第三章 离散系统的时域分析

离散、连续时间系统时域分析对比

对于连续时间系统　　　　　　离散时间系统

数学模型：微分方程描述　　　　差分方程描述

时域经典求解方法：相同。先求齐次解，再求特解。

时域卷积（和）求解方法：相同，重要。

变换域求解方法：

拉普拉斯变换与傅里叶变换法　　z变换与序列傅里叶变换、离散傅里叶变换

离散信号的运算

- 序列的相加： **$f(k)=f_1(k)+f_2(k)$**
- 序列的相乘： **$f(k)=f_1(k)\cdot f_2(k)$**
- 序列的反转、尺度变换与平移：**与连续信号相同**
- 序列的差分：**与连续信号中的微分对应的运算**
  - 一阶前向差分 $\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$
  - 二阶前向差分 $\Delta^2 f(k)=\Delta[\Delta f(k)]=\Delta f(k+1)-\Delta f(k)$

    $=f(k+2)-2f(k+1)+f(k)$
  - 一阶后向差分 $\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$
  - 二阶后向差分 $\nabla^2 f(k)=\nabla[\nabla f(k)]=\nabla f(k)-\nabla f(k-1)$

    $=f(k)-2f(k-1)+f(k-2)$

- 序列的求和(累加)：**与连续信号中的积分对应的运算**

$$f_1(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)$$

§3.1 LTI离散系统的响应

一、差分与差分方程

与连续时间信号的微分及积分运算相对应，离散时间信号有差分及序列求和运算。

设有序列f(k)，则称…f(k+2)，f(k+1)，…f(k-1)，f(k-2)…等为f(k)的移位序列。序列的差分可分为前向差分和后向差分。

一阶前向差分定义为： $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

一阶后向差分定义为： $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

可见，前向差分与后向差分的关系为：

$$\nabla f(k) = \Delta f(k-1)$$

两者仅移位不同，没有本质的差别。本书主要讨论后向差分，并将其简称为差分。

由差分的定义，若有序列$f_1(k)$、$f_2(k)$和常数a_1、a_2，则：

$$\nabla[a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)] = [a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)] - [a_1 f_1(k-1) + a_2 f_2(k-1)]$$

$$= a_1[f_1(k) - f_1(k-1)] + a_2[f_2(k) - f_2(k-1)]$$

$$= a_1 \nabla f_1(k) + a_2 \nabla f_2(k)$$

差分运算是线性的

二阶差分可定义为：

$$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = \nabla[f(k) - f(k-1)]$$

$$= \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$$

$$= f(k) - f(k-1) - f(k-1) + f(k-2)$$

$$= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

差分方程是包含关于变量k的未知序列y(k)及其各阶差分的方程式，求解方法有：

•迭代法：思路清晰、便于编写程序、不易得出闭式解

•时域经典法：求解过程复杂、可以得出闭式解

•变换域法：简便有效

1、差分方程的迭代法

例3.1 差分方程为y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)，已知初始条件y(0)=0，y(1)=2，激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求y(k)。

解：用迭代法，y(k)=- 3y(k-1)-2y(k-2)+f(k)

对于k=2，将初始条件代入得到：

y(2)=- 3y(1)-2y(0)+f(2)=-6+4=-2

类似地，依次迭代可得：

$y(3)=-3y(2)-2y(1)+f(3)=6-4+8=10$

$y(4)=-3y(3)-2y(2)+f(4)=-30+4+16=-10$

…

由此可见，用迭代法只能得到方程的数值解，而不能得到方程的闭式解。

2、差分方程的经典法

若LTI系统的激励是f(k)，其全响应为y(k)，那么描述该系统激励与响应之间关系的数学模型是n阶常系数线性差分方程，记为：

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\ldots+b_0f(k-m)$$

上式可缩写为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\, y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-1}\, f(k-j)$$

与微分方程的经典解类似，上述差分方程的解由齐次解和特解组成：$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

不同特征根所对应的齐次解和不同激励所对应的特解见表3-1和3-2。

齐次解

1）特征根为单根，微分方程的齐次解为

$$y_h(k)= C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + \dots + C_n\lambda_n^k$$

2）特征根有重根，假设 λ_1 是特征方程的*n*重根，那么，在齐次解中，相应于 λ_1 的部分将有*n*项

$$y_h(k)=(C_1k^{n-1} + C_2k^{n-2} + \dots + C_n)\lambda_1^k$$

特解

自由项	特解
E(常数)	p(常数)
λ^k	$p\lambda^k$
λ^k	$(p_1k + p_0)\lambda^k$

例3.2 差分方程为$y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$，已知初始条件$y(0)=0$，$y(1)=-1$，激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求方程的全解。

解：首先求齐次解。其特征方程为$\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征根$\lambda_1=\lambda_2=-2$，齐次解为：

$$y_h(k)=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k$$

然后求特解。其形式为：$y_p(k)=P2^k, k\geqslant 0$

将$y_p(k)$、$y_p(k-1)$和$y_p(k-2)$代入到差分方程中，得：

$$P2^k+4P2^{k-1}+4P2^{k-2}=f(k)=2^k$$

解得$P=1/4$，于是得特解$y_p(k)=2^k/4, k\geqslant 0$

差分方程的全解：

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)= C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k + 2^k/4 \,,\ k\geqslant 0$$

将初始条件代入，有：

$y(0)= C_2 +1/4=0$

$y(1)= - 2C_1 - 2C_2 +1/2=-1$

$\Rightarrow$ $C_1=1$，$C_2 =-1/4$

最后得方程的全解为：

$$y(k)=\underbrace{k(-2)^k-(-2)^k/4}_{\text{齐次解}}+ \underbrace{2^k/4}_{\text{特解}} \,,\ k\geqslant 0$$

自由响应

强迫响应

与连续系统类似，离散系统的全响应也有三种分解：

全响应＝零输入响应＋零状态响应

＝自由响应＋强迫响应

＝瞬态响应＋稳态响应

经典法不足之处

- 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

二、零输入响应和零状态响应

LTI系统的零输入响应$y_{zi}(k)$是输入为零，由初始状态决定的响应，零状态响应$y_{zs}(k)$ 是初始状态为零，由输入决定的响应。

零输入响应是差分方程的齐次解，而零状态响应则由齐次解和特解组成。

其初始条件也与连续系统类似，对于零状态响应在k<0时激励尚未接入，因此：

迭代法

$y_{zs}(-1)= y_{zs}(-2) =\ldots= y_{zs}(-n) =0$　　$y_{zs}(0)$、$y_{zs}(1)$ 、… $y_{zs}(n) =?$

