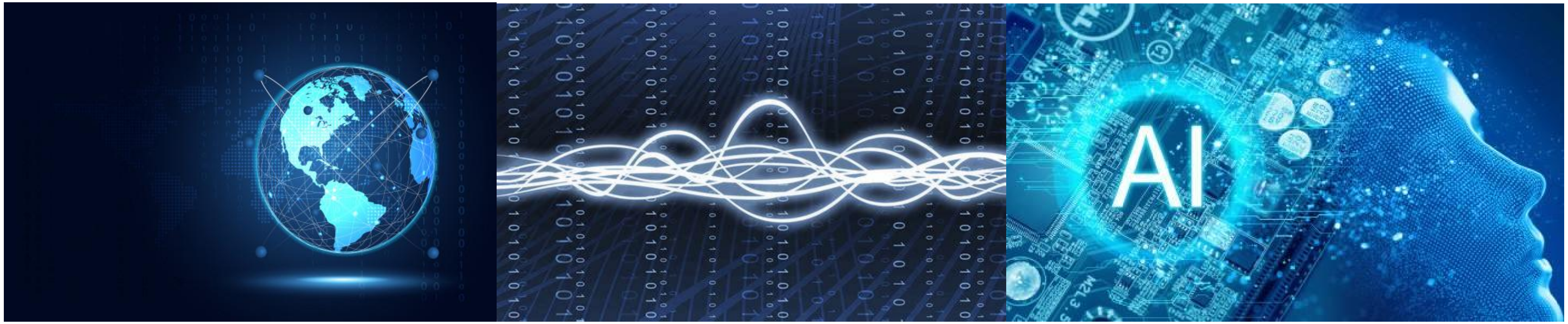


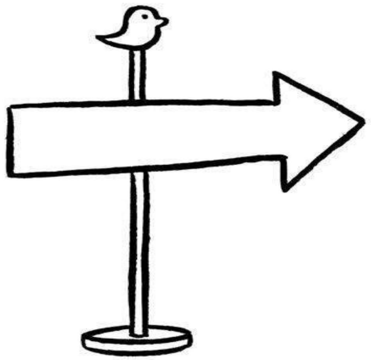
《数字信号处理》

授课教师：王丰
fengwang13@gdut.edu.cn
广东工业大学信息工程学院

提纲

fengwang13@gdut.edu.cn

- 1.1 离散时间信号-序列
- 1.2 线性移不变系统
- 1.3 常系数线性差分方程
- 1.4 连续时间信号的抽样
- 1.5 MATLAB函数及例题（上机）

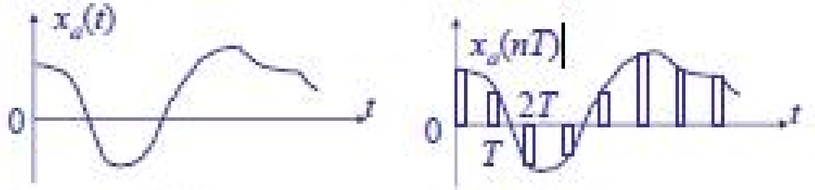


1.1 离散时间信号-序列

fengwang13@gdut.edu.cn

- 离散时间信号是对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样获得的，采样间隔为 T，得到：

$$x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$



- n 必须是整数。对于不同的 n 值，$x_a(nT)$ 是一个有序的数字序列，该数字序列就是离散时间信号。在数值上它等于信号的采样值，即

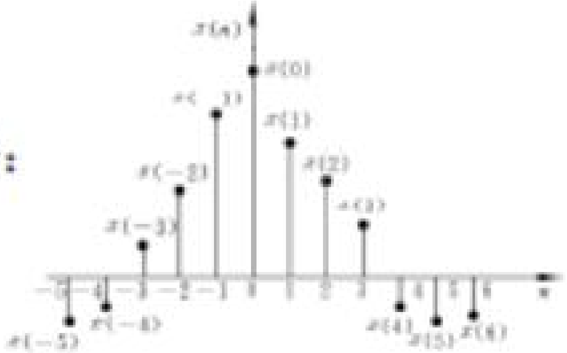
$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

- 为什么n 必须是整数?

n代表采样点的索引号，因此只有n是整数时，$x(n)$才有定义；n不是整数时，$x(n)$没有定义

离散时间信号的表示方法

- 公式表示法：$x(n) = a^n u(n)$
- 图形表示法：



- 集合符号表示法：$x(n) = \{\ldots 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 7, 8, 9, \ldots\}$

1.1.2 序列的运算

fengwang13@gdut.edu.cn

- **3类序列运算**
  - 对x(n)幅度的运算
  - 对n的运算
  - 对x(n)幅度和n的联合运算

- **三个基本运算单元**
  - 加法器
  - 乘法器
  - 延时器

1.1.2 序列的运算

fengwang13@gdut.edu.cn

1. 加法 $z(n)=x(n)+y(n)$

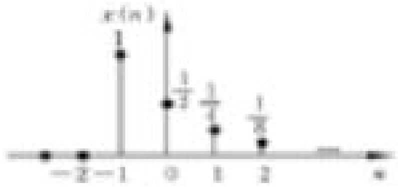
- 信号叠加 / 合成

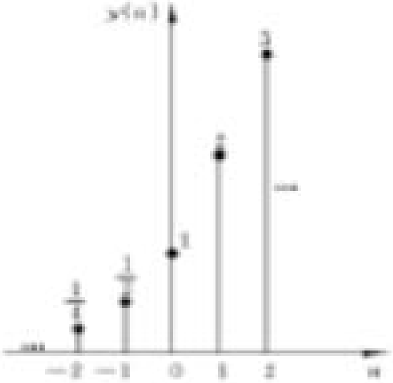
同序号 (n) 的序列值逐项对应相加

2. 乘法 $z(n)=x(n)\cdot y(n)$

同序号 (n) 的序列值逐项对应相乘

- 加性噪声
- 乘性噪声：同态信号处理

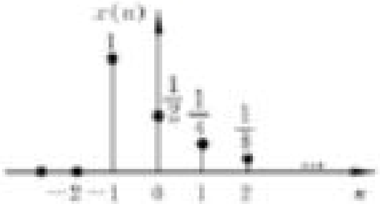




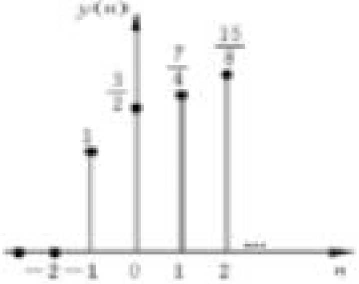
3. 累加 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$

表示 $y(n)$ 在某一个 n 上的值等于这一个 n 上的 $x(n)$ 值以及这一个 n 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



$$y(n)=\begin{cases}\sum_{k=-1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



