)]=[\cos^2\omega_0 tE+\sin^2\omega_0 t]\sigma^2=\sigma^2$$

2） $Y(t)=X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t$， **故Y(t)仍为高斯过程**

$$E[Y(t)]=0,\quad D[Y(t)]=E[Y^2(t)]-E^2[Y(t)]=E[Y^2(t)]=\sigma^2$$

$$\therefore f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

2.4 高斯随机过程

3） $R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$

$$= E[(X_1\cos\omega_0 t_1 - X_2\sin\omega_0 t_1)(X_1\cos\omega_0 t_1 - X_2\sin\omega_0 t_1)]$$

$$= E[X_1{}^2\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 + X_2{}^2\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2$$
$$- X_1X_2(\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 - \sin\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2)]$$

$$= \cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 E[X_1{}^2] + \sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 E[X_2{}^2]$$
$$-(\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 - \sin\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2)]E[X_1]E[X_2]$$

$$= \cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 E[X_1{}^2] + \sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 E[X_2{}^2]$$

$$= [\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 + \sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2]\sigma^2$$

2.4 高斯随机过程

$$R_Y(t_1,t_2)=[\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2+\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2]\sigma^2$$

$$=\sigma^2\cos\omega_0(t_2-t_1)$$

$$=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

$$B(t_1,t_2)=R_Y(t_1,t_2)-E[Y(t_1)]E[Y(t_2)]=R_Y(t_1,t_2)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

