第六章 离散系统的Z域分析

§ 6.1 z变换

一、从拉普拉斯变换到z变换

取样信号 $f_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$

$$F_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$$

Z=e^{sT}

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

称为序列f(kT)的双边z变换

$$F(z)\Big|_{z=e^{sT}}=F(s)$$

$$z=e^{sT} \qquad\qquad s=\frac{1}{T}\ln z$$

单边z变换 $\quad F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$

二、收敛域

上面定义的z变换，只有当级数收敛时，z变换才有意义。因此我们必须讨论z变换的收敛问题。

绝对可和条件 $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)z^{-k}|<\infty$$

是序列f(k)的z变换存在的充分必要条件

例6.1 求以下有限长序列的z变换：

1)$\delta(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$$

可见，其单边、双边z变换相等。与z 无关，所以其收敛域为整个z 平面。

$$2)\ f(k)=\{1,2,\underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{3},2,1\}$$

双边z变换 $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=z^2+2z+3+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}$

单边z变换 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=3+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}$

可见，对于有限长序列的双边z变换，除z=0和∞外，对任意z，F(z)有界，故其收敛域为：0<|z|<∞；对于单边z变换，其收敛域为|z|>0。

如果序列是有限长的，其收敛域一般为0<|z|<∞，有时在0和/或∞也收敛。

例6.2 求以下因果序列的z变换：

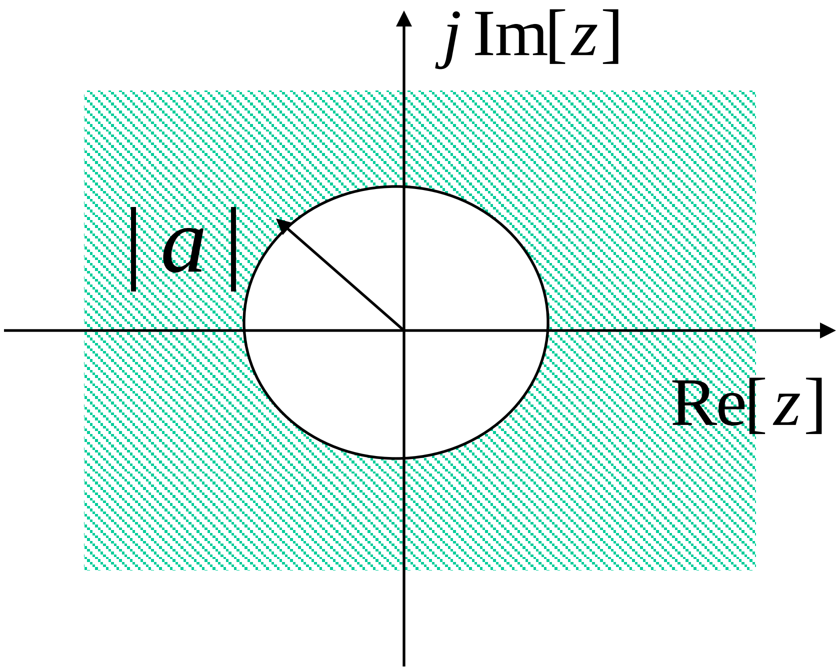
$$f_1(k) = a^k \varepsilon(k)$$

解：$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}} = \begin{cases} \dfrac{z}{z-a}, |az^{-1}|<1, \text{即} |z|>|a| \\ \text{不定}, |az^{-1}|=1, \text{即} |z|=|a| \\ \text{无界}, |az^{-1}|>1, \text{即} |z|<|a| \end{cases}$$

可见，对于因果序列，仅当|z|>|a|时，其z变换存在，序列与象函数的关系是：

$$a^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z|>|a|$$



在z平面上，因果序列的收敛域是半径为|a|的圆外的区域。

例6.3 求以下反因果序列的z变换：

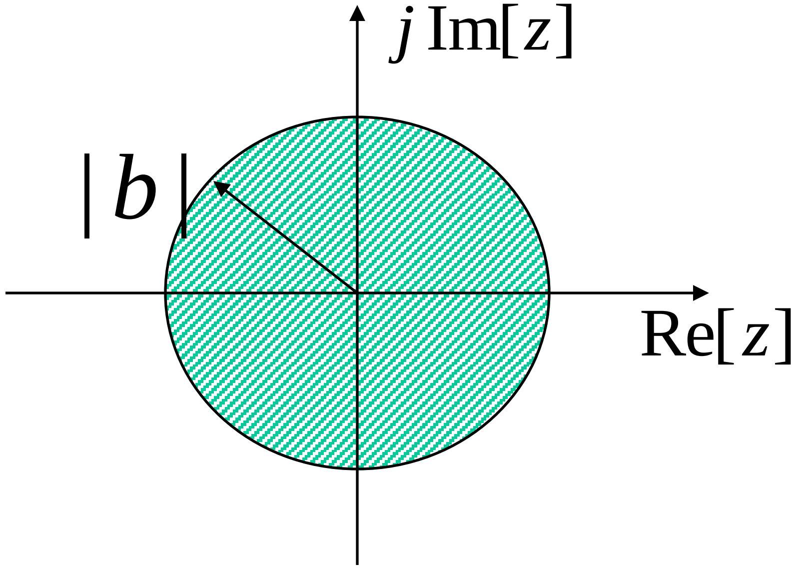
$$f_2(k)=b^k\varepsilon(-k-1)$$

解： $$F_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_2(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}=\begin{cases}\dfrac{-z}{z-b},|b^{-1}z|<1,\text{即}|z|<|b|\\ \text{不定},|b^{-1}z|=1,\text{即}|z|=|b|\\ \text{无界},|b^{-1}z|>1,\text{即}|z|>|b|\end{cases}$$

