2023春：高等数学测验评讲

——第2次测验（积分部分）

解题步骤

1. 判断积分类型，确定需要计算定积分的次数.
2. 画图，观察积分区域的特点
   ① X/Y型 $\Rightarrow$ 交换积分的次序?
   ② 对称区域 $\Rightarrow$ 偶倍奇零?
   ③ 对称区域 $\Rightarrow$ 轮换对称性简化计算?
3. 选择恰当的坐标系.
4. 确定积分次序、积分范围，写出累次积分.
5. 计算结果.

大部分同学栽在前4步，导致第5步的计算完全是无用功.

一、（10 分）选择适当的积分次序计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{y(\ln x-1)}d\sigma$，其中闭区域 D 由 $y=x$、$x=4e$、$y=e$ 所围成.

注意：题目给出的积分次序有时候是陷阱！

分析：

1. 二重积分 $\Rightarrow$ 化为两次定积分（关键：选择适当的积分次序）.
2. 画图

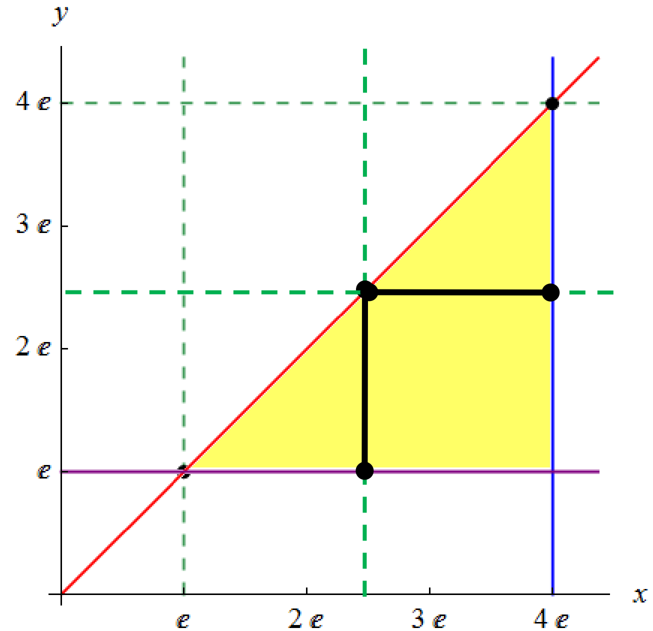
X型： $e \le x \le 4e$，　$e \le y \le x$.

$\Rightarrow$ 先对 y 积分，再对 x 积分.

Y型： $e \le y \le 4e$，　$y \le x \le 4e$.

$\Rightarrow$ 先对 x 积分，再对 y 积分；

但是无法积出结果！



解：$\iint\limits_D \frac{1}{y(\ln x-1)}d\sigma = \int_e^{4e}\frac{1}{\ln x-1}dx\int_e^x \frac{1}{y}dy$

$=\int_e^{4e}\frac{1}{\ln x-1}[\ln y]_e^x dx = \int_e^{4e}\frac{1}{\ln x-1}(\ln x-1)dx = \int_e^{4e}dx = 3e.$

二、（15 分）选择适当的坐标系计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

注意：题目给出的坐标系有时候是陷阱！

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z=0$ 时，$y=\sqrt{1-x^2}$

分析：

1. 三重积分 $\Rightarrow$ 化为三次定积分（关键：选择适当的坐标系）.
2. 画图

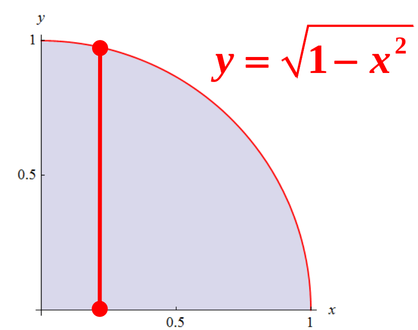
解法 1：在直角坐标系下，$dv=dxdydz$，$\Omega: 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$，$0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，$0\le x\le 1$ 于是

