

第四章 连续系统的频域分析

- 4. 1 信号分解为正交函数
- 4. 2 傅里叶级数
- 4. 3 周期信号的频谱
- 4. 4 非周期信号的频谱——傅里叶变换
- 4. 5 傅里叶变换的性质
- 4. 6 能量谱和功率谱
- 4. 7 周期信号的傅里叶变换
- 4. 8 LTI系统的频域分析
- 4. 9 取样定理
- 4. 10 序列的傅里叶分析
- 4. 11 离散傅里叶变换及其性质

- ◆ 内容及要求
- ◆ (1) 了解信号的正交分解。
- ◆ (2) 掌握周期信号的频谱及其特点。了解傅里叶系数与周期信号波形对称性的关系。
- ◆ (3) 熟练掌握非周期信号的傅里叶变换的定义及其典型信号的傅里叶变换。
- ◆ (4) 熟练掌握傅里叶变换的主要性质。
- ◆ (5) 理解信号的能量、频宽等概念。
- ◆ (6) 掌握周期信号傅里叶变换的求法及其傅里叶系数与傅里叶变换的关系。
- ◆ (7) 理解抽样信号的概念，掌握时域抽样定理；了解频域抽样定理。
- ◆ (8) 熟练掌握连续系统的频域分析方法。
- ◆ (9) 了解理想低通滤波器及其传输特性和信号传输的不失真条件。

第四章 连续系统的频域分析

时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数；而 $y_f(t) = h(t) * f(t)$ 。

本章将以正弦信号和虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 为基本信号，任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号之和。

这里用于系统分析的独立变量是频率。故称为频域分析。

4.1 信号分解为正交函数

一、矢量正交与正交分解

矢量 $\mathbf{V}_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$ 与 $\mathbf{V}_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$ 正交的定义：其内积为0。即

$$\mathbf{V}_x \mathbf{V}_y^T = \sum_{i=1}^3 v_{xi} v_{yi} = 0$$

4.1 信号分解为正交函数

由两两正交的矢量组成的矢量集合---称为正交矢量集
如三维空间中，以矢量

$\mathbf{v}_x = (2, 0, 0)$ 、 $\mathbf{v}_y = (0, 2, 0)$ 、 $\mathbf{v}_z = (0, 0, 2)$
所组成的集合就是一个正交矢量集。

例如对于一个三维空间的矢量 $\mathbf{A} = (2, 5, 8)$ ，可以用一个三维正交矢量集 $\{\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z\}$ 分量的线性组合表示。即

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}_x + 2.5 \mathbf{v}_y + 4 \mathbf{v}_z$$

矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间，
在信号空间找到若干个相互正交的信号作为基本信号，使得信号空间中任意信号均可表示成它们的线性组合。

4.1 信号分解为正交函数

二、信号正交与正交函数集

1. 定义:

定义在 (t_1, t_2) 区间的两个函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$,若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt = 0 \quad (\text{两函数的内积为0})$$

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。

2. 正交函数集:

若 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 构成一个函数集,当这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。

4.1 信号分解为正交函数

3. 完备正交函数集:

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 之外, 不存在函数 $\varphi(t)(\neq 0)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \varphi_i(t) dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如: 三角函数集 $\{1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t), n=1, 2, \dots\}$ 和虚指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是两组典型的在区间 $(t_0, t_0+T)(T=2\pi/\Omega)$ 上的完备正交函数集。

4.1 信号分解为正交函数

三、信号的正交分解

设有 n 个函数 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 构成一个正交函数空间。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似, 可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n$$

如何选择各系数 C_j 使 $f(t)$ 与近似函数之间误差在区间 (t_1, t_2) 内为最小。

通常使误差的方均值(称为均方误差)最小。均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt$$

4.1 信号分解为正交函数

为使上式最小

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt = 0$$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [-2C_i f(t) \varphi_i(t) + C_i^2 \varphi_i^2(t)] dt = 0$$

即
$$-2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt + 2C_i \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt = 0$$

所以系数
$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt$$

4.1 信号分解为正交函数

代入，得最小均方误差（推导过程见教材）

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \geq 0$$

在用正交函数去近似 $f(t)$ 时，所取得项数越多，即 n 越大，则均方误差越小。当 $n \rightarrow \infty$ 时（为完备正交函数集），均方误差为零。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j$$

上式称为(Parseval)巴塞瓦尔公式，表明：在区间 (t_1, t_2) $f(t)$ 所含能量恒等于 $f(t)$ 在完备正交函数集中分解的各正交分量能量的总和。

函数 $f(t)$ 可分解为无穷多项正交函数之和 $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(t)$

4.2 傅里叶级数

4.2 傅里叶级数

一、傅里叶级数的三角形式

设周期信号 $f(t)$ ，其周期为 T ，角频率 $\Omega=2\pi/T$ ，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数——称为 $f(t)$ 的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

系数 a_n , b_n 称为傅里叶系数

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

可见， a_n 是 n 的偶函数， b_n 是 n 的奇函数。

4.2 傅里叶级数

将上式同频率项合并，可写为

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

式中， $A_0 = a_0$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

可见 A_n 是 n 的偶函数， φ_n 是 n 的奇函数。

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n, \quad n=1,2,\dots$$

上式表明，周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

其中， $A_0/2$ 为直流分量；

$A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ 称为基波或一次谐波，它的角频率与原周期信号相同；

$A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$ 称为二次谐波，它的频率是基波的2倍；
一般而言， $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波。

4.2 傅里叶级数

二、波形的对称性与谐波特性

1. $f(t)$ 为偶函数——对称纵坐标

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

$b_n=0$ ，展开为余弦级数。

2. $f(t)$ 为奇函数——对称于原点

$a_n=0$ ，展开为正弦级数。

实际上，任意函数 $f(t)$ 都可分解为奇函数和偶函数两部分，即 $f(t) = f_{od}(t) + f_{ev}(t)$

由于 $f(-t) = f_{od}(-t) + f_{ev}(-t) = -f_{od}(t) + f_{ev}(t)$ 所以

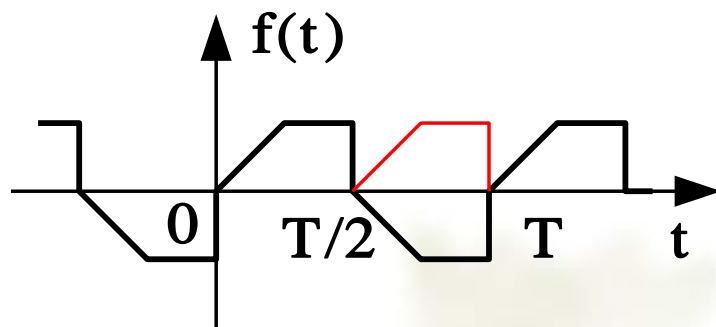
4.2 傅里叶级数

$$f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

3. $f(t)$ 为奇谐函数—— $f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中只含奇次谐波分量，而不含偶次谐波分量即 $a_0 = a_2 = \dots = b_2 = b_4 = \dots = 0$



三、傅里叶级数的指数形式

三角形形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。可从三角形形式推出：利用 $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$

4.2 傅里叶级数

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}]$$

$$= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega t}$$

上式中第三项的 n 用 $-n$ 代换, $A_{-n}=A_n$, $\varphi_{-n}=-\varphi_n$,
则上式写为

$$\frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t}$$

令 $A_0=A_0 e^{j\varphi_0} e^{j0\Omega t}$, $\varphi_0=0$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t}$$

4.2 傅里叶级数

令复数 $\frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = |F_n| e^{j\varphi_n} = F_n$

称其为复傅里叶系数，简称傅里叶系数。

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (A_n \cos \varphi_n + j A_n \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

表明：任意周期信号 $f(t)$ 可分解为许多不同频率的虚指数信号之和。 $F_0 = A_0/2$ 为直流分量。

4.3 周期信号的频谱

4.3 周期信号的频谱

一、信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图。

周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

将 $A_n \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$ 的关系分别画在以 ω 为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为 $n \geq 0$ ，所以称这种频谱为单边谱。

也可画 $|F_n| \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$ 的关系，称为双边谱。若 F_n 为实数，也可直接画 F_n 。

例 4.3-1 $f(t) = 1 + 3\cos(\pi t + 10^\circ) + 2\cos(2\pi t + 20^\circ)$
 $+ 0.4\cos(3\pi t + 45^\circ) + 0.8\cos(6\pi t + 30^\circ),$

试画出 $f(t)$ 的振幅谱和相位谱。

解 $f(t)$ 为周期信号，题中所给的 $f(t)$ 表达式可视为 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式。据

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

可知，其基波频率 $\Omega=\pi(\text{rad/s})$ ，基本周期 $T=2\text{ s}$ ， $\omega=2\pi$ 、 4π 、 6π 分别为二、三、六次谐波频率。且有

$$\frac{A_0}{2} = 1$$

$$\varphi_1 = 0^\circ$$

$$A_1 = 3$$

$$\varphi_1 = 10^\circ$$

$$A_2 = 2$$

$$\varphi_2 = 20^\circ$$

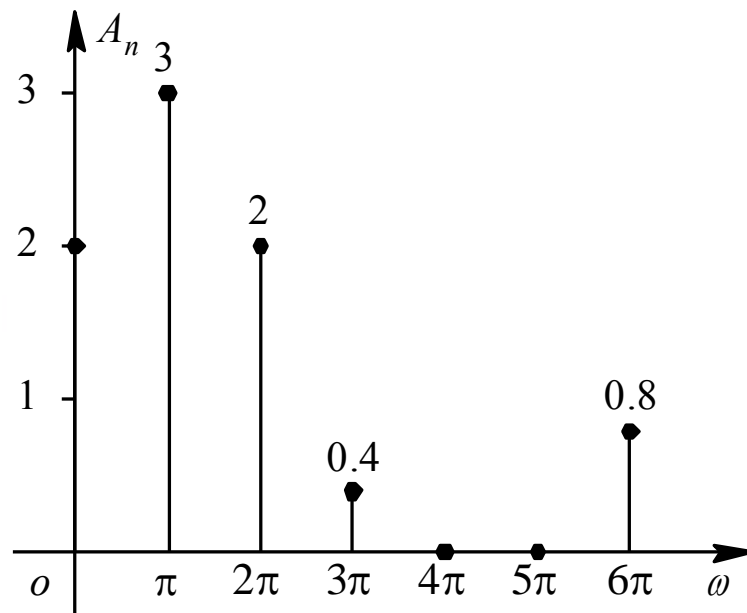
$$A_3 = 0.4$$

$$\varphi_3 = 45^\circ$$

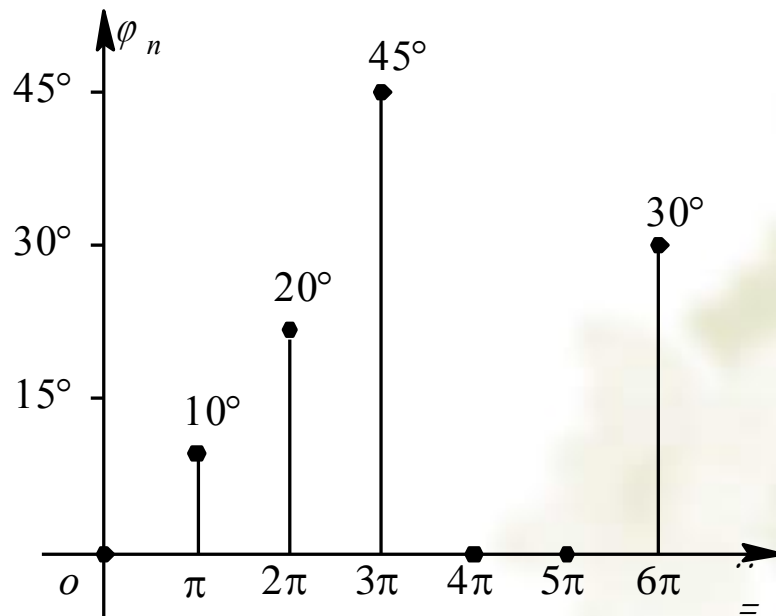
$$A_6 = 0.8$$

$$\varphi_6 = 30^\circ$$

其余 $\dot{A}_n = 0$

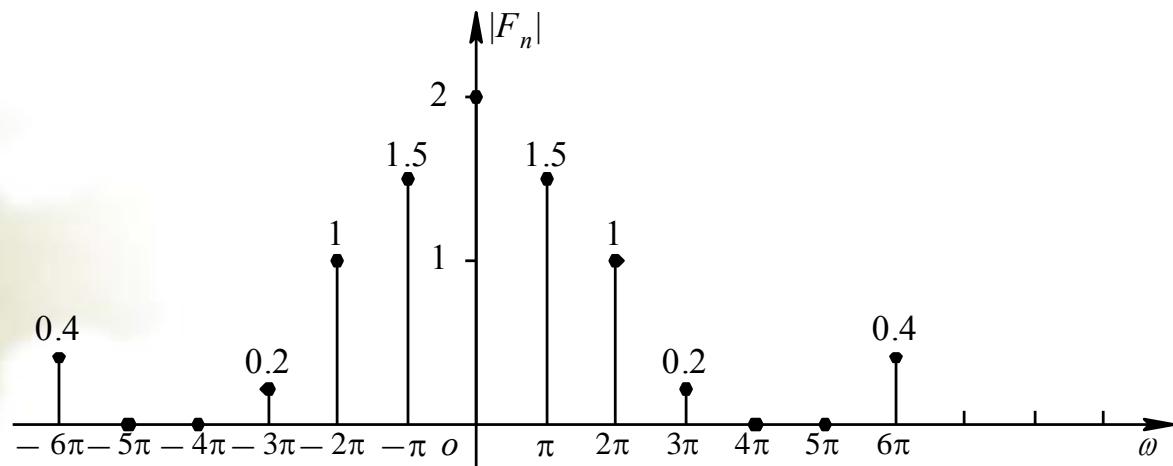


(a)

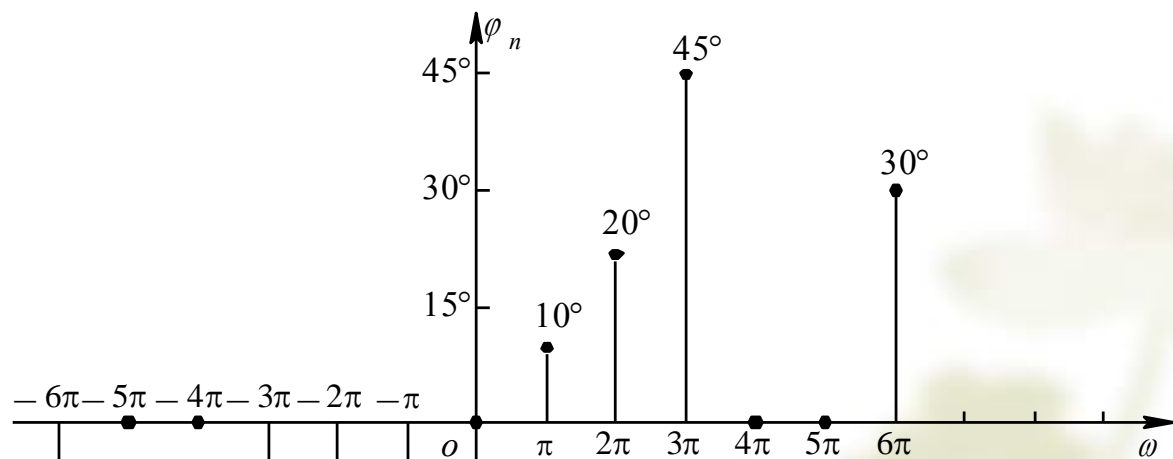


(b)

图 4.3-1 例 4.3-1
信号的频谱
(a) 振幅谱;
(b) 相位谱



(a)



(b)

图 4.3-2 例
4.3-1 信号的双边频谱图
(a) 振幅谱;
(b) 相位谱

4.3 周期信号的频谱

例4.3-2 周期信号 $f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$
试求该周期信号的基波周期 T ，基波角频率 Ω ，画出它的单边频谱图，并求 $f(t)$ 的平均功率。

解 首先应用三角公式改写 $f(t)$ 的表达式，即

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3} + \pi\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

显然1是该信号的直流分量。

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的周期 } T_1 = 8 \quad \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 的周期 } T_2 = 6$$

所以 $f(t)$ 的周期 $T = 24$ ，基波角频率 $\Omega = 2\pi/T = \pi/12$

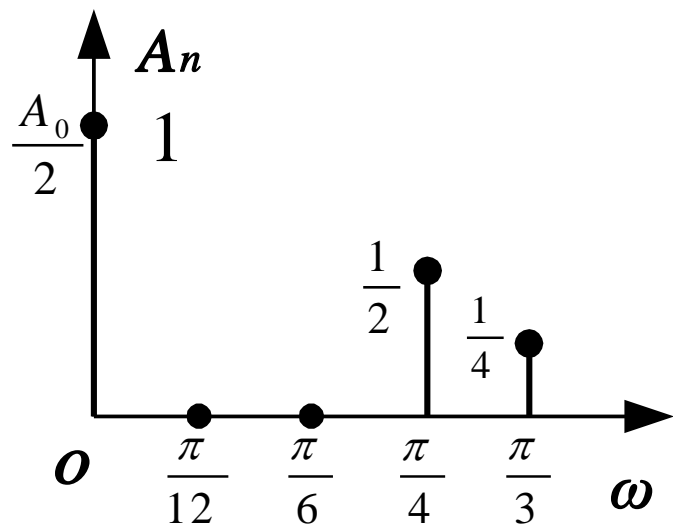
根据帕斯瓦尔等式，其功率为 $P = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{37}{32}$

4.3 周期信号的频谱

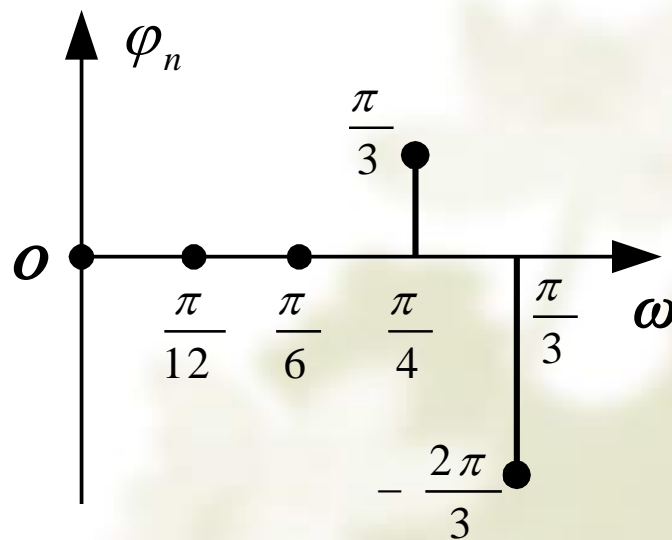
$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f(t)$ 的 $[\pi/4]/[\pi/12]=3$ 次谐波分量;

$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ 是 $f(t)$ 的 $[\pi/3]/[\pi/12]=4$ 次谐波分量;

画出 $f(t)$ 的单边振幅频谱图、相位频谱图如图



(a)



(b)

4.3.2 周期信号频谱的特点

$$f(t) = \begin{cases} E & \text{当 } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