可见，对于反因果序列，仅当|z|<|b|时，其z变换存在，序列与象函数的关系是：

$$b^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{-z}{z-b},|z|<|b|$$

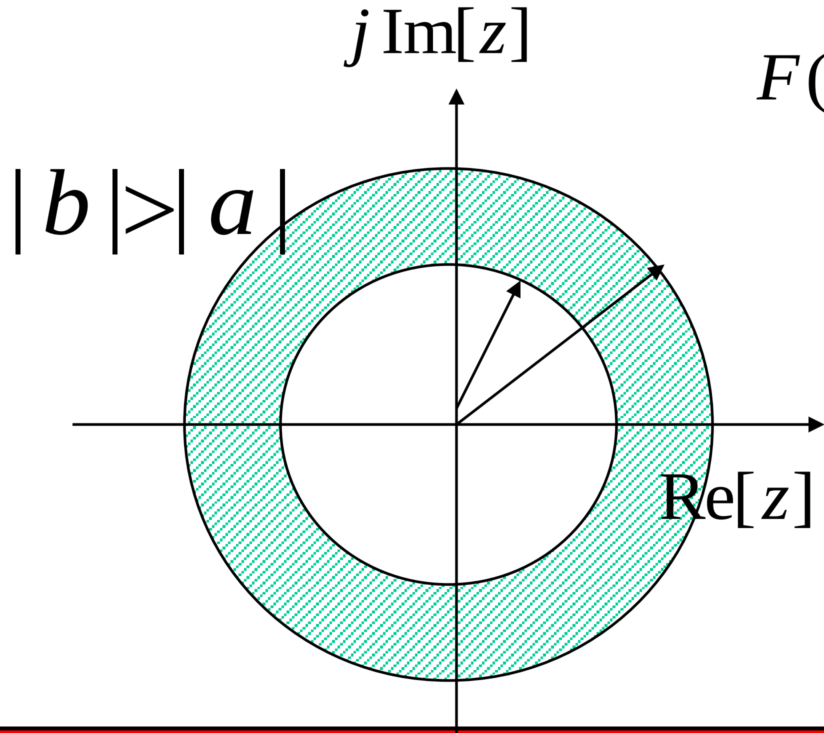


在z平面上，因果序列的收敛域是半径为|b|的圆内的区域。

如有双边序列

$$f(k)=f_1(k)+f_2(k)=b^k\varepsilon(-k-1)+a^k\varepsilon(k)$$

其z变换在|a|<|z|<|b|存在，为：



$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)=\frac{-z}{z-b}+\frac{z}{z-a}$$

若|a|≥ |b|则z变换不存在

三、常用序列的z变换

$$(1)\quad \delta(k) \leftrightarrow 1 \quad (|z| \geq 0)$$

$$(2) a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad (|z| > |a|)$$

$$(3) \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad (|z| > 1)$$

$$(4) e^{j\beta k} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{j\beta}} \qquad (|z| > 1)$$

$$(5) b^k \varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{-z}{z-b}, |z| < |b|$$

§6.2 z变换的性质

（一）线性性质

已知: $\mathcal{Z}\left(x(k)\right)=X(z)\ \left(R_{x1}<|z|<R_{x2}\right)$

$\mathcal{Z}\left(y(k)\right)=Y(z)\ \left(R_{y1}<|z|<R_{y2}\right)$

$$\mathcal{Z}\left[ax(k)+by(k)\right]=aX(z)+bY(z)\ \left(\max(R_{x1},R_{y1})<|z|<\min(R_{x2},R_{y2})\right)$$

其中，*a*、*b*为任意常数。收敛域有可能扩大。

例6.4 已知 $f_1(k)=\varepsilon(k)$

$$f_2(k)=2^k\varepsilon(-k-1)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$$

求f(k)=f_1(k)-f_2(k)的z变换：

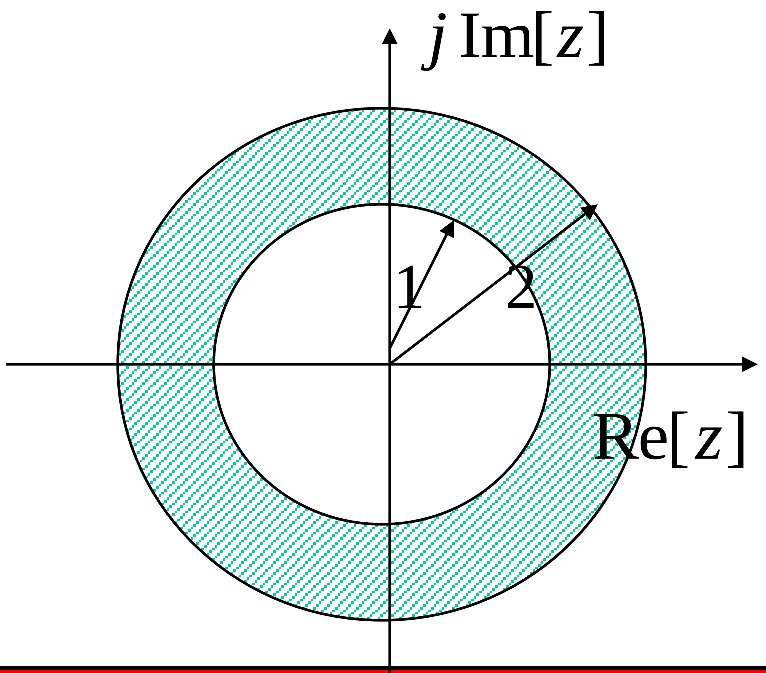
解：$\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1},|z|>1$

$$2^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{-z}{z-2},|z|<2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1/2},|z|>1/2$$

$$f(k) = f_1(k) - f_2(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z-2}$$

$$= \frac{z\left(z^2 - z - 1/2\right)}{(z-1)(z-1/2)(z-2)}, 1 < |z| < 2$$



例6.5求正余弦序列sin(bk)ε(k)和cos(bk)ε(k)的z变换。

解：
$$\sin(bk)\varepsilon(k)=\frac{1}{2j}(e^{jbk}-e^{-jbk})\varepsilon(k)$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{jb}}-\frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{-jb}}=\frac{z\sin b}{z^2+2z\cos b+1},|z|>1$$

$$\cos(bk)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}(e^{jbk}+e^{-jbk})\varepsilon(k)$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{jb}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-jb}}=\frac{z^2-z\cos b}{z^2+2z\cos b+1},|z|>1$$