1.1.2 序列的运算

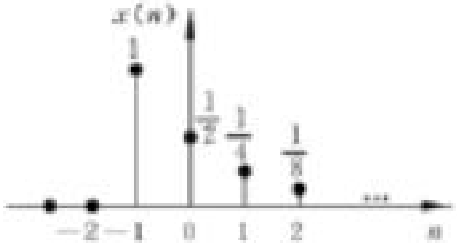
fengwang13@gdut.edu.cn

4. 移位 $y(n)=x(n-n_0)$

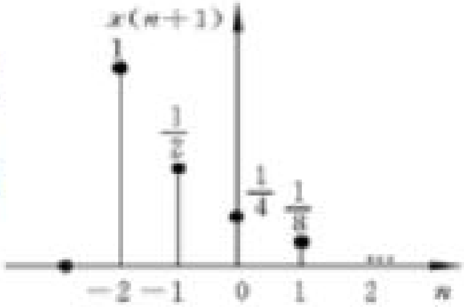
当 $n_0>0$ 时，序列右移—延迟

当 $n_0<0$ 时，序列左移—超前

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



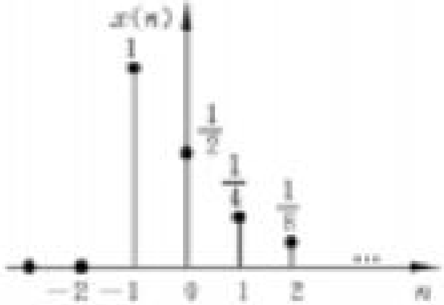
$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n+1\geq -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$



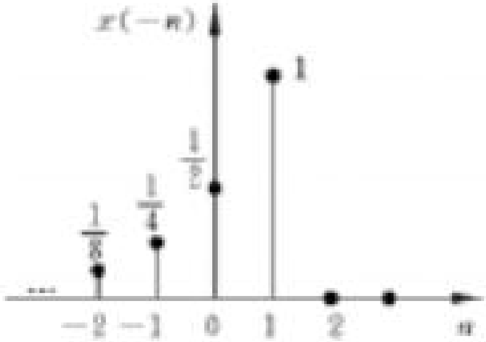
5. 翻褶

如果序列为 $x(n)$，则 $x(-n)$ 是以纵轴 $(n=0)$ 为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



$$x(-n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n\leq 1\\ 0, & n>1\end{cases}$$



1.1.2 序列的运算

fengwang13@gdut.edu.cn

6. 时间尺度变换　改变对模拟信号的抽样频率

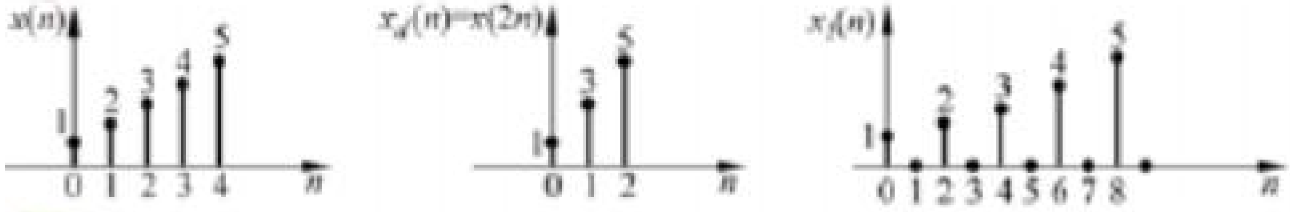
$x_d(n)=x(Dn)$，D 为整数——抽取（下抽样变换）

序列每连续 D 个抽样点取一点，减小抽样频率

$$x_I(n)=\begin{cases}x(n/I), & n=mI, I \text{ 为整数}, m=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