而对于零输入响应，其k<0时的状态也即系统的状态：

$y_{zi}(-1)=y(-1)$，　$y_{zi}(-2)=y(-2)$ ，　…，　$y_{zi}(-n)=y(-n)$

例3.3 差分方程为$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$，已知初始条件$y(-1)=0$，$y(-2)=1/2$，激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求系统的零输入响应和零状态响应。

解：1）求零输入响应。

$$y_{zi}(k)+3y_{zi}(k-1)+2y_{zi}(k-2)=0$$

特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$

故零输入响应$y_{zi}(k)=c_1(-1)^k+c_2(-2)^k$

对于零输入响应，其$k<0$时的状态也即系统的状态，因此：

$$y_{zi}(-1)=y(-1)=0，\quad y_{zi}(-2)=y(-2)=1/2$$

将$y_{zi}(k)$的表达式代入初始条件得：

$$y_{zi}(-1) = -c_1 - c_2/2 = 0$$
$$y_{zi}(-2) = c_1 + c_2/4 = 1/2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

得到系统的零输入响应为： $y_{zi}(k) = (-1)^k - 2(-2)^k,\ k \geqslant 0$

2）求零状态响应。

零状态响应的齐次解的形式与零输入响应相同，为：$D_1(-1)^k + D_2(-2)^k$

零状态响应的特解形式为：$P2^k$

将特解代入方程得到：

$$P2^k + 3P2^{k-1} + 2\,P2^{k-2} = 2^k \quad □ p=1/3$$

对于零状态响应，在k<0时激励尚未接入，因此：

$$y_{zs}(-1)= y_{zs}(-2) =0$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+f(0)=1 \\ y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+f(1)=-1 \end{cases}$$

将$y_{zs}(k)$的表达式代入初始条件得：

$y_{zs}(0) = D_1+D_2+1/3=1$

$y_{zs}(1) = -D_1-2D_2+2/3=-1$

$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = -1/3 \\ D_2 = 1 \end{cases}$

得到系统的零状态响应为： $y_{zs}(k) = -(-1)^k/3 + (-2)^k + 2^k/3,\ k \geqslant 0$

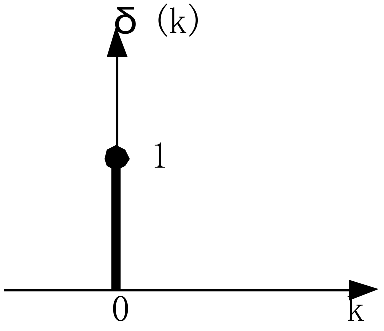
！注意：**求零输入响应时用k<0时的初始值，而求零状态响应时一定要用k≥0时的初始值，否则会出错。**

§ 3.2 单位序列和单位序列响应

一、单位序列和单位阶跃序列

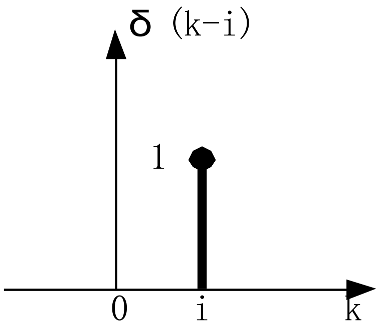
单位序列的定义为：　　　其图形为：

$$\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$



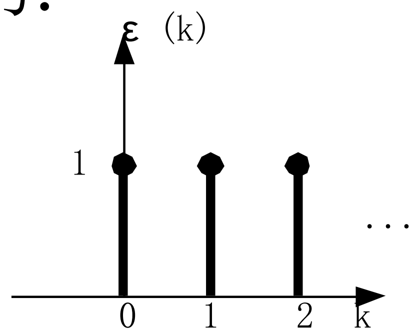
若将δ(k)平移i位，得：　　　其图形为：

$$\delta(k-i)=\begin{cases}1, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}$$



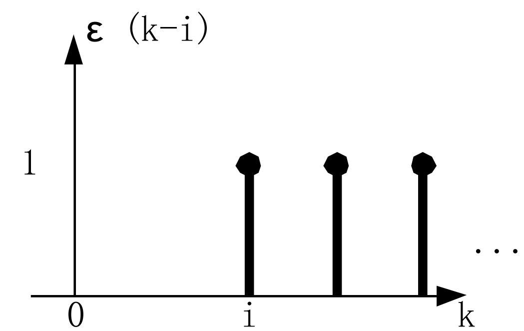
单位阶跃序列的定义为：　　其图形为：

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1, & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$



若将ε (k)平移i位，得：　　其图形为：

$$\varepsilon(k-i)=\begin{cases}1, & k\geqslant i\\ 0, & k<i\end{cases}$$



由单位序列和单位阶跃序列的定义可得：

f(k)δ(k-i)=f(i)δ(k-i)　　取样性质

$$\delta(k)=\nabla\varepsilon(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