2.5 窄带高斯过程

窄带高斯过程的定义

窄带高斯过程的数学表示

同相分量和正交分量的统计特性

随机包络和随机相位的统计特性

窄带高斯白噪声

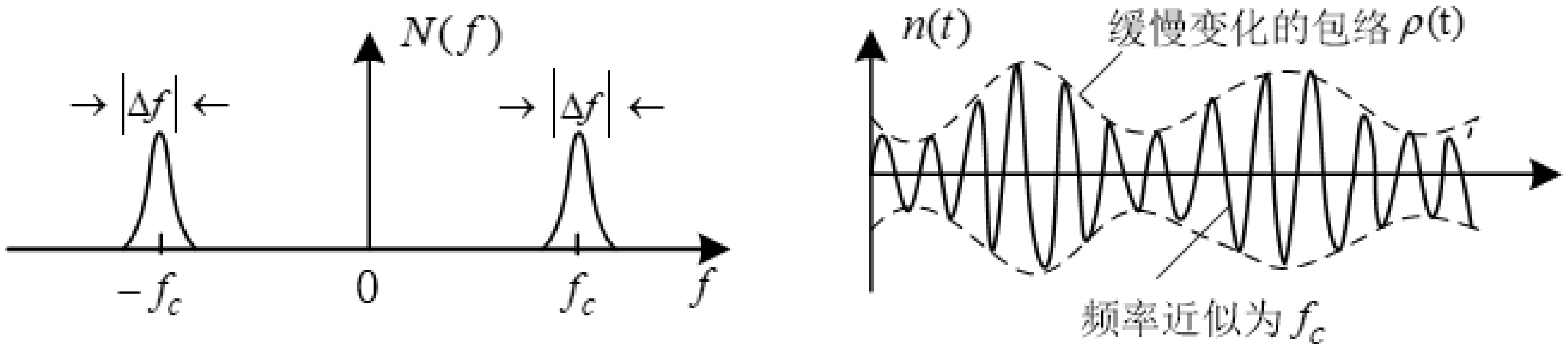
2.5 窄带高斯过程

■ 窄带高斯过程的定义：

窄带系统：通带宽度$\Delta f << f_c$ ，且中心频率f_c远离0频率

窄带高斯过程：高斯过程通过以f_c为中心频率的窄带系统的输出过程

窄带高斯过程时、频示意图：



（a） （b）

2.5 窄带高斯过程

■ 窄带高斯过程的数学表示

$$n(t)=\rho(t)\cos[\omega_c t+\phi(t)]$$

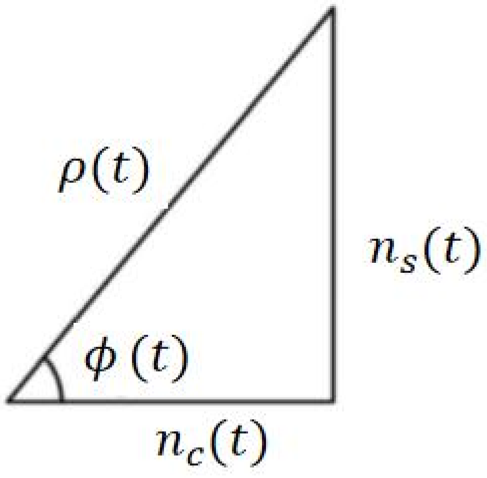
随机包络　　随机相位　　--包络相位形式

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t$$

同相分量　　正交分量　　--同相正交形式

关系：

$$n_c(t)=\rho(t)\cos\phi(t)$$
$$n_s(t)=\rho(t)\sin\phi(t)$$



2.5 窄带高斯过程

■ 同相分量和正交分量的统计特性

n(t)为平稳高斯窄带过程，均值为0，方差为σ_n^2

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

- $n_c(t)$、$n_s(t)$的数学期望均为0
- $n_c(t)$、$n_s(t)$的相关函数均只与时间间隔有关，故平稳
- $n_c(t)$、$n_s(t)$的自相关函数相同：
- $n_c(t)$、$n_s(t)$的方差相同：$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$
- $n_c(t)$和$n_s(t)$为互不相关、统计独立的高斯变量

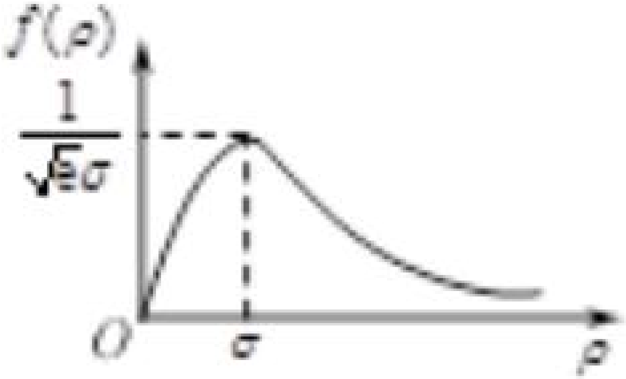
$n_c(t)$和$n_s(t)$为零均值、等方差，不相关、独立的平稳高斯过程

2.5 窄带高斯过程

■ 随机包络和随机相位的统计特性

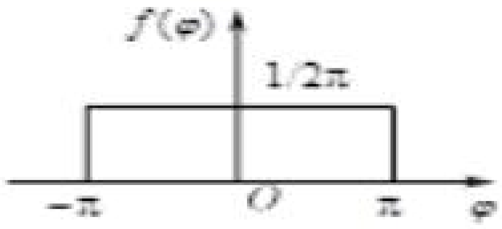
- 随机包络~瑞利分布：

$$f(\rho)=\frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right]\qquad(\rho\geq 0)$$



- 随机相位~均匀分布：

$$f(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\qquad(0\leq\varphi\leq 2\pi)$$