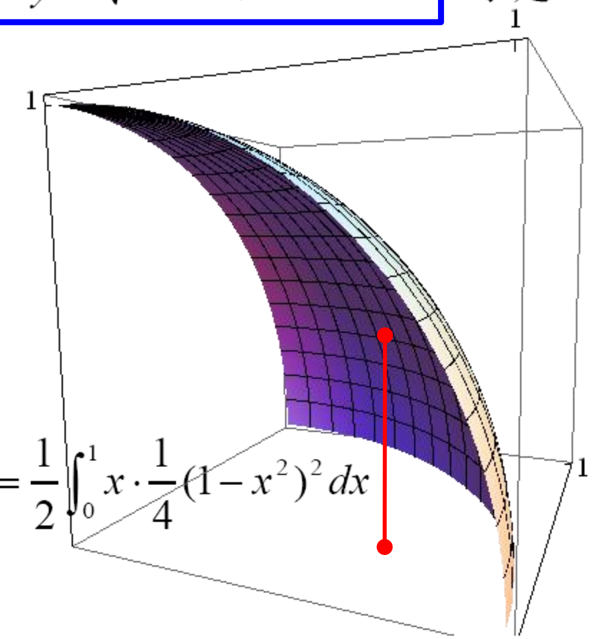
$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)y-y^3\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot\left[(1-x^2)\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot\frac{1}{4}(1-x^2)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx=\frac{1}{8}\int_0^1(x-2x^3+x^5)\,dx=\frac{1}{48}.$$





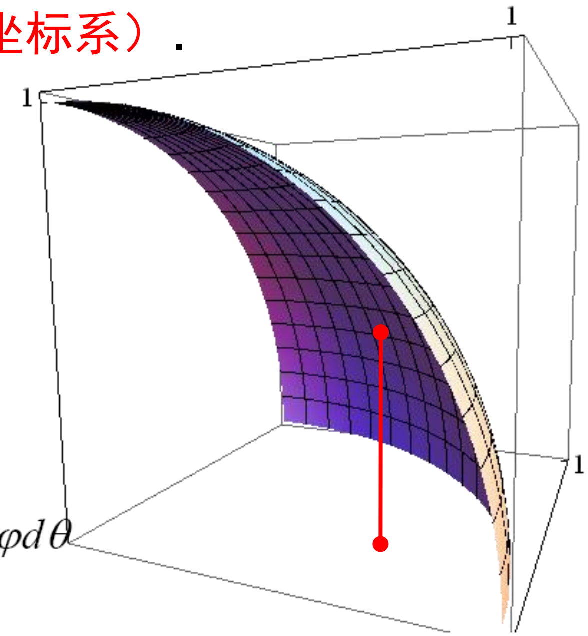
二、（15 分）选择适当的坐标系计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xyz dv$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

注意：题目给出的坐标系有时候是陷阱！

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$=\sqrt{1-r^2}$$

分析：

1. 三重积分 $\Rightarrow$ 化为三次定积分（关键：选择适当的坐标系）.
2. 画图



柱面坐标 = 极坐标 + 直角坐标，务必熟记！

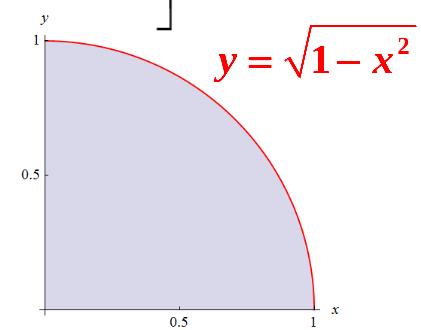
解法 2：在柱面坐标系下，$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，$dv=rdrd\theta dz$，

$\Omega: 0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le z\le\sqrt{1-r^2}$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz dv=\iiint\limits_{\Omega}(r\cos\theta)\cdot(r\sin\theta)\cdot z\cdot rdrd\varphi d\theta=\iiint\limits_{\Omega} r^3\sin\theta\cos\theta zdrd\varphi d\theta$$

$$=\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right)\left[\int_0^1 r^3\left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zdz\right)dr\right]=\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 r^3\cdot\frac{1}{2}(1-r^2)dr\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{48}.$$