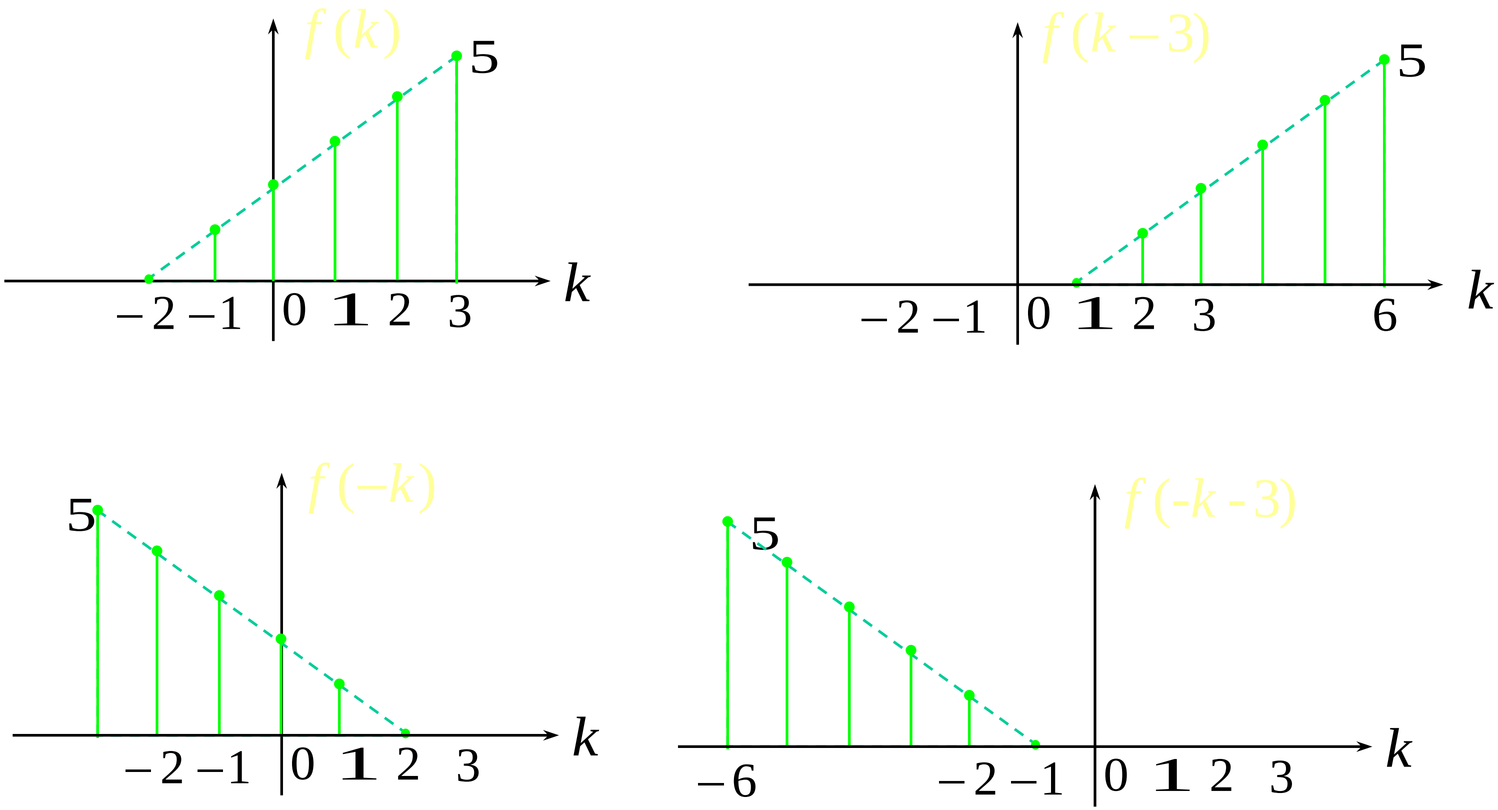
$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$$

上式中若令i=k-j，则：

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=\infty}^{0}\delta(k-j)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$$

已知离散信号 $f(k)=(k+2)[\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-4)]$,

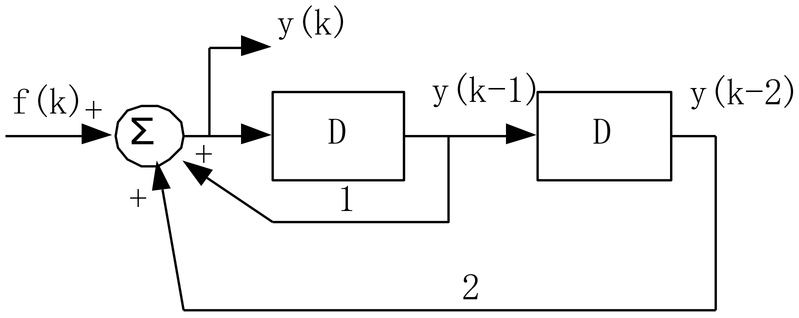
试画出 $f(k)$， $f(k-3)$， $f(-k)$， $f(-k-3)$的图形。



二、单位序列响应和单位阶跃序列响应

LTI系统初始状态为零时，由单位序列引起的响应称为单位序列响应h(k)。

例3.4 求如图所示离散系统的单位序列响应。



解：1）列差分方程，求初始条件

$$y(k)=f(k)+y(k-1)+2y(k-2)$$

即：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$

对于零状态响应，$h(-1)=h(-2)=0$

$$\begin{cases} h(0)=h(-1)+2h(-2)+\delta(0)=1 \\ h(1)=h(0)+2h(-1)+\delta(1)=1 \end{cases}$$

2）求h(k)

由于在k>0时δ(k)=0，因此单位序列响应具有与零输入响应相同的形式。

特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$

故$h(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k \quad ,k>0$

代入初始条件得：

$h(0) = c_1 + c_2 = 1$

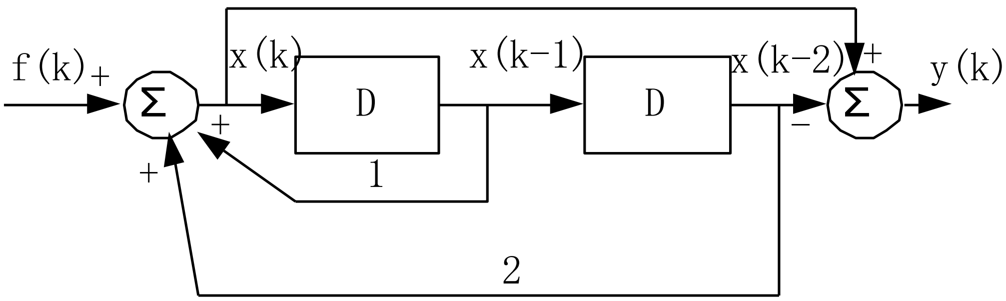
$h(1) = -c_1 + 2c_2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/3 \\ c_2 = 2/3 \end{cases}$

得到系统的单位序列响应为：

$$h(k) = [\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

例3.5 求如图所示离散系统的单位序列响应。



解：1）列差分方程，求初始条件

$$x(k)=f(k)+x(k-1)+2x(k-2)$$

$$\begin{cases} f(k) = x(k) - x(k-1) - 2x(k-2) \\ y(k) = x(k) - x(k-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) - f(k-2)$$

