第五章 连续系统的S域分析

§5.1 拉普拉斯变换

一、从傅氏变换到拉氏变换

有几种情况不满足绝对可积条件：

- ε (t)
- 增长信号 $e^{at} \quad (a>0)$
- 周期信号 $\cos\omega_1 t$

- 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ σ 为任意实数，则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛，满足绝对可积条件

$\varepsilon(t)e^{-\sigma t}$

$e^{at}.e^{-\sigma t} \quad (\sigma>a)$

$e^{-\sigma t}\cos\omega_1 t$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$=F_b(\sigma+j\omega)$$

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_b(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_b(\sigma+j\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_b(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

令$s=\sigma+j\omega$　则$ds=jd\omega$

象函数

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

原函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_b(s)e^{st}ds$$

拉普拉斯变换与傅里叶变换的区别：

FT: 时域函数 $f(t)$ → 频域函数 $F(j\omega)$

变量 t → 变量 ω

（变量 t、ω 都是实数）

LT: 时域函数 $f(t)$ → 复频域函数 $F(s)$

变量 t → 变量 s (复频率)

t（实数） $s=\sigma+j\omega$ (复数)

即： 傅里叶变换建立了时域与频域之间的联系；

拉普拉斯变换建立了时域与复频域之间的联系。

拉普拉斯（Laplace,Pierre-Simon,1749-1827）

法国数学家、天文学家。家境贫寒，靠邻居资助上学，1816年成为法兰西学院院士，次年任该院院长。主要研究天体力学和物理学，认为数学只是一种解决问题的工具，但在运用数学时创造和发展了许多新的数学方法。

主要成就：在《天体力学》中阐述了天体运行、地球形状、行星摄动、月离理论和三体问题等，引入著名的拉普拉斯方程。在《概率的分析理论》中，总结了当时整个概率论的研究，论述了概率在选举、审判调查、气象等方面的应用。

二、收敛域(ROC)

$$F_B(s)=\mathscr{L}_B[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

在以σ 为实轴，$j\omega$ 为虚轴的复平面中，凡能使变换$F_B(s)$ 存在的s值范围称为双边拉氏变换的收敛域。

例5.1 求因果信号的拉氏变换：$f_1(t)=e^{at}\varepsilon(t)$（a为实数）

解：

$$F_{b1}(s)=\int_0^{\infty}e^{at}e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s-a}[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-a)t}e^{-j\omega t}]=\begin{cases}\dfrac{1}{s-a},\sigma>a\\ \text{不定，}\quad\sigma=a\\ \text{无界，}\quad\sigma<a\end{cases}$$

例5.2 求反因果信号的拉氏变换：$f_2(t)=e^{bt}\varepsilon(-t)$（b为实数）

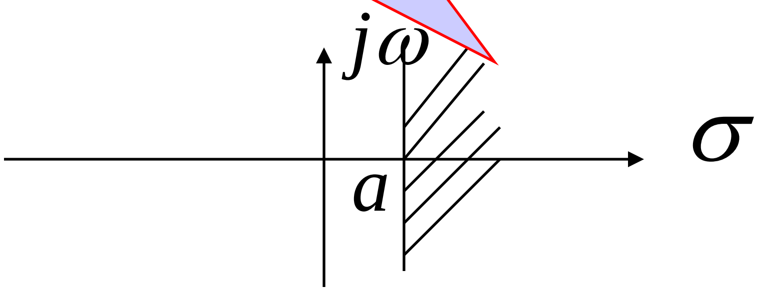
解：$$F_{b2}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{bt}e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-(s-b)t}}{-(s-b)}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$=-\frac{1}{s-b}[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-b)t}e^{-j\omega t}]=\begin{cases}\text{无界},\sigma>b\\ \text{不定}，\quad \sigma=b\\ -\dfrac{1}{s-b}，\quad \sigma<b\end{cases}$$

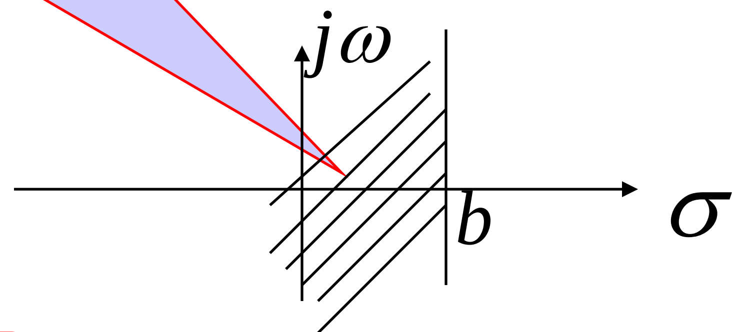
双边信号 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\begin{cases}e^{bt},t<0\\ e^{at},t>0\end{cases}$ 的拉氏变换：

$$F_b(s)=F_{b1}(s)+F_{b2}(s)$$

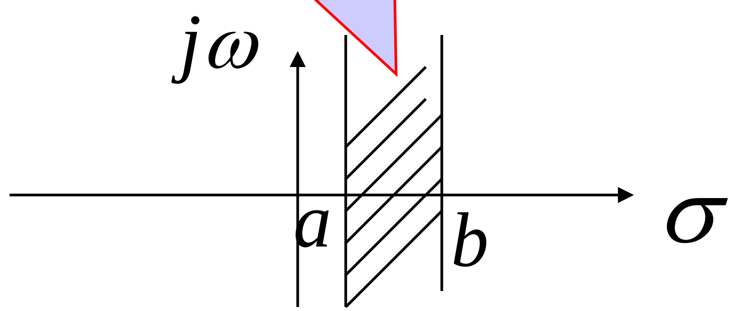
因果函数的收敛域



反因果函数的收敛域



双边函数的收敛域



三、单边拉氏变换

1、定义：

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds, & t>0 \end{cases}$$

2、常用信号的拉氏变换

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$

$$\varepsilon(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}, \sigma > -a$$

$$\delta(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \sigma > -\infty$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} \delta'(t) e^{-st} dt = s, \sigma > -\infty$$