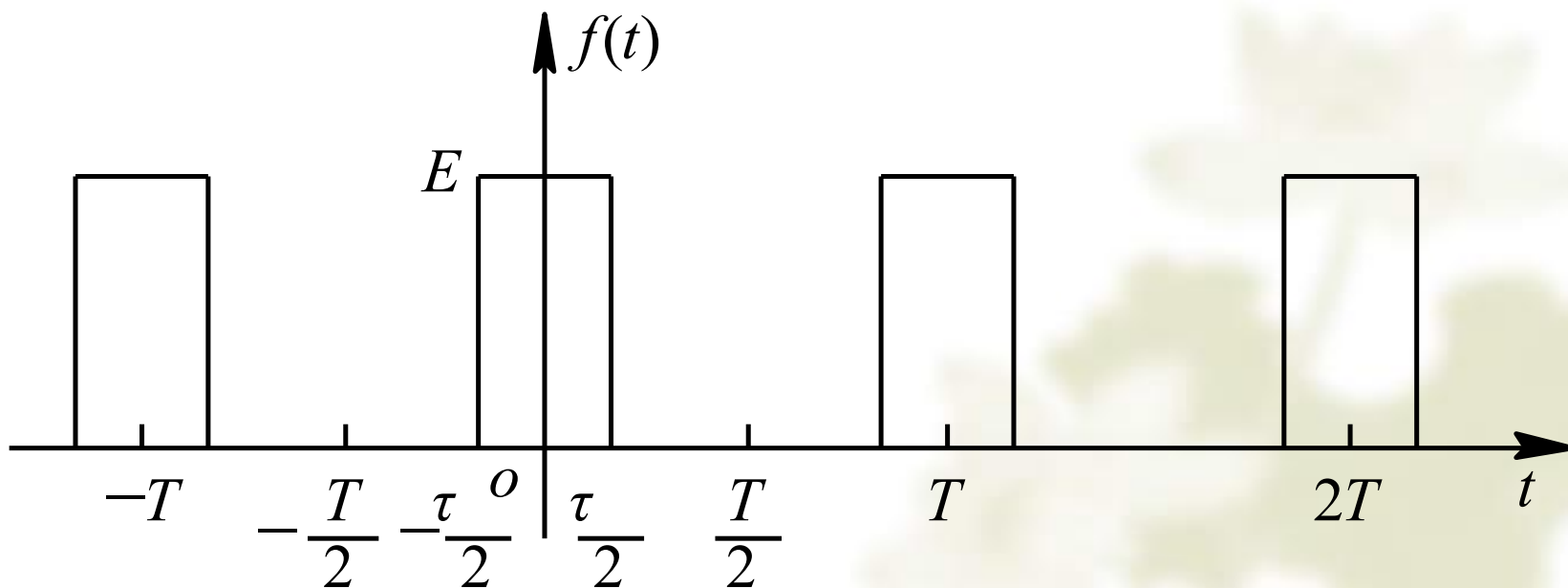


图 4.3-4 周期矩形脉冲信号

为得到该信号的频谱，先求其傅里叶级数的复振幅。

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\Omega t} dt \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{E}{T} \cdot \left. \frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2E}{T} \cdot \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega} \\ &= \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\Omega\tau/2}{n\Omega\tau/2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

取样函数定义为

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

这是一个偶函数，且 $x \rightarrow 0$ 时， $Sa(x)=1$ ；当 $x=k\pi$ 时， $Sa(k\pi)=0$ 。

据此，可将周期矩形脉冲信号的复振幅写成取样函数的形式，即

$$F_n = \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

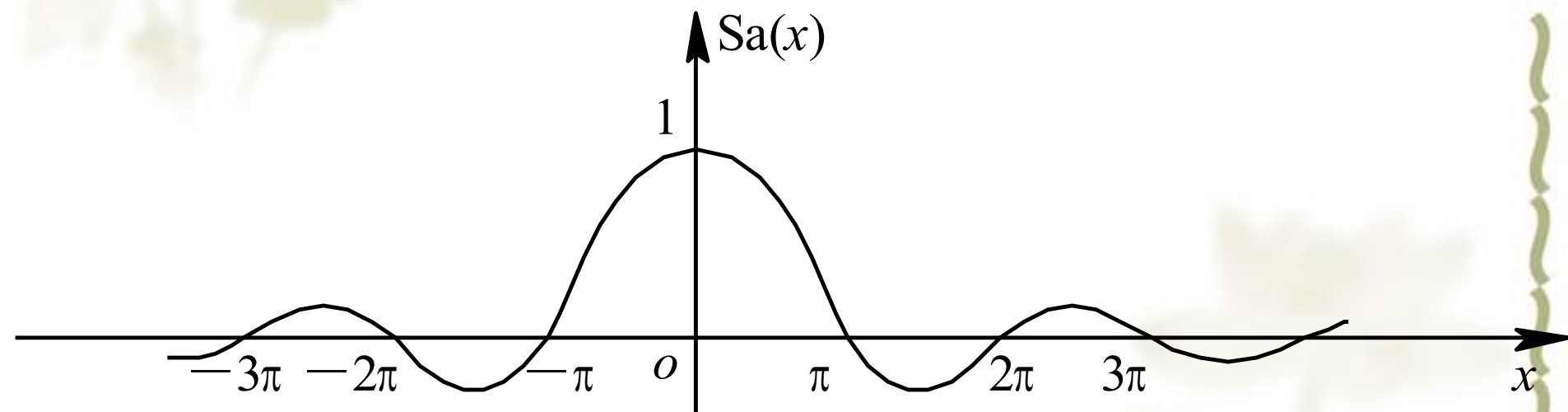


图 4.3-4 $Sa(x)$ 函数的波形

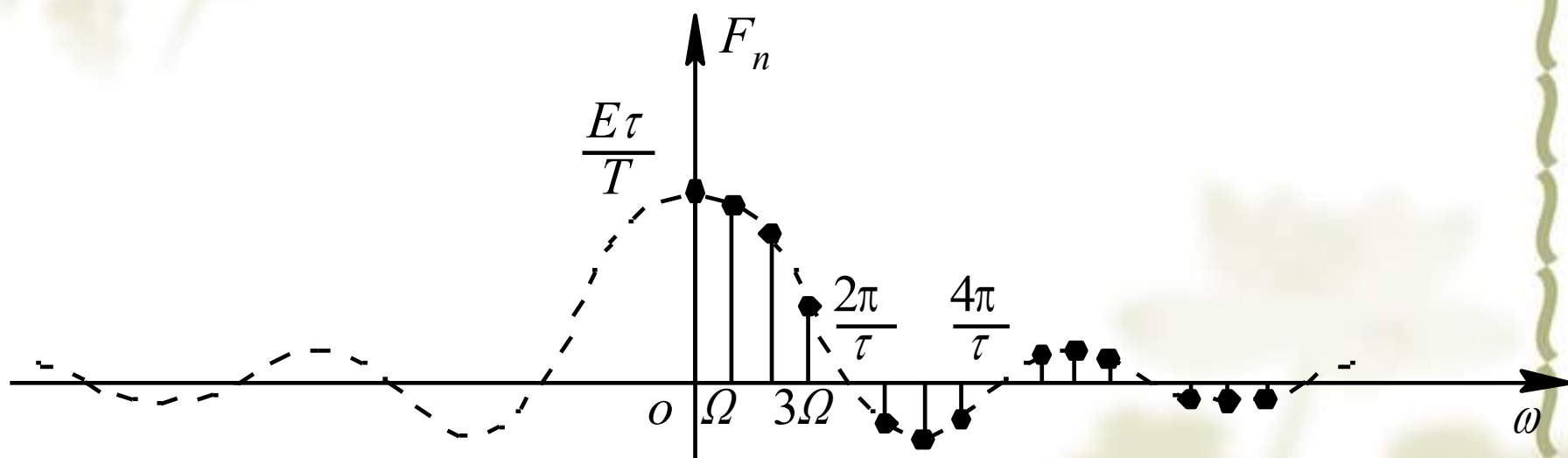


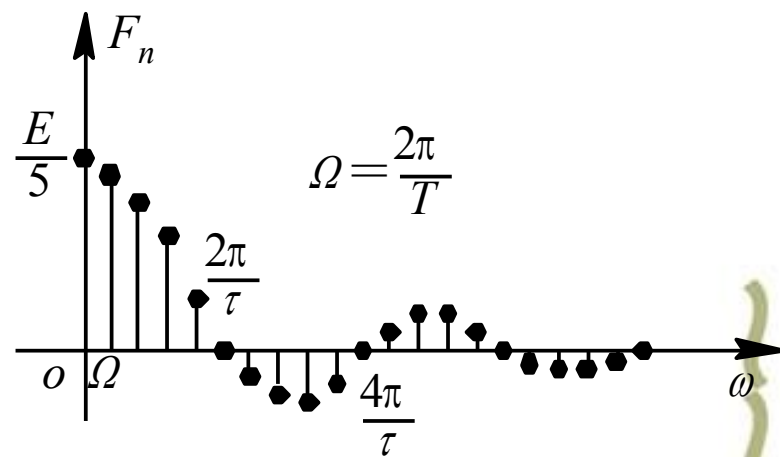
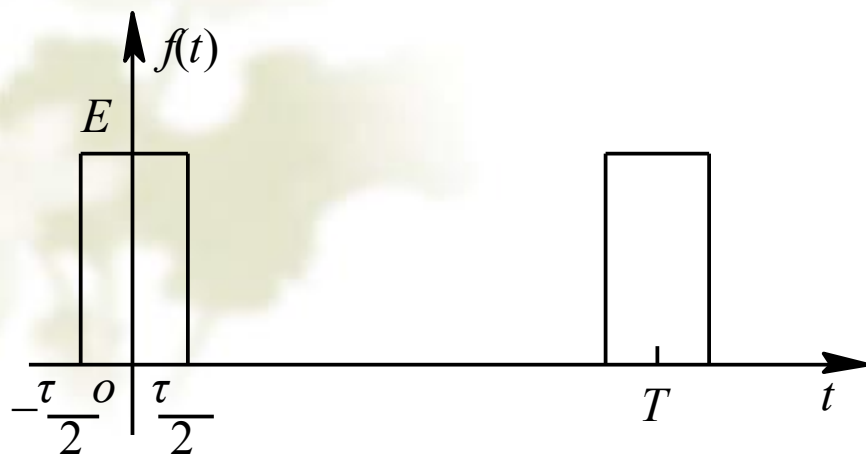
图 4.3-5 周期矩形脉冲信号的频谱

由图 4.3-5 可以看出，此周期信号频谱具有以下几个特点：

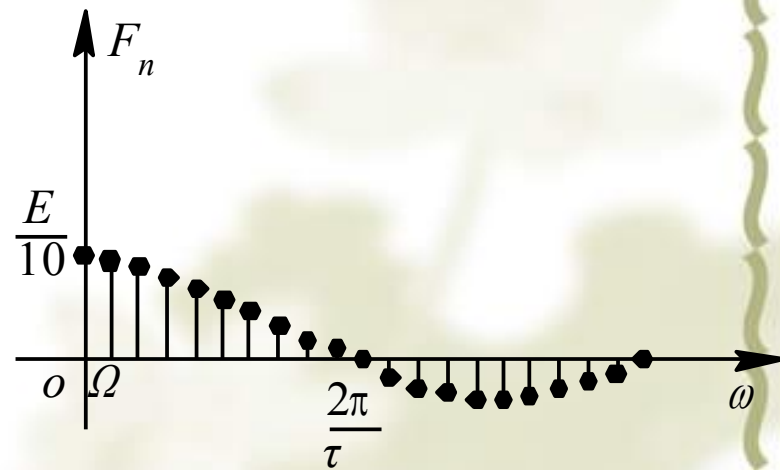
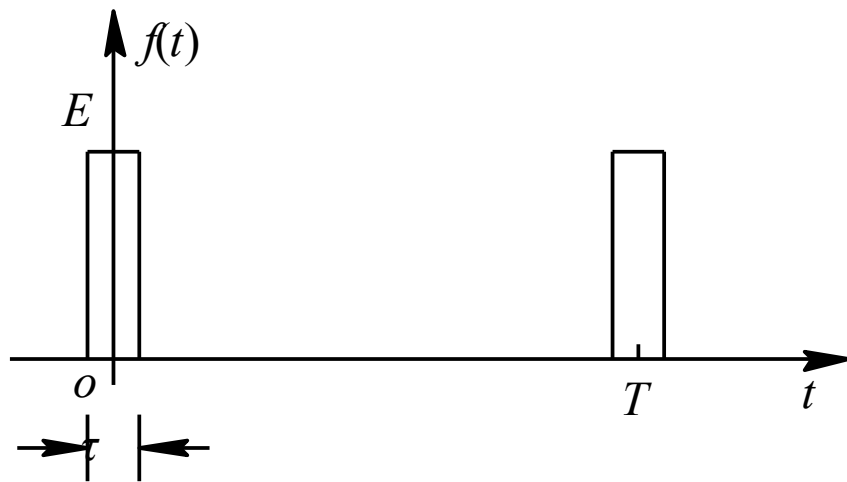
第一为**离散性**，此频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量，所以此频谱称为不连续谱或离散谱。

第二为**谐波性**，此频谱的每一条谱线只能出现在基波频率 Ω 的整数倍频率上，即含有 Ω 的各次谐波分量，而决不含非 Ω 的谐波分量。

第三为**收敛性**，此频谱的各次谐波分量的振幅虽然随 $n\Omega$ 的变化有起伏变化，但总的趋势是随着 $n\Omega$ 的增大而逐渐减小。当 $n\Omega \rightarrow \infty$ 时， $|F_n| \rightarrow 0$ 。



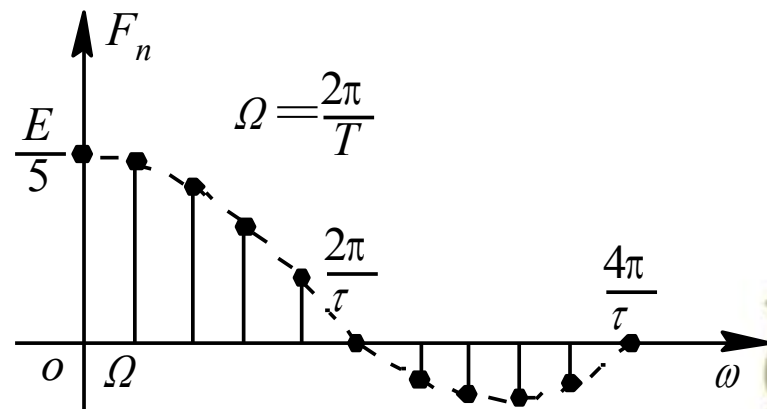
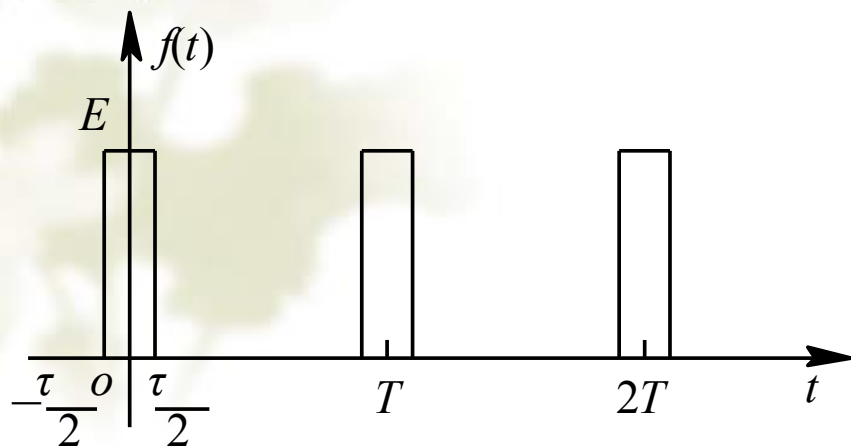
(a)



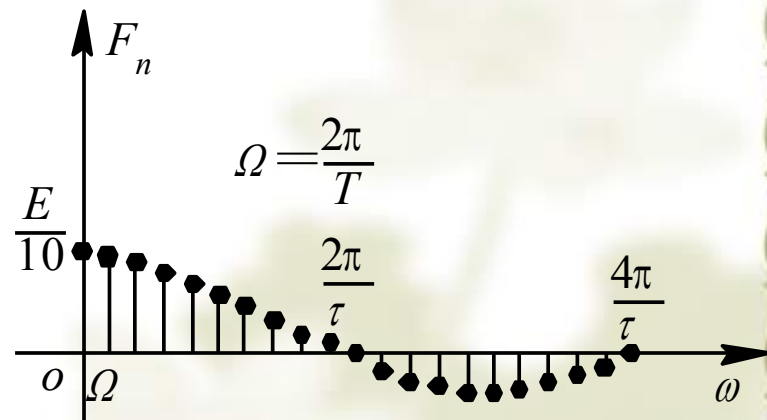
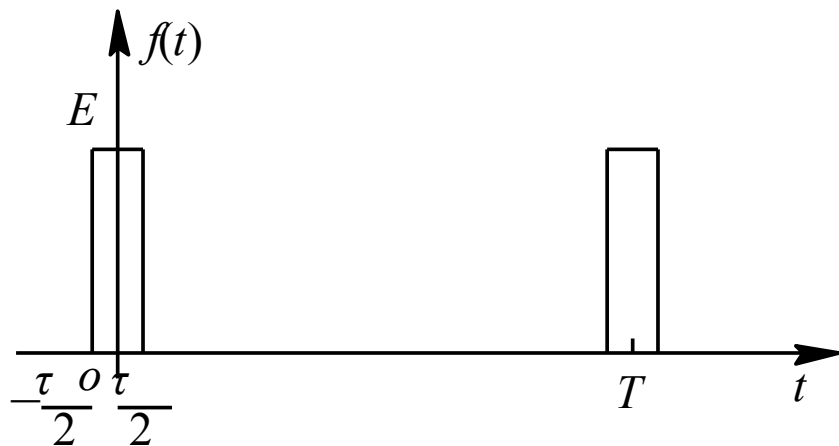
(b)

图 4.3-6 不同 τ 值时周期矩形信号的频谱

(a) $\tau=T/5$; (b) $\tau=T/10$



(a)