方程右边不是f(k)，设中间变量$h_1(k)$满足：

$$h_1(k) - h_1(k-1)-2\,h_1(k-2) = \delta\,(k)$$

则$h_1(-1)=h_1(-2)=0$

初始条件为：

$$\begin{cases} h_1(0)=h_1(-1)+2h_1(-2) +\delta\,(0)=1 \\ h_1(1)=h_1(0)+2h_1(-1) +\delta\,(1)=1 \end{cases}$$

2）求$h_1(k)$

特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$

故$h_1(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k \quad ,k>0$

代入初始条件得：

$h_1(0)=c_1+c_2=1$

$h_1(1)=-c_1+2c_2=1$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1=1/3 \\ c_2=2/3 \end{cases}$

得到：

$$h_1(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

则原系统的单位序列响应为：

$$h(k) = h_1(k) - h_1(k-2)$$

$$= [\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k) - [\frac{1}{3}(-1)^{k-2} + \frac{2}{3}(2)^{k-2}]\varepsilon(k-2)$$

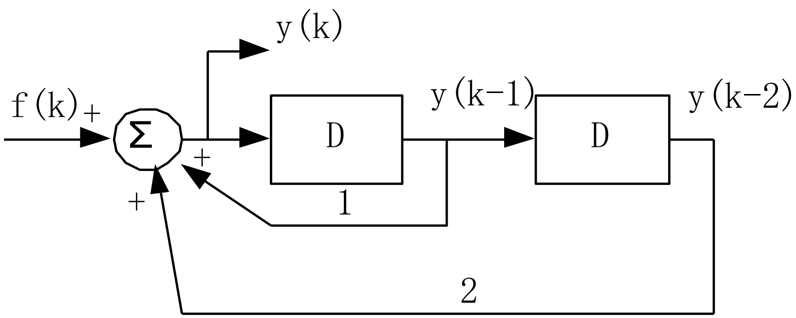
LTI系统初始状态为零时，由单位阶跃序列引起的响应称为单位阶跃响应g(k)。

由单位序列和单位阶跃序列的关系可得：

$$g(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} h(i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(k-j)$$

$$h(k) = \nabla g(k) = g(k) - g(k-1)$$

例3.6 求如图所示离散系统的单位阶跃响应。



系统的差分方程为：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$

阶跃响应g(k)满足：$g(k)-g(k-1)-2g(k-2)=\varepsilon(k)$

由于是零状态响应，所以$g(-1)=g(-2)=0$

$$\begin{cases} g(0)=g(-1)+2g(-2)+\varepsilon(0)=1 \\ g(1)=g(0)+2g(-1)+\varepsilon(1)=2 \end{cases}$$

特征根λ $_1$＝-1，λ $_2$＝2，可求其特解为-1/2

全解为：$g(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k-1/2$，$k\geqslant 0$

代入初始条件得：

$g(0) = c_1+c_2-1/2=1$

$g(1) = -c_1+2c_2-1/2=2$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1=1/6 \\ c_2=4/3 \end{cases}$

得到：

$$g(k)=[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$$

§ 3.3 卷积和

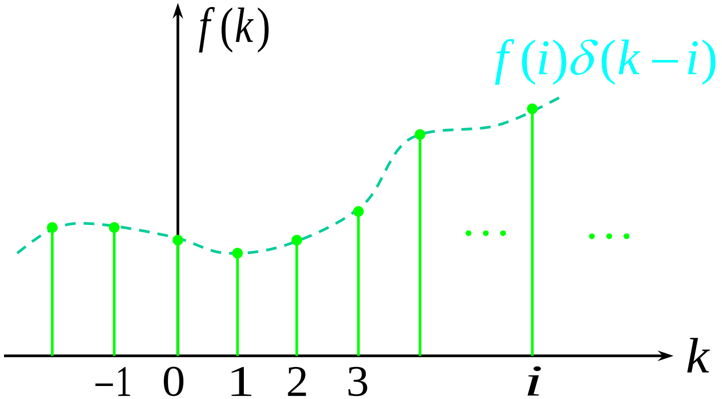
一、卷积和

与连续时间信号类似，离散时间信号也可以分解为一系列单位序列的和。

$$f(k) = \dots + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k)$$

$$+ f(1)\delta(k-1) + \dots + f(i)\delta(k-i) + \dots$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$



如果LTI系统的单位序列响应为h(k)，那么，根据其性质，系统对f(i)δ(k-i)的响应为f(i)h(k-i)。则当激励为f(k)时系统的零状态响应为：

$$y_{zs}(k)=\ldots+f(-2)h(k+2)+f(-1)h(k+1)+f(0)h(k)$$

$$+f(1)h(k-1)+\ldots+f(i)h(k-i)+\ldots$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$

上式称为序列f(k)与h(k)的卷积和。它表明，LTI系统对于任意激励f(k)的零状态响应是激励与系统单位序列响应h(k)的卷积和。

一般而言，对任意两个序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，和式

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

称为$f_1(k)$与$f_2(k)$ 的卷积和，简称卷积，表示为：

$$f_1(k) * f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

如果$f_1(k)$不受限制，而$f_2(k)$是**因果序列**，即$k<0$时$f_2(k)=0$，那么当$k<i$时$f_2(k-i)=0$，因而求和的上限变为k，即：

$$f_1(k) * f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

如果$f_1(k)$和$f_2(k)$都是因果序列，即$k<0$时$f_1(k) = f_2(k) = 0$，那么和式变为：

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

卷积和的解析解法：

例3.7 $f_1(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k),\ f_2(k) = 1,\ f_3(k) = \varepsilon(k),$

求$f_1(k)*f_2(k)$和$f_1(k)*f_3(k)$。

解：$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \varepsilon(i) \times 1$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$f_1(k) * f_3(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \varepsilon(i) \times \varepsilon(k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

k⩾0

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} \quad = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\varepsilon(k)$$