§ 5.2 拉普拉斯变换的性质

◆ **拉氏变换与傅氏变换一样具有很多重要的性质。这里只着重于ROC的讨论。**

1. 线性（Linearity ）：

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s),\qquad \mathrm{ROC}: R_1$

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s),\qquad \mathrm{ROC}: R_2$

则 $ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

ROC至少是 $R_1 \cap R_2$

例. $x_1(t)=\delta(t)+e^{-t}\varepsilon(t)$　　$x_2(t)=-e^{-t}\varepsilon(t)$

$$X_1(s)=1+\frac{1}{s+1}=\frac{s+2}{s+1},\qquad \mathrm{ROC}:\sigma>-1$$

$$X_2(s)=\frac{-1}{s+1},\qquad \mathrm{ROC}:\sigma>-1$$

而 $x_1(t)+x_2(t)=\delta(t)\leftrightarrow 1$ **ROC为整个S平面**

- **当R_1与R_2无交集时，表明$X(s)$不存在。**

2. 时移性质（Time Shifting）:

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(t-t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad$ ROC不变

3. S域平移（Shifting in the s-Domain）:

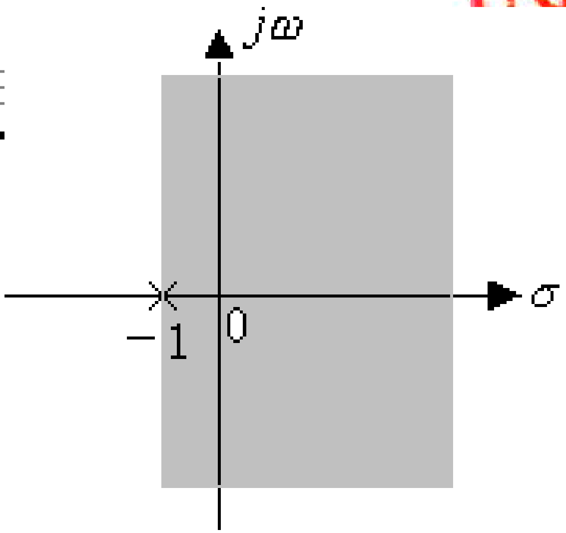
若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \mathrm{ROC}: R$ 则

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0), \quad \mathrm{ROC}: R+\mathrm{Re}[s_0]$$

表明 $X(s-s_0)$ 的ROC是将 $X(s)$ 的ROC平移了一个 $\mathrm{Re}[s_0]$。

例. $x(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

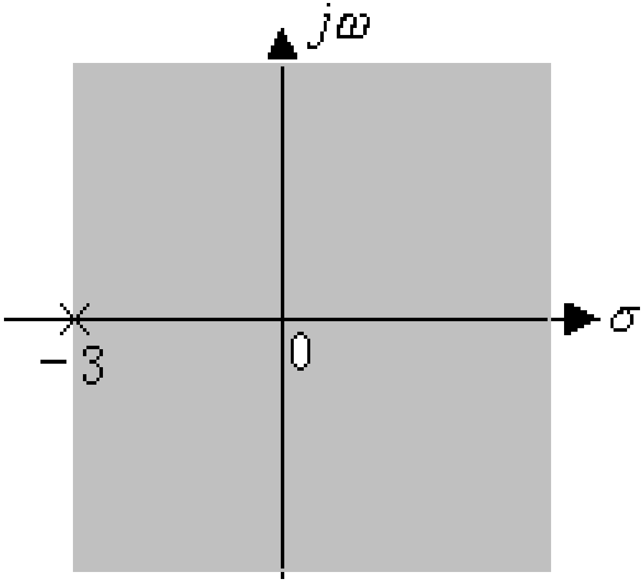
$$X(s)=\frac{1}{s+1}, \qquad \sigma>-1$$



$$y(t)=x(t)e^{-2t}=e^{-3t}\varepsilon(t)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s+3}$$

显然 $\mathrm{ROC}:\sigma>-3$



4. 时域尺度变换（Time Scaling）:

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{a} X(\dfrac{s}{a}) \qquad \mathrm{ROC}: aR$

例. $x(t)=e^{-t}\varepsilon(t) \leftrightarrow X(s)=\dfrac{1}{s+1}, \qquad \sigma>-1$

求 $x(\dfrac{t}{2})=e^{-\frac{t}{2}}\varepsilon(t)$ **的拉氏变换及ROC**

$$X(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2s+1}, \qquad \mathrm{ROC}:\sigma>-\frac{1}{2}$$

特例 $x(-t) \leftrightarrow -X(-s) \quad \mathrm{ROC}:-R$

5. 卷积性质:（Convolution Property）

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \mathrm{ROC}: R_1$

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \mathrm{ROC}: R_2$ 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \quad \mathrm{ROC}: \text{至少} R_1 \cap R_2$$

例. $X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}, \quad \mathrm{ROC}: R_1 = \sigma > -1$

$$X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad \mathrm{ROC}: R_2 = \sigma > -2$$

显然有: $R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$

$$X_1(s)X_2(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)},\quad \sigma>-2,$$ ROC扩大

原因是 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 相乘时，发生了零极点相抵消的现象。当被抵消的极点恰好在ROC的边界上时，就会使收敛域扩大。

7. 时域微分:（Differentiation in theTime Domain）

若 $x(t)\leftrightarrow X(s),\qquad \mathrm{ROC}:R$

则 $\dfrac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)-x(0\_)$ **ROC包括 R，有可能扩大。**

8. S域微分:（ Differentiation in the s-Domain ）

若 $x(t) \leftrightarrow X(s),\qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $-tx(t) \leftrightarrow \dfrac{dX(s)}{ds},\qquad \mathrm{ROC}: R$

例. $X(s) = \dfrac{1}{(s+a)^2}\quad \mathrm{ROC}: \sigma > -a$ 求 $x(t)$

$$\because \quad \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\therefore \quad x(t) = te^{-at}\,\varepsilon(t)$$