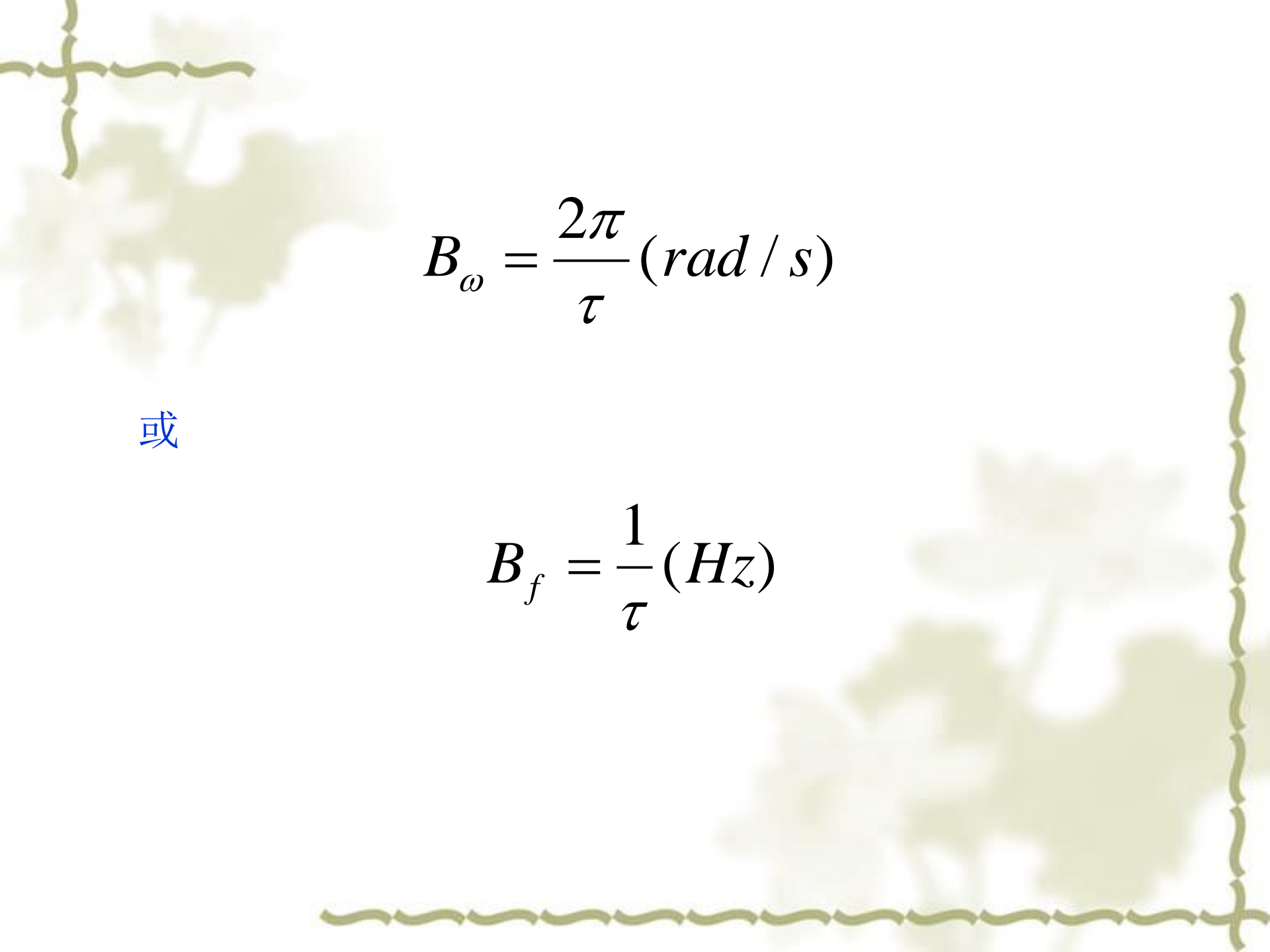


(b)

图 4.3-7 不同 T 值时周期矩形信号的频谱

(a) $T=5\tau$; (b) $T=10\tau$

周期矩形脉冲信号含有无穷多条谱线，也就是说，周期矩形脉冲信号可表示为无穷多个正弦分量之和。在信号的传输过程中，要求一个传输系统能将这无穷多个正弦分量不失真地传输显然是不可能的。实际工作中，应要求传输系统能将信号中的主要频率分量传输过去，以满足失真度方面的基本要求。周期矩形脉冲信号的主要能量集中在第一个零点之内，因而，常常将 $\omega=0\sim \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形脉冲信号的频带宽度。记为


$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} (rad / s)$$

或

$$B_f = \frac{1}{\tau} (Hz)$$

4.3 周期信号的频谱

谱线的结构与波形参数的关系：

(a) T 一定， τ 变小，此时 Ω （谱线间隔）不变。两零点之间的谱线数目： $\omega_1/\Omega = (2\pi/\tau)/(2\pi/T) = T/\tau$ 增多。

(b) τ 一定， T 增大，间隔 Ω 减小，频谱变密。幅度减小。

如果周期 T 无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

4.3 周期信号的频谱

三、周期信号的功率——Parseval等式

周期信号一般是功率信号，其平均功率为

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

直流和n次谐波分量在1Ω电阻上消耗的平均功率之和。

n≥0时， $|F_n| = A_n/2$ 。

4.4 傅里叶变换

4.4 非周期信号的频谱——傅里叶变换

一、傅里叶变换

非周期信号 $f(t)$ 可看成是周期 $T \rightarrow \infty$ 时的周期信号。

前已指出当周期 T 趋近于无穷大时，谱线间隔 Ω 趋近于无穷小，从而信号的频谱变为连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小，不过，这些无穷小量之间仍有差别。

为了描述非周期信号的频谱特性，引入频谱密度的概念。令

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_n}{1/T} = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T \quad (\text{单位频率上的频谱})$$

称 $F(j\omega)$ 为频谱密度函数。

4.4 傅里叶变换

根据傅里叶级数

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t} \frac{1}{T}$$

考虑到： $T \rightarrow \infty$ ， $\Omega \rightarrow$ 无穷小， 记为 $d\omega$ ；
 $n\Omega \rightarrow \omega$ （由离散量变为连续量）， 而

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{同时, } \Sigma \rightarrow \int$$

傅里叶变换式 “-”

于是， $F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶反变换式

$F(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换或频谱密度函数， 简称频谱。
 $f(t)$ 称为 $F(j\omega)$ 的傅里叶反变换或原函数。

4.4 傅里叶变换

也可简记为

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$$

或 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

$F(j\omega)$ 一般是复函数，写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

说明 (1)前面推导并未遵循严格的数学步骤。可证明，函数 $f(t)$ 的傅里叶变换存在的充分条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

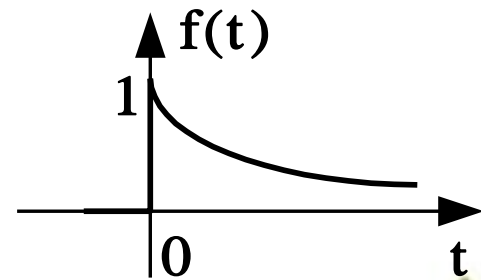
(2)用下列关系还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$$

4.4 傅里叶变换

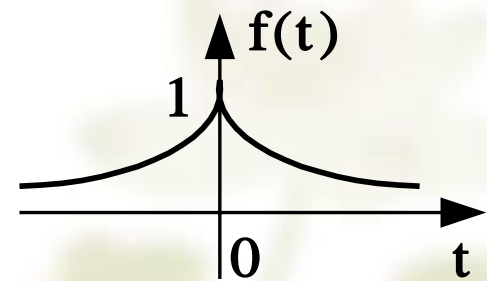
二、常用函数的傅里叶变换

1. 单边指数函数 $f(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$, $\alpha > 0$ 实数



$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

2. 双边指数函数 $f(t) = e^{-\alpha |t|}$, $\alpha > 0$

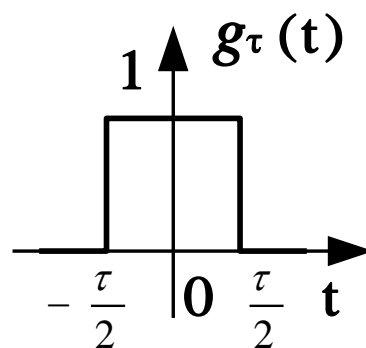


$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

4.4 傅里叶变换

3. 门函数(矩形脉冲)

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$= \frac{2 \sin(\frac{\omega \tau}{2})}{\omega} = \tau \text{Sa}(\frac{\omega \tau}{2})$$

4. 冲激函数 $\delta(t)$ 、 $\delta'(t)$

$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{d}{dt} e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = j\omega$$

4.4 傅里叶变换

5. 常数1

有一些函数不满足绝对可积这一充分条件，如1， $\varepsilon(t)$ 等，但傅里叶变换却存在。直接用定义式不好求解。

可构造一函数序列 $\{f_n(t)\}$ 逼近 $f(t)$ ，即

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

而 $f_n(t)$ 满足绝对可积条件，并且 $\{f_n(t)\}$ 的傅里叶变换所形成的序列 $\{F_n(j\omega)\}$ 是极限收敛的。则可定义 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 为

$$F(j\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(j\omega)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

4.4 傅里叶变换

构造 $f_{\alpha}(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0 \longleftrightarrow F_{\alpha}(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$$f(t) = 1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_{\alpha}(t)$$

所以 $F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_{\alpha}(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases}$

又 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \arctan \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$

因此, $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

另一种求法: $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ 代入反变换定义式, 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t) \quad \text{将 } \omega \rightarrow t, t \rightarrow -\omega \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \delta(-\omega)$$

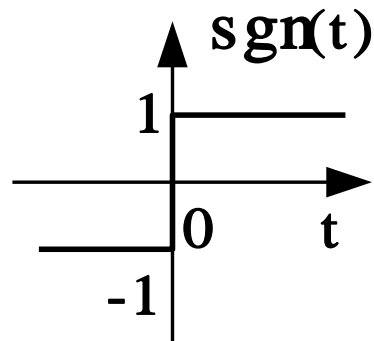
再根据傅里叶变换定义式, 得

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

4.4 傅里叶变换

6. 符号函数 $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

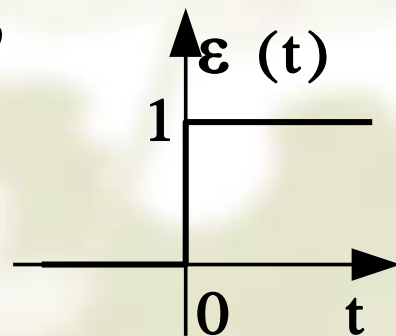


$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_{\alpha}(t) \quad f_{\alpha}(t) \longleftrightarrow F_{\alpha}(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} = -\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_{\alpha}(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{2}{j\omega}$$

7. 阶跃函数 $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

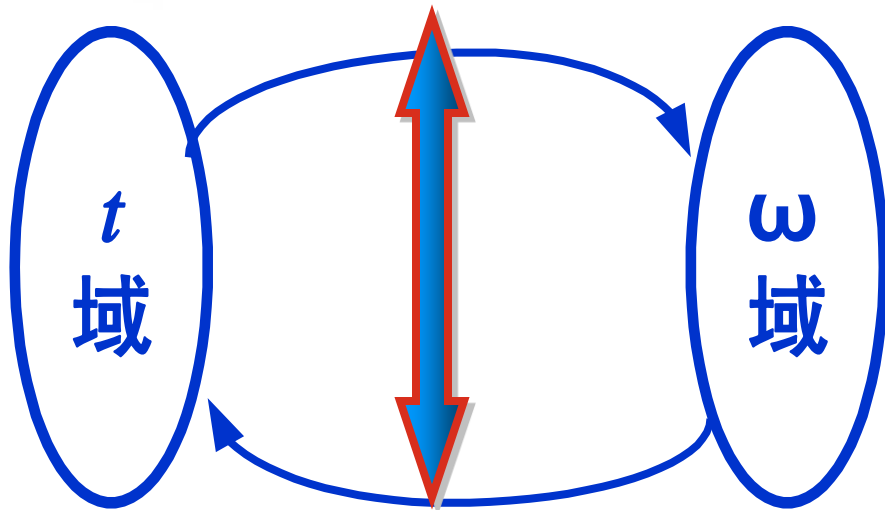


4.4 傅里叶变换

归纳记忆:

1. F 变换对

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

2. 常用函数 F 变换对:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

$$g_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$$

4.5 傅里叶变换的性质

4.5 傅里叶变换的性质

一、线性(Linear Property)

If $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

then

$$[a f_1(t) + b f_2(t)] \longleftrightarrow [a F_1(j\omega) + b F_2(j\omega)]$$

Proof: $\mathcal{F} [a f_1(t) + b f_2(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [a f_1(t) + b f_2(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= [a F_1(j\omega) + b F_2(j\omega)]$$

4.5 傅里叶变换的性质

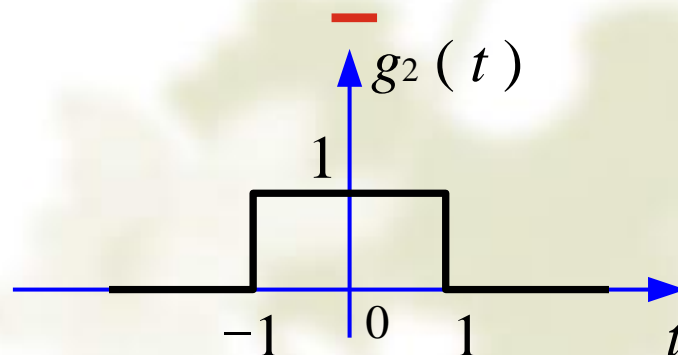
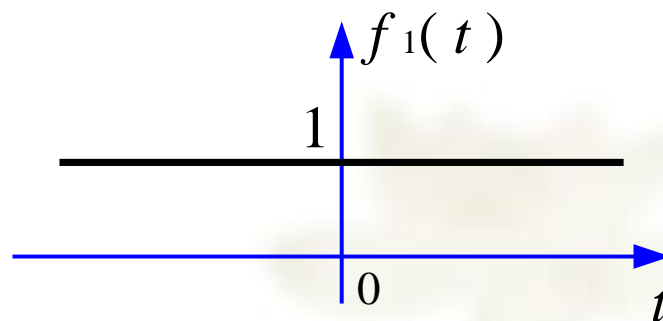
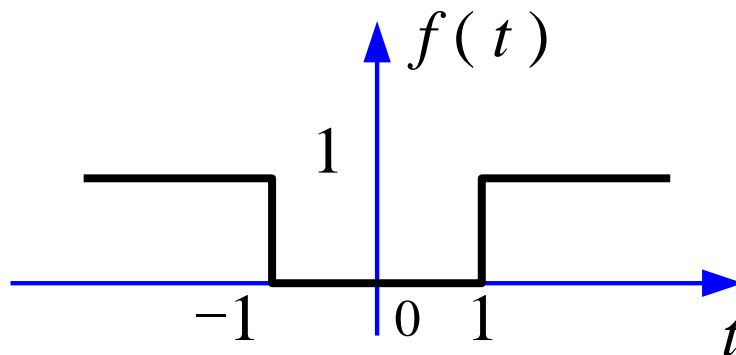
For example $F(j\omega) = ?$

Ans: $f(t) = f_1(t) - g_2(t)$

$$f_1(t) = 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$g_2(t) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

$$\therefore F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) - 2\text{Sa}(\omega)$$



4.5 傅里叶变换的性质

二、时移性质(Timeshifting Property)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

where “ t_0 ” is real constant.

Proof: $F[f(t - t_0)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau e^{-j\omega t_0}$$

$$= e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example $F(j\omega) = ?$

Ans: $f_1(t) = g_6(t - 5)$,

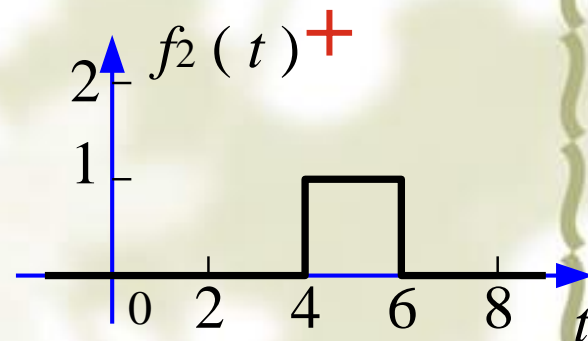
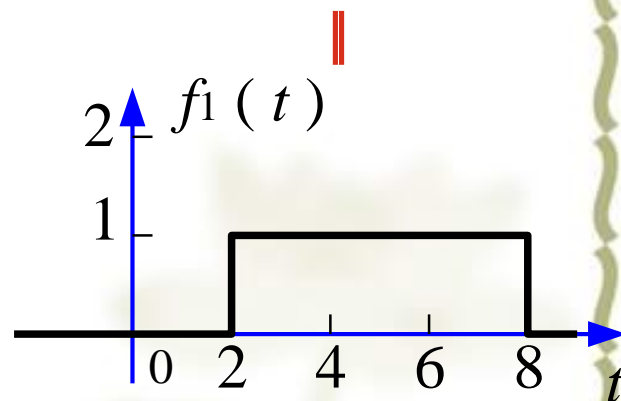
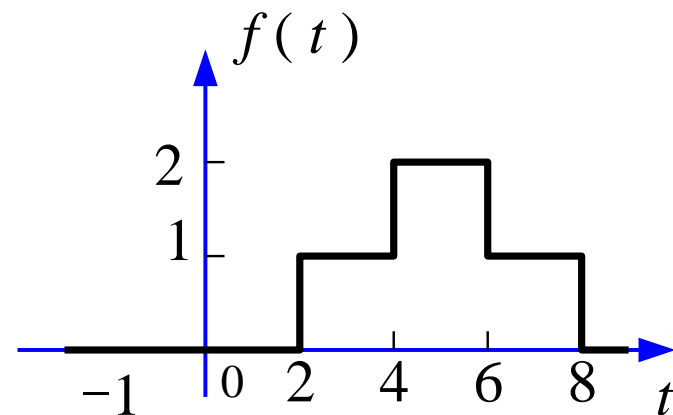
$f_2(t) = g_2(t - 5)$

$$g_6(t - 5) \longleftrightarrow 6\text{Sa}(3\omega)e^{-j5\omega}$$

$$g_2(t - 5) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)e^{-j5\omega}$$

$\therefore F(j\omega) =$

$$[6\text{Sa}(3\omega) + 2\text{Sa}(\omega)]e^{-j5\omega}$$



4.5 傅里叶变换的性质

三、对称性质(Symmetrical Property)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Proof:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

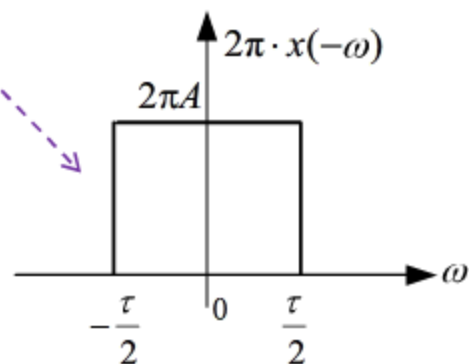
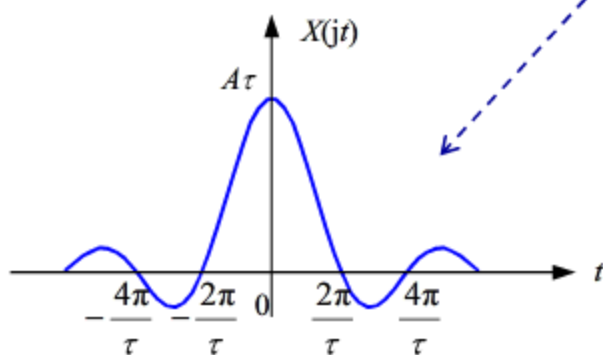
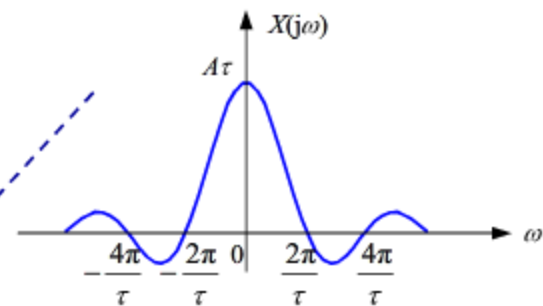
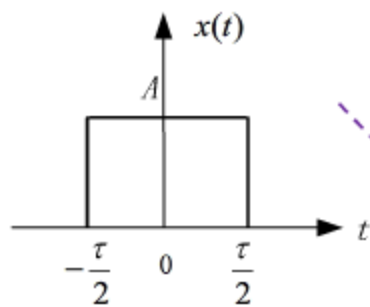
in (1) $t \rightarrow \omega, \omega \rightarrow t$ then

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{j\omega t} dt \quad (2)$$

in (2) $\omega \rightarrow -\omega$ then

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad \text{end}$$



4.5 傅里叶变换的性质

For example

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

Ans: $e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

if $\alpha=1$, $e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$

$\therefore \frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \quad \frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$

* if

$$f(t) = \frac{t^2 - 2t + 3}{t^2 - 2t + 2}$$

$$F(j\omega) = ?$$

4.5 傅里叶变换的性质

四、频移性质(Frequency Shifting Property)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$F[j(\omega - \omega_0)] \longleftrightarrow e^{j\omega_0 t} f(t)$$

where “ ω_0 ” is real constant.