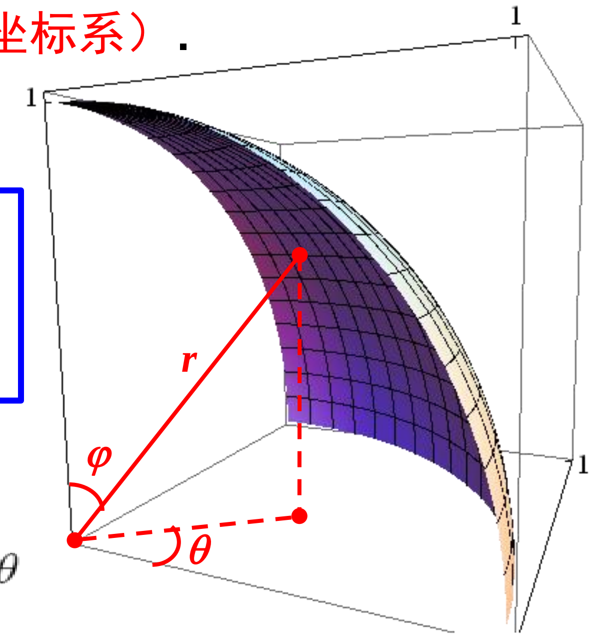


二、（15 分）选择适当的坐标系计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

注意：题目给出的坐标系有时候是陷阱！

分析：

1. 三重积分 $\Rightarrow$ 化为三次定积分（关键：选择适当的坐标系）.
2. 画图



球面坐标 = 极坐标 + 极坐标，务必熟记！

解法 3：在球面坐标系下，$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，$dv = r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$，

$\Omega: 0 \le r \le 1$，$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dv = \iiint\limits_{\Omega} (r\sin\varphi\cos\theta)\cdot(r\sin\varphi\sin\theta)\cdot(r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} r^5\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 r^5\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{48}.$$

三、（15 分）计算曲线积分$\oint_L \left(x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2\right) ds$，其中积分曲线$L: x^2+(y-1)^2=1$.

$$y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

$$x = \pm\sqrt{1-(y-1)^2}$$

分析：

1. 对弧长的曲线积分 $\Rightarrow$ 化为一次定积分
2. 画图（对称区域 $\Rightarrow$ 偶倍奇零？）
3. 选择恰当的坐标系

   不建议在直角坐标系下求解本题，因为把积分曲线化为 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 需要考虑开方后的符号．应该考虑极坐标方程或参数方程.

   此时，弧长微元 ds 如何表示？

解法 1：因为积分曲线关于 y 轴对称，$x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ 关于 x 是奇函数，所以$\oint_L x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = 0$.

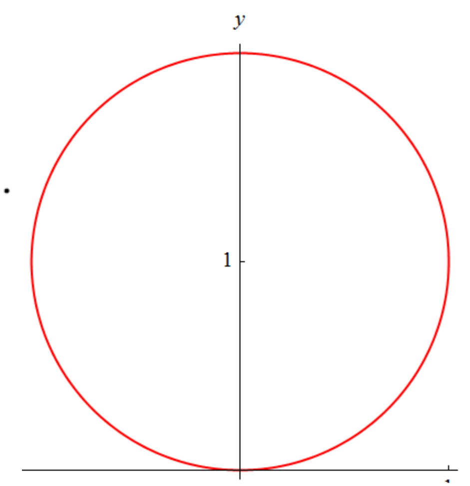
务必熟记！

在极坐标系下，积分曲线$L: r(\theta)=2\sin\theta$，$0\le\theta\le\pi$，弧长微元$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta = 2d\theta$，于是

$$\oint_L \left(x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2\right) ds = \oint_L \left(x^2+y^2\right) ds = \oint_L r^2 \cdot 2d\theta$$

$$= 8\cdot\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 16\boxed{\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta} = 16\cdot\frac{\pi}{4} = 4\pi.$$

高数上册P.253例12，
务必熟记！



三、（15 分）计算$\boxed{\text{曲线积分}}$$\oint_L \left(x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2\right) ds$，其中积分曲线$L: x^2+(y-1)^2=1$.

