第 10、11 章自测题及答案

一、(10 分) 计算 $\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中 D 由 $y=\sqrt{2-x}$， $y=x$ 及 $y=0$ 所围成.

解法一：把 D 视作 X 型区域，则 $D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}1\le x\le 2\\0\le y\le\sqrt{2-x}\end{cases}$.

于是 $\iint\limits_{D_1} xy^2dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy^2dy=\frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{15}$，

$$\iint\limits_{D_2} xy^2dxdy=\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{2-x}}xy^2dy=\frac{1}{3}\int_1^2 x(2-x)^{3/2}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{35}=\frac{6}{35},$$

其中 $\int_1^2 x(2-x)^{3/2}dx=-\int_1^2 x(2-x)^{3/2}d(2-x)=-\frac{2}{5}\int_1^2 xd(2-x)^{5/2}$

$$=-\frac{2}{5}\left[x(2-x)^{5/2}\Big|_1^2-\int_1^2(2-x)^{5/2}dx\right]=-\frac{2}{5}\left[-1+\frac{2}{7}(2-x)^{7/2}\Big|_1^2\right]=-\frac{2}{5}\left[-1+\frac{2}{7}(-1)\right]=\frac{18}{35},$$

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\iint\limits_{D_1}xy^2dxdy+\iint\limits_{D_2}xy^2dxdy=\frac{1}{15}+\frac{6}{35}=\frac{5}{21}.$$

解法二：把 D 视作 Y 型区域，则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2-y^2\\0\le y\le 1\end{cases}$，

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\int_0^1dy\int_y^{2-y^2}xy^2dx=\int_0^1 y^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_y^{2-y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2(4-5y^2+y^4)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}y^3-y^5+\frac{1}{7}y^7\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{21}=\frac{5}{21}.$$

二、(15 分) 计算 $\iiint\limits_\Omega zdxdydz$，其中 Ω 是以原点为中心、R 为半径的上半球体.

解法一：直角坐标系下，投影法，则

$$\iiint\limits_\Omega zdxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(R^2-x^2-y^2)dxdy$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^R(R^2-r^2)rdr\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{\pi}{4}R^4.$$

解法二：直角坐标系下，截面法，则

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz = \int_0^R zdz \iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2} dxdy = \int_0^R z\cdot\pi(R^2-z^2)dz = \pi\int_0^R (R^2z-z^3)dz$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi}{4}R^4.$$

解法三：球面坐标系下，

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz = \iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^R r^3dr\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi}{4}R^4.$$

解法四：柱面坐标系下，

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz = \iiint_{\Omega} z\cdot rdrd\theta dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R rdr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} zdz\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^R r(R^2-r^2)dr = \pi\int_0^R (R^2r-r^3)dr = \pi\left(\frac{1}{2}R^4-\frac{1}{4}R^4\right) = \frac{\pi}{4}R^4.$$

三、（15 分）计算$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=ax$ 和 x 轴所围图形的边界曲线.

解：令 $L=L_1\cup L_2$，其中 L_1 表示上半圆周，L_2 表示 x 轴上的直线段．于是

上半圆周 L_1： $r(\theta)=a\cos\theta$， $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

把$\begin{cases} x=a\cos^2\theta \\ y=a\cos\theta\sin\theta \end{cases}$， $ds=\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=ad\theta$ 代入，得

$$\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}a\cos\theta\cdot ad\theta=a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta=a^2.$$

另法：上半圆周 L_1：$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\cos\theta+\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$， $0\le\theta\le\pi$， $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\dfrac{a}{2}d\theta$，

$$\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}\frac{a}{2}\sqrt{2+2\cos\theta}\cdot\frac{a}{2}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot 2=a^2.$$

直线段L_2： $y=0$，$0\le x\le a$， $ds=dx$，

$$\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}xdx=\int_0^a xdx=\frac{1}{2}a^2,$$

于是$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds=\frac{3}{2}a^2$.

四、(15 分)计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$被平面$z=\sqrt{3}$和$z=2\sqrt{3}$所截得的部分.

解：$z_x=\dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+3y^2}}=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $z_y=\dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=2dxdy$.

Σ在xOy面上的投影区域$D=\left\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4\right\}=\left\{(r,\theta):1\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi\right\}$，

则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=2\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=2\iint\limits_{D}r^3drd\theta=2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_1^2 r^3dr\right)=15\pi$.

五、(15 分)设变力$\vec{\mathbf{F}}=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)=(x^2+y^2,2xy-8)$在$xOy$面内确定了一个力场，证明质点在场内沿曲线$L$移动时，变力对质点所做的功$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与路径无关，并计算质点从点$(1,1)$移动到点$(0,0)$时，该变力对质点所做的功的大小.

证明：因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在整个$xOy$面内都成立，所以场力对质点所做的功与路径无关.

$$W=\int_{(1,1)}^{(0,0)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(1,1)}^{(0,0)}(x^2+y^2)dx+(2xy-8)dy=\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2-8y\right]_{(1,1)}^{(0,0)}$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+1-8\right)=\frac{20}{3}.$$

另法：取特殊路径$y=x$，则$W=\int_1^0(4x^2-8)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-8x\right]_1^0=-\left(\frac{4}{3}-8\right)=\frac{20}{3}$.

六、（15 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{z}dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 截得部分的下侧.

解：$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{z}dxdy=-\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=-\iint\limits_{D}r\cdot rdrd\theta=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr$

$=-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$

$=-\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=-\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{32}{9}$.

七、（15 分）利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+2ydzdx+3zdxdy$，其中 Σ 是锥面 $x^2+y^2=4z^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分，取下侧.

解：补充 $\Sigma_1:z=2$，取上侧，则 Σ 和 Σ_1 构成封闭曲面，所围成的空间立体记为 Ω，则

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3zdxdy=6\iiint\limits_{\Omega}dv=6\cdot\frac{1}{3}\cdot16\pi\cdot2=64\pi$，

$\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3zdxdy=6\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=6\iint\limits_{x^2+y^2\le16}dxdy=6\cdot16\pi=96\pi$，

$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+2ydzdx+3zdxdy=64\pi-96\pi=-32\pi$.

八、附加题（10 分）选做一题，若两题均有解答，只算第一题的得分.

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，求 $F'(2)$.

解：$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t f(x)(x-1)dx$，

$F'(t)=f(t)(t-1)$，

$F'(2)=f(2)$.

2. 试利用 $\iint\limits_{D}[f(x)-f(y)]^2d\sigma\ge0$ 的结论证明 $(b-a)\int_a^b f^2(x)dx\ge\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$，其中 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,a\le y\le b\}$.

解：

$$\iint_D [f(x)-f(y)]^2 d\sigma = \iint_D \left[f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y) \right] d\sigma$$

$$= \int_a^b dy \int_a^b f^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)dx \int_a^b f(y)dy \right) + \int_a^b dx \int_a^b f^2(y)dy$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)dy$$

$$= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2$$

因为$\iint_D [f(x)-f(y)]^2 d\sigma \geq 0$，所以$(b-a)\int_a^b f^2(x)dx \geq \left[\int_a^b f(x)dx \right]^2$成立.