（二）时移性质

（1）双边z 变换

若 $\mathcal{Z}[f(k)]=F(z)$ 则

$$\mathcal{Z}[f(k\pm m)]=z^{\pm m}F(z)$$ 收敛域不变

（2）单边z变换

若*f(k)*单边*z*变换为$\mathcal{Z}[f(k)\varepsilon(k)]=F(z)$，则

$$f(k-m),m>0\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},|z|>a$$

$$f(k-1)\longleftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$$

$$f(k-2)\longleftrightarrow z^{-2}F(z)+f(-2)+f(-1)z^{-1}$$

$$f(k+m), m>0 \quad \leftrightarrow z^m F(z)-\sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}, |z|>a$$

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

收敛域不变

例6.6求长度为2M+1的矩形序列的z变换。

$$p_{2M+1}(k)=\begin{cases} 1, -M \le k \le M \\ 0, k<-M, k>M \end{cases}$$

解： $$p_{2M+1}(k)=\varepsilon(k+M)-\varepsilon[k-(M+1)]$$

$$\varepsilon(k+M) \leftrightarrow z^M \frac{z}{z-1}, |z|>1$$

$$\varepsilon[k-(M+1)] \leftrightarrow z^{-(M+1)} \frac{z}{z-1}, |z|>1$$

$$p_{2M+1}(k) \leftrightarrow z^M \frac{z}{z-1} - z^{-(M+1)} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} \frac{z^{2M+1}-1}{z^{M+1}}, 0<|z|<\infty$$

例6.7已知$f(k)=a^k$的单边z变换为

$$F(z)=\frac{z}{z-a},|z|>|a|$$

求$f_1(k)=a^{k-2}$和$f_2(k)=a^{k+2}$的单边z变换。

解：

$$f_1(k)=f(k-2)$$

$$F_1(z)=z^{-2}F(z)+f(-2)+f(-1)z^{-1}$$

$$=z^{-2}\frac{z}{z-a}+a^{-2}+a^{-1}z^{-1}=\frac{a^{-2}z}{z-a},|z|>|a|$$

$$f_2(k) = f(k+2)$$

$$F_2(z) = z^2 F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

$$= z^2 \frac{z}{z-a} - z^2 - az = \frac{a^2 z}{z-a}, |z| > |a|$$

例6.8求 $\delta_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(k - mN)$ 的z变换

解： $\delta(k - mN) \leftrightarrow z^{-mN}$

$$\delta_N(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow 1 + z^{-N} + z^{-2N} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-N}}, |z| > 1$$

（三） z 域微分（序列线性加权）

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

$$\mathcal{Z}[k^m f(k)] = [-z\frac{d}{dz}]^m F(z)$$

收敛域不变

（四）序列指数加权（z域尺度变换）

若 $\mathcal{Z}[f(k)]=F(z) \qquad (R_{x1}<|z|<R_{x2})$

则 $\mathcal{Z}[a^k f(k)]=F(\frac{z}{a}) \qquad (R_{x1}<\left|\frac{z}{a}\right|<R_{x2})$

$\mathcal{Z}[(-1)^k f(k)]=F(-z) \qquad (R_{x1}<|z|<R_{x2})$

例6.9 求衰减正弦序列$a^k\sin(bk)\varepsilon(k)$的z变换。

解：

$$\sin(bk)\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z\sin b}{z^2+2z\cos b+1},|z|>1$$

$$a^k\sin bk\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{\frac{z}{a}\sin b}{\left(\frac{z}{a}\right)^2+2\frac{z}{a}\cos b+1}=\frac{az\sin b}{z^2+2az\cos b+a^2},|z|>|a|$$

例6.10求 $k^2\varepsilon(k), \dfrac{k(k+1)}{2}\varepsilon(k), \dfrac{k(k-1)}{2}\varepsilon(k)$ 的z变换

解1):

$$k\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$k^2\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

2) $k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$ $\qquad$ $(k+1)\varepsilon(k+1) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}$

k=-1时(k+1)=0,(k+1)ε(k+1)= (k+1)ε(k)

$$(k+1)\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

$$k(k+1)\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^3}, |z|>1$$

3) $$\frac{k(k-1)}{2}\varepsilon(k) = \frac{1}{2}(k^2-k)\varepsilon(k)$$

$$k^2\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} \qquad k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{k(k-1)}{2}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2}\right] = \frac{z}{(z-1)^3}, |z|>1$$

（五） z 域积分（序列除以k+m）

$$\mathcal{Z}[\frac{f(k)}{k+m}] = z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta$$

$$\mathcal{Z}\ [\frac{f(k)}{k}] = \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta$$

收敛域不变

例6.11求 $\dfrac{1}{k+1}\varepsilon(k)$ 的z变换

解：

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \leftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta$$

$$\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = \int_z^{\infty} \frac{1}{(\eta-1)\eta} d\eta = \int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta$$

$$= \ln \frac{\eta-1}{\eta}\bigg|_z^{\infty} = \ln \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \leftrightarrow z\ln \frac{z}{z-1}, |z|>1$$