序列相邻抽样点间补 $(I\text{-}1)$ 个零值点，增加抽样频率

——插值（上抽样变换）

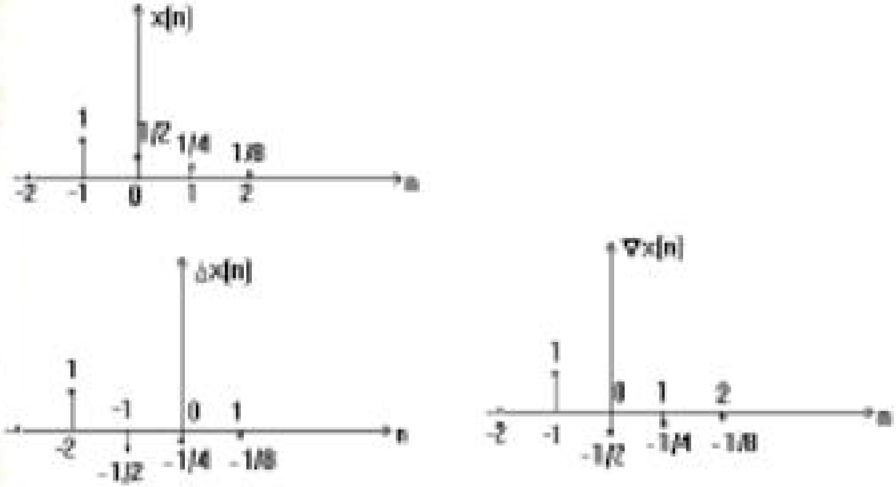


7. 差分运算

前向差分：$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$

后向差分：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

$$\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$$



1.1.3 序列的卷积和

fengwang13@gdut.edu.cn

8. 卷积和　离散时间线性移不变系统输出

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-m)h(m)$$

计算步骤：

(1) 翻褶：选哑变量为 m，画出 $x(m)$ 和 $h(m)$，将 $h(m)$ 以 $m=0$ 为对称轴翻褶成 $h(-m)$；

(2) 移位：将 $h(-m)$ 移位 n，得 $h(n-m)$。$n>0$ 时，右移 n 位；$n<0$ 时，左移 $|n|$ 位；

(3) 相乘：将 $h(n-m)$ 与 $x(m)$ 在相同 m 处的对应值相乘；

(4) 相加：把所有的乘积值累加，即得 $y(n)$。

计算线性卷积时，一般要分几个区间分别加以考虑。

重点和难点

1.1.3 序列的卷积和

fengwang13@gdut.edu.cn

例1：已知 $x(n)$ 和 $h(n)$ 分别为

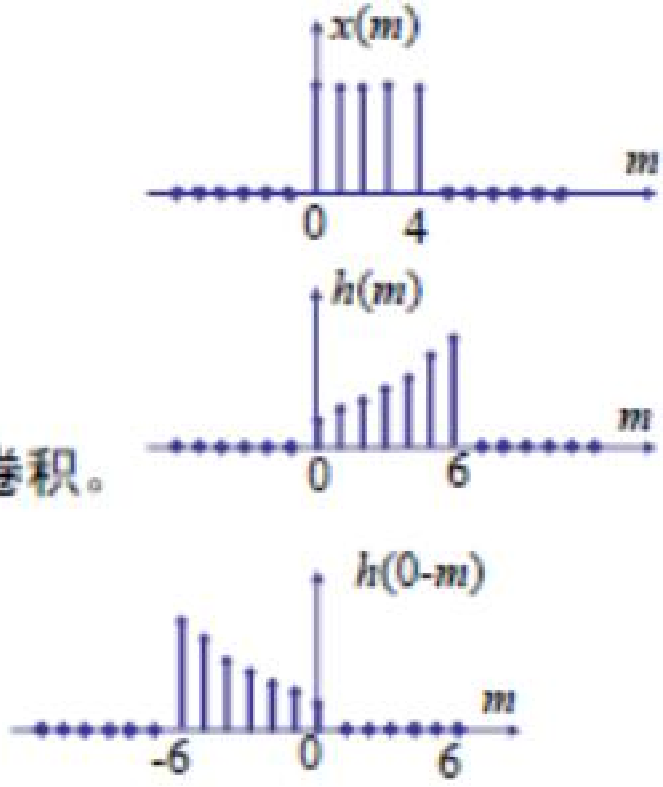
$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le 6\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

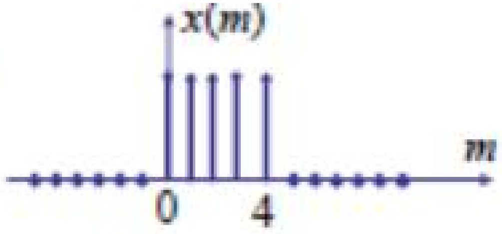
a 为常数，且 $a>1$，

试求 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积。

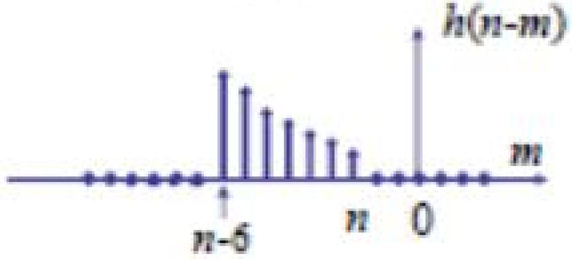
解：



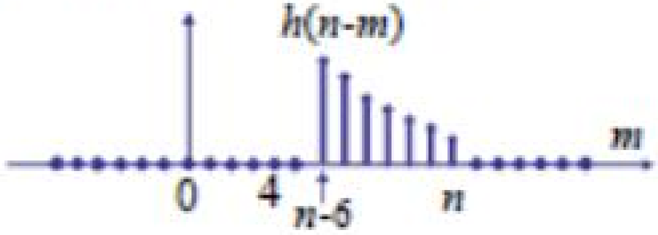
分段考虑如下：



(1) 当 $n<0$ 时：$y(n)=0$



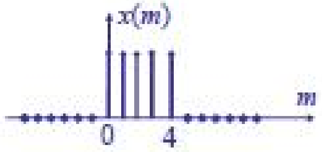
(2) 当 $(n-6)>4$ 时，即 $n>10$ 时：$y(n)=0$



1.1.3 序列的卷积和

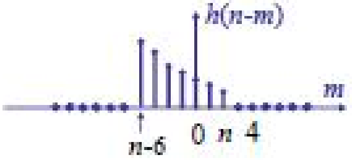
fengwang13@gdut.edu.cn

(3) 当 $0 \leqslant n \leqslant 4$ 时：



$$y(n)=\sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{n} 1\cdot a^{n-m}$$

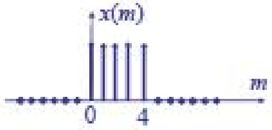


$$=a^{n}\sum_{m=0}^{n} a^{-m}$$

$$=a^{n}\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}=\frac{1-a^{1+n}}{1-a}$$

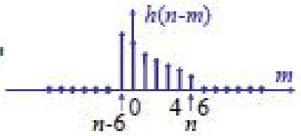
(4) 当 $n>4$，且 $n-6 \leqslant 0$，

即 $4<n \leqslant 6$ 时：



$$y(n)=\sum_{m=0}^{4} x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{4} 1\cdot a^{n-m}=a^{n}\sum_{m=0}^{4} a^{-m}$$

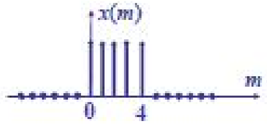


$$=a^{n}\frac{1-a^{-(1+4)}}{1-a^{-1}}$$

$$=\frac{a^{n-4}-a^{1+n}}{1-a}$$

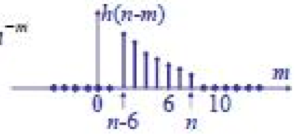
(5) 当 $n>6$，且 $n-6 \leqslant 4$，

即 $6<n \leqslant 10$ 时：



$$y(n)=\sum_{m=n-6}^{4} x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=n-6}^{4} 1\cdot a^{n-m}=a^{n}\sum_{m=n-6}^{4} a^{-m}$$

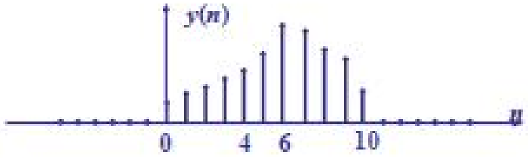


$$=a^{n}\frac{a^{-(n-6)}-a^{-(4+1)}}{1-a^{-1}}$$

$$=\frac{a^{n-4}-a^{7}}{1-a}$$

综合以上结果：

$$y(n)=\begin{cases} 0, & n<0 \\ \dfrac{1-a^{1+n}}{1-a}, & 0\le n\le 4 \\ \dfrac{a^{n-4}-a^{1+n}}{1-a}, & 4<n\le 6 \\ \dfrac{a^{n-4}-a^{7}}{1-a}, & 6<n\le 10 \\ 0, & 10<n \end{cases}$$



1.1.3 序列的卷积和

fengwang13@gdut.edu.cn

例 2：若 $x(n)$ 在 $N_3 \leq n \leq N_4$ 范围有非零值，$h(n)$ 在 $N_1 \leq n \leq N_2$ 范围有非零值。问 $y(n)=x(n)^*x(n)$ 在 n 的什么范围有值？

解：$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_m x(m)h(n-m)$

显然应满足：$N_3 \leq m \leq N_4$

$$N_1 \leq n-m \leq N_2$$

将两不等式相加，可得：$N_1+N_3 \leq n \leq N_2+N_4$

$x(n)$ 的长度点数为：$N=N_4-N_3+1$

$h(n)$ 的长度点数为：$M=N_2-N_1+1$

则 $y(n)$ 的长度应为：$L=(N_2+N_4)-(N_1+N_3)+1$

$$=N+M-1$$

单选题 1分

设置

已知$y(n)=x(n)*h(n)$, 则$x(n+m_1)*h(n-m_2)$ = ?