9. 时域积分:（ Integration in the Time Domain ）

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \mathrm{ROC}: R$

则 $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) + \frac{x^{(-1)}(0_{-})}{s}$$

$\mathrm{ROC}:$ **至少** $R \cap (\mathrm{Re}[s] > 0)$

10. 初值与终值定理:
(The Initial- and Final- Value Theorems)

如果 $x(t)$ 是因果信号，且在 $t=0$ 不包含奇异函数，

则

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$ ——初值定理

如果 $x(t)$ 是因果信号，且在 $t=0$ 不包含奇异函数，

除了在 $s=0$ $X(s)$ 可以有单阶极点外，其余极点均在S平面的左半边，则

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$ ——终值定理

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i F_i(s)$
时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_-)$
时域积分	$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$
时域平移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$

尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
S域平移	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
S域微分	$(-t)f(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
S域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\eta)d\eta$

初值定理 $$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理 $$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

卷积定理 $f_1(t) * f_2(t)$ $F_1(s)F_2(s)$

$f_1(t) f_2(t)$ $\dfrac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$

例5.3 求单边正余弦函数sin(bt)ε(t)和cos(bt)ε(t)的拉氏变换。

解：

$$\sin(bt)\varepsilon(t)=\frac{1}{2j}(e^{jbt}-e^{-jbt})\varepsilon(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2j}\frac{1}{s-jb}-\frac{1}{2j}\frac{1}{s+jb}=\frac{b}{s^2+b^2},\quad \sigma>0$$

$$\cos(bt)\varepsilon(t)=\frac{1}{2}(e^{jbt}+e^{-jbt})\varepsilon(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-jb}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+jb}=\frac{s}{s^2+b^2},\quad \sigma>0$$

例5.4 求门函数$g_\tau(t-\frac{\tau}{2})$的拉氏变换。

解:

$$g_\tau(t-\frac{\tau}{2})=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s\tau}=\frac{1-e^{-s\tau}}{s}, \quad \sigma>-\infty$$

例5.5 求在t=0时接入的周期性单位脉冲序列 $\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的拉氏变换。

解：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\ldots$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1,\quad \delta(t-T)\leftrightarrow e^{-sT},\quad \delta(t-2T)\leftrightarrow e^{-2sT},\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow 1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-sT}},\quad \sigma>0$$

例5.6 求单边衰减正余弦函数$e^{-at}\sin(bt)\varepsilon(t)$和$e^{-at}\cos(bt)\varepsilon(t)$的拉氏变换（a为实数）。

解：

$$\sin(bt)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$e^{-at}\sin(bt)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{b}{(s+a)^2+b^2},\quad \sigma > -a$$

$$\cos(bt)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$e^{-at}\cos(bt)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2},\quad \sigma > -a$$

例5.7 已知f(t)的象函数为：

$$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

求e^{-t} f(3t-2)的象函数。

解：

$$f(t-2)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+1}e^{-2s}$$

$$f(3t-2)\leftrightarrow\frac{1}{3}\frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1}e^{-2\frac{s}{3}}=\frac{s}{s^2+9}e^{-\frac{2}{3}s}$$

$$e^{-t}f(3t-2)\leftrightarrow\frac{s+1}{(s+1)^2+9}e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$$

例5.8 已知cos(t)ε(t)的象函数为：

$$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

求sin(t)ε(t)的象函数。

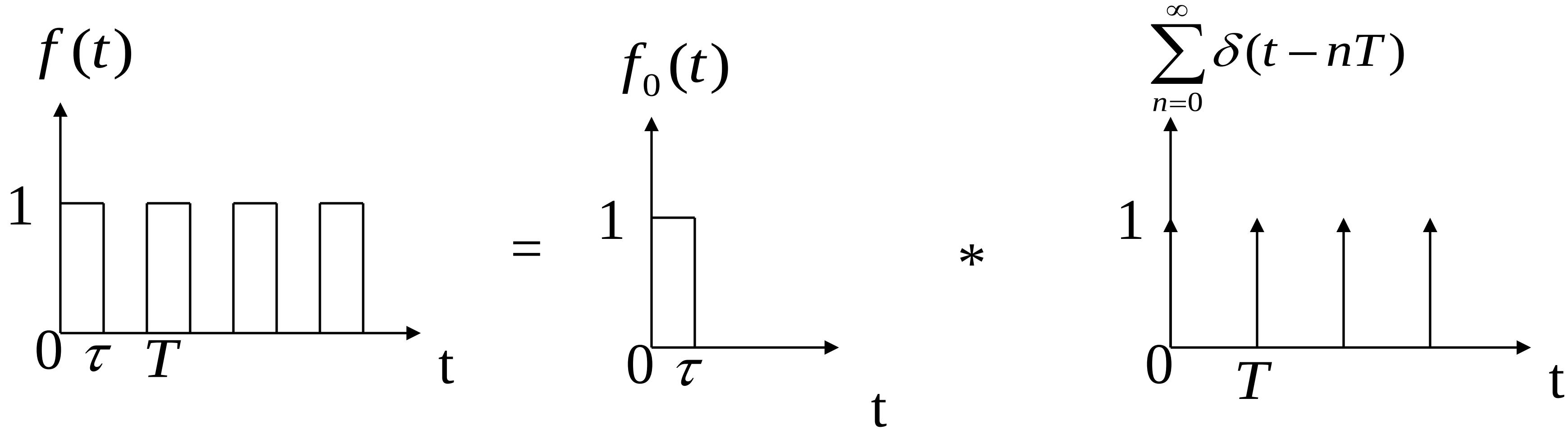
解：

$$[\cos t\varepsilon(t)]'=\cos t\delta(t)-\sin t\varepsilon(t)$$

$$\sin t\varepsilon(t)=\delta(t)-[\cos t\varepsilon(t)]'$$

$$\leftrightarrow 1-(s\frac{s}{s^2+1}-0)=\frac{1}{s^2+1}\quad \sigma>0$$

例5.9 求t=0时刻接入的周期性矩形脉冲序列的象函数。



$$f(t) = f_0(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$f_0(t) = g_\tau(t-\frac{\tau}{2}) \leftrightarrow \frac{1-e^{-s\tau}}{s} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}} \frac{1-e^{-s\tau}}{s}$$