（六）k 域反转

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \qquad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

则 $\mathcal{Z}[f(-k)] = F(z^{-1}) \qquad (R_{x1} < |z^{-1}| < R_{x2})$

例6.12已知 $a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a},|z|>a$ 求$a^{-k}\varepsilon(-k-1)$的z变换

解：

$$a^{-k}\varepsilon(-k)\leftrightarrow\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-a}=\frac{1}{1-az},|z|<\frac{1}{a}$$

$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{1-az},|z|<\frac{1}{a}$$

$$a\cdot a^{-k-1}\varepsilon(-k-1)=a^{-k}\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{az}{1-az},|z|<\frac{1}{a}$$

（七）卷积定理

$$f_1(k) * f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z) \bullet F_2(z)$$ 收敛域不变

例6.13 求单边序列(k+1)ε(k) 和(k+1)a^kε(k)的z变换。

解：

$$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1)\varepsilon(k)$$

$$(k+1)\varepsilon(k) \leftrightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^2, |z| > 1$$

$$a^k\varepsilon(k) * a^k\varepsilon(k) = (k+1)a^k\varepsilon(k)$$

$$(k+1)a^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \left(\frac{z}{z-a}\right)^2, |z| > a$$

（八）部分和

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \qquad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

则 $\mathcal{Z}[\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)] = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (\max[1, R_{x1}] < |z| < R_{x2})$

（九）初值定理和终值定理

f(k)是因果序列，则

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}[zF(z)-zf(0)]$$

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}[z^2F(z)-z^2f(0)-zf(1)]$$

$$f(m)=\lim_{z\to\infty}z^m[F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)z^{-k}]$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

例6.14已知某因果序列的z变换为 $\dfrac{z}{z-a}, |z|>|a|$ 求f(0),f(1),f(2)和f(∞)。

解:

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z-a}=1$$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}z[F(z)-f(0)]=\lim_{z\to\infty}[\frac{z^2}{z-a}-z]=a$$

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}z^2[F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}]=\lim_{z\to\infty}[\frac{z^2}{z-a}-z^2-az]=a^2$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{z}{z-a}=\begin{cases}0,|a|<1\\ 1,a=1\\ 0,a=-1\\ 0,|a|>1\end{cases}$$

只有当|a|<1时，z=1才在收敛域内，因此

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{z}{z-a}=0$$

线性 $a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k)$ $a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$

k域平移双边变换 $f(k\pm m)$ $z^{\pm m}F(z)$

k域平移单边变换

$$f(k-m),m>0 \qquad z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k},|z|>a$$

$$f(k+m),m>0 \qquad z^{m}F(z)-\sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{m-k},|z|>a$$

k域乘a^k $a^k f(k),a\neq 0$ $F(\frac{z}{a})$

K域卷积	$f_1(k) * f_2(k)$	$F_1(z) \bullet F_2(z)$
Z域微分	$k^m f(k), m > 0$	$\left[-z\frac{d}{dz}\right]^m F(z)$
Z域积分	$\frac{f(k)}{k+m}, k+m > 0$	$z^m \int_z^\infty F(\eta)\eta^{-(m+1)} d\eta$
k域反转	$f(-k)$	$F(z^{-1})$

部分和 $\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$ $\frac{z}{z-1}F(z)$

因果序列初值定理

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

$$f(m)=\lim_{z\to\infty}z^{m}[F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)z^{-k}]$$

因果序列终值定理

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

§6.3 逆z变换

一般而言，双边序列可以分为因果序列和反因果序列相加：

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k)$$

相应地，其z变换也分为两部分：

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \alpha < |z| < \beta$$

当已知象函数F(z)时，根据收敛域可以求得$F_1(z)$和$F_2(z)$，并分别求得它们所对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，两者相加就得到F(z)的原序列f(k)。

一、幂级数展开法

例6.15已知象函数$F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$ 其收敛域如下，分别求其相对应的原序列。

1)|z|>2; 2)|z|<1; 3)1<|z|<2。

解：1)f(k)为因果序列，F(z)是z^{-1}的幂级数

$$1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\dots$$

$$z^2-z-2\,\overline{\big)\,z^2\qquad\qquad}$$

$$\underline{z^2-z-2}$$

$$z+2$$

$$\underline{z-1-2z^{-1}}$$

$$3+2z^{-1}$$

$$F(z)=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\ldots$$

$$f(k)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{1},1,3,5\ldots\}$$

2)f(k)为反因果序列，F(z)是z的幂级数

$$\begin{array}{r}
-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\ldots \\
-2-z+z^2\,\overline{\big)\,z^2\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z^2+\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4} \\
-\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^4 \\
\underline{-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{4}z^5} \\
\frac{3}{4}z^4-\frac{1}{4}z^5
\end{array}$$

$$F(z)=\ldots+\frac{5}{16}z^5-\frac{3}{8}z^4+\frac{1}{4}z^3-\frac{1}{2}z^2+0\cdot z$$

$$f(k)=\{\ldots,\frac{5}{16},-\frac{3}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\underset{k=-1}{\underset{\uparrow}{0}}\}$$

3)f(k)为双边序列

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}$$ 是因果序列的象函数

$$F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$ 是反因果序列的象函数

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\ldots$$

$$F_2(z)=\ldots-\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

$$f(k)=\{\ldots,\frac{-1}{12},\frac{-1}{6},\frac{-1}{3},\ \underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{\frac{1}{3}},\ \frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\ldots\}$$

二、部分分式展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}$$

式中m≤n，当m<n时，F(z)可以展开为部分分式

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{zA(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{z(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0)}$$