且随机包络和随机相位统计独立

$$f(\rho,\varphi)=f(\rho)\cdot f(\varphi)$$

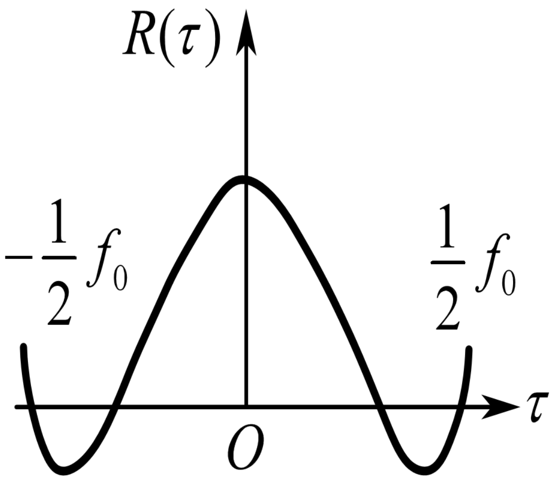
2.5 窄带高斯过程

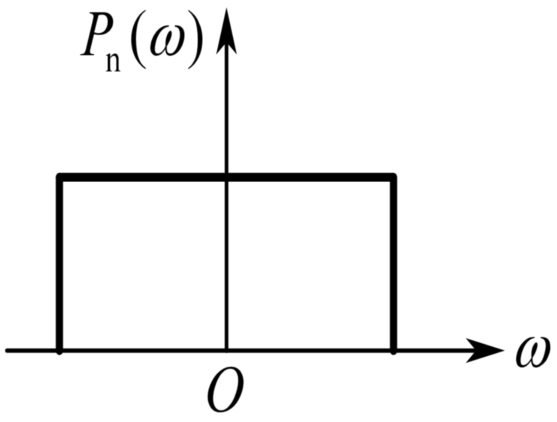
■ 窄带高斯白噪声

● 低通白噪声：

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2},|f|\le f_0\\0,其他\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0 f_0\frac{\sin 2\pi f_0\tau}{2\pi f_0\tau}$$





2.5 窄带高斯过程

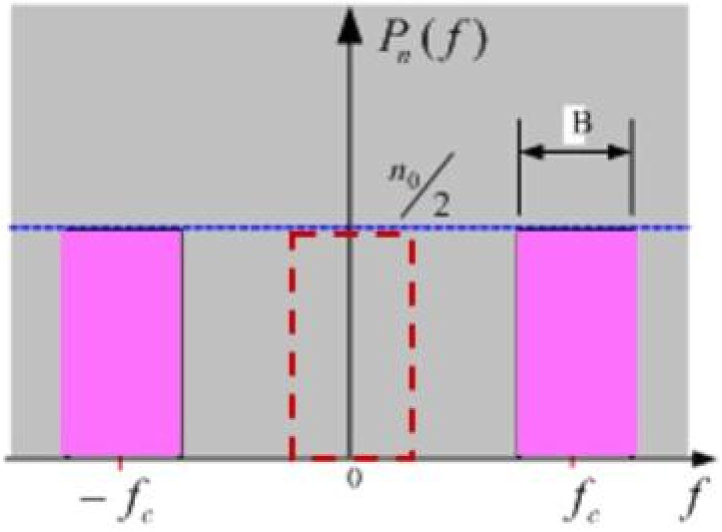
- **带通白噪声：**

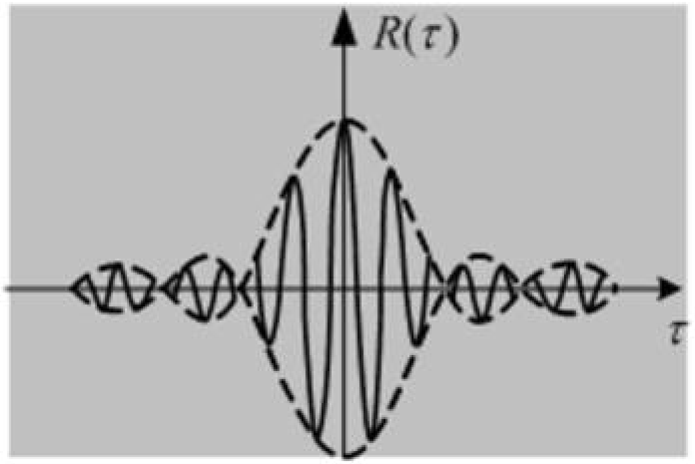
$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, f_c-\dfrac{B}{2}\le|f|\le f_c-\dfrac{B}{2}\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0B\frac{\sin\pi B\tau}{\pi B\tau}\cos 2\pi f_c\tau$$