例5.10 已知ε(t)的象函数为1/s，利用阶跃函数的积分求$t^n\varepsilon(t)$的象函数。

解：

$$\int_0^t \varepsilon(x)dx = t\varepsilon(t)$$

$$\left(\int_0^t\right)^2 \varepsilon(x)dx = \frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$$

$$\left(\int_0^t\right)^3 \varepsilon(x)dx = \frac{1}{3\times 2}t^3\varepsilon(t)$$

$$\left(\int_0^t\right)^n \varepsilon(x)dx = \frac{1}{n!}t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{n!}t^n\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}} \qquad t^n\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

例5.11 已知LTI系统的冲激响应为h(t)= $e^{-t}\varepsilon(t)$， 求输入f(t)=ε(t)的零状态响应。

解:

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s)$$

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad h(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$$

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y_{zs}(t) = \varepsilon(t) - e^{-t}\varepsilon(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

例5.12 求 $t^2e^{-at}\varepsilon(t)$的象函数。

解1：

$$e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}$$

$$(-t)^2e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\left(\frac{1}{s+a}\right)''=\frac{2}{(s+a)^3}$$

解2：

$$t^2\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{2}{s^3}$$

$$e^{-at}t^2\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{2}{(s+a)^3}$$

例5.13 函数f(t)的象函数

$$F(s)=\frac{1}{s+a},\quad \sigma>-a$$

求原函数的初值和终值。

解：

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a}=1$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a}=\begin{cases}0, a>0 & \text{收敛域：}\ \sigma>-a\\ 1, a=0 & \text{收敛域：}\ \sigma>-\infty\\ 0, a<0 & \text{收敛域：}\ \sigma>-a\text{，}\ s\neq 0\end{cases}$$

§5.3 拉普拉斯逆变换

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

一、查表法

例5.14 求 $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+3s+2}$ 的原函数。

解： $$F(s)=\frac{2s+5}{(s+1)(s+2)}$$

查附录五得编号为2-12的象函数与本例相同，代入原函数得：

$$f(t)=(3e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

二、部分分式展开法

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$（真分式）

A(s)称为系统的特征多项式，方程A(s)=0称为特征方程，其根称为特征根，也称为系统的固有频率或自然频率。

$$B(s)=b_m(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)$$

其中z_1，z_2，…，z_m称为零点。

$$\mathrm{A}(s)=(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)$$

其中p_1，p_2，…，p_n称为极点。

1、F(s)有单极点

方程A(s)=0的根都是单实根，其n个根s_1， s_2 ，…， s_n 都互不相等，那么F(s)可展开为：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

确定系数K_i

$$(s-s_i)F(s)=\frac{(s-s_i)K_1}{s-s_1}+\frac{(s-s_i)K_2}{s-s_2}+\ldots+K_i+\ldots+\frac{(s-s_i)K_n}{s-s_n}$$

$$K_i=(s-s_i)F(s)\Big|_{s=s_i}=\lim_{s\to s_i}[(s-s_i)\frac{B(s)}{A(s)}]$$

例5.15 求$F(s)=\dfrac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$的原函数。

$$A(s)=s^3+3s^2+2s=s(s+1)(s+2)$$

方程A(s)=0有3个单实根$s_1=0$， $s_2=-1$， $s_2=-2$

$$K_1=sF(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0}=2$$

$$K_2=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\frac{s+4}{s(s+2)}\Big|_{s=-1}=-3$$

$$K_3=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{s+4}{s(s+1)}\Big|_{s=-2}=1$$

$$F(s)=\frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=(2-3e^{-t}+e^{-2t})\varepsilon(t)$$

2、F(s)有共轭单极点

例5.16 求 $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$ 的原函数。

$$\mathrm{A}(s)=s^2+2s+2=(s+1+j)(s+1-j)$$

共轭复根为-1+j和-1-j

$$K_1=(s+1-j)F(s)\Big|_{s=-1+j}=\frac{1+j}{j2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$K_2=(s+1+j)F(s)\Big|_{s=-1-j}=\frac{1-j}{-j2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$F(s)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{s+1-j}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{s+1+j}$$

$$f(t)=[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{(-1+j)t}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-1-j)t}]\varepsilon(t)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}[e^{j(t-\frac{\pi}{4})}+e^{-j(t-\frac{\pi}{4})}]\varepsilon(t)$$

$$=\sqrt{2}e^{-t}\cos(t-\frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$$

归纳：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\underbrace{\frac{K_1}{s-\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s-\alpha+j\beta}}_{F_1(s)}+\ldots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

$$F_1(s)=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s-\alpha-j\beta}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s-\alpha+j\beta}$$

$$f_1(t)=[|K_1|e^{j\theta}e^{(\alpha+j\beta)t}+|K_1|e^{-j\theta}e^{(\alpha-j\beta)t}]\varepsilon(t)$$

$$=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$$

3、F(s)有重极点

方程A(s)=0在s=s_i处有r重根，其余n-r个根s_{r+1}，…，s_n都不等于s_i，那么F(s)可展开为：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{K_{1r}}{s-s_1}+\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$$

$$(s-s_1)^r F(s)=K_{11}+(s-s_1)K_{12}+\ldots+(s-s_1)^{r-1}K_{1r}$$

$$+(s-s_1)^r\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$$

$$K_{11}=(s-s_1)^r F(s)\Big|_{s=s_1}$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}[(s-s_1)^r F(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}[(s-s_1)^r F(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$\frac{1}{(s-s_1)^{n+1}} \leftrightarrow \frac{1}{n!} t^n e^{s_1 t} \varepsilon(t)$$