A $y(n+m_1+m_2)$

B $y(n+m_1-m_2)$

C $y(n-m_1+m_2)$

D $y(n-m_1-m_2)$

提交

填空题 6分

设置

已知x(n)={3,7,5,-1}, h(n)={4,-1,2}, 试写出:

y(n)=x(n)*h(n)={ [填空1] , [填空2] , [填空3] , [填空4] , [填空5] , [填空6] }

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

填空题 7分

设 $h(n)=\begin{cases}4-n, & 0\le n\le 3\\ 0, & else\end{cases}$ $x(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 3\\ 0, & else\end{cases}$

求x(n)*h(n)={ [填空1] , [填空2] , [填空3] , [填空4] , [填空5] , [填空6] , [填空7] }

作答

答案

fengwang13@gdut.edu.cn

解： $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=0}^{3}x(m)h(n-m)$

$$x(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 3\\ 0, & else\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}4-n, & 0\le n\le 3\\ 0, & else\end{cases}$$

分段考虑，如下：

(1) n<0时，y(n)=0

(2) 0≤n≤6时，

y(0) = x(0)h(0)=4

y(1) = x(0)h(1)+x(1)h(0)=3+8=11

y(2) = x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=2+6+12=20

y(3) = x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)=1+4+9+16=30

y(4) = x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1)=2+6+12=20

y(5) = x(2)h(3)+x(3)h(2)=3+8=11

y(6) = x(3)h(3)=4

(3) n>6时，y(n)=0

故，y(n)={$\underline{4}$,11,20,30,20,11,4}

卷积和(Convolution sum)运算的性质

fengwang13@gdut.edu.cn

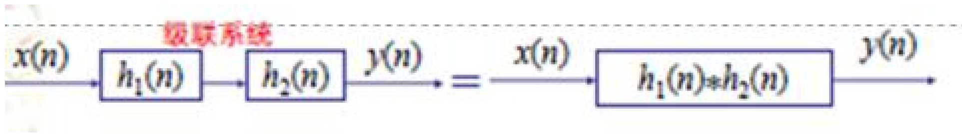
1、交换律(Commutative property):

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

(等价系统)

2、结合律(Associative property):

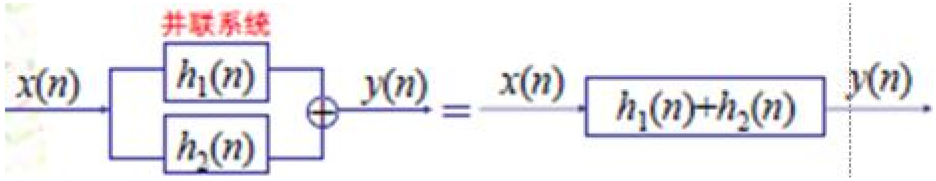
$$x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)*h_2(n)$$



(级联系统)

3、分配律(Distributive property):

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$



(并联系统)

1.1.4 序列的相关性

fengwang13@gdut.edu.cn

9. 相关 $r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-m)=x(m)*y(-m)$

- 运算与卷积相仿，只是不必将一个序列翻褶，运算只有移位、相乘、相加三个步骤。
- 相关是指两个确定信号或两个随机信号之间的相互关系，提供了两个序列之间相关程度的度量。实际工作中，常需要研究经过一段时间差后两个信号之间的相似程度，这就要用相关函数来表征。
- 随机信号的相关函数往往是确定的，可用来描述一个平稳随机信号的统计特性。
- 通常利用相关函数来分析随机信号的功率谱密度。

互相关运算不满足交换率：

$$r_{yx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x(n-m)\neq r_{yx}(m)$$

自相关函数的定义：$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-m)$

- $r_{xx}(m)$ 满足偶对称：$r_{xx}(m)=r_{xx}(-m)$
- 当 $m=0$ 时自相关序列取最大值，因为序列与自己本身的相似程度是最大的。

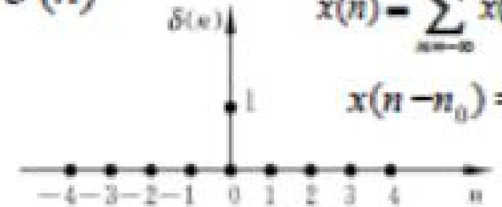
1.1.5 几种常用典型序列

fengwang13@gdut.edu.cn

unit sample sequence

1. 单位抽样序列 $\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases}$$

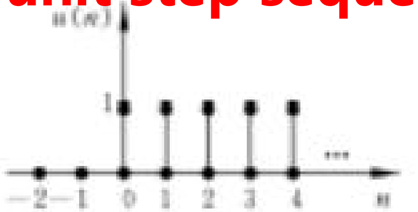


$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$$

$$x(n-n_0)=x(n)*\delta(n-n_0)$$

2. 单位阶跃序列 $u(n)$ **unit step sequence**

$$u(n)=\begin{cases}1, n\geq 0\\0, n<0\end{cases}$$

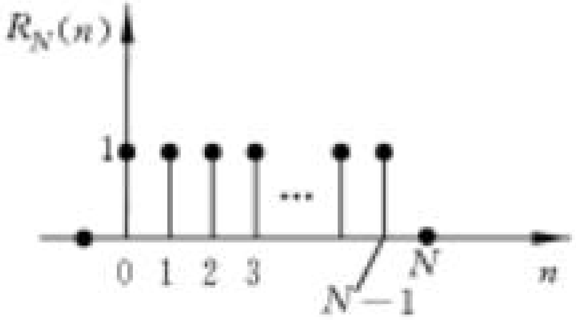


$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 的关系：$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\underline{\underline{\;n-m=k\;}}\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1\\0, & 其他\ n\end{cases}$$



N 为矩形序列的长度

rectangular sequence

$R_N(n)$ 与 $\delta(n)$，$u(n)$ 的关系：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)$$

1.1.5 几种常用典型序列

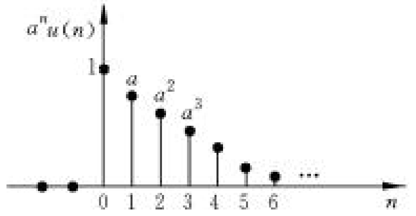
fengwang13@gdut.edu.cn

Real exponential sequence

4. 实指数序列

$x(n)=a^n u(n)$，a 为实数

$|a|<1$ 时，序列收敛；$|a|>1$ 时，序列发散



$0<a<1$ 时的实指数序列

Complex exponential sequence

5. 复指数序列 $x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$

用极坐标表示：

$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}=e^{\sigma n}\cdot e^{j\omega_0 n}$

$|x(n)|=e^{\sigma n},\arg[x(n)]=\omega_0 n$

当 $\sigma=0$ 时：$x(n)=e^{j\omega_0 n}$

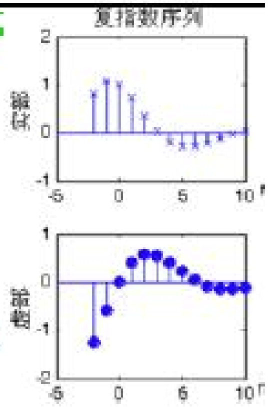
$=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$