A(z)是系统的特征多项式，方程A(z)=0的根称为F(z)的极点，也称为特征根。

1、F(z)有单极点

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{K_n}{z-z_n}$$

$$K_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=z_i}$$

$$F(z)=K_0+\frac{zK_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{zK_n}{z-z_n}$$

$$\delta(k)\leftrightarrow 1 \qquad a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-a},|z|>a$$

$$-a^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-a},|z|<a$$

例6.15已知象函数$F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$其收敛域如下，分别求其相对应的原序列。

1)|z|>2; 2)|z|<1; 3)1<|z|<2。

解： $A(z)=(z+1)(z-2)$

极点为$z_1=-1, z_2=2$,于是：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{K_1}{z+1}+\frac{K_2}{z-2}$$

$$K_1=(z+1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{3}$$

$$K_2=(z-2)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=2}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

1)f(k)为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}2^k]\varepsilon(k)$$

2)f(k)为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}2^k]\varepsilon(-k-1)$$

3)f(k)为双边序列

$$f(k)=-\frac{2}{3}2^k\varepsilon(-k-1)+\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)$$

例6.16求象函数 $F(z)=\dfrac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}, 1<|z|<2$ 的原序列。

解：
$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-\frac{1}{2})}+\frac{K_2}{(z-1)}+\frac{K_3}{(z-2)}+\frac{K_4}{(z-3)}$$

$$K_1=(z-\frac{1}{2})\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=-1 \qquad K_2=(z-1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=2$$

$$K_3=(z-2)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=2}=-1 \qquad K_4=(z-3)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=3}=1$$

$$F(z)=\frac{-z}{(z-\frac{1}{2})}+\frac{2z}{(z-1)}+\frac{-z}{(z-2)}+\frac{z}{(z-3)},1<|z|<2$$

根据收敛域，前两项为因果序列的象函数，后两项为反因果序列的象函数。

$$f(k)=(2^k-3^k)\varepsilon(-k-1)+[2-(\tfrac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

2、F(z)有共轭单极点

若F(z)有一对共轭单极点z_1=c+jd,z_2=c-jd，则可将F(z)展开为：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{F_a(z)}{z}+\frac{F_b(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_1)}+\frac{K_2}{(z-z_2)}+\frac{F_b(z)}{z}$$

其中 $\frac{F_b(z)}{z}$ 是 $\frac{F(z)}{z}$ 中除共轭极点所形成的分式外的其余部分。

$$\frac{F_a(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_2}{z-c+jd}$$

若A(z)是实系数多项式，则$K_1=K_2^*$。

$$z_{1,2}=c\pm jd=\alpha e^{\pm j\beta}$$

式中 $\alpha=\sqrt{c^2+d^2}$，$\beta=acr\tan(\frac{d}{c})$

令$K_1=|K_1|e^{j\theta},K_2=|K_1|e^{-j\theta}$，则：

$$\frac{F_a(z)}{z}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

$$F_a(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}\cdot z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}\cdot z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若$|z|>a,\ f(k)=2|K_1|a^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若$|z|<a,\ f(k)=-2|K_1|a^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

例6.17求象函数$F(z)=\dfrac{z^3+6}{(z+1)(z^2+4)},|z|>2$ 的原序列。

解：$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^3+6}{z(z+1)(z^2+4)}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z+1}+\frac{K_2}{z-j2}+\frac{K_2{}^*}{z+j2}$$

$$K_0=z\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=0}=1.5 \qquad K_1=(z+1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-1}=-1$$

$$K_2=(z-j2)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=j2}=\frac{1+j2}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j63.4^\circ}$$

$$F(z)=1.5-\frac{z}{z+1}+\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j63.4^\circ}\cdot z}{z-2e^{j\frac{\pi}{2}}}+\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}e^{-j63.4^\circ}\cdot z}{z-2e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$f(k)=[1.5\delta(k)-(-1)^k+\frac{\sqrt{5}}{2}2^k\cos(\frac{k\pi}{2}+63.4^\circ)]\varepsilon(k)$$

3、F(z)有重极点

如果方程A(z)=0在z=z_1处有r重根，则：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{F_a(z)}{z}+\frac{F_b(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-z_1)^r}+\frac{K_{12}}{(z-z_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{K_{1r}}{z-z_1}+\frac{F_b(z)}{z}$$

其中 $\dfrac{F_b(z)}{z}$ 是 $\dfrac{F(z)}{z}$ 中除重极点所形成的分式外的其余部分。

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-z_1)^r F(z)]\Big|_{z=z_1}$$

例6.18求象函数 $F(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-1)^2},|z|>1$ 的原序列。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-1)^2}+\frac{K_{12}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=2$$

$$K_{12}=\frac{d}{dz}[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}]\Big|_{z=1}=1$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k)=(2k+1)\varepsilon(k)$$

§ 6.4 z域分析

一、差分方程的变换解

LTI系统的激励为f(k)，响应为y(k)，描述n阶系统的向后差分方程一般形式为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

式中a和b均为实数，设f(k)是在k=0时接入的。

方程两边作z变换

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-k}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-i}[z^{-j}F(z)]$$

$$(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i}) Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} [\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-i} z^{-j}) F(z)$$

仅与初始状态有关

$$Y(z) = \frac{M(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)} F(z)$$

仅与激励有关

式中 $M(z) = -\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} [\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-k}]$

$$A(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i} \qquad B(z) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-i} z^{-j}$$

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

例6.19若描述LTI系统的差分方程为y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)+2f(k-2)，已知y(-1)=2，y(-2)=-1/2，f(k)=ε(k)，求系统的零输入响应，零状态响应和全响应。