例5.17 求$F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$的原函数。

解：方程A(s)=0有3重根－1和单根－2

$$K_{11}=(s+1)^3F(s)\big|_{s=-1}=2$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}[(s+1)^3F(s)]\big|_{s=-1}=-1$$

$$K_{13}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+1)^3F(s)]\big|_{s=-1}=1$$

$$K_4=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=-1$$

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=[(t^2-t+1)e^{-t}-e^{-2t}]\varepsilon(t)$$

4、$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$ 不是真分式

例： $$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(S+1)(s+2)}$$

解：长除法

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad s+2 \\
\because s^2+3s+2 & \big)\overline{s^3+5s^2+9s+7} \\
 & \underline{s^3+3s^2+2s} \\
 & \quad\quad 2s^2+7s+7 \\
 & \quad\quad \underline{2s^2+6s+4} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad s+3
\end{array}$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(S+1)(s+2)}$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

§5.4 复频域分析

一、微分方程的变换解

用拉氏变换求解线性常系数微分方程，主要用到拉氏变换的微分性质：

- 对于一阶导数：$\mathscr{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0_-)$
- 对于二阶导数：

$$\mathscr{L}[y''(t)] = s[sY(s) - y(0_-)] - y'(0_-) = s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)$$

- 对于三阶导数：

$$\mathscr{L}[y'''(t)] = s[s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] - y''(0_-)$$
$$= s^3Y(s) - s^2y(0_-) - sy'(0_-) - y''(0_-)$$

举　例

系统方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)$，其中：$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，

$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$，求系统的响应。

解：$\mathscr{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-s\,y(0_-)-y'(0_-)=s^2Y(s)-s+1$

$\mathscr{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0_-)=sY(s)-1$

$\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s+1}$

对微分方程进行拉氏变换为：

$$s^2Y(s)-s+1+5sY(s)-5+6Y(s)=3\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+5s+6)Y(s)=\frac{3}{s+1}+s+4$$

$$\therefore\quad Y(s)=\frac{\frac{3}{s+1}+s+4}{s^2+5s+6}=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s^2+5s+6)}=\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$K_1=\left.\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+2)(s+3)}\right|_{S=-1}=\frac{3}{2}\qquad K_2=\left.\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+3)}\right|_{S=-2}=-1$$

$$K_3=\left.\frac{3+(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+2)}\right|_{S=-3}=\frac{1}{2}\qquad \therefore\quad y(t)=\frac{3}{2}e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$$

也可以分别求出零输入响应和零状态响应：

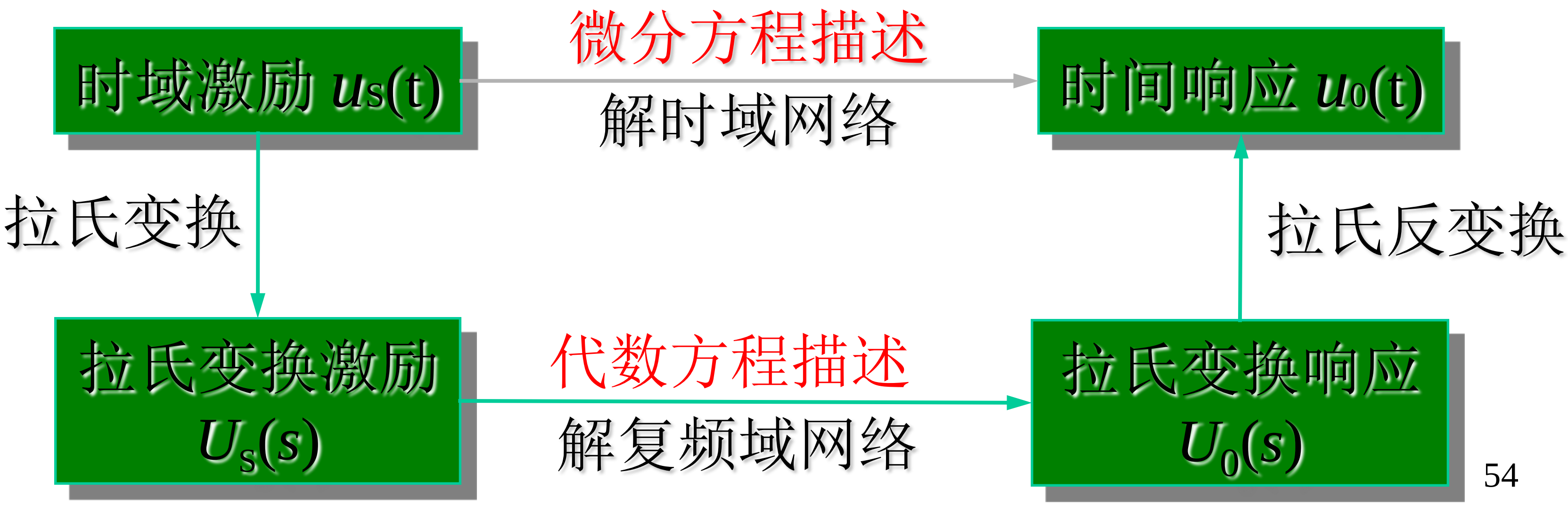
$$Y(s)=\frac{\frac{3}{s+1}}{s^2+5s+6}+\frac{s+4}{s^2+5s+6}\qquad \therefore\quad y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