ω_0 为复正弦的数字域频率。

$e^{j(\omega_0+2\pi M)n}=e^{j\omega_0 n}, M=0, \pm1, \pm2\cdots$

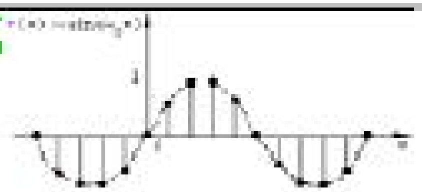
复指数序列具有以 2π 为周期的周期性。

研究中，频率域只考虑一个周期就够了。



Sinusoidal sequence

6. 正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$



A 为幅度，ω_0 为数字频率，φ 为起始相位。

由模拟信号 $x_a(t)=\sin(\Omega_0 t+\varphi)$ 采样得到，即：

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)=x_a(nT)=A\sin(\Omega_0 Tn+\varphi)$$

$$\omega=\Omega T=\frac{\Omega}{f_s}=2\pi\frac{f}{f_s}$$

Ω 为模拟角频率，单位为弧度/秒。

T 为信号的采样周期，$f_s=1/T$ 为信号的采样频率。

1.1.6 序列的周期性

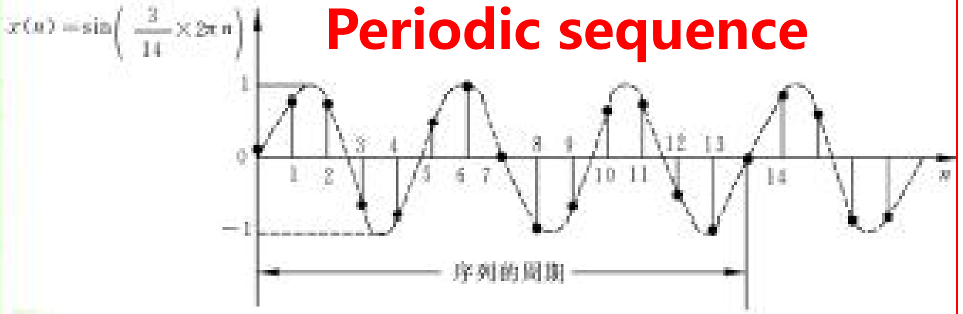
fengwang13@gdut.edu.cn

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，满足：

$$x(n)=x(n+kN), k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

则称 $x(n)$ 为周期序列，周期为 N。

Periodic sequence



一般正弦序列的周期性

设 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$

则 $x(n+N)=A\sin[\omega_0(n+N)+\varphi]$

$=A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

如果 $N\omega_0=2\pi k$，k 为整数

则 $x(n)=x(n+N)$

周期满足 $N=2\pi k/\omega_0$（N，k 必须为整数）

正弦序列的周期性讨论：$N=(2\pi/\omega_0)k$

- $2\pi/\omega_0$ 是整数时，则正弦序列有周期，当 $k=1$ 时，周期为 N
- $2\pi/\omega_0$ 是有理数时，则 $2\pi/\omega_0=N/k$，其中 k、N 为互素的正整数，则 $(2\pi/\omega_0)k=(N/k)k=N$，为最小正整数，所以正弦序列的周期为 N
- $2\pi/\omega_0$ 是无理数时，则任何 k 皆不能使 N 为正整数，正弦序列不是周期性的。

例如：$\sin\frac{1}{4}n$

♣ **正弦连续信号一定是周期信号，但正弦序列不一定是周期序列**

单选题 1分

设置

正弦序列$x(n)=A\sin(2n)$是周期序列

A 正确

B 错误

提交

1.1.7 单位抽样序列表示任意序列

fengwang13@gdut.edu.cn

1、任何序列x(n)都可表示成单位抽样序列的移位加权和：

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \\
&= x(n) * \delta(n)
\end{aligned}
$$

2、单位抽样序列的筛选性：

$$x(n) * \delta(n \pm n_0) = x(n \pm n_0)$$

单选题 1分

设置

$x(n)*\delta(n+m) = ?$

A $x(n+m)$

B $x(n-m)$

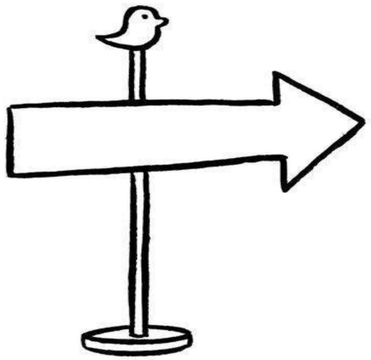
C $\delta(n+m)$

D $\delta(n-m)$

提交

提纲

fengwang13@gdut.edu.cn

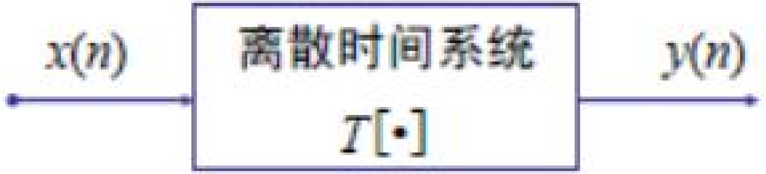


1.2 线性移不变系统

fengwang13@gdut.edu.cn

- 一个离散时间系统是将输入序列 $x(n)$ 按照所需要的目的变换成输出序列 $y(n)$ 的一种运算。若用 $T[\bullet]$ 表示这种运算，则有

$$y(n)=T[x(n)]$$



本课程要研究的是“线性移（时）不变”的离散时间系统。

- 满足叠加原理（可加性与比例性）的离散时间系统，称为线性系统。

设 $y_1(n)=T[x_1(n)]$，$y_2(n)=T[x_2(n)]$

$$\begin{aligned}T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]&=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]\\&=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)\end{aligned}$$

其中 a_1、a_2 为任意常数（包括复数）。

1.2.1 离散时间线性系统

fengwang13@gdut.edu.cn

例 3：$y(n)=x(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$ 是否线性系统？

解：$y_1(n)=x_1(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$

$y_2(n)=x_2(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

所以，此系统是线性系统。

离散时间线性系统

fengwang13@gdut.edu.cn

- 1、证明：$y(n)=\mathrm{Re}[x(n)]$是非线性系统，$\mathrm{Re}[\cdot]$为取实部运算
- 2、证明：$y(n)=3x(n)+4$ 是非线性系统

1.2.2 离散时间移不变系统

fengwang13@gdut.edu.cn

- 若系统的响应与激励加于系统的时刻无关，即，**输入输出关系不随时间而变化，则称为移不变系统**

- 若输入x(n)产生输出为y(n)，则输入x(n-m)产生输出为y(n-m)，即输入移动任意位，其输出也移动这么多位，而幅值保持不变

- 数学判断：若$y(n)=T[x(n)]$，则$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$，其中m为任意整数