分析：

1. 对弧长的曲线积分 $\Rightarrow$ 化为一次定积分
2. 画图（对称区域 $\Rightarrow$ 偶倍奇零？）
3. 选择恰当的坐标系

   不建议在直角坐标系下求解本题，因为要把积分曲线化为 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 需要考虑开方后的符号．应该考虑极坐标方程或参数方程.

   此时，弧长微元 ds 如何表示？

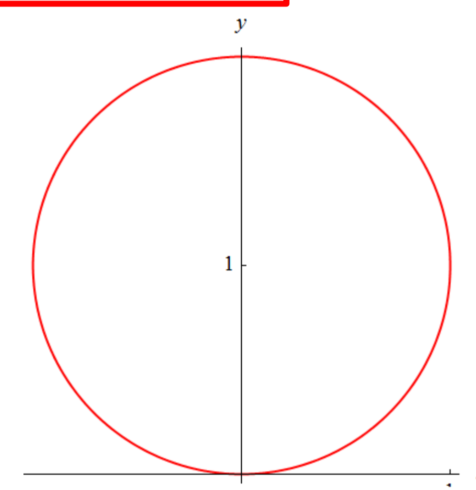
解法 2：因为积分曲线关于 y 轴对称，$x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ 关于 x 是奇函数，所以$\oint_L x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = 0$.

务必熟记！

在极坐标系下，$\boxed{\text{积分曲线 } L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t+1 \end{cases},\quad 0 \le t \le 2\pi}$，$\boxed{\text{弧长微元 } ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}dt=dt}$，于是

$$\oint_L \left(x^3 e^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2\right) ds = \oint_L \left(x^2+y^2\right) ds = \oint_L (2+2\sin t) d\theta$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} (1+\sin t) dt = 2 \cdot (2\pi + 0) = 4\pi.$$



四、（15 分）计算$\boxed{\text{曲面积分}}$ $\iint\limits_{\Sigma}(2xy+xz)dS$，其中 Σ 为平面$\boxed{2x+2y+z=6}$在第一卦限中的部分.

$z=z(x,y)=6-2x-2y$

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$

分析：

1. 对面积的曲面积分 $\Rightarrow$ 化为二重积分
2. 画图（对称区域 $\Rightarrow$ 偶倍奇零？）
3. 选择恰当的坐标系

建议采用直角坐标系求解本题，因为积分曲面是平面的一部分，对应着比较简单的二元函数 $z=z(x,y)$. 此时，面积微元 dS 如何表示？

解：Σ 对应着函数 $z(x,y)=6-2x-2y$，其中$\boxed{\text{定义域 } D_{xy}=\{(x,y):0\le x\le 3,0\le y\le 3,x+y\le 3\}}$.

平面的一般方程 $\Rightarrow$ 平面的截距式方程

仿照课本P.221例2（图11-21）求解

$z_x=z_y=-2$，$\boxed{dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma_{xy}=3d\sigma_{xy}}$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2xy+xz)dS=3\cdot\iint\limits_{D_{xy}}\left[2xy+x(6-2x-2y)\right]d\sigma_{xy}$$

$$=6\cdot\int_0^3 dx\int_0^{3-x}x(3-x)dy$$

$$=6\cdot\int_0^3 x(3-x)^2dx=6\cdot\int_0^3(9x-6x^2+x^3)dx$$

$$=6\cdot\left[\frac{9}{2}x^2-2x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^3=6\cdot\left(\frac{81}{2}-54+\frac{81}{4}\right)=\frac{81}{2}.$$

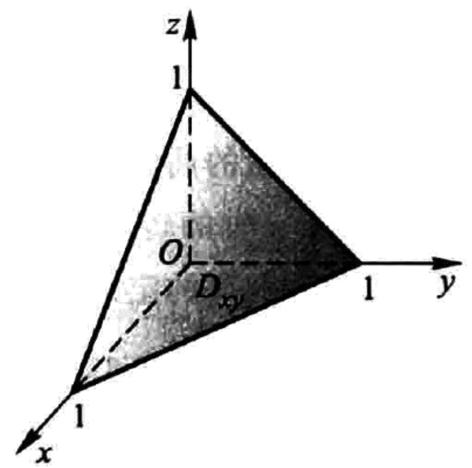


图 11－21

五、（15 分）计算曲线积分$\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，其中 L 为抛物线$\boxed{2x = \pi y^2}$上由点 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 的一段弧.