平均功率：$\boxed{N=n_0B}$

若$B<<f_c$,称为窄带高斯白噪声





2.6正弦波随机过程加窄带高斯噪声

■ 数学模型：

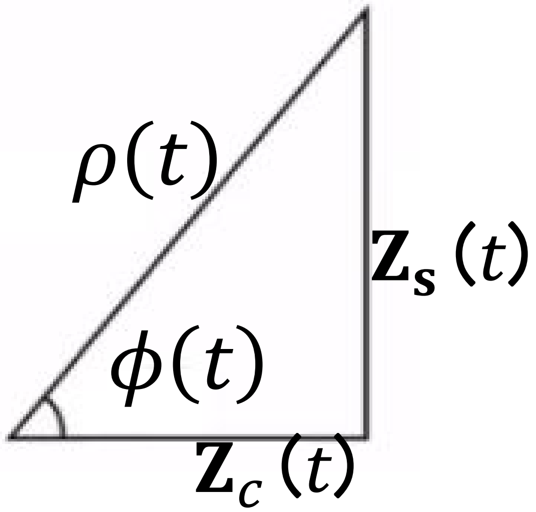
$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$$

$$= A\cos\theta\cos\omega_c t - A\sin\theta\sin\omega_c t + n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

$$= [A\cos\theta + n_c(t)]\cos\omega_c t - [A\sin\theta + n_s(t)]\sin\omega_c t$$

$$= \mathbf{Z}_c(t)\cos\omega_c t - \mathbf{Z}_s(t)\sin\omega_c t$$ --同相正交形式

$$= \rho(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)]$$ --包络相位形式



2.6正弦波随机过程加窄带高斯噪声

■ 同相分量、正交分量的统计特性：

$$\mathbf{Z}_c(t) = A\cos\theta + n_c(t),\quad \mathbf{Z}_s(t) = A\sin\theta + n_s(t)$$

随机相位θ给定时，$\mathbf{Z}_c(t)$和$\mathbf{Z}_s(t)$ 为取值不相关、相互独立且同分布的高斯变量，其数字特征为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}[\mathbf{Z}_c(t)] = A\cos\theta \\ \mathbf{E}[\mathbf{Z}_s(t)] = A\sin\theta \\ \sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2 \end{cases}$$

2.6正弦波随机过程加窄带高斯噪声

■ 随机包络、随机相位的统计特性：

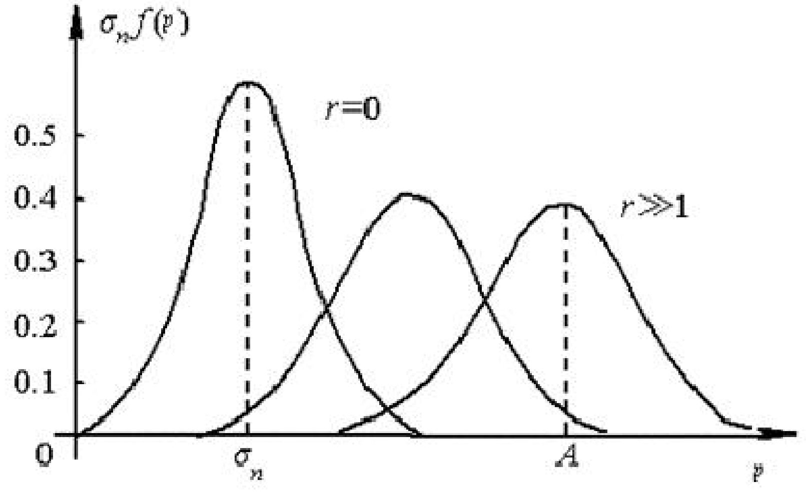
- 随机包络~广义瑞利分布（莱斯分布）：

$$f(\rho)=\frac{\rho}{\sigma_n^2}I_0\left(\frac{A\rho}{\sigma_n^2}\right)\exp\left[-\frac{\rho^2+A^2}{2\sigma_n^2}\right] \qquad \rho>0$$