Proof:
$$\begin{aligned} F[e^{j\omega_0 t} f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F[j(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

For example 1

$$f(t) = e^{j3t} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

$$\text{Ans: } 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j3t} \times 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - 3)$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 2

$$f(t) = \cos\omega_0 t \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

Ans: $f(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$

$$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

For example 3

Given that $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

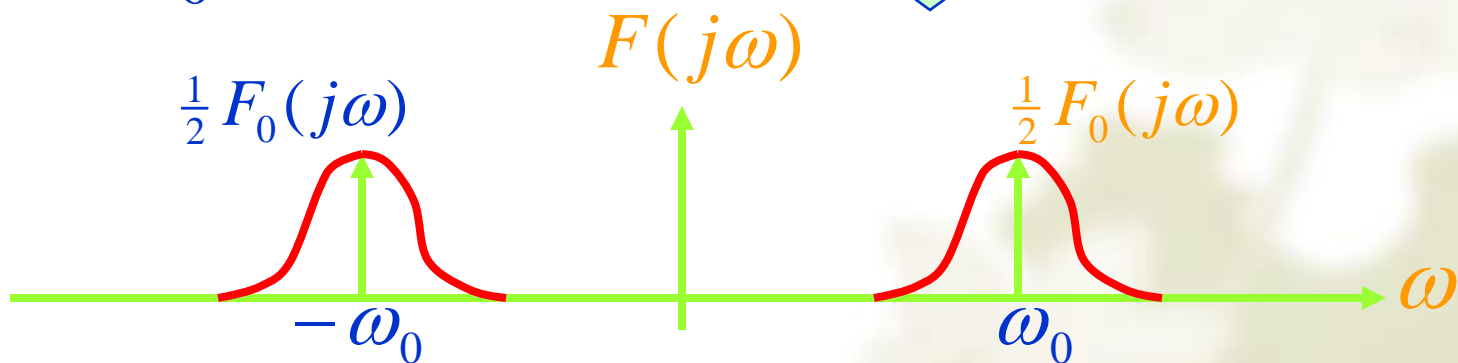
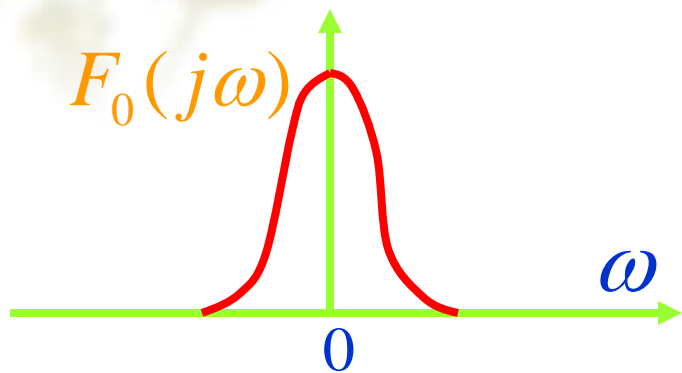
The modulated signal $f(t) \cos\omega_0 t \longleftrightarrow ?$

$$FT[f(t) \cos \omega_0 t]$$

$$FT[f(t)] = F_0(\omega)$$

$$\frac{1}{2} f(t) [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

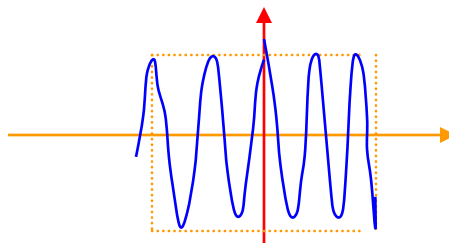
频移特性



$$\frac{1}{2} F_0[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} F_0[j(\omega + \omega_0)]$$

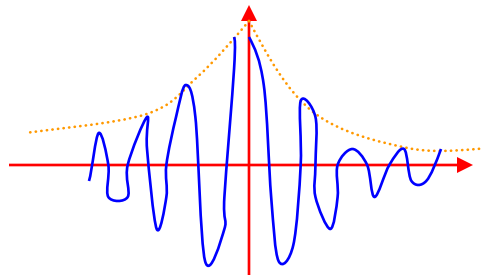
调幅信号都可看成乘积信号 $f(t) \cos \omega_0 t$

◆ 矩形调幅



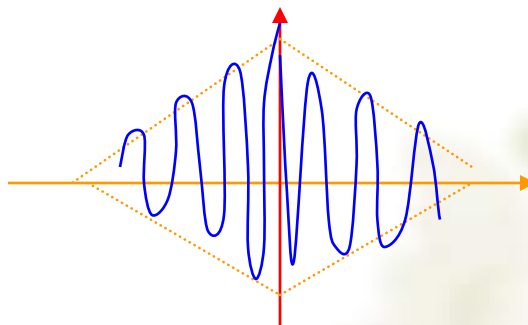
$$G(t) \cos \omega_0 t$$

◆ 指数衰减振荡



$$e^{-at} \cos \omega_0 t$$

◆ 三角调幅



$$\left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right) \cos \omega_0 t$$

求它们的频谱= ? (略)

4.5 傅里叶变换的性质

五、尺度变换性质(Scaling Transform Property)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

where “ a ” is a nonzero real constant.

Proof: $F[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$

For $a > 0$, $F[f(at)] \stackrel{\tau=at}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$

for $a < 0$,
 $F[f(at)] \stackrel{\tau=at}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau$

$$= -\frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

That is, $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$

Also, letting $a = -1$,

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 1

Given that $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$, find $f(at - b) \longleftrightarrow ?$

Ans: $f(t - b) \longleftrightarrow e^{-j\omega b} F(j\omega)$

$$f(at - b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

or

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(at - b) = f\left[a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right] \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 2

$$f(t) = \frac{1}{jt - 1} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

$$\text{Ans: } e^{-t} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + 1}$$

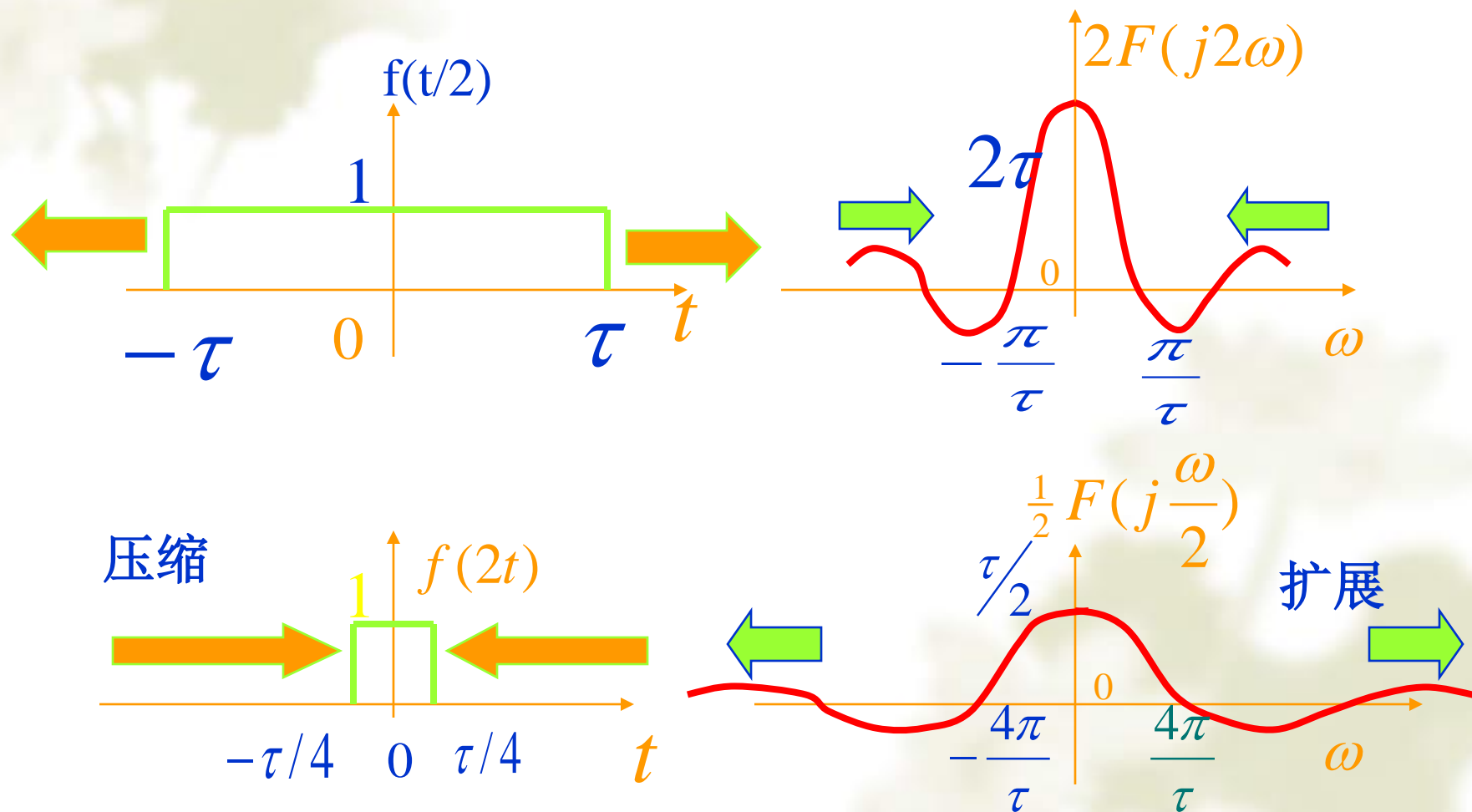
$$\text{Using symmetry, } \frac{1}{jt + 1} \longleftrightarrow 2\pi e^{\omega} \varepsilon(-\omega)$$

using scaling property with $a = -1$,

$$\text{so that, } \frac{1}{-jt + 1} \longleftrightarrow 2\pi e^{-\omega} \varepsilon(\omega)$$

$$\frac{1}{jt - 1} \longleftrightarrow -2\pi e^{-\omega} \varepsilon(\omega)$$

时域中的压缩（扩展）等于频域中的扩展（压缩）



4.5 傅里叶变换的性质

六、卷积性质(Convolution Property)

Convolution in time domain:

$$\text{If } f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

$$\text{Then } f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

Convolution in frequency domain:

$$\text{If } f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

$$\text{Then } f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

Proof:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$\mathbf{F} [f_1(t) * f_2(t)] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Using timeshifting

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(j\omega) e^{-j\omega \tau}$$

$$\text{So that, } \mathbf{F} [f_1(t) * f_2(t)] =$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau &= F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= F_1(j\omega) F_2(j\omega) \end{aligned}$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

Ans:

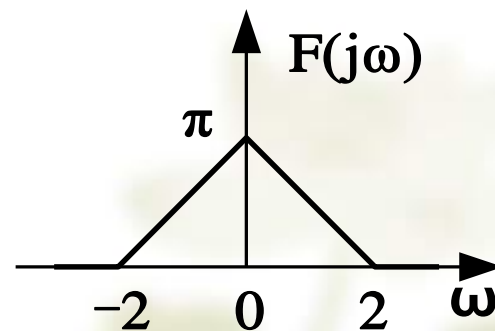
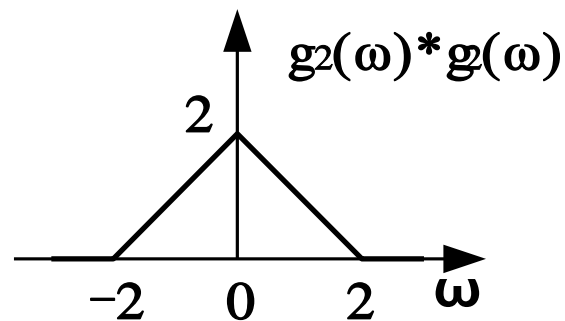
$$g_2(t) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

Using symmetry,

$$2\text{Sa}(t) \longleftrightarrow 2\pi g_2(-\omega)$$

$$\text{Sa}(t) \longleftrightarrow \pi g_2(\omega)$$

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [\pi g_2(\omega)] * [\pi g_2(\omega)] = \frac{\pi}{2} g_2(\omega) * g_2(\omega)$$



4.5 傅里叶变换的性质

七、时域的微分和积分

(Differentiation and Integration in time domain)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad F(0) = F(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

Proof:

$$f^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$f^{(-1)}(t) = \varepsilon(t) * f(t) \longleftrightarrow \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] F(j\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 1

$$f(t) = 1/t^2 \longleftrightarrow ?$$

Ans: $\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

$$\frac{2}{jt} \longleftrightarrow 2\pi \text{sgn}(-\omega)$$

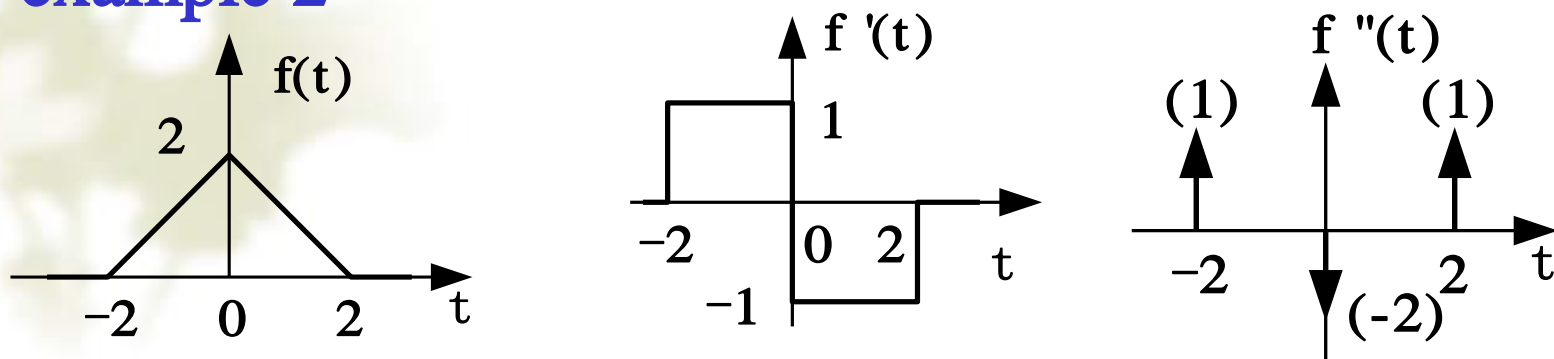
$$\frac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi \text{sgn}(\omega)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) \longleftrightarrow -(j\omega) j\pi \text{sgn}(\omega) = \pi \omega \text{sgn}(\omega)$$

$$\frac{1}{t^2} \longleftrightarrow -\pi \omega \text{sgn}(\omega) = -\pi |\omega|$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 2



Determine $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

Ans: $f''(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$

$$F_2(j\omega) = F[f''(t)] = e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega} = 2\cos(2\omega) - 2$$

$$F(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{2 - 2\cos(2\omega)}{\omega^2}$$

注意：对于某些函数，虽然有

$$f(t) = g'(t)$$

$$\text{但是 } g(t) \neq f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

$$g(t) - g(-\infty) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx + g(-\infty)$$

$$FT\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) + 2\pi g(-\infty)\delta(\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

八、频域的微分和积分

(Differentiation and Integration in frequency domain)

If $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ then

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$$

where

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx) dx \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$$

For example 1 Determine $f(t) = t\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$

Ans: $\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ $-jt \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$

$$t\varepsilon(t) \longleftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

4.5 傅里叶变换的性质

For example 2 Determine $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega$

Ans: $g_{2a}(t) \longleftrightarrow \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$

$$g_{2a}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$$g_{2a}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

4.5 傅里叶变换的性质

九、帕斯瓦尔关系

(Parseval's Relation for Aperiodic Signals)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

Proof

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) F(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

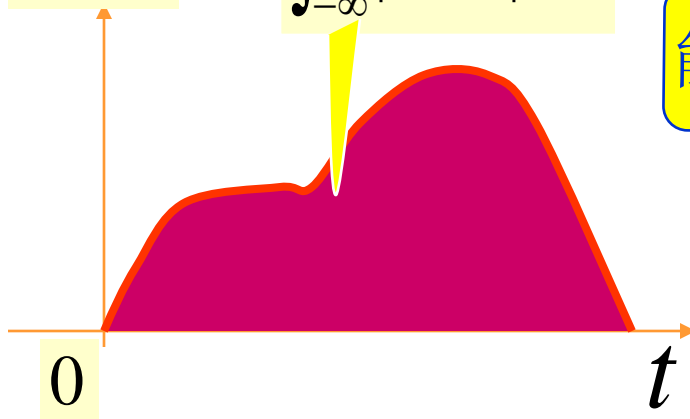
$|F(j\omega)|^2$ is referred to as the **energy-density spectrum** of $f(t)$.
单位频率上的频谱 (能量密度谱) J s

帕斯瓦尔定理

能量有限信号

$$|f(t)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

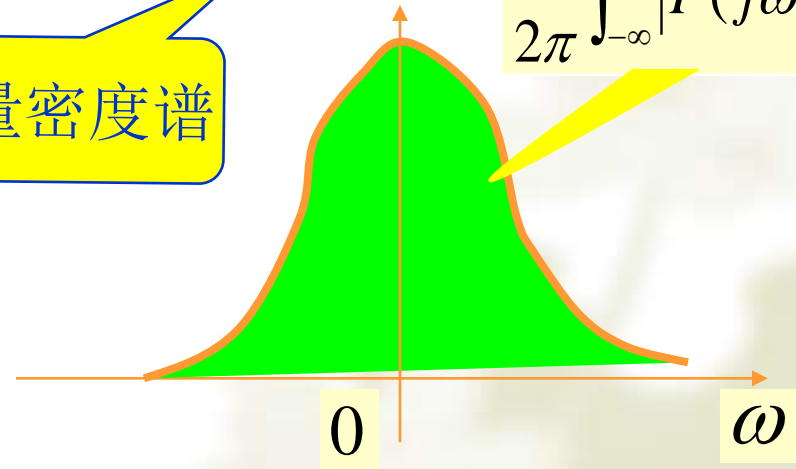


两块阴影的面积 相等

$$|F(j\omega)|^2$$

能量密度谱

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$



4.5 傅里叶变换的性质

十、奇偶性(Parity)

If $f(t)$ is real, then

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) \end{aligned}$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

So that (1) $R(\omega) = R(-\omega)$, $X(\omega) = -X(-\omega)$

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

(2) If $f(t) = f(-t)$, then $X(\omega) = 0$, $F(j\omega) = R(\omega)$

If $f(t) = -f(-t)$, then $R(\omega) = 0$, $F(j\omega) = jX(\omega)$

4.6 周期信号傅里叶变换

- ◆ 周期信号不满足绝对可积条件
- ◆ 引入冲激信号后，冲激函数的积分是有意义的
- ◆ 在以上意义下，周期信号的傅立叶变换是存在的
- ◆ 周期信号的频谱是离散的，其频谱密度，即傅立叶变换是一系列冲激函数