二、卷积和的图示

卷积和图解的步骤：1、变换坐标：$f_1(k)$，$f_2(k) \to f_1(i)$，$f_2(i)$

2、反转其中一个：$f_2(i) \to f_2(-i)$

3、移位反转的信号：$f_2(-i) \to f_2(k-i)$

4、将两信号重叠的部分相乘：$f_1(i)\, f_2(k-i)$

5、求各乘积之和。

长度为m和n的两个序列卷积和是长度为(m+n-1)的序列。

三、卷积和的列表法

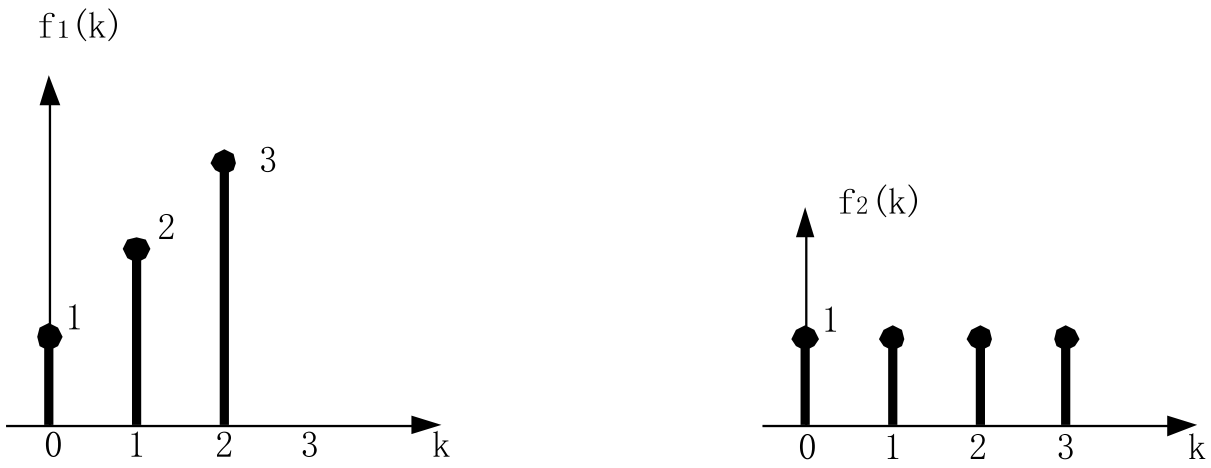
两个因果序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的卷积和为：

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$$

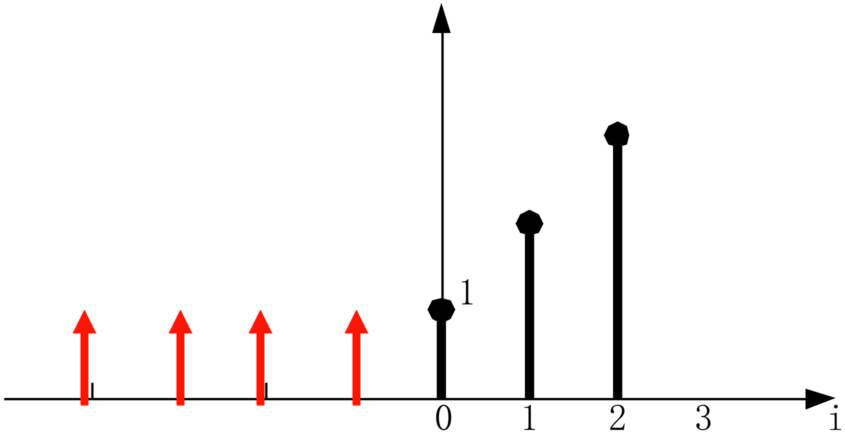
可以发现，求和符号内两个分量的序号相加都等于k，因此我们把$f_1(k)$和$f_2(k)$分别排在表的行和列，如图：

	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	…
$f_2(0)$	$f_1(0)\,f_2(0)$	$f_1(1)\,f_2(0)$	$f_1(2)\,f_2(0)$	
$f_2(1)$	$f_1(0)\,f_2(1)$	$f_1(1)\,f_2(1)$	$f_1(2)\,f_2(1)$	
$f_2(2)$	$f_1(0)\,f_2(2)$	$f_1(1)\,f_2(2)$	$f_1(2)\,f_2(2)$	
…	…	…	…	