零状态响应

零输入响应

拉氏变换求微分方程的基本思想

- **经典法存在的问题**
  - 高阶电路的微分方程不易列出；
  - 电路中不可能只有一个电源，电路中存在多个电源怎么办？



求解方法：

设微分方程（n阶系统的输入输出）

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0$$

$$= b_m f^{(m)}(t) + \cdots + b_0$$

$$y(t) \to Y(s),\ f(t) \to F(s),\quad \text{且} t = 0$$

$$y'(t) \leftrightarrow sY(s) - y(0\_)$$

则 $$y^{(i)}(t) \to s^i Y(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0\_),\quad i = 0,1,\cdots$$

$$f^{(j)}(t) \to s^j F(s),\quad j = 0,1,\cdots m$$

方程两边取拉氏变换整理得$y(t)$的象函数

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i\left[\sum_{p=0}^{i-1}s^{i-1-p}y^{(p)}(0_-)\right]}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}+\frac{\sum_{j=0}^{m}b_js^j}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}F(s)$$

$$=\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)$$

仅与初始状态有关

仅与激励有关

$$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$$

例5.18 LTI系统的微分方程为y '' (t)+3y ' (t)+2y(t) =2f ' (t)+6f(t) 已知输入f(t)=ε(t)， 初始状态y(0-)=2， y ' (0-)= 1。求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解：对方程两边求拉氏变换得

$$s^2Y(s) - sy(0\_) - y'(0\_) + 3sY(s) - 3y(0\_) + 2Y(s) = 2sF(s) + 6F(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - [sy(0\_) + y'(0\_) + 3y(0\_)] = 2(s+3)F(s)$$

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$= \frac{sy(0\_) + y'(0\_) + 3y(0\_)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{2(s+3)}{s^2 + 3s + 2}F(s)$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{2s+7}{s^2+3s+2}=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2(s+3)}{s^2+3s+2}\frac{1}{s}=\frac{2s+7}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(t)=(3-4e^{-t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3+e^{-t}-2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

二、系统函数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} F(s)$$

$$\text{其中} A(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i, \quad B(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j s^i$$

$$\text{系统函数} H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s) \qquad y_{zs}(t) = f(t)*h(t)$$

$$h(t) \leftrightarrow H(s)$$

$$g(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} H(s)$$

例5.19 LTI系统的微分方程为y ' ' (t)+2y ' (t)+2y(t) =f ' (t)+3f(t)

求系统的冲激响应。

解:$(s^2+2s+2)Y(s) = (s+3)F(s)$

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{s+3}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{2}{(s+1)^2+1^2}$$

$$h(t) = e^{-t}\cos t\varepsilon(t) + 2e^{-t}\sin t\varepsilon(t)$$

例5.20 输入为$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ 时LTI系统的零状态响应

$y_{zs}(t)=(3e^{-t} -4 e^{-2t} + 3e^{-3t})\varepsilon(t)$，求该系统的冲激响应和描述该系统的微分方程。

解：

$$F(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s+3}=\frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

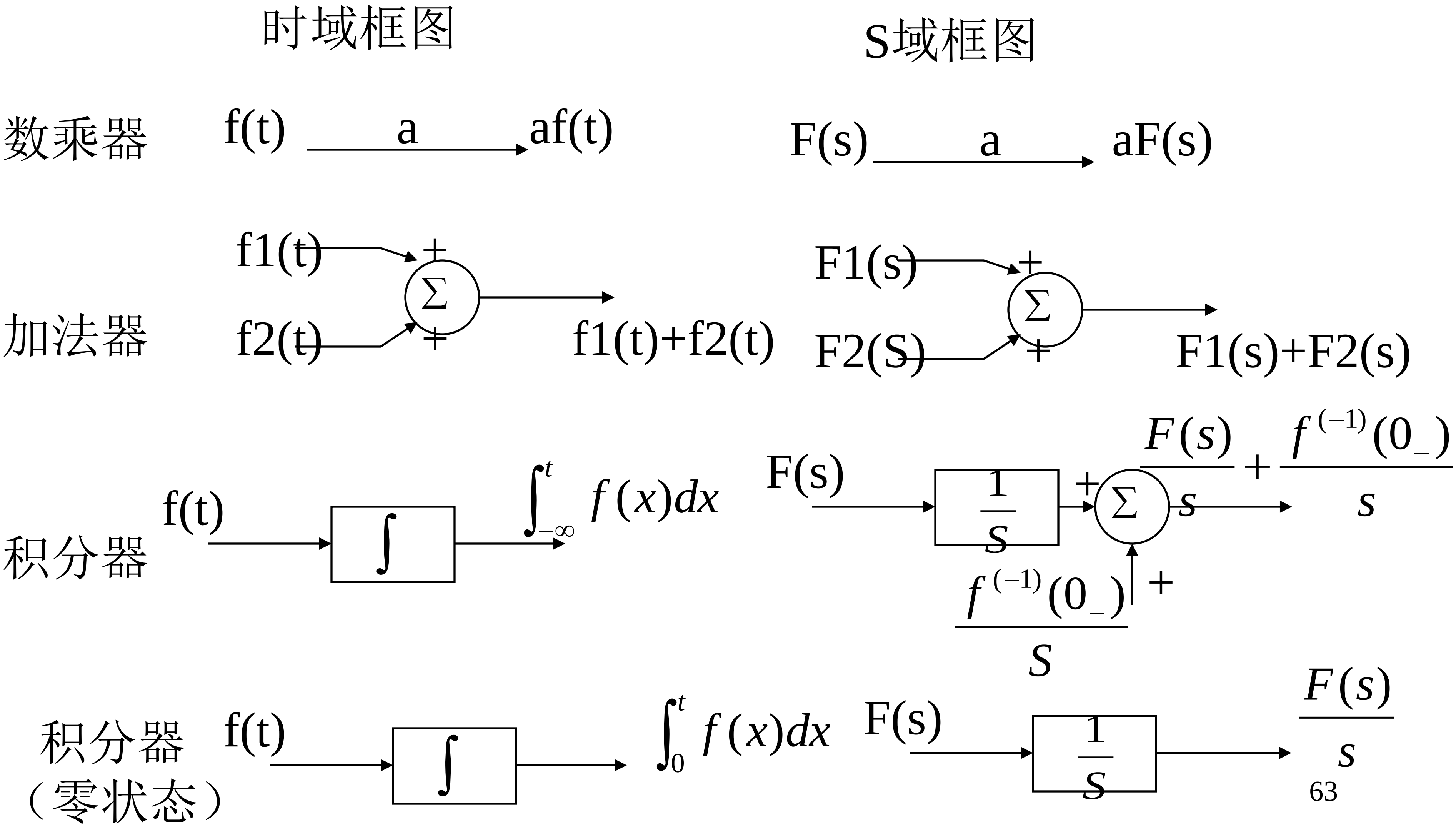
$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$