$I_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数

$$\underbrace{A\cos(\omega_c t+\theta)}_{\text{信号功率 } A^2/2}+\underbrace{n(t)}_{\text{噪声功率 } \sigma_n^2}$$

令：$r=A^2/2\sigma^2_n$

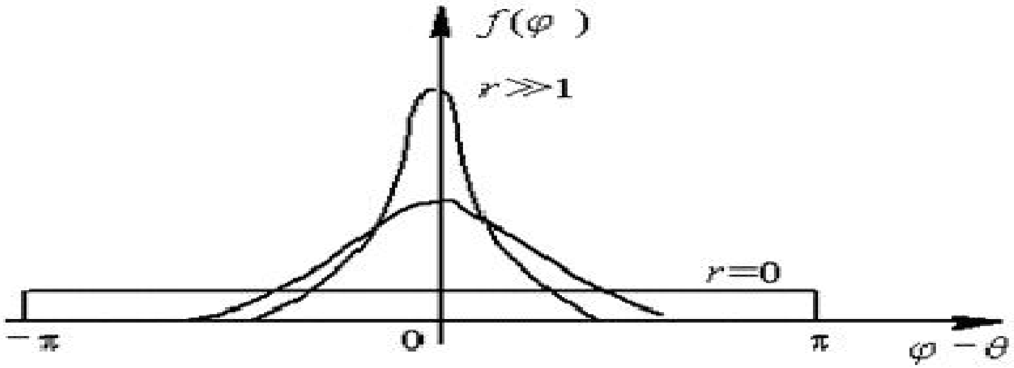