4.6 周期信号的傅里叶变换

一、正、余弦的傅里叶变换

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频移特性得

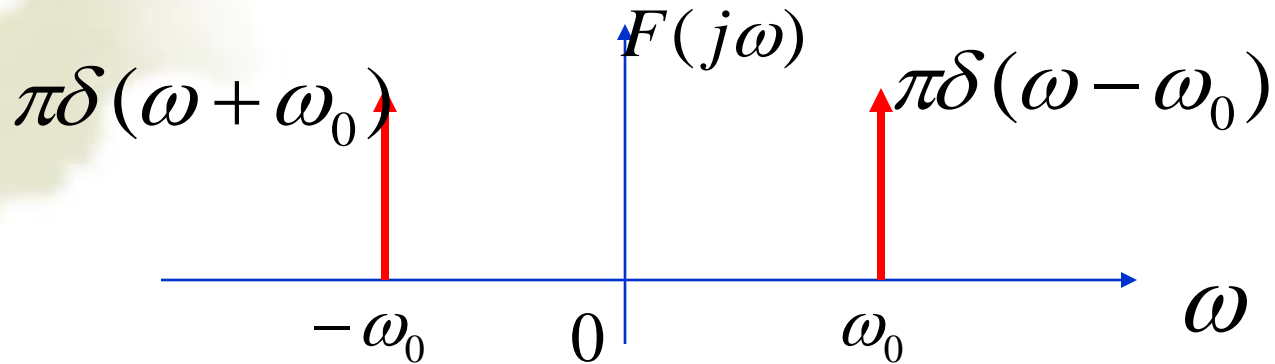
$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

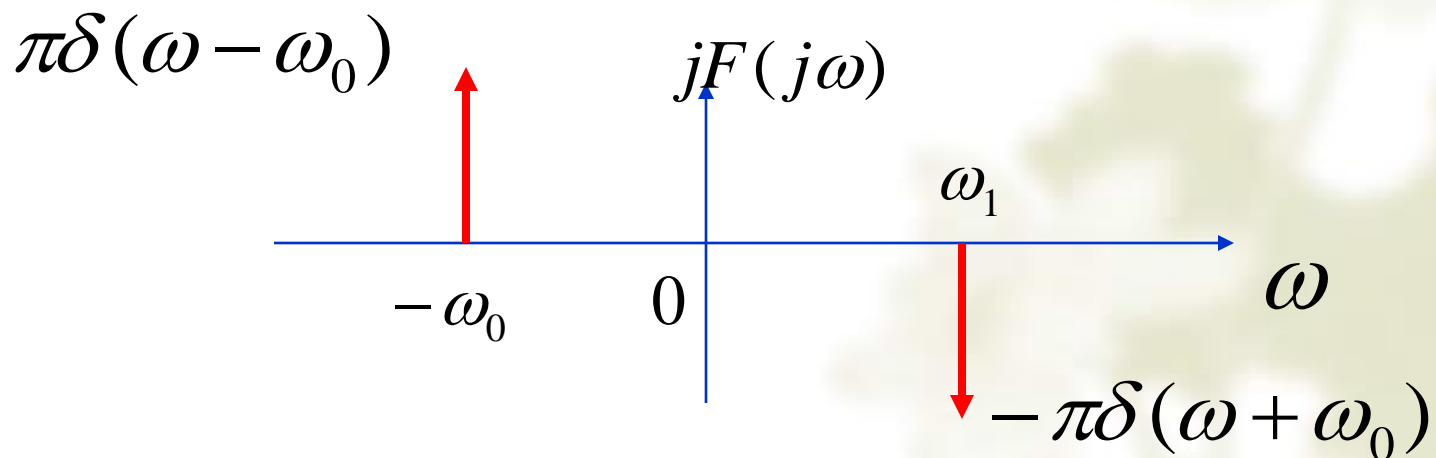
$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) &\longleftrightarrow \\ &\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/(2j) &\longleftrightarrow \\ j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

$$FT[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$



$$FT[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



4.6 周期信号傅里叶变换

二、一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \longleftrightarrow F_T(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) \quad (1)$$

例1：周期为T的单位冲激周期函数 $\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$

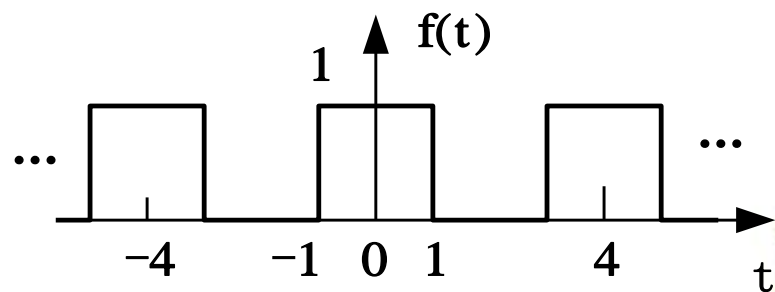
解： $F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T}$

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \delta_{\Omega}(t)$$

4.6 周期信号傅里叶变换

例2：周期信号如图，求其傅里叶变换。

解：周期信号 $f(t)$ 也可看作一时限非周期信号 $f_0(t)$ 的周期拓展。即 $f(t) = \delta_T(t) * f_0(t)$



$$F(j\omega) = \Omega \delta_{\Omega}(\omega) F_0(j\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega) \quad (2)$$

本题 $f_0(t) = g_2(t) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega) \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$$F(j\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\text{Sa}(n\Omega) \delta(\omega - n\Omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$$

(2)式与上页(1)式比较，得 $F_n = \frac{\Omega}{2\pi} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\frac{2n\pi}{T})$

这也给出求周期信号傅里叶级数的另一种方法。

4.7 LTI系统的频域分析

◆ LTI系统对输入信号所起的作用包括两个方面:

1. 改变输入信号各频率分量的幅度;
2. 改变输入信号各频率分量的相对相位。

4.7 LTI系统的频域分析

傅里叶分析是将任意信号分解为无穷多项不同频率的虚指数函数之和。

对周期信号：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

对非周期信号：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

其基本信号为 $e^{j\omega t}$

一、基本信号 $e^{j\omega t}$ 作用于LTI系统的响应

说明：本章的响应指零状态响应，常写为 $y(t)$ 。

4.7 LTI系统的频域分析

设LTI系统的冲激响应为 $h(t)$ ，当激励是角频率 ω 的基本信号 $e^{j\omega t}$ 时，其响应

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t}$$

而上式积分 $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 正好是 $h(t)$ 的傅里叶变换，记为 $H(j\omega)$ ，常称为系统的频率响应函数。

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$H(j\omega)$ 反映了响应 $y(t)$ 的幅度和相位。

4.7 LTI系统的频域分析

二、一般信号 $f(t)$ 作用于LTI系统的响应

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

齐次性

$$\frac{1}{2\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

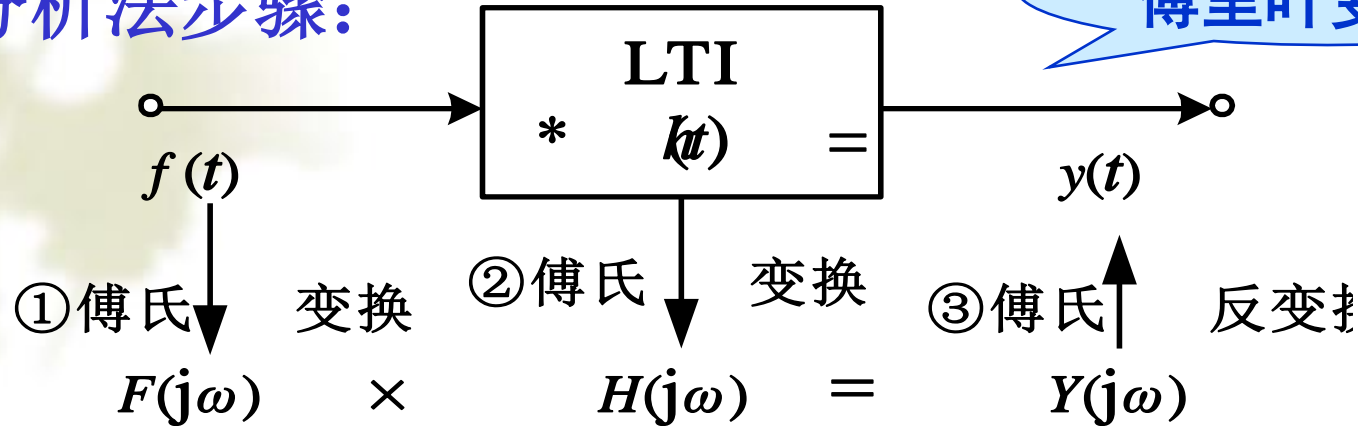
可加性

$$f(t) \longrightarrow y(t) = F^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$$

4.7 LTI系统的频域分析

频域分析法步骤:



频率响应 $H(j\omega)$ 可定义为系统零状态响应的傅里叶变换 $Y(j\omega)$ 与激励 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 之比，即

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = \frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|} e^{j[\varphi_y(\omega) - \varphi_f(\omega)]}$$

$|H(j\omega)|$ 称为幅频特性（或幅频响应）； $\theta(\omega)$ 称为相频特性（或相频响应）。 $|H(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数， $\theta(\omega)$ 是 ω 的奇函数。

4.7 LTI系统的频域分析

对周期信号还可利用傅里叶级数法。

周期信号 $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$ $y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\Omega) e^{jn\Omega t}$$

若 $f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$

则可推导出

$$y(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |H(jn\Omega)| \cos[n\Omega t + \varphi_n + \theta(n\Omega)]$$

4.7 LTI系统的频域分析

例：某LTI系统的 $|H(j\omega)|$ 和 $\theta(\omega)$ 如图，
若 $f(t) = 2 + 4\cos(5t) + 4\cos(10t)$ ，求系统的响应。

解法一：用傅里叶变换

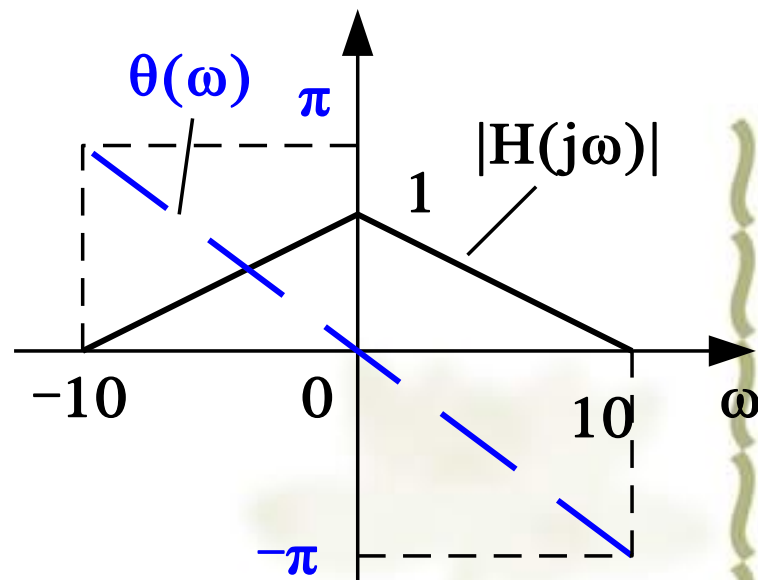
$$F(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega-5) + \delta(\omega+5)] + 4\pi[\delta(\omega-10) + \delta(\omega+10)]$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) = \\ &4\pi\delta(\omega) H(0) + 4\pi[\delta(\omega-5) H(j5) + \delta(\omega+5) H(-j5)] \\ &+ 4\pi[\delta(\omega-10) H(j10) + \delta(\omega+10) H(-j10)] \end{aligned}$$

$$= 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[-j0.5\delta(\omega-5) + j0.5\delta(\omega+5)]$$

$$y(t) = F^{-1}[Y(j\omega)] = 2 + 2\sin(5t)$$



4.7 LTI系统的频域分析

解法二：用三角傅里叶级数

$f(t)$ 的基波角频率 $\Omega=5\text{rad/s}$

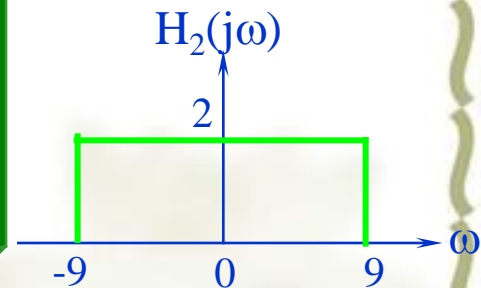
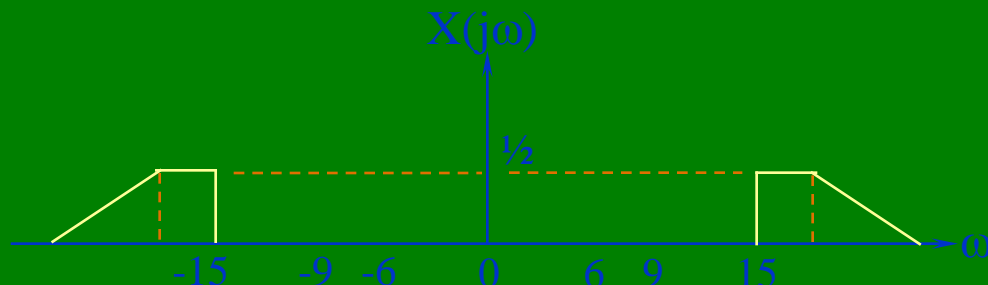
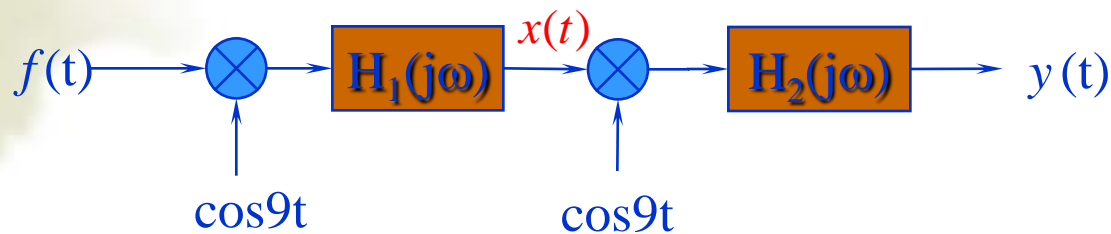
$$f(t) = 2 + 4\cos(\Omega t) + 4\cos(2\Omega t)$$

$$H(0) = 1, \quad H(j\Omega) = 0.5e^{-j0.5\pi}, \quad H(j2\Omega) = 0$$

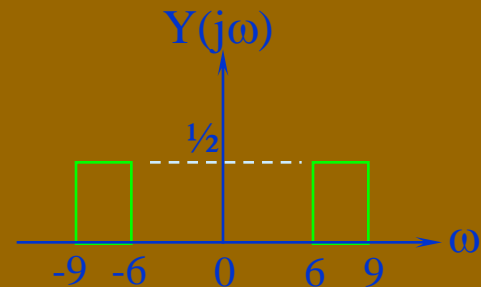
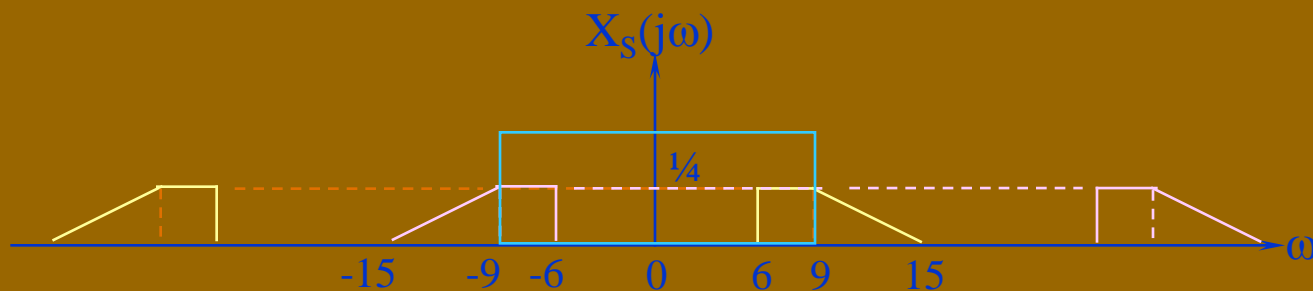
$$\begin{aligned} y(t) &= 2 + 4 \times 0.5\cos(\Omega t - 0.5\pi) \\ &= 2 + 2\sin(5t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |H(jn\Omega)| \cos[n\Omega t + \varphi_n + \theta(n\Omega)]$$

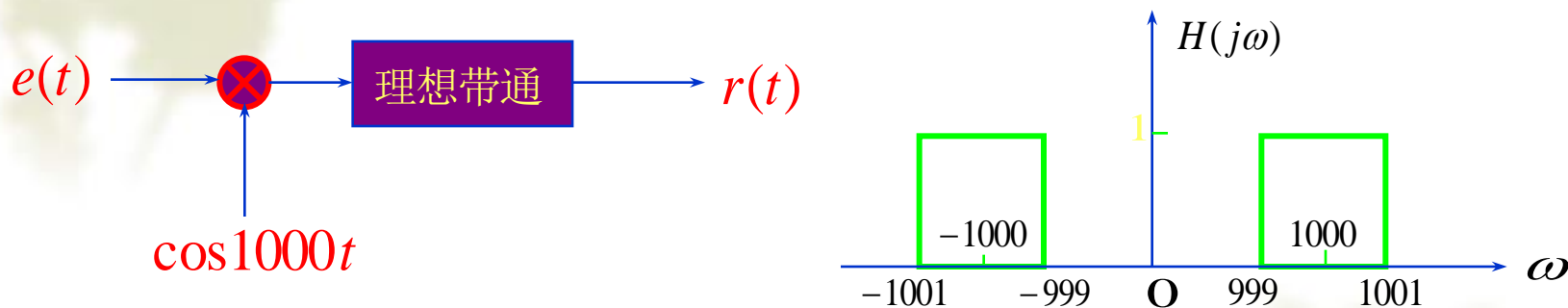
例：带限信号 $f(t)$ 通过如图所示系统，已知 $f(t)$ 、 $H_1(j\omega)$ 、 $H_2(j\omega)$ 频谱如图所示，画出 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的频谱图。



解：频谱图如下



例：求 $e(t) = \frac{1}{\pi} Sa(2t)$ 的信号通过图(a)的系统后的输出。系统中的理想带通滤波器的传输特性如图(b)所示，其相位特性 $\varphi(\omega) = 0$ 。



解：已知：

$$\therefore \frac{1}{\pi} Sa(2t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} g_4(\omega) = E(j\omega)$$

设： $f_1(t) = e(t) \cos 1000t$

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{2} \{ E[j(\omega + 1000)] + E[j(\omega - 1000)] \} = \frac{1}{4} [g_4(\omega + 1000) + g_4(\omega - 1000)]$$

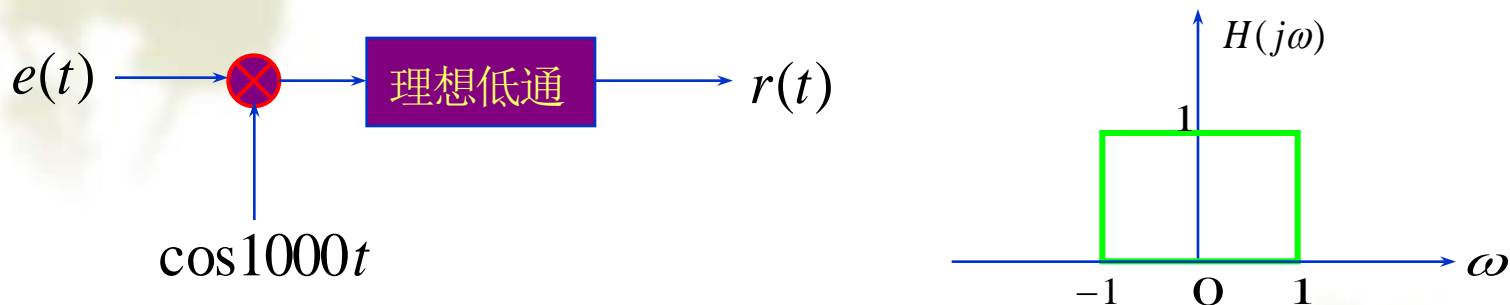
输出的频谱： $R(j\omega) = \frac{1}{4} [g_2(\omega + 1000) + g_2(\omega - 1000)]$