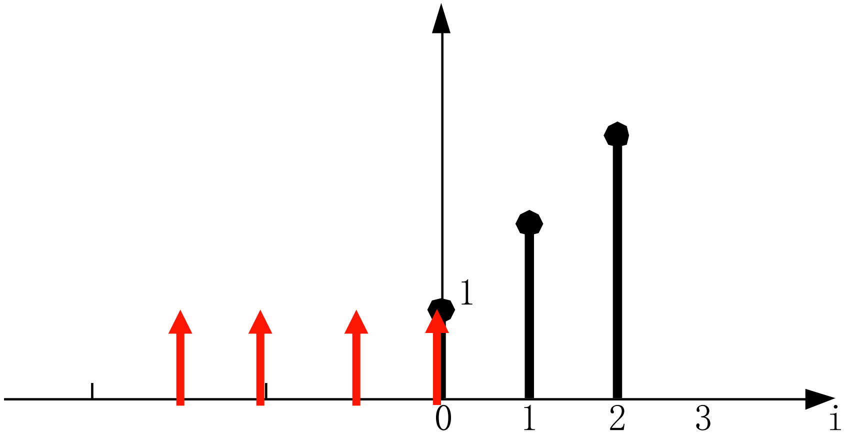
例3.8 求下面两个序列的卷积和：



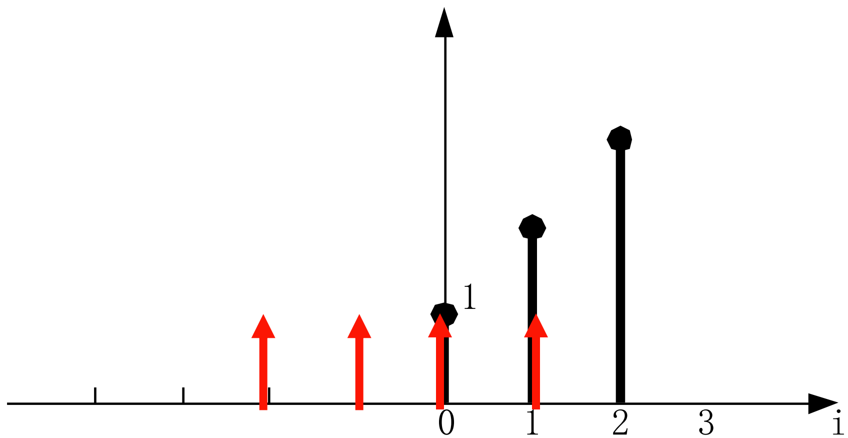
解：1）用图解法



k<0时， $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=0$

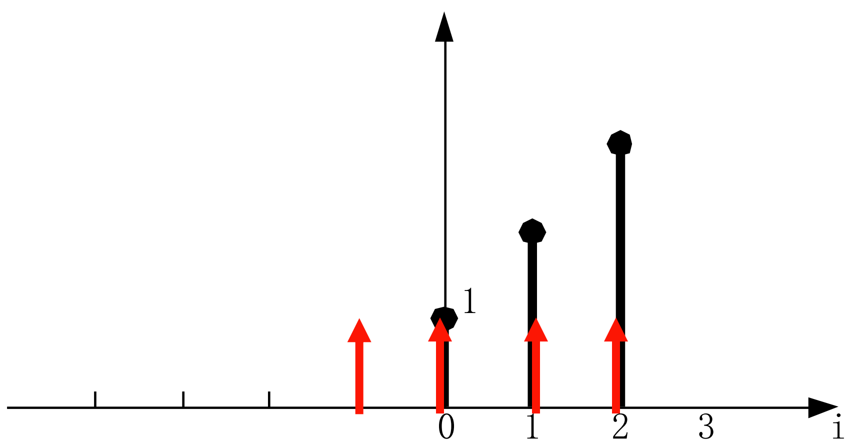


k=0时， $f(0)=f_1(0)\ f_2(0)=1$



k=1时， $f(1)=f_1(0)\ f_2(1)+$

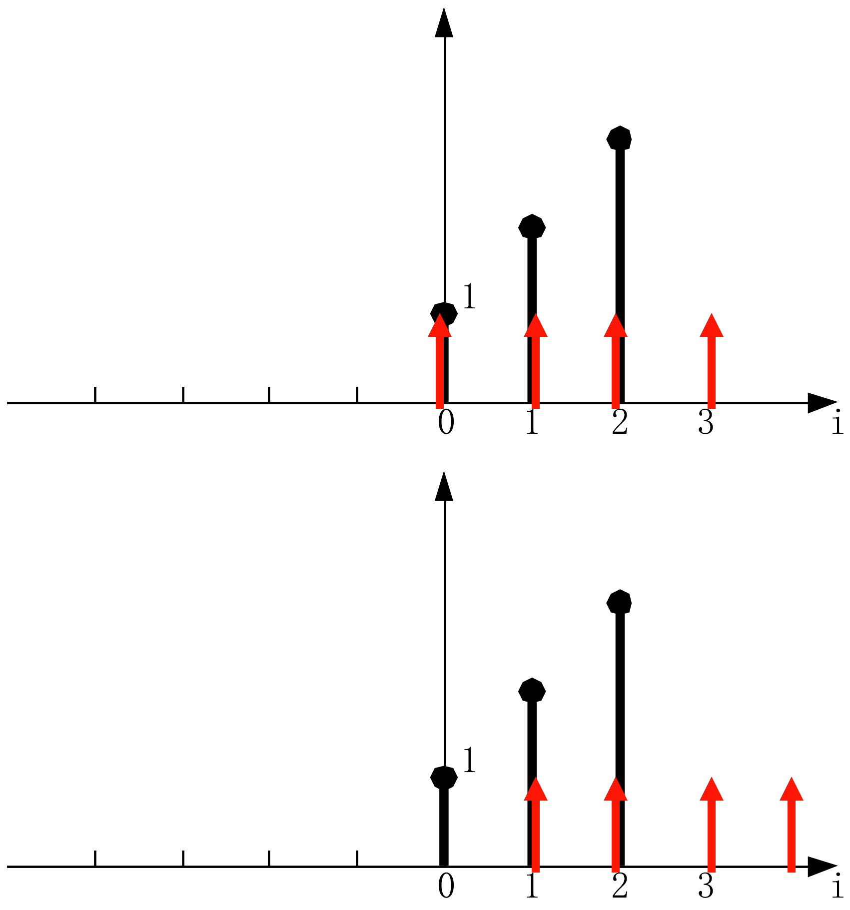
$f_1(1)\ f_2(0)=3$



k=2时， $f(2)=f_1(0)\ f_2(2)+$

$f_1(1)\ f_2(1)+$

$f_1(2)\ f_2(0)=6$



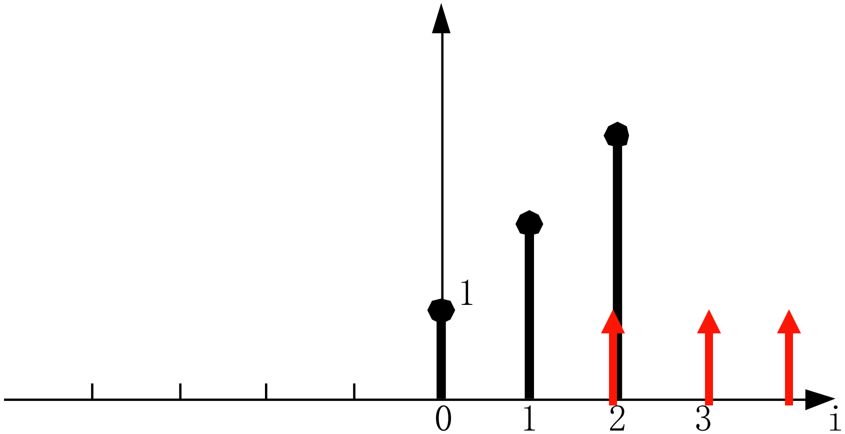
k=3时， $f(3)=f_1(0)\,f_2(3)+$

$f_1(1)\,f_2(2)\,+$

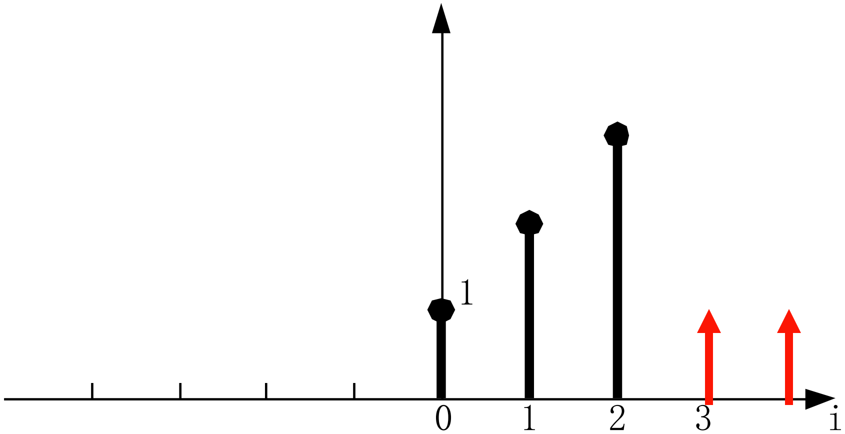
$f_1(2)\,f_2(1)\,=6$

k=4时， $f(4)=f_1(1)\,f_2(3)+$

$f_1(2)\,f_2(2)\,=5$

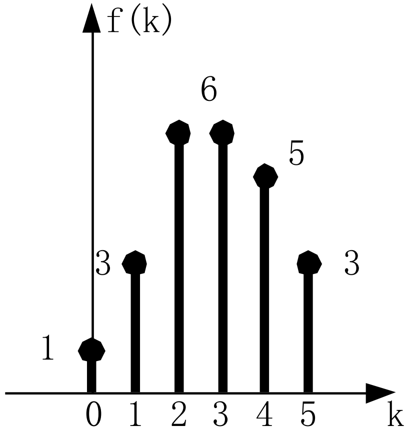


k=5时， $f(5)=f_1(2)\ f_2(3)=3$



k>5时， $f(k)=0$

计算结果如图：



2）用列表法

		$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$
		1	2	3	0
$f_2(0)$	1	1	2	3	0
$f_2(1)$	1	1	2	3	0
$f_2(2)$	1	1	2	3	0
$f_2(3)$	1	1	2	3	0
$f_2(4)$	0	0	0	0	0

$f(0)=1$

$f(1)=3$

$f(2)=6$

$f(3)=6$

$f(4)=5$

$f(5)=3$

四、卷积和的性质

离散系统的卷积和具有与连续系统的卷积积分相类似的性质：

交换率　$f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k)$

分配率　$f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)] = f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k)$

结合率　$f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)] = [f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k)$

如果两序列之一是单位序列，由于δ(k)在k=0时值才为1，其他时刻都为0，所以：

$$f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(i)f(k-i)=f(k)$$

推广可得：

$$f(k)*\delta(k-k_1)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(i)f(k-i-k_1)=f(k-k_1)$$

此外还有：

$$f(k-k_1)*\delta(k-k_2)=f(k-k_2)*\delta(k-k_1)=f(k-k_1-k_2)$$

若$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$

$$f_1(k-k_1)* f_2(k-k_2) = f_1(k-k_2)* f_2(k-k_1)= f(k-k_1 -k_2)$$

例：求 $y(k)=\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$