$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$H(s)=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

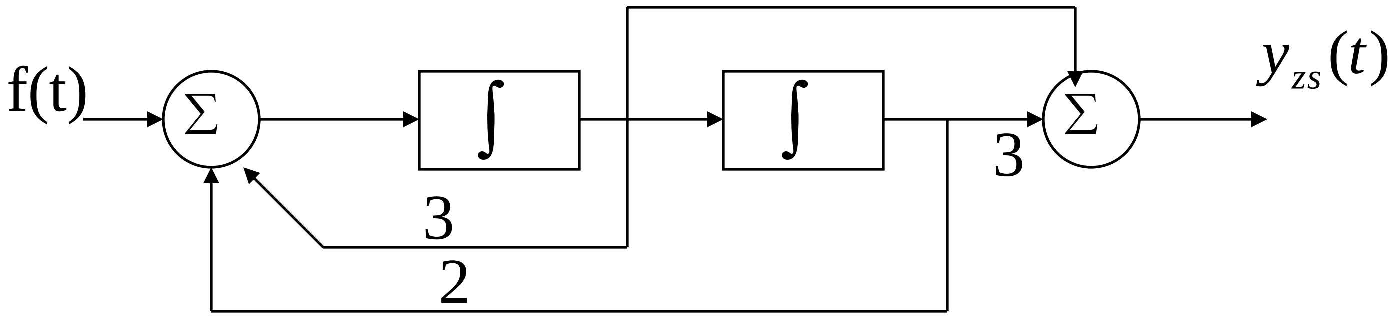
$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+8f(t)$$

三、系统的S域框图

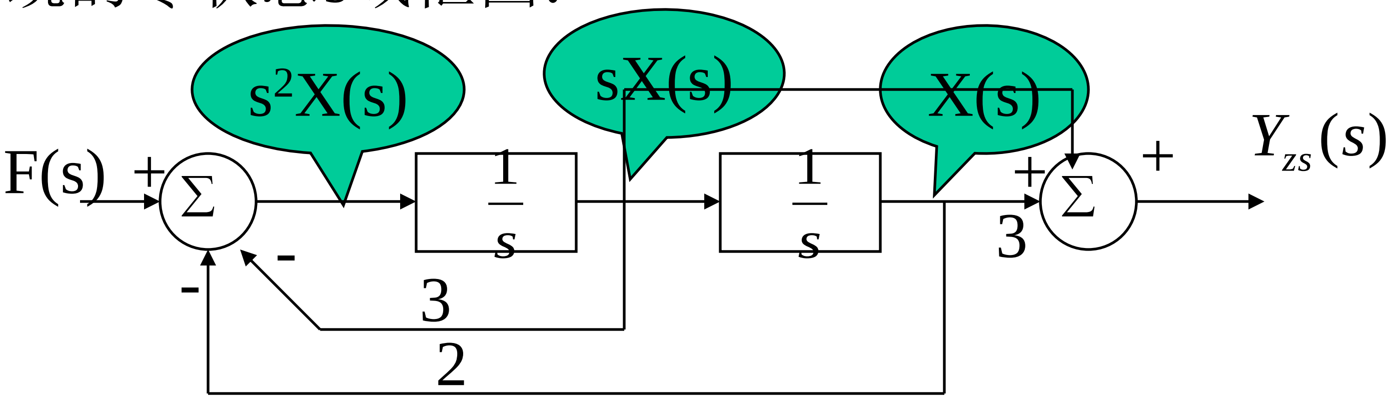


时域框图
S域框图
数乘器
f(t)
a
af(t)
F(s)
a
aF(s)
加法器
f1(t)
f2(t)
+
+
Σ
f1(t)+f2(t)
F1(s)
F2(S)
Σ
F1(s)+F2(s)
积分器
f(t)
∫
$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
F(s)
$\frac{1}{s}$
Σ
$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0\_)}{s}$
$\frac{f^{(-1)}(0\_)}{s}$
积分器
（零状态）
f(t)
∫
$\int_{0}^{t} f(x)dx$
F(s)
$\frac{1}{s}$
$\frac{F(s)}{s}$

例：系统框图如图，输入f(t)=ε(t)，求冲激响应和零状态响应。



解：系统的零状态s域框图：



$$s^2 X(s) = -3sX(s) - 2X(s) + F(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = F(s)$$

$$Y_{zs}(s) = sX(s) + 3X(s) = (s+3)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$Y_{zs}(s) = H(s)F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$y_{zs}(t) = (\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$$

3.求阶跃响应为$g(t)=(e^{-3t}-2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$的LTI系统对输入$x(t)=e^{t}\varepsilon(t)$的零状态响应。

五、拉氏变换与付氏变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(s)=\int_{0_{-}}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

由于s=σ+錞jω，因此，若能使*σ*=Re［s］等于零，则*F*(*s*)就等于*F*(*jω*)。但是，能否使*σ*等于零，这取决于*F*(*s*)的收敛域。

F(*s*)的收敛域为Re［s］＞σ_0，σ_0为实数，称为**收敛坐标**。σ_0可能小于零，可能等于零，也可能大于零。

1. $\sigma_0 < 0$葍

如果$\sigma_0 < 0$，则$F(s)$的收敛域包含jω轴(虚轴)，$F(s)$在jω轴上收敛。若令σ=0，即令s=jω，则$F(s)$存在。这时，$f(t)$的傅里叶变换存在，并且令s=jω，则$F(s)$等于F(jω)。即

$$F(j\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega}$$

例如，$f(t) = e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$ ，其单边拉普拉斯变换为

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s] > -2$$

$f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{j\omega+2}$$

2. $\sigma_0=0$

若收敛坐标$\sigma_0=0$，$F(s)$的收敛域为Re［s］＞0，$F(s)$的收敛域不包含jω轴，故$F(s)$在jω轴上不收敛。若令s=jω，则$F(s)$不等于$F(j\omega)$。虚轴上必有极点，设虚轴上的极点为m个一阶极点$j\beta_i(i=1, 2, \ldots, m)$。将$F(s)$展开为部分分式，表示为

$$F(s)=F_N(s)+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{s-j\beta_i}$$