由： $f(t) \cos \beta t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \beta) + F(\omega - \beta)]$ $\frac{1}{\pi} Sa(t) \Leftrightarrow g_2(\omega)$

故系统的响应为

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} Sa(t) \cos 1000t$$

求 $e(t) = \frac{1}{\pi} Sa(t) \cos 1000t$ 的信号通过图(a)的系统后的输出。系统中的理想带通滤波器的传输特性如图(b)所示，其相位特性 $\varphi(\omega) = 0$



解：设： $f(t) = \frac{1}{\pi} Sa(t)$ $f_1(t) = f(t) \cos^2 1000t = \frac{1}{2}[f(t) + f(t) \cos 2000t]$

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{2} F(j\omega) + \frac{1}{4} \{F[j(\omega + 2000)] + F[j(\omega - 2000)]\}$$

已知： $\frac{1}{\pi} Sa(t) \Leftrightarrow g_2(\omega) = F(j\omega)$

输出的频谱： $R(j\omega) = H(j\omega)F_1(j\omega) = \frac{1}{2} F(j\omega) = \frac{1}{2} g_2(\omega)$

故系统的响应为 $r(t) = \frac{1}{2\pi} Sa(t)$

4.7 LTI系统的频域分析

三、频率响应 $H(j\omega)$ 的求法

1. $H(j\omega) = F[h(t)]$

2. $H(j\omega) = Y(j\omega)/F(j\omega)$

(1) 由微分方程求，对微分方程两边取傅里叶变换。

(2) 由电路直接求出。

例1：某系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

求 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 时的响应 $y(t)$ 。

解：微分方程两边取傅里叶变换

$$j\omega Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = F(j\omega) \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$$

4.7 LTI系统的频域分析

$$f(t) = e^{-t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

$$= \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

4.7 LTI系统的频域分析

四、无失真传输与滤波

系统对于信号的作用大体可分为两类：一类是信号的传输，一类是滤波。传输要求信号尽量不失真，而滤波则滤去或削弱不需要有的成分，必然伴随着失真。

1、无失真传输

(1) 定义：信号无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比，只有幅度的大小和出现时间的先后不同，而没有波形上的变化。即

输入信号为 $f(t)$ ，经过无失真传输后，输出信号应为

$$y(t) = K f(t-t_d)$$

其频谱关系为 $Y(j\omega) = K e^{-j\omega t_d} F(j\omega)$

4.7 LTI系统的频域分析

(2)无失真传输条件:

系统要实现无失真传输, 对系统 $h(t)$, $H(j\omega)$ 的要求是:

(a)对 $h(t)$ 的要求:

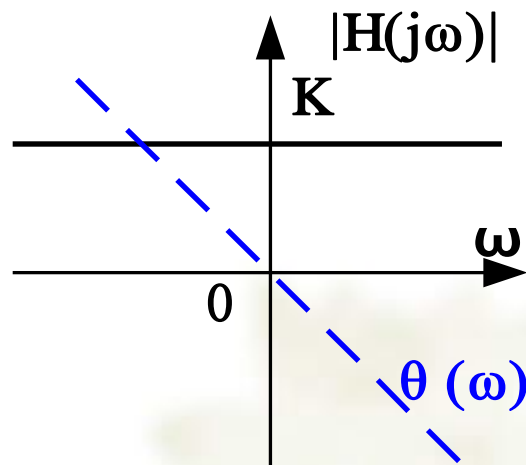
$$h(t)=K\delta(t-t_d)$$

(b)对 $H(j\omega)$ 的要求:

$$H(j\omega)=Y(j\omega)/F(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$$

即

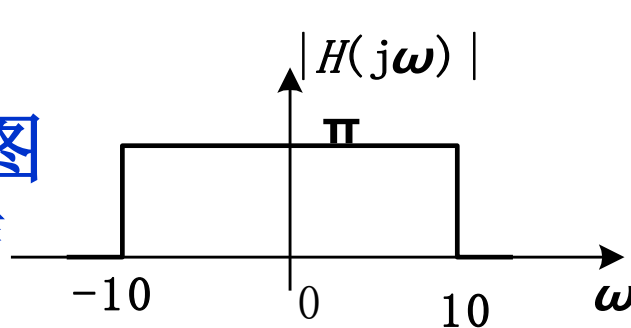
$$|H(j\omega)|=K, \theta(\omega)=-\omega t_d$$



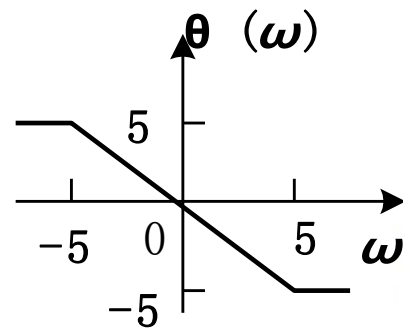
上述是信号无失真传输的理想条件。当传输有限带宽的信号是, 只要在信号占有频带范围内, 系统的幅频、相频特性满足以上条件即可。

4.7 LTI系统的频域分析

例：系统的幅频特性
 $|H(j\omega)|$ 和相频特性如图
(a)(b)所示，则下列信
号通过该系统时，不
产生失真的是



(a)



(b)

(A) $f(t) = \cos(t) + \cos(8t)$

(B) $f(t) = \sin(2t) + \sin(4t)$

(C) $f(t) = \sin(2t) \sin(4t)$

(D) $f(t) = \cos^2(4t)$

4.7 LTI系统的频域分析

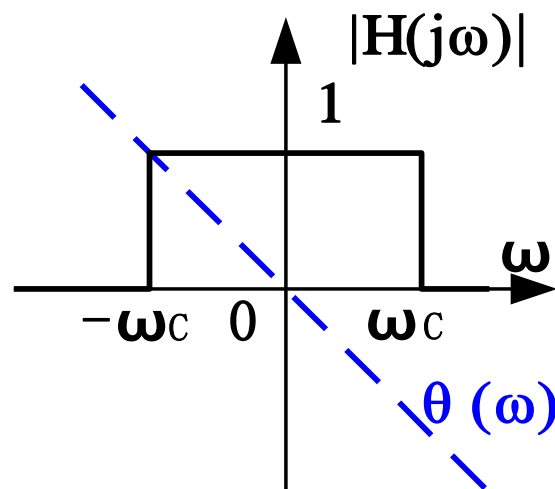
2、理想低通滤波器

具有如图所示幅频、相频特性的系统称为理想低通滤波器。

ω_c 称为截止角频率。

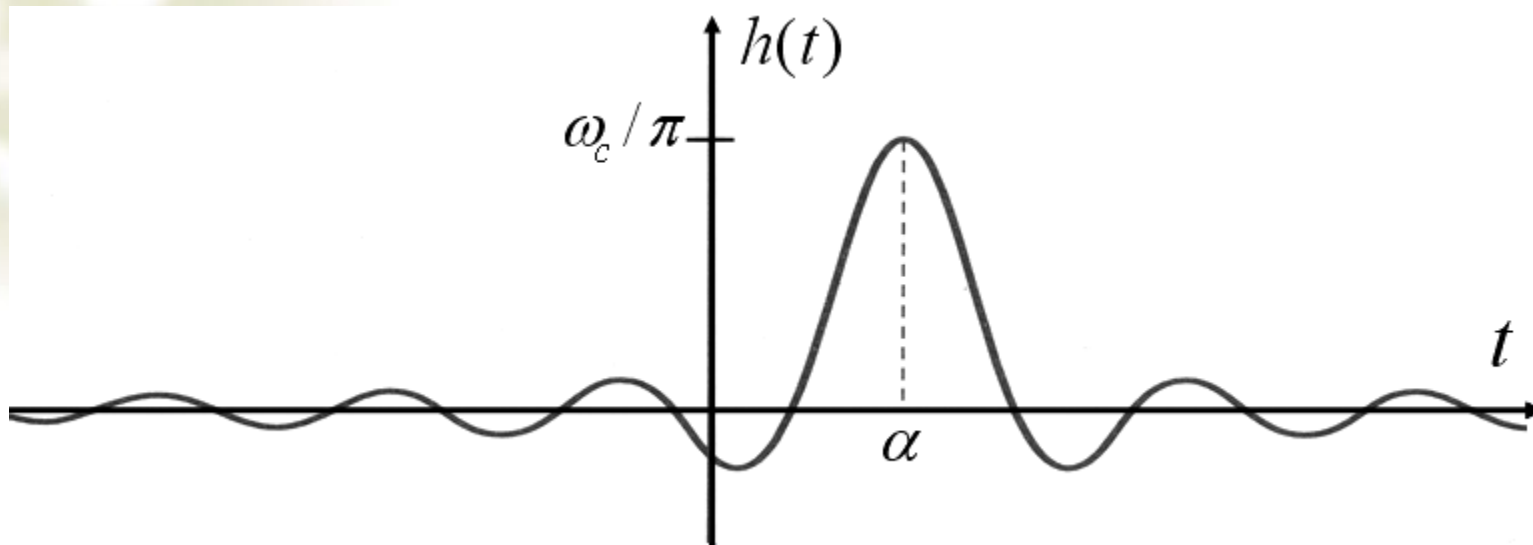
理想低通滤波器的频率响应可写为：

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = g_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$



(1)冲激响应

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[g_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$$



可见，它实际上是不可实现的非因果系统。

4.7 LTI系统的频域分析

(2) 阶跃响应

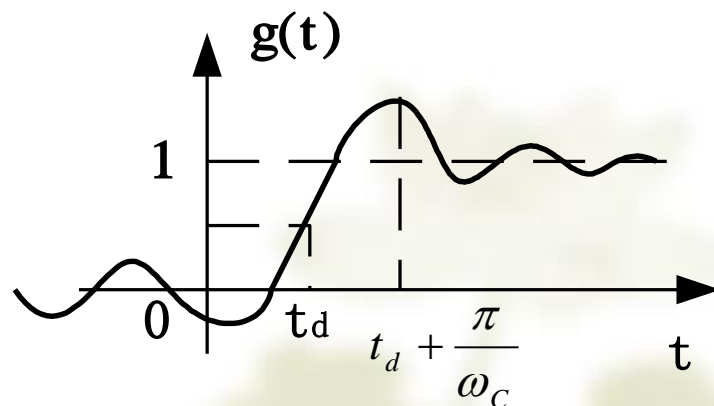
$$g(t) = h(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(\tau - t_d)]}{\omega_c(\tau - t_d)} d\tau$$

经推导，可得

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{称为正弦积分}$$

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)]$$



特点：有明显失真，只要 $\omega_c < \infty$ ，则必有振荡，其过冲比稳态值高约9%。这一由频率截断效应引起的振荡现象称为吉布斯现象。

$$g_{\max} = 0.5 + \text{Si}(\pi)/\pi = 1.0895$$

4.7 LTI系统的频域分析

3、物理可实现系统的条件

就时域特性而言，一个物理可实现的系统，其冲激响应在 $t < 0$ 时必须为0，即 $h(t)=0, t < 0$
即 响应不应在激励作用之前出现。

就频域特性来说，佩利（Paley）和维纳（Wiener）证明了物理可实现的幅频特性必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad \text{并且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

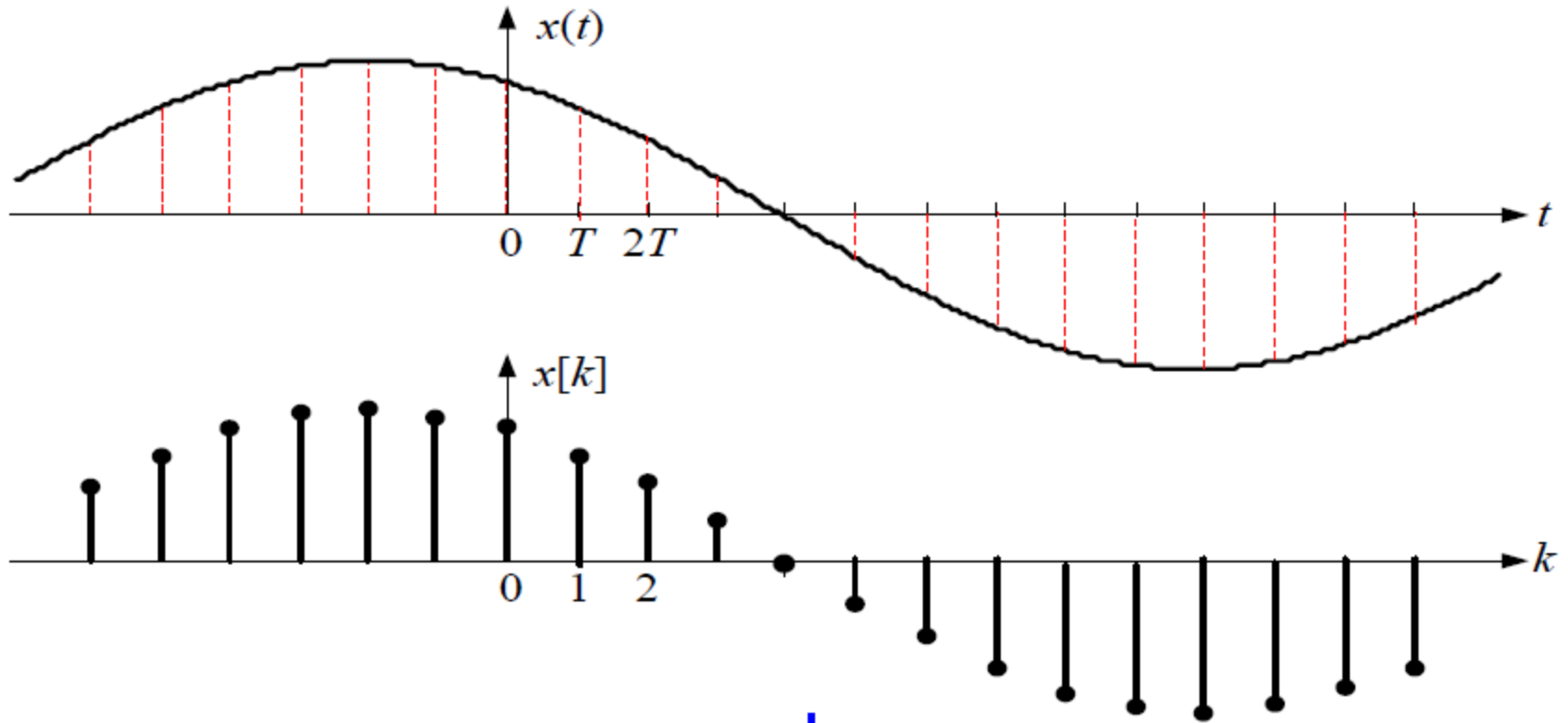
称为佩利-维纳准则。（必要条件）

从该准则可看出，对于物理可实现系统，其幅频特性可在某些孤立频率点上为0，但不能在某个有限频带内为0。

§ 4.8 抽样定理

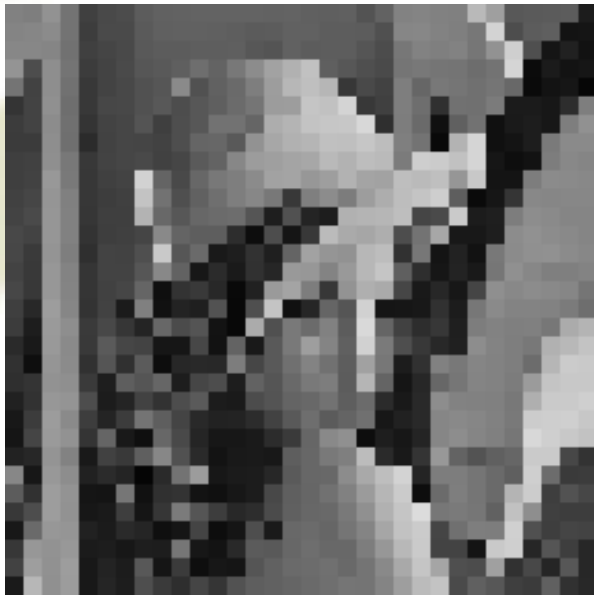
在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号而并不丢失原来信号所包含的信息。

什么是信号的抽样



$$x[k] = x(t)|_{t=kT}$$

不同抽样频率对图像的影响



谁提出信号抽样



Harry Nyquist(1889 –1976)

Nyquist，美国物理学家，1889年出生在瑞典。他对信息论做出了重大贡献。1907年移民到美国并于1912年进入北达克塔大学学习。1917年在耶鲁大学获得物理学博士学位。1917~1934年在AT&T公司工作，后转入Bell电话实验室工作。

1927年，**Nyquist**确定了对某一带宽的有限时间连续信号进行抽样，为不使原波形产生“半波损失”，抽样率至少应为信号最高频率的2倍，这就是著名的**Nyquist**抽样定理。

谁提出信号抽样



Claude Elwood Shannon香农, 1916-2001, 出生于美国密歇根州, 1940年获MIT数学博士学位和电子工程硕士学位。香农发表了两篇革命性文章, 奠定了信息论的基础。

[1] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, 1948.

[2] C. E. Shannon, Communication in the presence of noise, 1949.

V. A. Kotelnikov, 科捷利尼科夫. 第一个准确系统地阐述抽样定理并应用于通信工程领域的科学家, 他证明了低通信号和带通信号的抽样理论。

[1] V.A.Kotelnikov, On the transmission capacity of 'ether' and wire in electro-communications, 1933.

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系
主要包括：

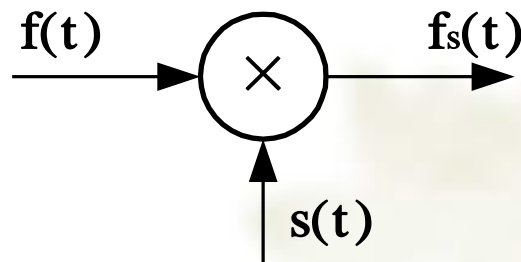
1. 一个连续时间信号可不可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
2. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
3. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。

一. 抽样: Sampling

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为抽样。

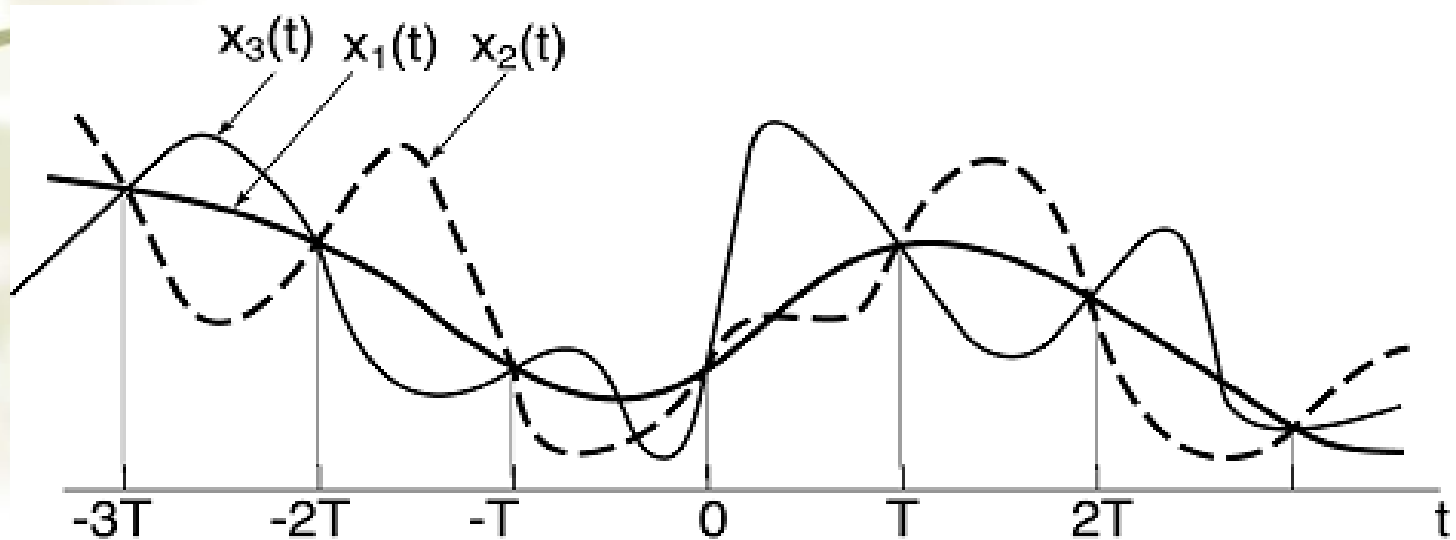
用抽样脉冲序列 $s(t)$ (开关函数)进行取样, 抽样间隔为 T_s , $f_s = 1/T_s$ 称为抽样频率。

得抽样信号 $f_s(t) = f(t)s(t)$



是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示?