解：$$y(k)=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)=\sum_{i=0}^{k}1=(1+k)\varepsilon(k)$$

例：求 $y(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)*[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)]$

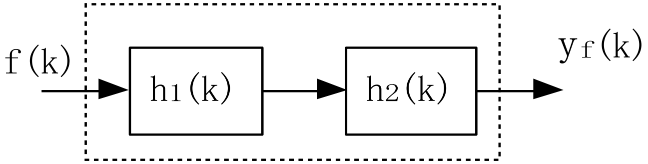
解：$$y_1(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=0}^{k}(0.5)^i\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(0.5)^i=\frac{1-(0.5)^{k+1}}{1-0.5}\varepsilon(k)=[2-(0.5)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_2(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k-5)=y_1(k-5)=[2-(0.5)^{k-5}]\varepsilon(k-5)$$

$$\therefore\quad y(k)=y_1(k)-y_2(k)=[2-(0.5)^k]\varepsilon(k)-[2-(0.5)^{k-5}]\varepsilon(k-5)$$

例3.9 图中的复合系统由两个子系统级联组成，已知子系统的单位序列响应分别为$h_1(k)=a^k\varepsilon(k)$，$h_2(k)=b^k\varepsilon(k)$求复合系统的单位序列响应。



解：

$$h(k)=h_1(k)*h_2(k)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i\varepsilon(i)b^{k-i}\varepsilon(k-i)\quad=\sum_{i=0}^{k}a^ib^{k-i}$$

当a≠b时

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k}a^{i}b^{k-i}=b^{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{i}$$

$$=b^{k}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\frac{a}{b}}=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}$$

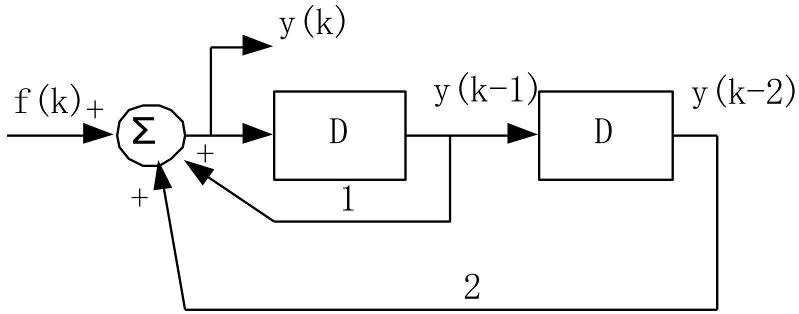
当a=b时

$$h(k)=b^{k}\sum_{i=0}^{k}1=(k+1)b^{k}$$

以上两式只在k≥0成立，因此：

$$h(k)=a^{k}\varepsilon(k)*b^{k}\varepsilon(k)=\begin{cases}\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\varepsilon(k),a\neq b\\(k+1)b^{k}\varepsilon(k),a=b\end{cases}$$

例 求如图所示LTI离散系统,$f(k)=(-1)^k\varepsilon(k)$，求零状态响应。



解1经典解：

$$y(k)=f(k)+y(k-1)+2y(k-2)$$

即：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$

对于零状态响应， $y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0$

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=y_{zs}(-1)+2y_{zs}(-2)+f(0)=1 \\ y_{zs}(1)=y_{zs}(0)+2y_{zs}(-1)+f(1)=0 \end{cases}$$