$x = \frac{\pi}{2}y^2$ 或 $y = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$

分析：

1. 对坐标的曲线积分 $\Rightarrow$ 化为一次定积分且积分的上、下限与曲线方向有关.
2. 画图（注意：对称区域，偶倍奇零不再成立！）
3. 选择恰当的求解方法

   不建议直接代入积分曲线的函数（或参数方程）来求解本题，因为被积函数比较复杂.

解法 1：设 $P(x,y) = 2xy^3 - y^2\cos x$，$Q(x,y) = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$，因为 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 xOy 面内具有连续偏导数，且 $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

$$(2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = (2xy^3dx + 3x^2y^2dy) - (y^2\cos x dx + 2y\sin x dy) + dy$$
$$= d(x^2y^3 - y^2\sin x + y),$$

$$\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \left[x^2y^3 - y^2\sin x + y\right]_{(0,0)}^{(\pi/2,1)} = \frac{\pi^2}{4}.$$

解法 2：设 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$，$Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 xOy 面内具有连续偏导数，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

将积分路径改为折线路径：$O(0,0)\to A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)\to B\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，于是

$$
\begin{aligned}
&\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy \\
&=\int_{\overline{OA}+\overline{AB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy \\
&=\int_{\overline{OA}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy+\int_{\overline{AB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy \\
&=\int_0^{\pi/2}0\cdot dx+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)dy=0+1-1+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

解法 3：设 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$，$Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 xOy 面

内具有连续偏导数，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

将积分路径改为直线路径：$O(0,0)\to B\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，即 $y=\dfrac{2}{\pi}x$，$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，　$dy=\dfrac{2}{\pi}dx$，于是

$$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$
$$=\int_{\overline{OB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{16}{\pi^3}x^4-\frac{4}{\pi^2}x^2\cos x\right]dx+\left[1-\frac{4}{\pi}x\sin x+\frac{12}{\pi^2}x^4\right]\cdot\frac{2}{\pi}dx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}x\sin x-\frac{4}{\pi^2}x^2\cos x+\frac{40}{\pi^3}x^4\right]dx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{\pi}+\frac{40}{\pi^3}x^4\right]dx-\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}x\sin xdx-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}x^2\cos xdx$$
$$=1+\frac{\pi^2}{4}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4}(-8+\pi^2)$$
$$=1+\frac{\pi^2}{4}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{-8+\pi^2}{\pi^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

解法 4：设 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$，$Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 xOy 面内具有连续偏导数，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

将积分路径改为直线路径：$O(0,0)\to B\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}y$，$0\le y\le 1$， $dx=\dfrac{\pi}{2}dy$，于是

$$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\int_{\overline{OB}}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\int_0^1\left[\pi y^4-y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]\cdot\frac{\pi}{2}dy+\left[1-2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)+\frac{3}{4}\pi^2y^4\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{5}{4}\pi^2y^4-\frac{\pi}{2}y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)-2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)+1\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{5}{4}\pi^2y^4+1\right]dy-\int_0^1\frac{\pi}{2}y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dy-\int_0^1 2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)dy$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+1-\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)-\frac{8}{\pi^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

六、（15 分）把$\boxed{\text{对坐标的曲面积分}}$

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$\boxed{\text{化为对面积的曲面积分}}$，然后计算该积分的值，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

分析：

1. **对坐标的曲面积分 $\Rightarrow$ 化为二重定积分且二重积分前的符号与曲面侧向有关.**
2. **画图（注意：对称区域，偶倍奇零不再成立！）**

解：由平面的侧向可知平面上任意一点的法向量的$\boxed{\text{方向余弦为}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}$，于是

第8章的内容

务必熟记！

$$\boxed{(dydz,dzdx,dxdy)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)dS,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(\Sigma\text{的面积})=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