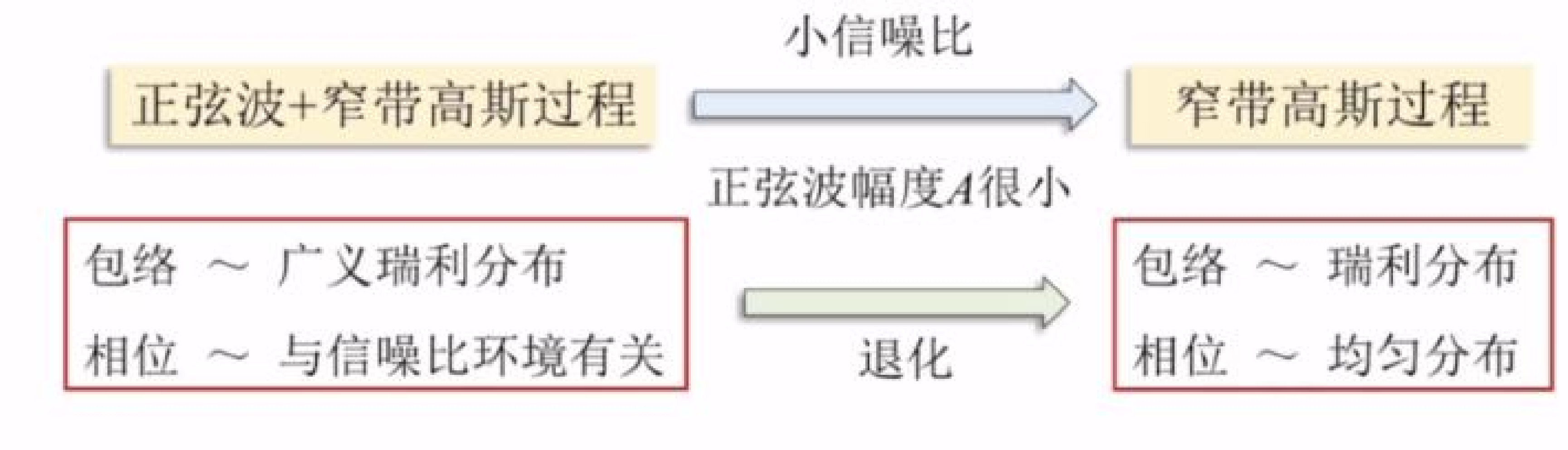
➢ $A\to0$，即$r\to0$时，$f(z)$退化为瑞利分布。

➢ 信噪比r较大时，$f(z)$近似于高斯分布

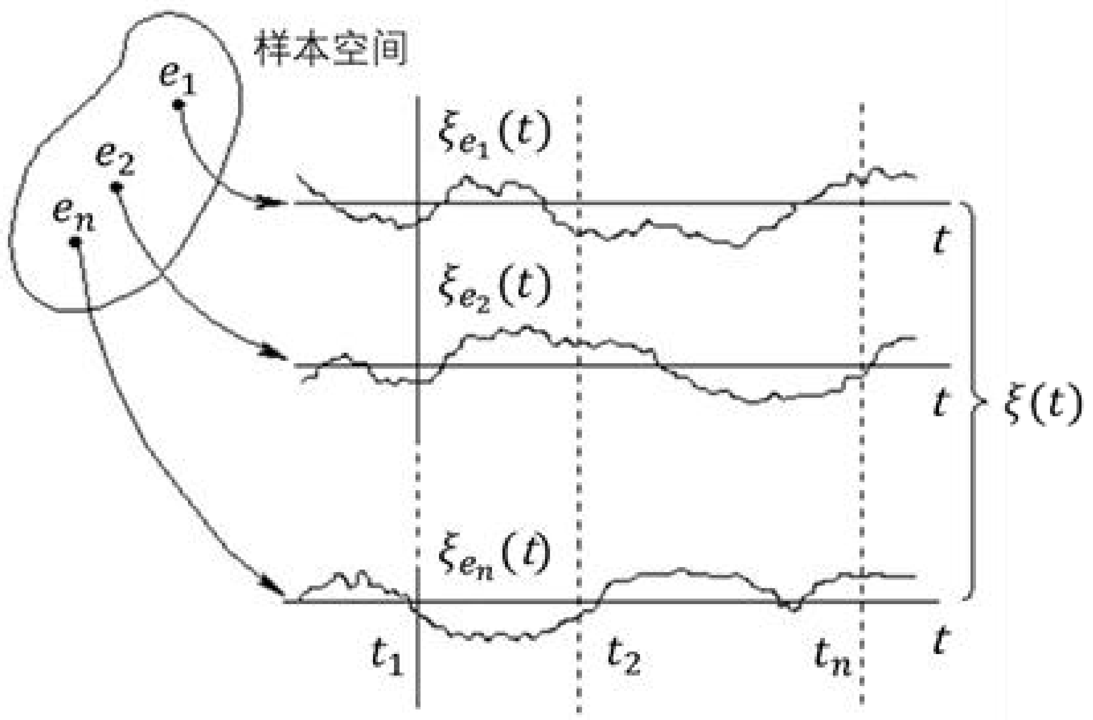
2.6正弦波随机过程加窄带高斯噪声

- 随机相位的统计特性：
  - 小信噪比：$f(\phi)$服从均匀分布。
  - 大信噪比：$f(\phi)$主要集中在有用信号相位附近。





■ 定义:



所有样本函数$\xi_i(t)$的集合，

或随机变量$\xi(t_i)$的集合

第2章 随机过程总结

■ 特性

1）统计特性：分布函数和概率密度函数

复杂！

2）数字特征

期望--均值

方差--偏离程度

相关函数--关联程度

三、特殊的随机过程

1、平稳性

均值与时间t无关： $a(t)=a$

相关函数只与时间间隔τ有关： $R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau)$

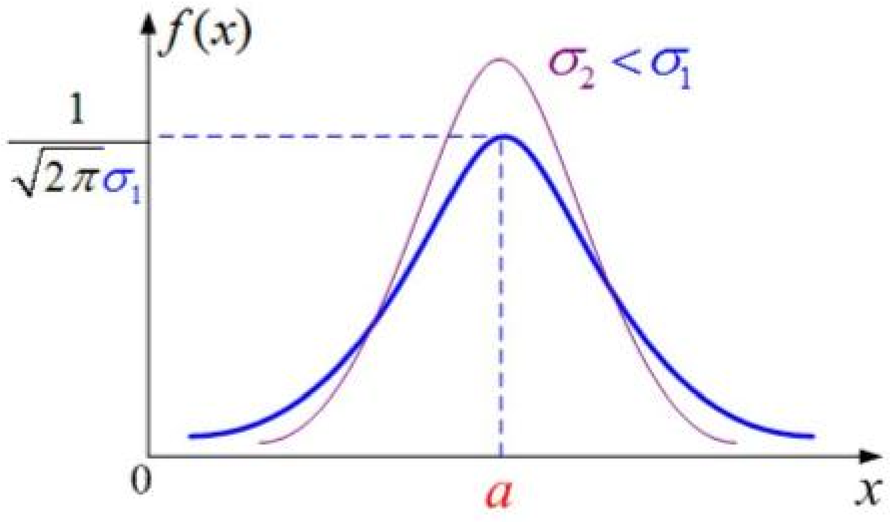
2、遍历性

若遍历则： $\begin{cases} a=\overline{a} \\ R(\tau)=\overline{R(\tau)} \end{cases}$

3、高斯随机过程

特点：一维概率密度呈正态分布：

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)}$$ 记为$N(a,\sigma^2)$

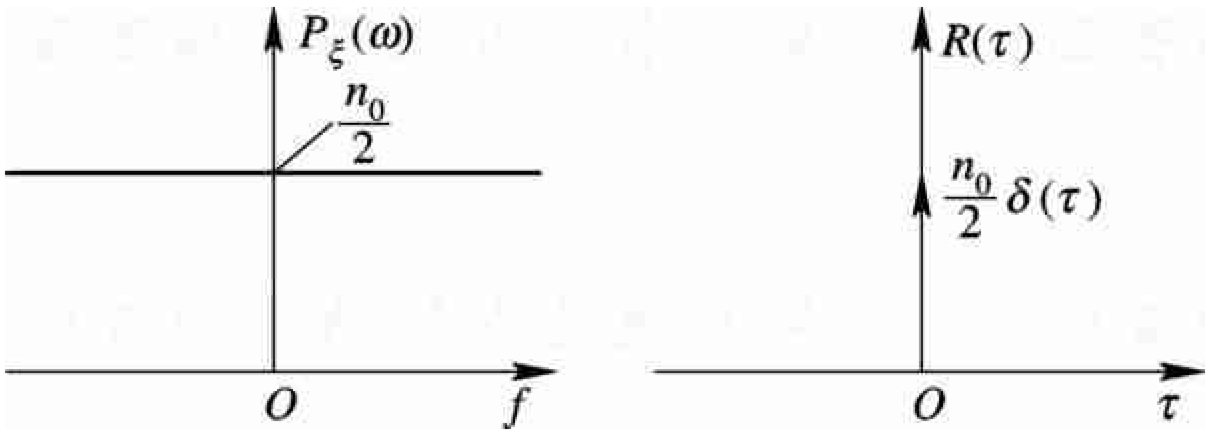


4、高斯白噪声

“高斯”：取值呈正态分布

“白”：功率谱密度呈均匀分布（自相关函数为冲激函数）

$$\boxed{P_\xi(\omega)=\frac{n_0}{2}} \qquad \boxed{R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)}$$



第2章 随机过程总结

四. 窄带随机过程

平稳窄带高斯:

- 包络~瑞利分布
- 相位~均匀分布

正弦波加窄带高斯:

- 包络~广义瑞利分布