解：方程两边作z变换：

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]$$
$$=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

$$(1-z^{-1}-2z^{-2})Y(z)-(1+2z^{-1})y(-1)-2y(-2)=(1+2z^{-2})F(z)$$

$$Y(z)=\frac{[y(-1)+2y(-2)]+2y(-1)z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{[y(-1)+2y(-2)]+2y(-1)z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{[y(-1)+2y(-2)]z^{2}+2y(-1)z}{z^{2}-z-2}$$

$$=\frac{z^{2}+4z}{(z-2)(z+1)}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)=\frac{z^{2}+2}{z^{2}-z-2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^{3}+2z}{(z-2)(z+1)(z-1)}$$

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{z+4}{(z-2)(z+1)}=\frac{2}{z-2}+\frac{-1}{z+1}$$

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^{2}+2}{(z-2)(z+1)(z-1)}=\frac{2}{z-2}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$y_{zi}(k) = [2(2)^k - (-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k) = [2(2)^k + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) = [4(2)^k - \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

二、系统函数

描述LTI系统的差分方程为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} F(z)$$

系统函数 $H(z) = \dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)} = \dfrac{B(z)}{A(z)}$

$$h(k) \leftrightarrow H(z)$$

例6.19若描述LTI系统的差分方程为

$$y(k)-\frac{1}{6}y(k-1)-\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

求系统的单位序列响应h(k)。

解：对方程取z变换得：

$$Y(z)-\frac{1}{6}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{6}z^{-2}Y(z)=F(z)+2z^{-1}F(z)$$

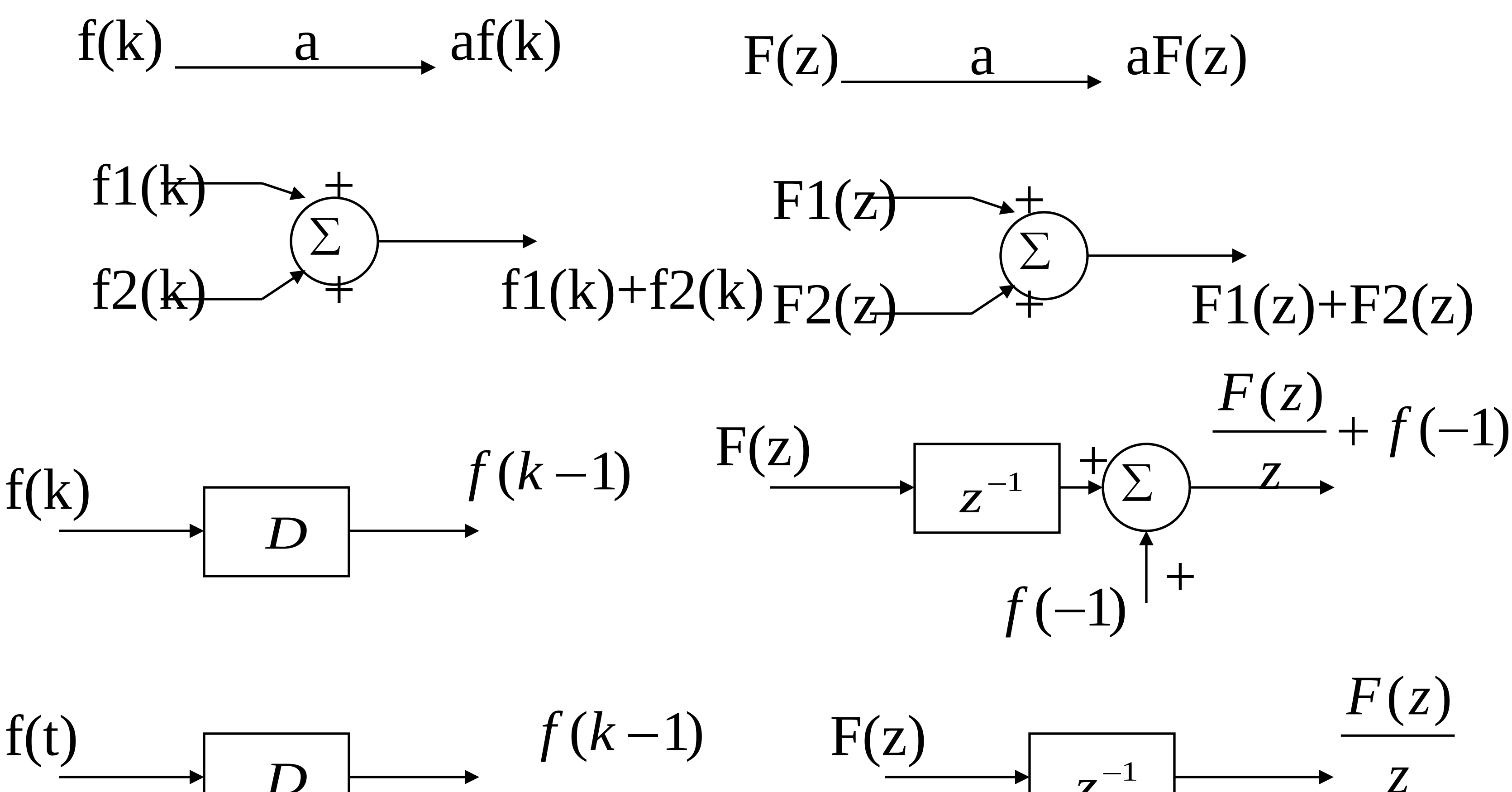
$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{z^2+2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