1.2.2 离散时间移不变系统

fengwang13@gdut.edu.cn

- **例5： 证明$y(n)=x(Dn)$是移变系统，D为正整数**

证明：$T[x(n-n_0)]=x(Dn-n_0)$

$y(n-n_0)=x(D(n-n_0))$

$\because y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$

$\therefore$ **是移变系统**

若系统在时间轴(n)上有任何压缩或扩展，如$y(n)=x(Dn),y(n)=(n/l),y(n)=x(n^2)$，则一定是移变系统

- **例6：$y(n)=nx(n)$是否移不变系统?**

解：$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$

$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$

$\because y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$

$\therefore$ **是移变系统**

若系统存时变增益，如$y(n)=nx(n),y(n)=\sin(n\pi/3)x(n)$，则一定是移变系统

单选题 1分

设置

$y(n)=x(n)\sin(w_0n+\pi/4)$

A 移变系统

B 移不变系统

提交

1.2.3 离散时间线性移不变系统（LSI）

fengwang13@gdut.edu.cn

- 线性移不变(LSI, linear shift invariant)系统：既满足叠加原理(superposition principle)，又满足移不变条件的离散时间系统
- 单位抽样响应h(n)表征LSI系统

$$y(n)=T[\delta(n)]=h(n)$$

- 单位抽样（脉冲）响应h(n)：是指输入为单位抽样序列δ(n)时，LSI系统的输出。

1.2.3 离散时间线性移不变系统（LSI）

fengwang13@gdut.edu.cn

□LSI系统输出序列y(n)与输入序列x(n)在时域中的关系【重点】

- 设LSI系统的输入为x(n)，而 $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$ （为什么？）

  系统的输出为：

  $$y(n)=T[x(n)]=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$ （为什么？）

- 根据线性系统的叠加原理， $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$ （为什么？）
- 再根据移不变性质， $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

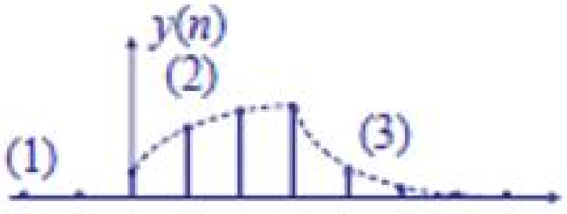
■ **线性卷积**： $$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

1.2.3 离散时间线性移不变系统（LSI）

fengwang13@gdut.edu.cn

□例7：设一LSI系统，其单位抽样响应为 $h(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$**，**
输入为 $x(n)=u(n)-u(n-N)$ **，求输出y(n)**

解： $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,h(n-m)$



(1) $n<0$: $y(n)=0$

(2) $0\le n<N$: $y(n)=\sum_{m=0}^{n} x(m)\,h(n-m)=\sum_{m=0}^{n} 1\cdot a^{n-m}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

(3) $n\ge N$: $y(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,h(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1} 1\cdot a^{n-m}=a^n\dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$

1.2.4 因果稳定系统

fengwang13@gdut.edu.cn

- **因果系统(Causal system)：系统的输出不发生在输入之前的系统**
- **在因果系统中，某时刻的输出 $y(n_0)$ 只取决于 n_0 时刻及其以前时刻的输入**
- **考查任意系统的因果性时，只看输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 的关系，而不讨论其他以n为变量的函数的影响。**

  如：$y(n)= x(n)\cos(n+2)$ 是因果系统

- **对于LSI系统，具有因果性(Causality)的充要条件是：$h(n)=0,\ n<0$。**

(前提条件)

如 $h(n)=a^n u(n)$

因果序列(Causal sequence)

1.2.4 因果稳定系统

fengwang13@gdut.edu.cn

□稳定性(Stability)：系统正常工作的先决条件

□稳定系统：对于每个有界输入x(n)，都产生有界输出y(n)的系统，即(BIBO)，

如果 $|x(n)| \le M < \infty$ ，有 $|y(n)| \le P < \infty$

□对于LSI系统，系统稳定的充要条件是：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$ 。

(前提条件)　　　　绝对可和（Absolutely summable）

★ 因果稳定的LSI系统的充要条件：
$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n), & \text{因果性} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, & \text{稳定性} \end{cases}$$

1.2.4 因果稳定系统

fengwang13@gdut.edu.cn

□例8：设一LSI系统，其单位冲激响应为 $h(n)=-a^n u(-n-1)$ ，a为实常数，试分析该系统的因果稳定性。

解: (1)讨论因果性

由于n<0时，h(n)≠0，故该系统是非因果系统。

(2)讨论稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{-1}|a|^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}|a|^{-n}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{|a|}}{1-\frac{1}{|a|}}=\dfrac{1}{|a|-1}, & |a|>1\\ \infty, & |a|\le 1\end{cases}$$

(变量代换)

故|a|>1时，该系统稳定系统

练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

- 已知y(n)=T[x(n)]是线性系统。当输入x(n)=0时，输出y(n)=0

  (正确)

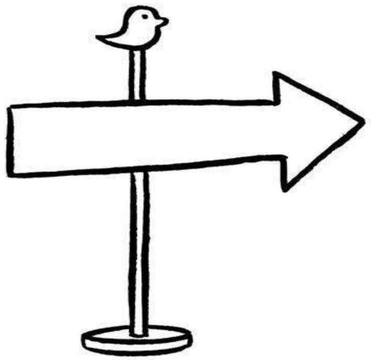
- 系统 $y(n)=e^{x(n)}$ 是________________系统

  (因果稳定)

提纲

fengwang13@gdut.edu.cn

- 1.1 离散时间信号-序列
- 1.2 线性移不变系统
- **1.3 常系数线性差分方程**
- 1.4 连续时间信号的抽样
- 1.5 MATLAB函数及例题（上机）



1.3 常系数差分方程

fengwang13@gdut.edu.cn

- 连续时间系统的输入、输出关系用常系数线性微分方程(linear constant-coefficient differential equation)表示

- 离散时间系统的输入、输出关系用常系数线性差分方程(linear constant-coefficient difference equations)表示

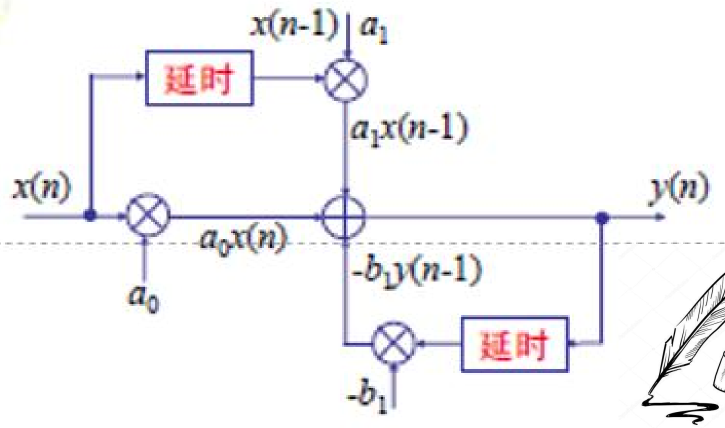
N-0=N

(N阶差分方程)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

(常系数)