式中，$F_N(s)$表示左半平面极点对应的分式。令$F_N(s)$的原函数为$f_N(t)$，则$F(s)$的原函数为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=f_N(t)+\sum_{i=1}^{m}K_i e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)=f_N(t)+f_M(t)$$

$$f_M(t)=\sum_{i=1}^{m}K_i e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)$$

$f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega)=F[f(t)]=F[f_N(t)]+F[f_M(t)]$$

由于$f_N(t)$是$F_N(s)$的原函数，并且$F_N(s)$的极点在左半面，故

$$F[f_N(t)]=F_N(s)\big|_{s=j\omega}$$

根据傅里叶变换的线性性质和频移性质，并且由于$\varepsilon(t)$的傅里叶变换为錞 $\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ 因此得

$$F[f_M(t)]=\sum_{i=1}^{m}k_i\left[\pi\delta(\omega-\beta_i)+\frac{1}{j\omega-j\beta_i}\right]$$

$$F(j\omega)=F_N(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{m}K_i\left[\pi\delta(\omega-\beta_i)+\frac{1}{j\omega-j\beta_i}\right]$$

$$=F_N(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{j\omega-j\beta_i}+\sum_{i=1}^{m}K_i\pi\delta(\omega-\beta_i)$$

$$F(j\omega)=F(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{m}K_i\pi\delta(\omega-\beta_i)$$

例 已知$f(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$的单边拉氏变换为

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

求 $f(t)$ 傅里叶变换

解
$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$F(j\omega)=F(s)\Big|_{s=j\omega}+\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+1}+\pi\delta(\omega)$$

$$=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-\frac{1}{j\omega+1}$$

3. $\sigma_0 > 0$葍

若$\sigma_0 > 0$，则$F(s)$的收敛域也不包含$j\omega$轴，收敛域的边界在右半平面内。 因此，不能用F(s)得到$F(j\omega)$。例如，$f(t)=\mathrm{e}^{2t}\varepsilon(t)$, $F(s)=\dfrac{1}{s-2}$，$F(s)$的收敛域为Re［s］＞2， $f(t)$的傅里叶变换不存在。

例 已知$f(t)=e^{-2t}\cos t\cdot\varepsilon(t)$的单边拉氏变换为

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

求 $f(t)$ 傅里叶变换$F(j\omega)$.

解 F（S）的收敛坐标$\sigma_0=-2$，即$\sigma_0<0$ 。因此

$$F(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+2)^2+1}$$

1、已知系统的微分方程为： $y'(t)+2y(t)=f'(t)-2f(t)$

1)当激励f（t）为$\varepsilon(t)$时，系统全响应y（t）为（$5e^{-2t}-1$）$\varepsilon(t)$,求该系统的起始状态$y(0-)$;

2)求系统函数H（s），并画出系统的结构框图.

2.系统方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f'(t)+f(t)$，其中：

$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t),\quad y(0_{-})=1,\ y'(0_{-})=-1$ 求系统的零输入、零状态、全响应。

3.已知因果信号的象函数$F(s)=\dfrac{(s^2+s+1)e^{-2s}}{s^2+4}$，求原函数。

4、图4（a）所示系统，已知当 $x(t)=\delta(t)$时，全响应为

$$y(t)=\frac{2}{3}\delta(t)+e^{-\frac{t}{3}}\varepsilon(t)$$

1)求冲激响应 和阶跃响应

2)求系统的零输入响应

3)若激励信号如图4（b）所示，求系统的零状态响应

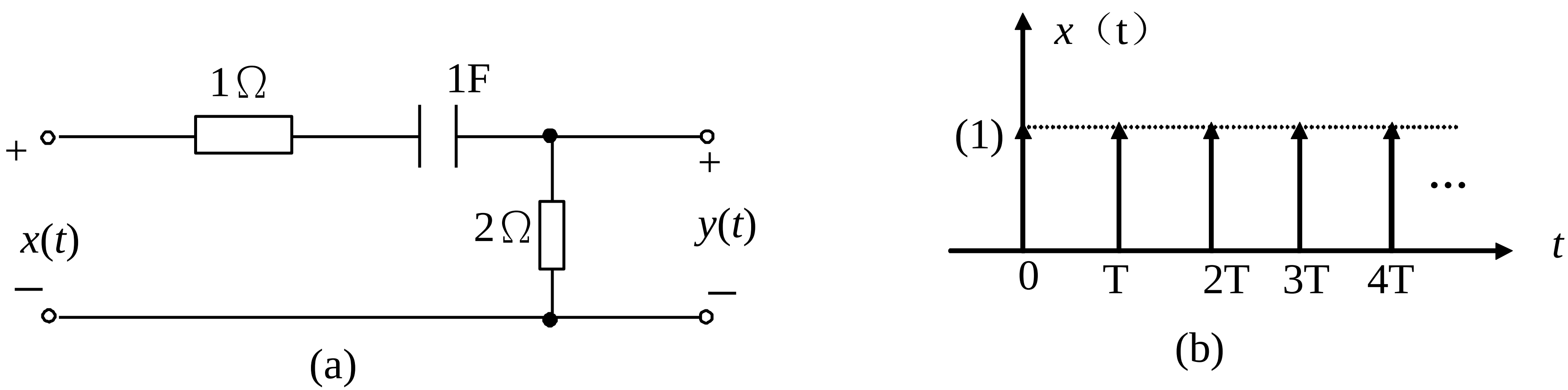


图 4