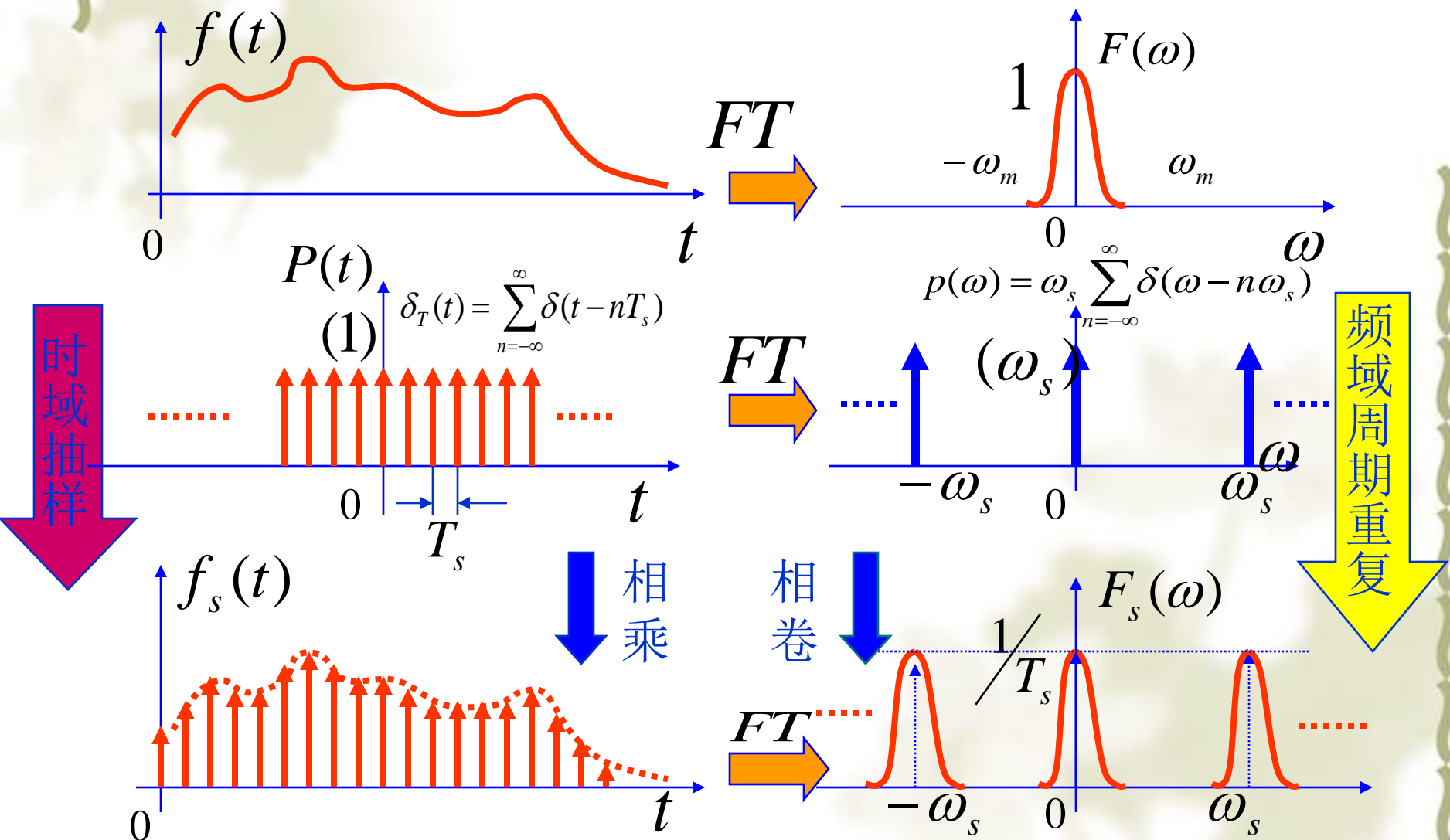
对一维连续时间信号抽样的例子:

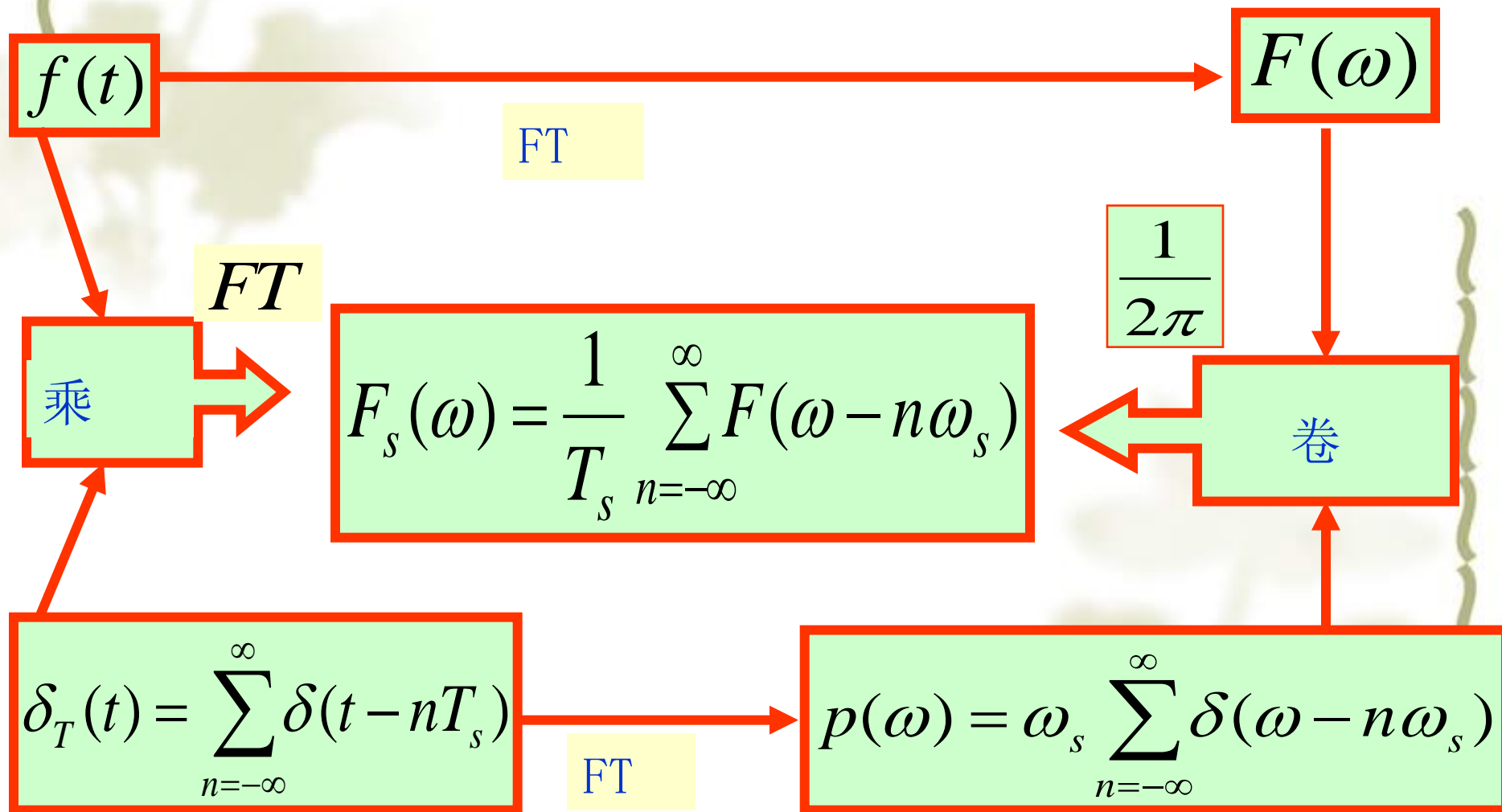


在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号抽样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

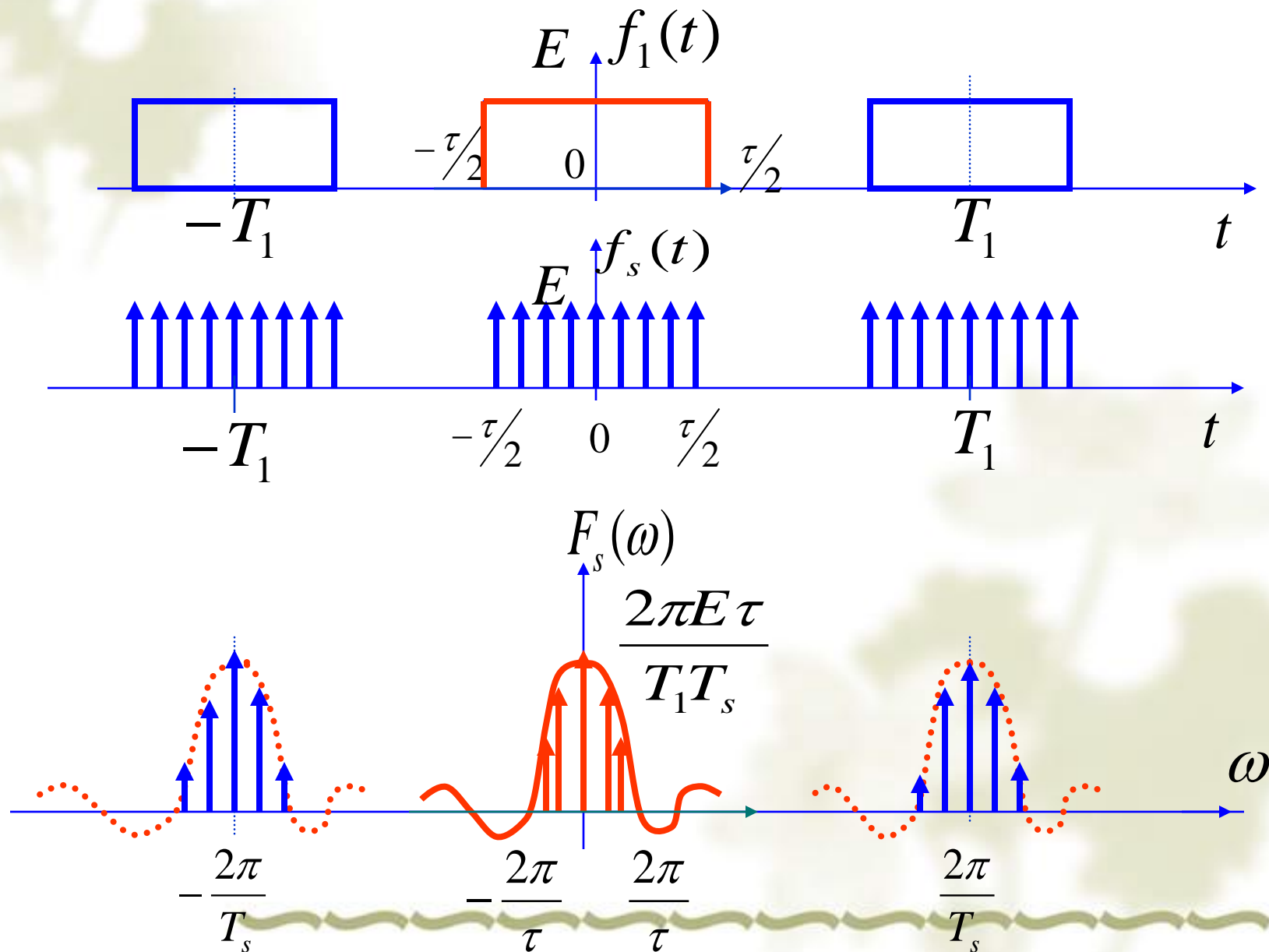
此外，对同一个连续时间信号，当抽样间隔不同时也会得到不同的样本序列。

1、理想抽样

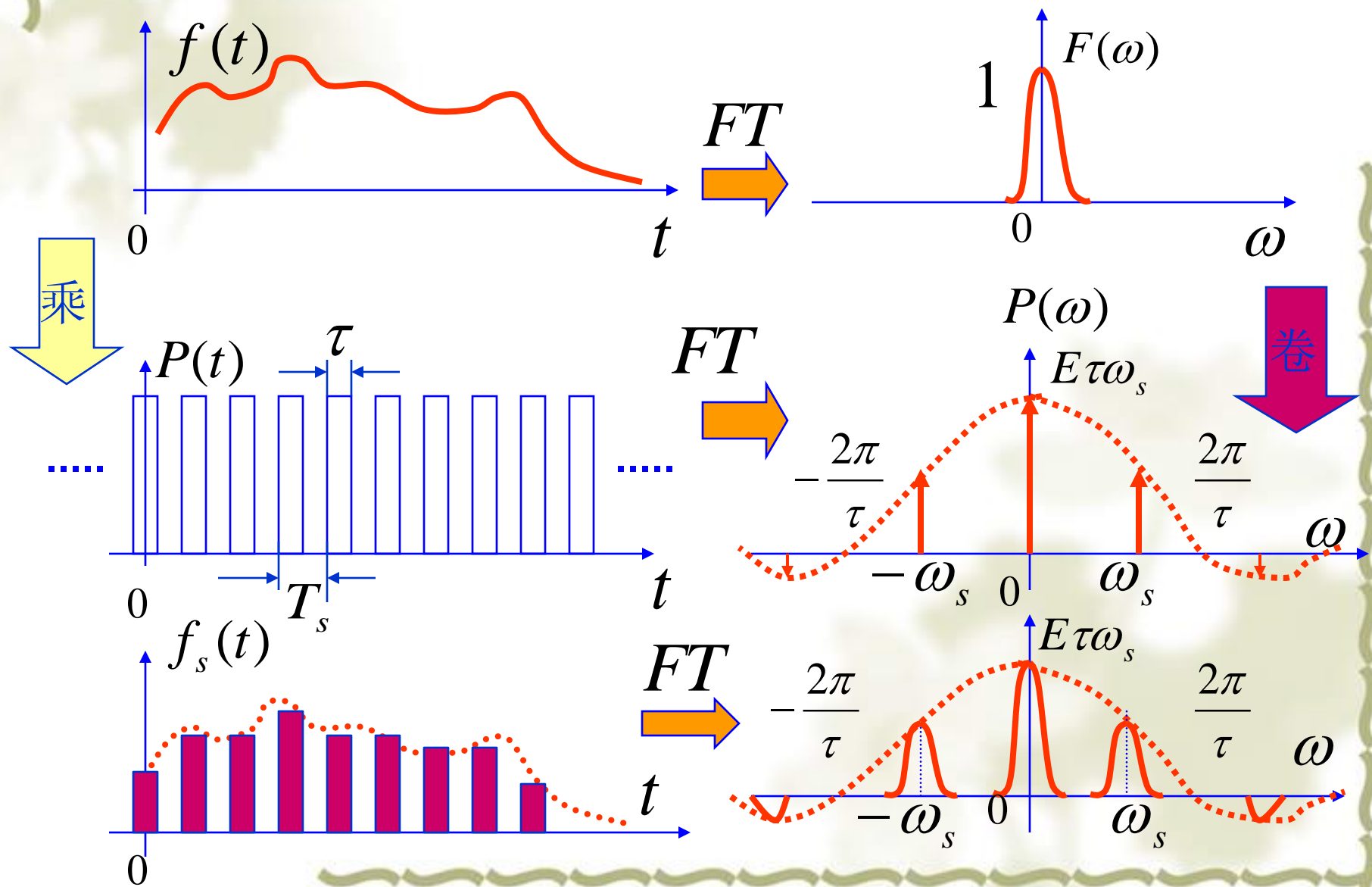




例：周期矩形被冲激抽样的频谱



2、实际抽样



$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

$$p(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * p(\omega)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

非理想抽样

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

理想抽样

二、时域抽样定理

1、时域抽样定理——

一个频率有限信号 $f(t)$ 如果频谱只占据 $-\omega_m \rightarrow +\omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值来唯一地表示。而抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ），或者说最低抽样频率为 $2f_m$ 。

奈奎斯特频率：

$$\omega_s = 2\omega_m$$

例1 已知实信号 $x(t)$ 的最高频率为 f_m (Hz),
试计算对各信号 $x(2t)$, $x(t)*x(2t)$,
 $x(t)\cdot x(2t)$ 抽样不混叠的最小抽样频率。

解:

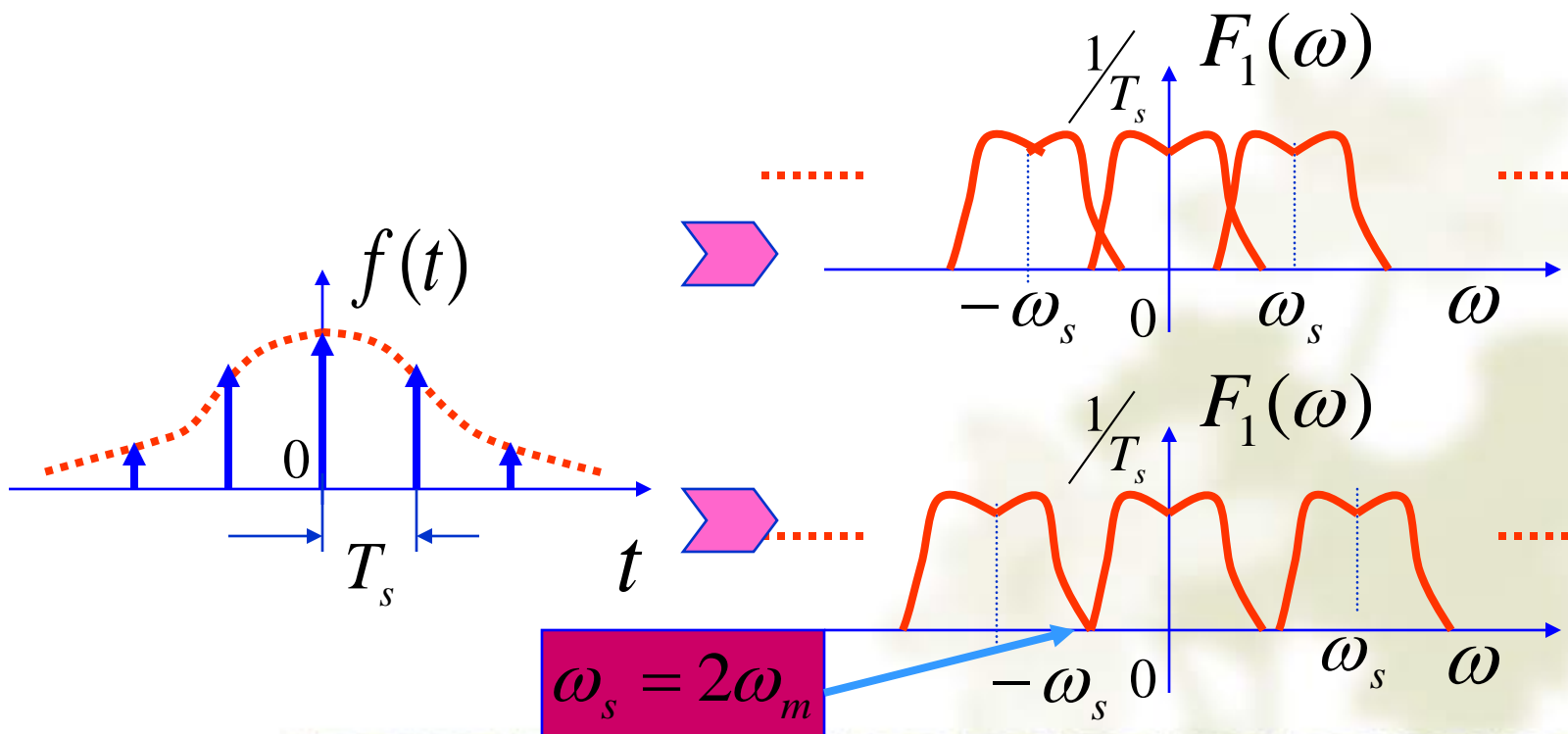
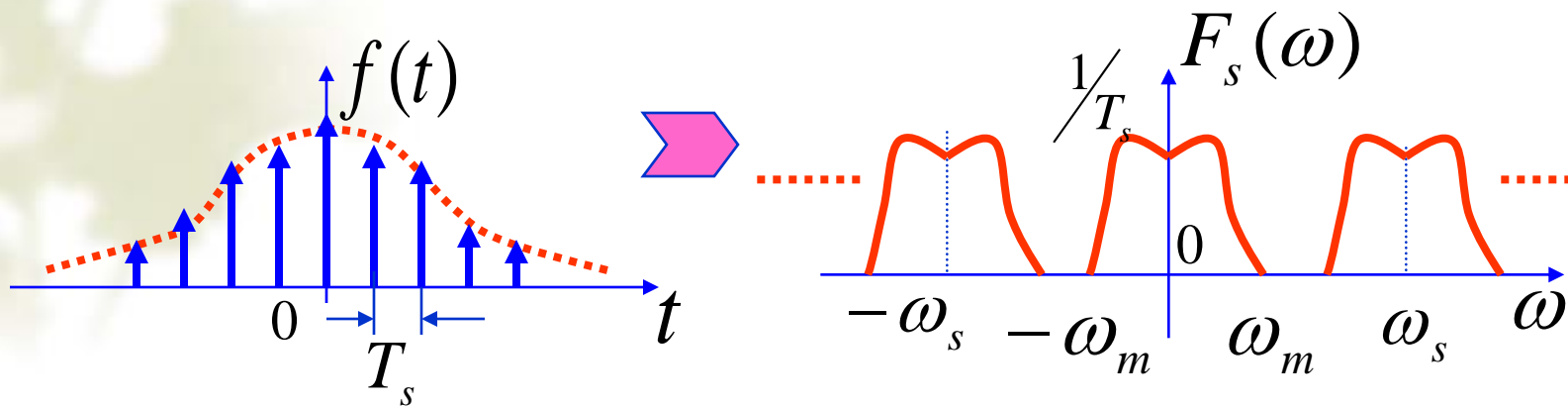
根据信号时域与频域的对应关系及抽样定理得:

对信号 $x(2t)$ 抽样时, 最小抽样频率为 $4f_m$ (Hz);

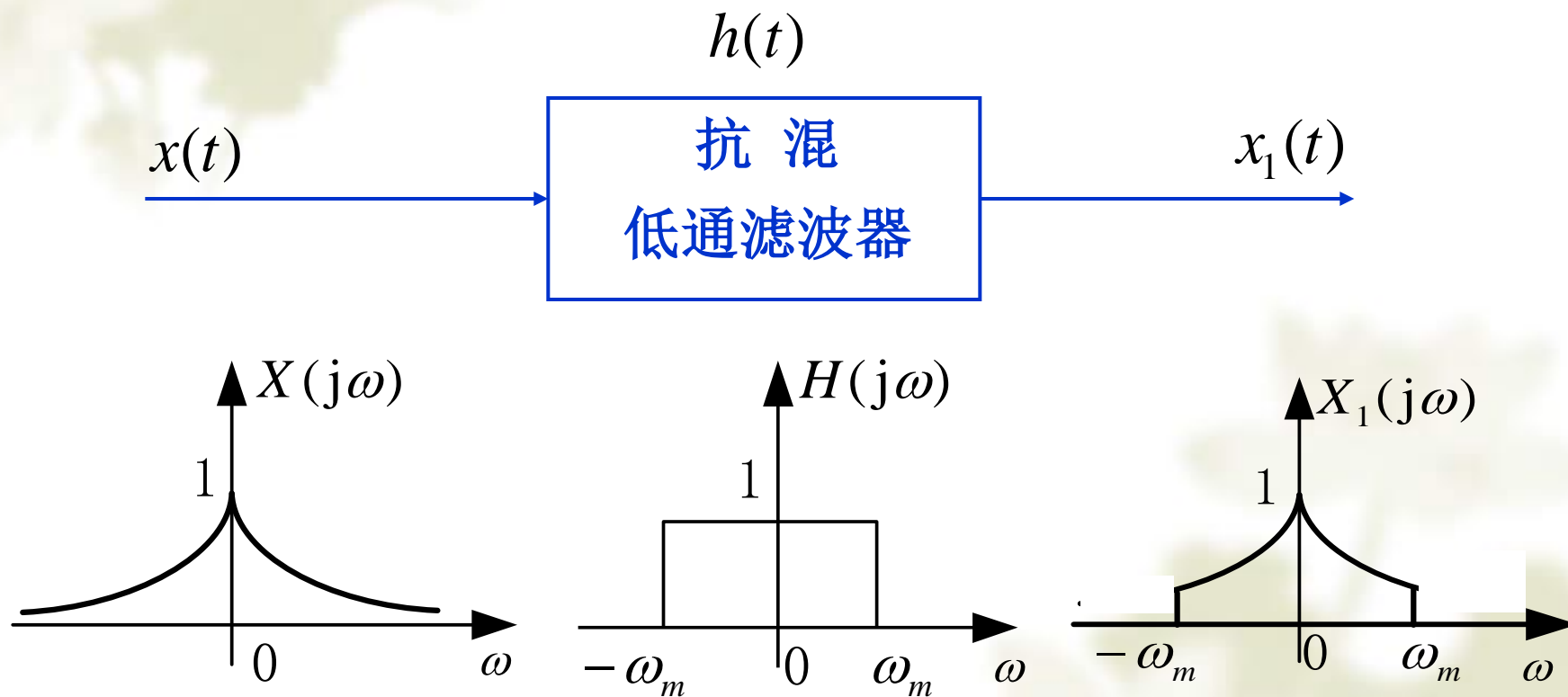
对 $x(t)*x(2t)$ 抽样时, 最小抽样频率为 $2f_m$ (Hz);

对 $x(t)\cdot x(2t)$ 抽样时, 最小抽样频率为 $6f_m$ (Hz)。

不满足抽样定理时产生频率混叠现象



许多实际工程信号不满足带限条件



不同抽样频率的语音信号效果比较



抽样频率 $f_s=44,100$ Hz



抽样频率 $f_s=5,512$ Hz



抽样频率 $f_s=5,512$ Hz

抽样前对信号进行了抗混叠滤波

2、由抽样信号恢复原连续信号

◆ 取主频带 $F(\omega)$

$$F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$$

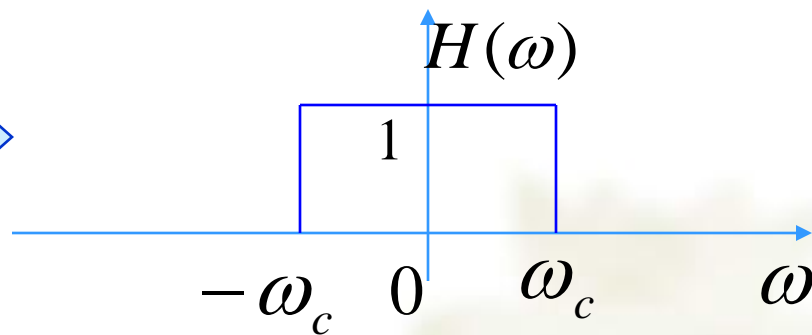
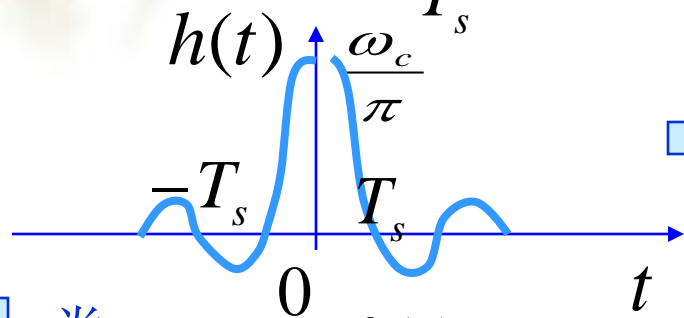
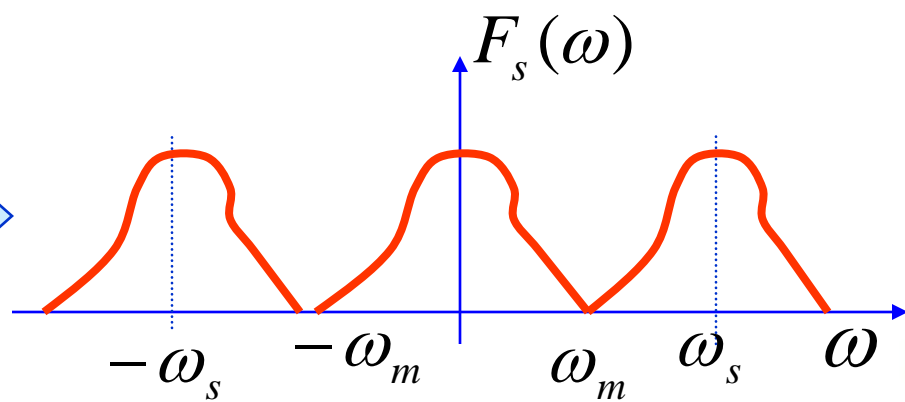
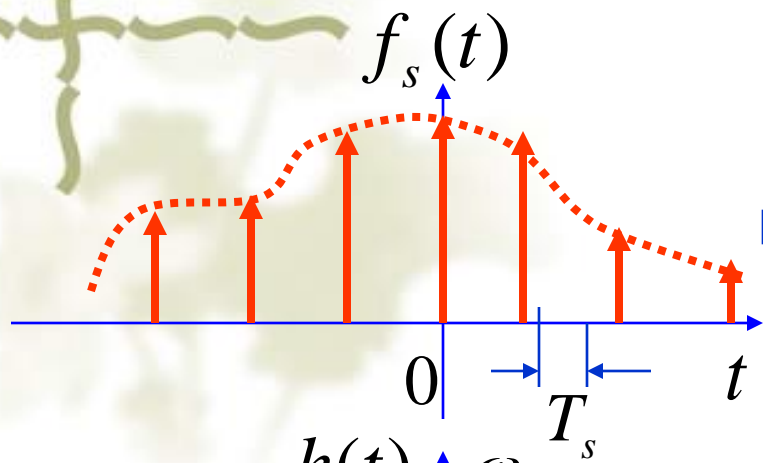
◆ 时域卷积定理:

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

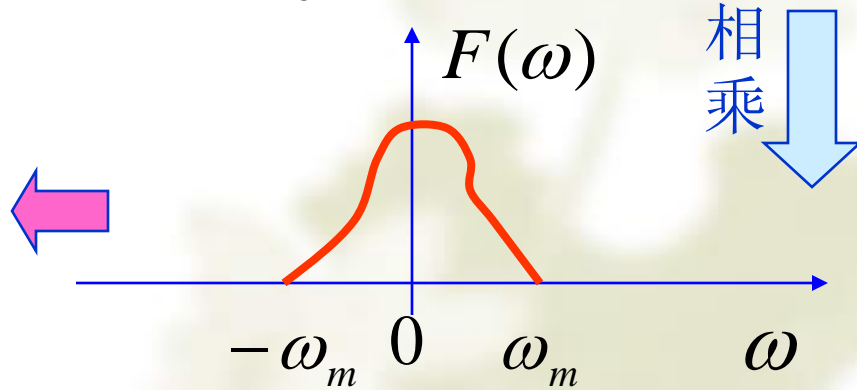
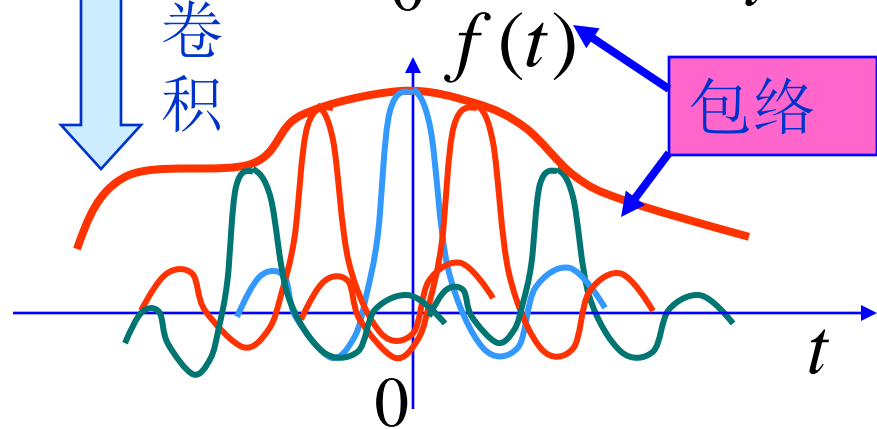
$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

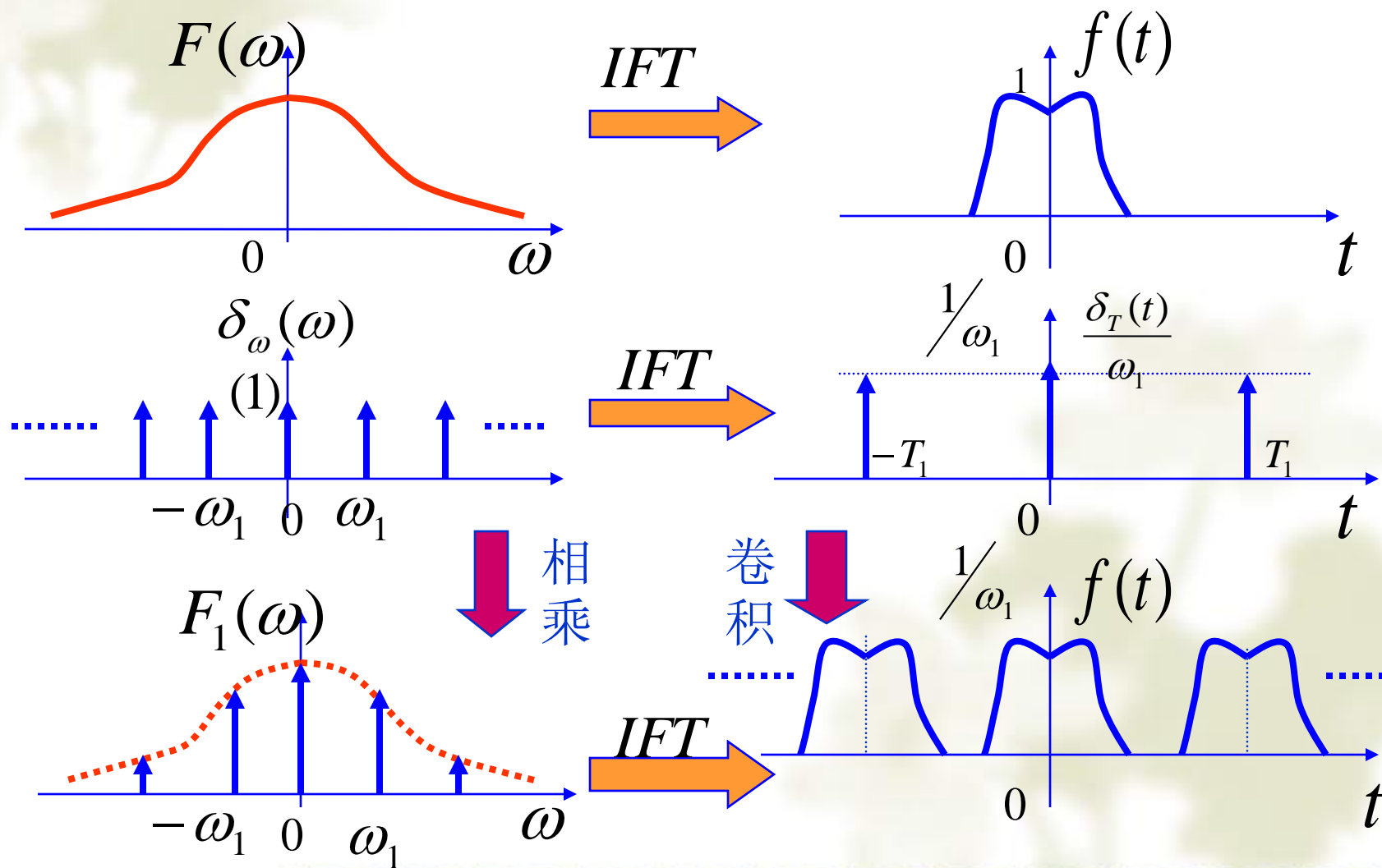
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t-nT_s)]$$



卷积



三、频域抽样定理



频域抽样定理

若信号 $f(t)$ 为时限信号，它集中在 $-t_m \rightarrow t_m$ 的时间范围内，若在频域中，以不大于 $1/2t_m$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱可 $F_1(\omega)$ 一地表示原信号。

作业:

1. 已知 $F(j\omega) = \text{FT}[f(t)]$ 求 $e^{jt} f(1-2t)$ 的傅立叶变换。
2. 求 $F(j\omega) = \cos \omega [\varepsilon(\omega+1) - \varepsilon(\omega-1)]$ 的傅立叶反变换。
3. 某 *LTI* 系统的频率响应为 $H(j\omega) = \begin{cases} 1, 2 \leq |\omega| \leq 7 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$,

对下列输入信号 $f(t)$ 求响应 $y(t)$ 。

$$1) f(t) = 2 + 3 \cos 3t - 5 \sin(6t - 30^\circ) + 4 \cos(13t - 20^\circ)$$

$$2) f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(2kt)$$

4. 题图 4-10 所示系统，滤波器的频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 2e^{-j3\omega} & -2 \leq \omega \leq 2 \\ 0, & \text{其它 } \omega \end{cases}$$

求当 $f(t) = \cos t$ 时的系统响应 $y(t)$ ；