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)$$



- 求解常系数线性差分方程的方法
  - 离散时域求解法：经典解法、迭代法、卷积计算法
  - 变换域求解法：z变换法

- 优点：可以直接得到系统结构图

讨论

fengwang13@gdut.edu.cn

任何LSI系统都可以表示成常系数线性差分方程

(正确)

常系数线性差分方程所描述的系统都是LSI系统

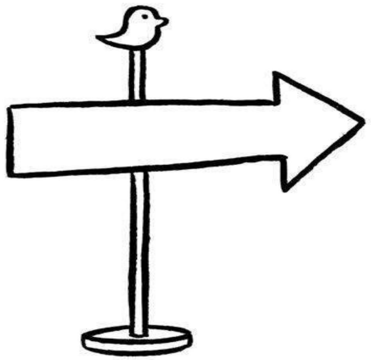
(错误)

已知y(n)=ay(n-1)+x(n)，边界条件y(-1)=0, 该系统是（线性、移不变、因果）， 当|a|<1时，该系统是（稳定）系统

提纲

fengwang13@gdut.edu.cn

- 1.1 离散时间信号-序列
- 1.2 线性移不变系统
- 1.3 常系数线性差分方程
- **1.4 连续时间信号的抽样**
- 1.5 MATLAB函数及例题（上机）



1.4 连续时间信号的抽样(sampling)

fengwang13@gdut.edu.cn

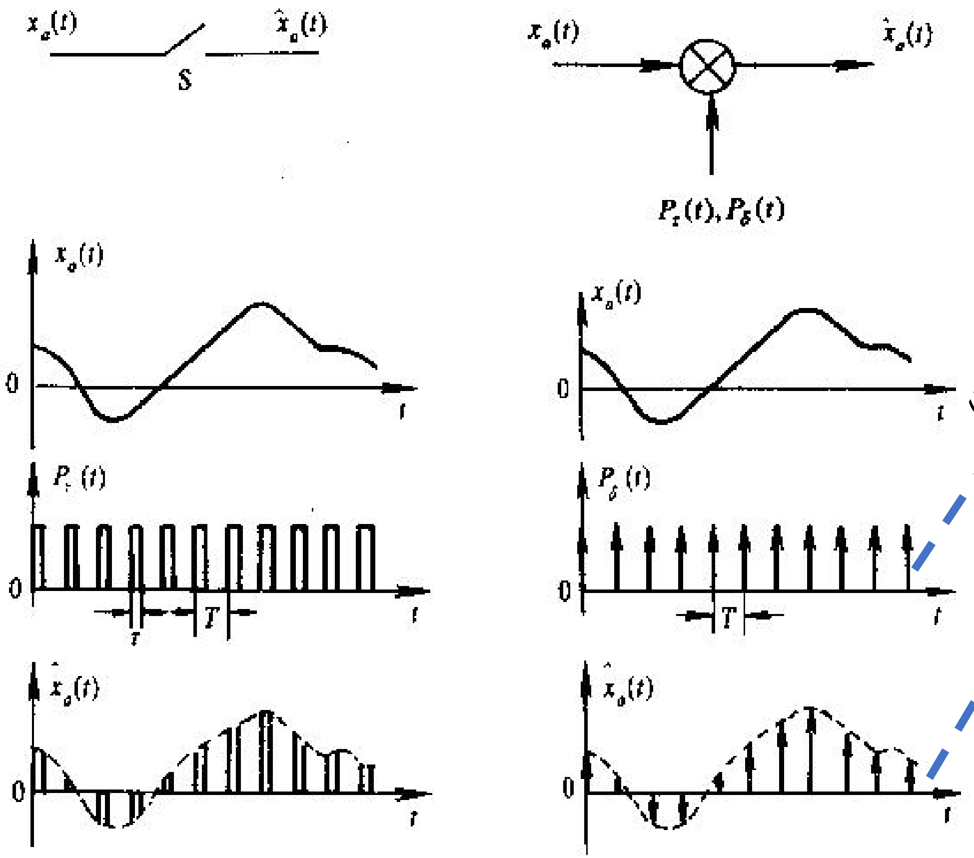
连续时间信号	采样 (sampling) →	离散时间信号
模拟信号Analog signal	← 插值 (interpolation)	数字信号Digital signal

- 对模拟信号进行采样 = 模拟信号通过一个**电子开关S (electronic switch)**
- 设电子开关每隔**周期T**合上一次，每次合上的时间为τ<<T，在电子开关输出端得到其采样信号

- **思考:**
  1. 信号经过采样后，将发生什么变化?
  2. 经过采用的信后，信号内容会不会有丢失?
  3. 如果信号内容没有丢失，该如何有数字信号不失真地恢复出模拟信号呢?

1.4 连续时间信号的抽样

fengwang13@gdut.edu.cn



实际采样
(practical sampling)
矩形脉冲抽样

理想采样
ideal sampling
冲激采样

(周期性的冲激信号)

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$ （为什么？）

冲激函数
(impulse function)

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$$

（为什么？）

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_a(j\Omega) = FT[x_a(t)]$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = FT[\hat{x}_a(t)]$$

$$P_\delta(j\Omega) = FT[p_\delta(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

连续信号的傅里叶变换
Fourier transformation

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s} dt = \frac{1}{T}$$

$\Omega_s = 2\pi/T$，模拟采样角频率(analog sampling angular frequency)
$w_s = \Omega_s T = 2\pi$，数字采样频率(digital sampling frequency)
$f_s = 1/T$，采样频率(sampling frequency)

1.4 连续时间信号的抽样

fengwang13@gdut.edu.cn

$$P_\delta(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$ （周期性冲激信号$p_\delta(t)$的频谱）