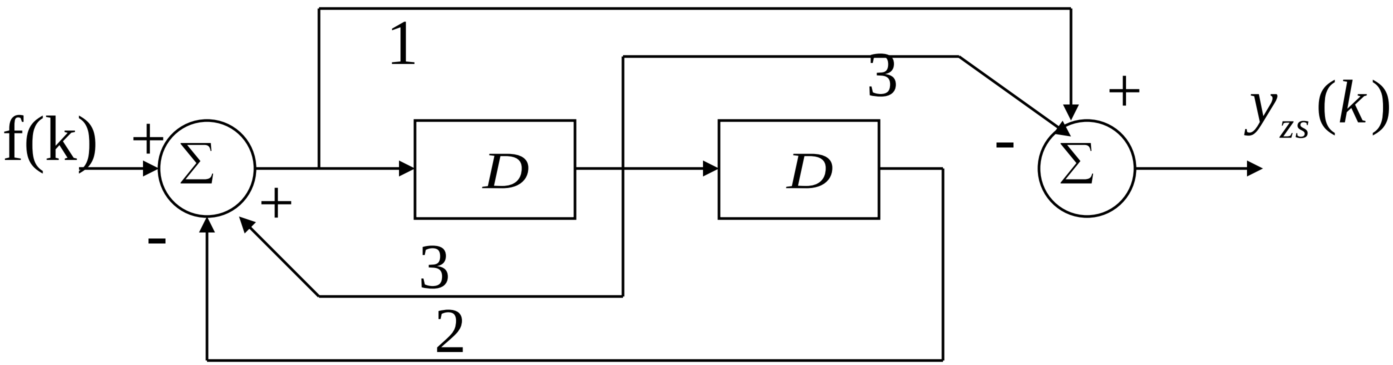
$$h(k)=[3(\frac{1}{2})^k-2(-\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)$$

三、系统的z域框图

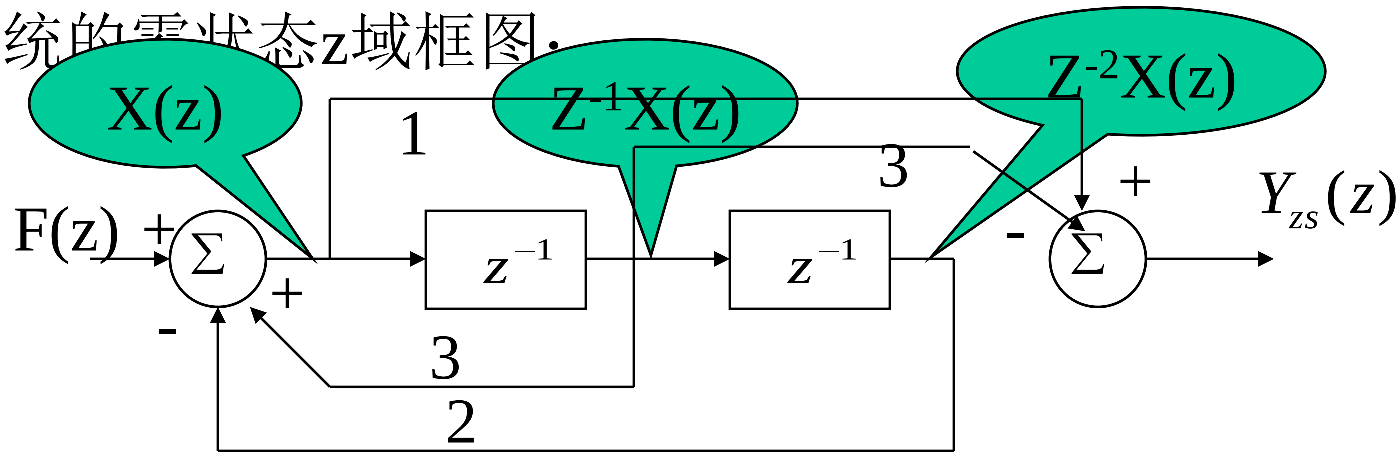
时域框图 z域框图



例：系统框图如图，输入f(k)=ε(k)，求单位序列响应和零状态响应。



解：系统的零状态z域框图：



$$X(z)=3z^{-1}X(z)-2z^{-2}X(z)+F(z)$$

$$(1-3z^{-1}+2z^{-2})X(z)=F(z)$$

$$Y_{zs}(z)=X(z)-3z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2-z+2}=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-2}$$

$$h(k)=(2-2^k)\varepsilon(k)$$

$$Y_{zs}(z) = H(z)F(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}\frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{3z}{z-1} + \frac{-2z}{z-2}$$

$$y_{zs}(k) = (2k + 3 - 22^k)\varepsilon(k)$$

四、s域与z域的关系

$$z = e^{sT}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T}$$

$$r = e^{\sigma T}$$

	S平面		Z平面
$\sigma=0$	虚轴	$r=1$	单位圆
$\sigma<0$	左半平面	$r<1$	单位圆内部
$\sigma>0$	右半平面	$r>1$	单位圆外部