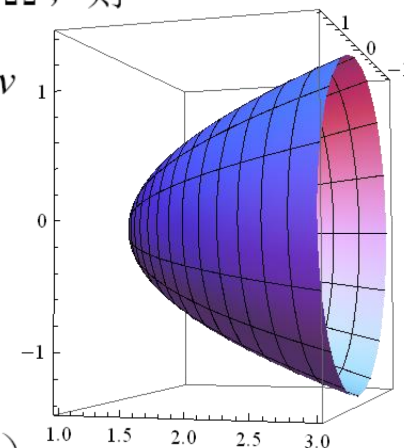
七、（15 分）利用高斯公式计算曲面积分$\displaystyle\iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$，其中$\Sigma$为旋转抛物

第8章的内容

面$\boxed{y-1=x^2+z^2}$（$1\le y\le 3$），它的法向量与y轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

分析：高斯公式 $\Rightarrow$ 封口？！

解：补充平面$\Pi: y=3$，取右侧，则Σ和Π构成封闭曲面，所围成的空间立体记为Ω，则



$$\iint_{\Sigma+\Pi} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iiint_{\Omega}(8y+1-4y-4y)dv=\iiint_{\Omega}dv$$

截面法

$$=\int_1^3 dy\iint_{x^2+z^2\le y-1}dxdz=\pi\int_1^3(y-1)dy=2\pi.$$

截面法

$$=\left(\int_1^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_1^3 dy\int_0^{\sqrt{y-1}}rdr\right)=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_1^3(y-1)dy=\pi\cdot\frac{1}{2}(y-1)^2\Big|_1^3=2\pi.$$

投影法

$$=\int_1^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2+1}^3 dy=2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)dr=2\pi\cdot\left[r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{2}}=2\pi\left(2-\frac{1}{4}\cdot 4\right)=2\pi.$$

$$\iint_{\Pi} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iint_{\Pi}2(1-y^2)dzdx$$

$$=+\iint_{x^2+z^2\le 2}2(1-3^2)dzdx=-16\iint_{x^2+z^2\le 2}dzdx=-32\pi.$$

$$\iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=2\pi-(-32\pi)=34\pi\ .$$

八、附加题（10 分）选做一题，若两题均有解答，只算第一题的得分．

1. 设 $f(u)$ 有连续的一阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$.

分析：

1. $0/0$ 型未定式 $\Rightarrow$ 洛必达法则.
2. 积分范围是圆域，且被积函数中含 x^2+y^2 的项 $\Rightarrow$ 极坐标系下计算二重积分.

解：$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(\rho)\rho d\rho}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho}{t^3}$$

$$=2\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cdot f(t)}{3t^2}=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\frac{2\pi}{3}f'(0)=\frac{2\pi}{3}\ .$$

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数且 $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}-\boxed{\iint_D f(u,v)dudv}$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=\pi$，$y=x$ 围成的区域，求 $f(x,y)$ 的表达式.

分析：

1. $f(x,y)$ **的表达式待定，所以蓝色方框部分应视作待定常数** A**.**
2. **等式两边同时求二重积分，构造关于** A **的方程.**
3. **与第一题类似，第1个红色方框部分应该选择恰当的积分次序进行计算.**

解：$\iint_D f(x,y)dxdy=A$，则 $A=\boxed{\iint_D \frac{\sin y}{y}dxdy}-A\boxed{\iint_D dxdy}$.

$\iint_D \frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^\pi dy\int_0^y \frac{\sin y}{y}dx=\int_0^\pi \sin y dy=2$，$\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\pi^2$，故 $A=2-A\frac{\pi^2}{2}$，解得 $A=\frac{4}{2+\pi^2}$.

于是 $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}-\frac{4}{2+\pi^2}$.

积分部分的常见问题及应对措施

序号	问题描述	应对措施
1	胡乱套用公式	熟记公式 （不是看着眼熟，而是熟记心中） 每天各种积分题目各做1题来检验复习的效果
2	不会画图，不能确定积分范围	重做课本、课件上的例子
3	坐标系选择不当	一题多解，辨析各种坐标系的适用范围
4	一直以来就没学懂，打算躺平	组成学习小组，互相监督