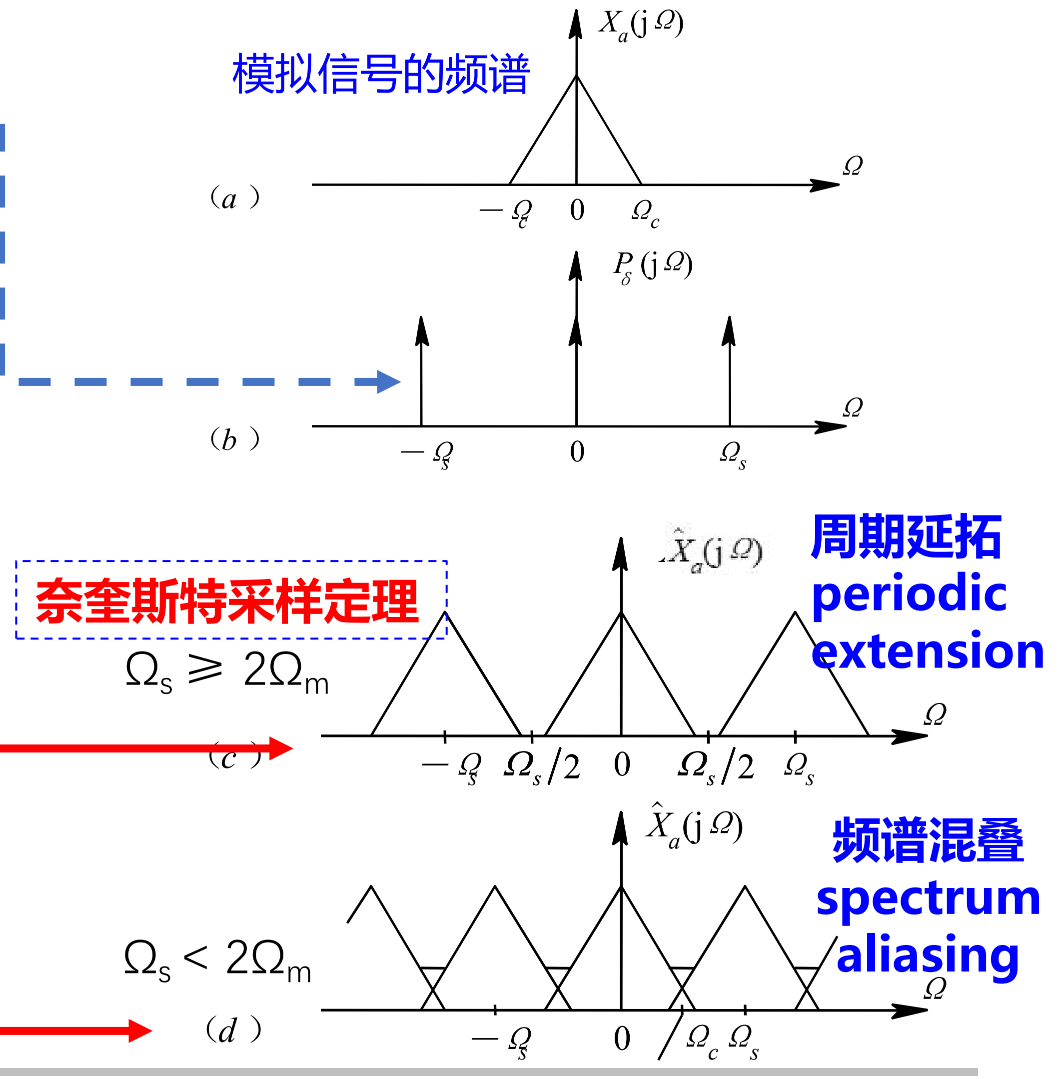
$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*P_\delta(j\Omega)$$ （为什么？）

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\theta)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s-\theta)d\theta$$ （为什么？）

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega)\delta(\Omega-k\Omega_s-\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

采样信号的频谱



- 采样信号的频谱是原模拟信号的频谱沿频率轴，每间隔采样角频率Ω_s**重复**出现一次
- 采样信号的频谱是原模拟信号的频谱以Ω_s为周期，进行**周期延拓**而成的。
- $\Omega_s/2$称为折叠角频率，$f_s/2$称为折叠频率、奈奎斯特频率

奈奎斯特采样定理

fengwang13@gdut.edu.cn

- 对于一带限信号，设$\Omega_m(f_m)$是信号最高频率，采样信号能无失真恢复原信号的条件是：

$$\Omega_s \geq 2\Omega_h \ \ (f_s \geq 2f_h)$$

- 即，采样频率要大于等于信号最高频率的2倍

注：在实际工程中，采样是应用A/D芯片实现的。采样频率要适当，实际采样频率取**$2.5\Omega_h \sim 3\Omega_h$**

注：正弦信号的抽样频率必须满足$f_s > 2f_h$

正弦信号的采样

fengwang13@gdut.edu.cn

例题：已知 $x_a(t)=\sin(18\pi t+\varphi_1)+\sin(19\pi t+\varphi_2)+0.5\sin(20\pi t+\varphi_3)$

1、要求采样频率f_s取整数Hz，则f_s最小为(　)Hz

2、求采样序列x(n)的周期N=(　)

解：1、正弦信号采样频率f_s确定： $f_s>2f_h=2\times\dfrac{\omega_h}{2\pi}=2\times\dfrac{20\pi}{2\pi}=20,\qquad \therefore f_s=21\text{Hz}$

2、模拟信号数字化

$$x(n)=x_a(t)\Big|_{t=nT=\frac{n}{f_s}}=\sin\left(18\pi\frac{n}{f_s}+\varphi_1\right)+\sin\left(19\pi\frac{n}{f_s}+\varphi_2\right)+0.5\sin\left(20\pi\frac{n}{f_s}+\varphi_3\right)$$

$$=\sin\left(18\pi\frac{n}{21}+\varphi_1\right)+\sin\left(19\pi\frac{n}{21}+\varphi_1\right)+0.5\sin\left(20\pi\frac{n}{21}+\varphi_2\right)$$

$$=x_1(n)+x_2(n)+x_3(n)$$

信号x_1(n)、x_2(n)、x_3(n)的周期为： $N_1=\dfrac{2\pi}{18\pi/21}\times k=7\quad N_2=\dfrac{2\pi}{19\pi/21}\times k=42\quad N_3=\dfrac{2\pi}{20\pi/21}\times k=21$

因此，信号x(n)的周期： $N=\underbrace{\text{LCM}}_{\text{最小公倍数}}(N_1,N_2,N_3)=42$

练一练

fengwang13@gdut.edu.cn

1. 已知正弦序列: $x(n)=\cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\pi n\right)$ ，则x(n)的周期N=(24)

2. 已知正弦信号 $x_a(t)=\sin(2\pi t)+2\sin(3\pi t)-3\cos(6\pi t)+5\sin(8\pi t)$

(1)、要求采样后4个单频正弦序列仍为周期序列，则fs的最小值=(12)Hz

(2)、采样序列x(n)的周期N=(24)

3、已知某因果系统，满足差分方程：$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$

计算该系统的单位抽样响应h(n)

【答案】

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$

作业(第五版)

fengwang13@gdut.edu.cn

- 1.1
- 1.4（1、3、7、8）
- 1.5
- 1.7（1、3、4、9）
- 1.10

【作业要求】手写作业拍照扫描，或直接平板电子笔手写导出，保存成pdf格式

命名格式：**第1章DSP作业-姓名**，上传到：

http://drive.gdut.edu.cn/l/UHk2rN