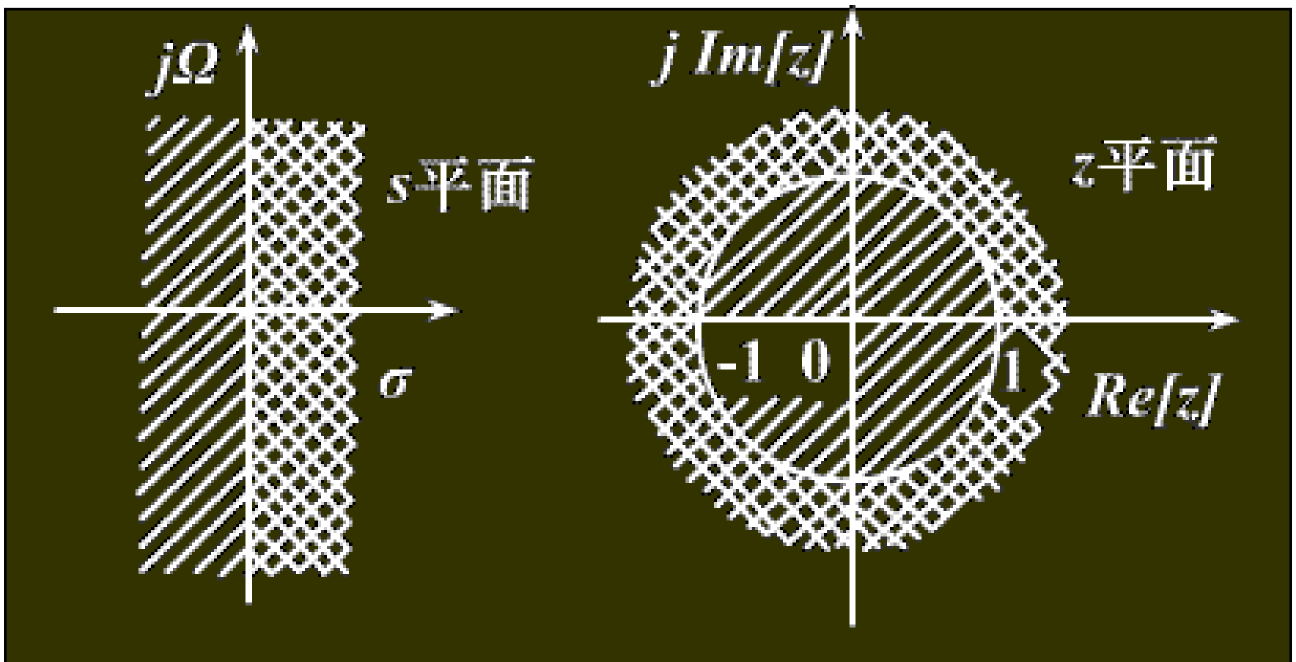


图 2-17 $\sigma \gtreqless 0$分别映射成$r \gtreqless 1$

$$\omega = \Omega T$$

	S平面		Z平面	
$\Omega=0$	实轴		$\omega=0$	正实轴
$\Omega=\Omega_0$	平行直线		$\omega=\Omega_0 T$	辐射线
$\Omega: -\pi/T \rightarrow \pi/T$			$\omega: -\pi \rightarrow \pi$	
$\Omega: -3\pi/T \rightarrow -\pi/T$			$\omega: -\pi \rightarrow \pi$	
$\pi/T \rightarrow 3\pi/T$				

s平面到z平面的映射是**多值映射**。

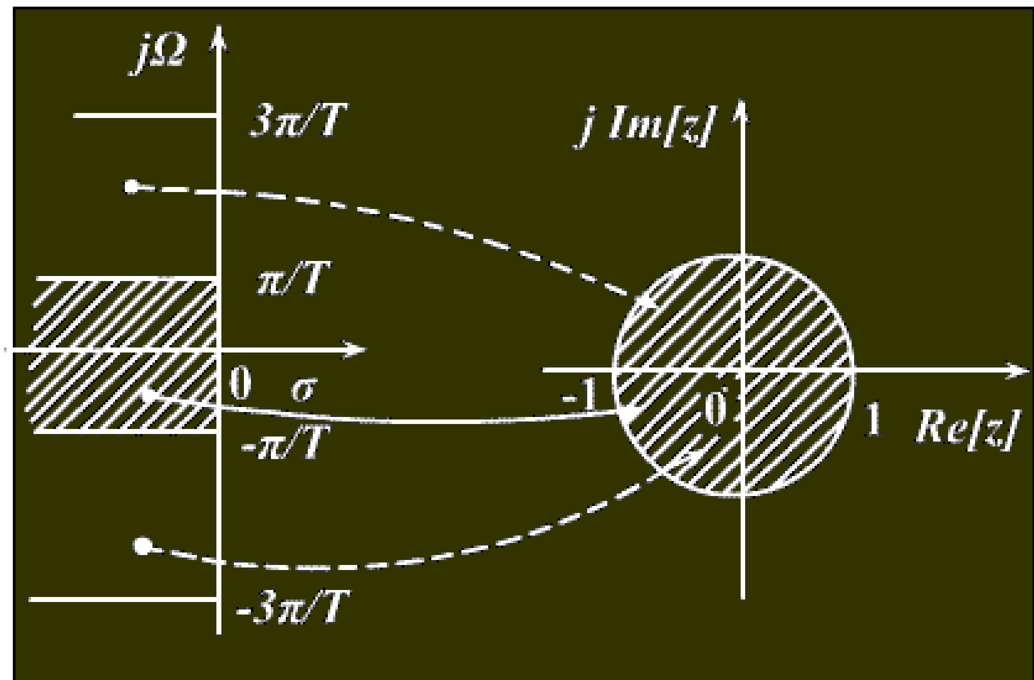


图 2-18

作业：

1.求序列的Z变换并注明收敛域：

（1） $(\frac{1}{2})^k \varepsilon(k) + 2^k \varepsilon(-k-1)$； (2) $(-1)^k a^k \varepsilon(k-2)$；

2. 已知双边 z 变换为 $F(z) = \dfrac{2z}{(z-2)(z-3)(z-4)}$

（1） $|z| > 4$，求原函数 $f(k)$；

（2） $|z| < 2$，求原函数 $f(k)$；

（3） $3 < |z| < 4$，求原函数 $f(k)$。

3. 描述某离散时间系统的差分方程为

$$y(k)-0.7y(k-1)+0.1y(k-2)=7f(k)-2f(k-1)$$

（1）求系统函数 $H(z)$；

（2）求单位序列响应 $h(k)$；

（3）若 $y(-2)=y(-1)=4, f(k)=\varepsilon(k)$，分别求此系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ 和零状态响应 $y_{zs}(k)$。