特征根λ_1＝-1，λ_2＝2，特解为$p_1k(-1)^k+p_2(-1)^k$代入

$$p_1k(-1)^k+p_2(-1)^k-p_1(k-1)(-1)^{k-1}-p_2(-1)^{k-1}-2p_1(k-2)(-1)^{k-2}-2p_2(-1)^{k-2}=(-1)^k$$

$$p_1+p_2-p_1+4p_1-2p_2=1 \qquad p_1=\frac{1}{3}$$

全解为：$y_{zs}(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k+k(-1)^k/3+p_2(-1)^k$，$k\geqslant 0$

代入初始条件得：

$y_{zs}(0)$ ＝ $c_1+c_2+p_2$＝1

$y_{zs}(1)$ ＝ $-c_1+2c_2-1/3-p_2$＝0

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+p_2=5/9 \\ c_2=4/9 \end{cases}$$

得到：

$$y_{zs}(k)=[\frac{5}{9}(-1)^k+\frac{4}{9}(2)^k+\frac{1}{3}k(-1)^k]\varepsilon(k)$$

解2卷积法：　　$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$

$$h(-1)=h(-2)=0$$

$$\begin{cases} h(0)=h(-1)+2h(-2)+\delta(0)=1 \\ h(1)=h(0)+2h(-1)+\delta(1)=1 \end{cases}$$

特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$

故$h(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k \quad ,k>0$

代入初始条件得：

$$h(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$h(1) = -c_1 + 2c_2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/3 \\ c_2 = 2/3 \end{cases}$$

得到系统的单位序列响应为： $h(k) = [\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

$$y_{zs}(k) = f(k) * h(k) = (-1)^k \varepsilon(k) * [\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(-1)^k \varepsilon(k) + \frac{2}{3}\frac{(-1)^{k+1} - (2)^{k+1}}{-1-(2)}\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k) = [\frac{1}{3}(k+1)(-1)^k + \frac{2}{9}(-1)^k + \frac{4}{9}(2)^k]\varepsilon(k)$$

求下列序列的卷积和 $y(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 。

(1) $f_1(k) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 0, 1\}$， $f_2(k) = \{\underset{\uparrow}{2}, 2, 3\}$

$y(k) = \{\underset{\uparrow}{2}, 6, 7, 8, 2, 3\}$

(2) $f_1(k) = \varepsilon(k+2)$， $f_2(k) = \varepsilon(k-3)$

$y(k) = k\varepsilon(k)$ 或 $y(k) = k\varepsilon(k-1)$

(3) $f_1(k) = (0.5)^k \varepsilon(k)$， $f_2(k) = (0.5)^k [\varepsilon(k+3) - \varepsilon(k-4)]$

$y(k) = 0.125(0.5)^k (k+4)\varepsilon(k+3) - 64(0.5)^k (k-3)\varepsilon(k-4)$

综合例题

已知某离散因果LTI系统的差分方程为

$$y[k]-3y[k-1]+2y[k-2]=f[k]$$

$$f[k]=3^k\varepsilon[k]\quad y[-1]=2\quad y[-2]=1$$

求:(1)零输入响应$y_{zi}[k]$ (2)单位序列响应$h[k]$、零状态响应$y_{zs}[k]$

(3)完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应 。

解: (1) 系统的特征方程为 $r^2-3r+2=0$

特征根为 $r_1=1,\quad r_2=2$

零输入响应为 $y_{zi}[k]=A+B2^k\qquad k\geq 0$

代入初始状态$y[-1]$, $y[-2]$

$$y[-1]=A+\frac{B}{2}=3\qquad y[-2]=A+\frac{B}{4}=1$$

解得 $A=-1\quad B=8$

系统的零输入响应为 $y_{zi}[k]=-1+8\cdot 2^k\quad ,k\geq 0$

解： (2) $h[k]=C+D2^k$

$$h[0]=C+D=1$$

$$h[1]=C+2D=3$$

解得 $C=-1 \quad D=2$

$$h[k]=-\varepsilon[k]+2\cdot 2^k\varepsilon[k]$$

$$y_{zs}[k]=f[k]*h[k]$$

$$=3^k\varepsilon[k]*(2\cdot 2^k-1)\varepsilon[k]$$

$$=(\frac{9}{2}3^k-4\cdot 2^k-\frac{1}{2})\varepsilon[k]$$

(3) $y[k]=y_{\mathrm{zi}}[k]+y_{zs}[k]$

系统的固有响应为 $y_{\mathrm{h}}[k]=4\cdot 2^{k}-3/2,\quad k\geq 0$

强迫响应为 $y_{\mathrm{p}}[k]=\frac{9}{2}\cdot 3^{k},\quad k\geq 0$

系统的稳态响应为 $y_{\mathrm{s}}[k]=\frac{9}{2}\cdot 3^{k}+4\cdot 2^{k}-\frac{3}{2},k\geq 0$

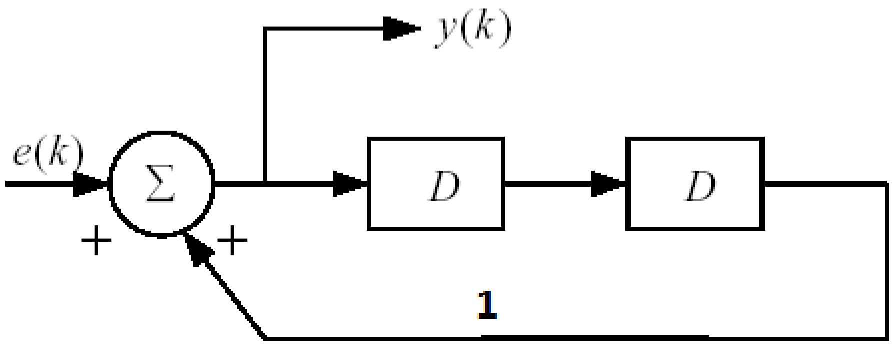
暂态响应为 $y_{\mathrm{t}}[k]=0,k\geq 0$

作业

1 、求差分方程所描述的离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应y（k）+3y（k−1）+2y（k−2）=f（k），

f（k）=ε （k)， y(−1)=0， y(−2)= 1

2、求图中所描述的离散系统的单位序列响应。



3、计算下列各对信号的卷积和

(1) $f(n)=0.5^n\varepsilon(n), h(n)=0.8^n\varepsilon(n)$ (2) $f_1(n)=\{3,\underset{\uparrow}{2},1,-3\}, f_2(n)=\{\underset{\uparrow}{2},4,-2\}$