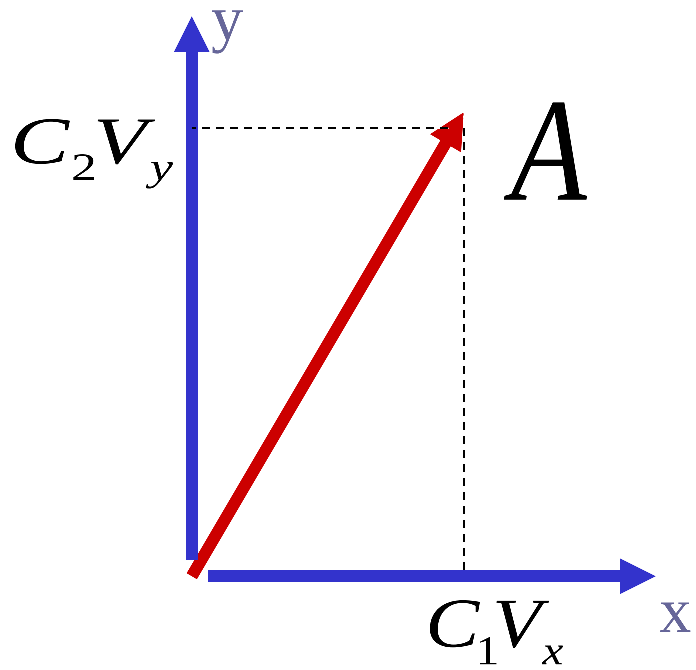
第四章 连续系统的频域分析

§4.1 信号分解为正交函数

平面上的矢量在直角坐标中可以分解为x方向分量和y方向分量：

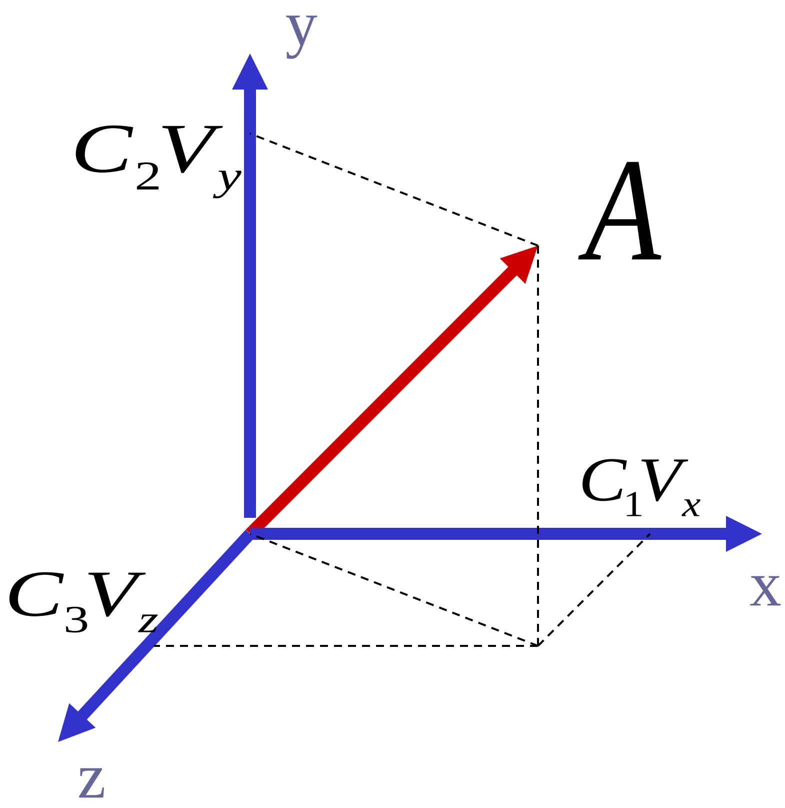
$$A = C_1 V_x + C_2 V_y$$



二维正交集

而对于一个三维空间的矢量，可以用一个三维正交矢量集的组合来表示：

$$A = C_1 V_x + C_2 V_y + C_3 V_z$$



三维正交集

一个信号也可以对于某一函数集找出此信号在各函数中的分量。一个函数集可以构成一个信号空间。在信号空间找到若干个相互正交的基本信号，使得此信号空间中任一信号均可由这些基本信号来表示。

一、正交函数集

对于定义在(t_1,t_2)的两个实函数$\varphi_1(t)$ 和$\varphi_2(t)$，若满足：

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt=0$$

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$在区间(t_1,t_2)内正交。

若有n个实函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在(t_1,t_2)满足：

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=\begin{cases}0, i\neq j\\ K_i\neq 0, i=j\end{cases}$$

则称此函数集为区间(t_1,t_2)内的正交函数集。在区间(t_1,t_2)内相互正交的n个函数构成正交信号空间。

如果在正交函数集$\{\varphi_1(t)，\varphi_2(t)，…，\varphi_n(t)\}$之外不存在函数ψ满足：

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi_i(t)dt=0$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如，三角函数集{1，cos(Ω t)， cos(2Ω t)， … cos(mΩ t)，…， sin (Ω t)， sin (2Ω t)， …， sin (nΩ t)， …}在区间 (t_0, t_0+T)（式中T=2π / Ω ）组成正交函数集，而且还是完备的正交函数集。

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{T}{2}, m = n \neq 0 \\ T, m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t)\sin(n\Omega t)dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \dfrac{T}{2}, m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt = 0$$

对于复函数，正交是指：若复函数集$\{\varphi_i(t)\}$在区间(t_1,t_2)满足：

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, i\neq j\\ K_i\neq 0, i=j\end{cases}$$

则称此复函数集是正交函数集。

复函数集$\{e^{jn\Omega t}\}$在区间(t_0,t_0+T)是完备的正交函数集，式中$T=2\pi/\Omega$。它在区间(t_0,t_0+T)满足：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}e^{jm\Omega t}(e^{jn\Omega t})^*dt=\int_{t_0}^{t_0+T}e^{j(m-n)\Omega t}dt=\begin{cases}0, m\neq n\\ T, m=n\end{cases}$$

二、信号分解为正交函数

设有n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$在(t_1,t_2)构成一个正交函数空间。将任一函数f(t)用这n个正交函数的线性组合来表示为：

$$f(t) \approx C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \ldots + C_n \varphi_n(t)$$

式中C的选择应使均方误差最小，均方误差为：

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t)]^2 dt$$

$$=\frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\{f^2(t)-2f(t)\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)+[\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2\}dt$$

为求使均方误差最小的第i个系数C_i，必须使：

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i}=0$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i}=\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2f(t)C_i\varphi_i(t)+C_i^2\varphi_i(t)^2]dt=0$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt + 2C_i\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)^2 dt = 0$$

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)^2 dt} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt$$

式中 $K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)^2 dt$

当各个系数C都按上式进行选择时，均方误差为：

$$=\frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\{f^2(t)-2f(t)\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)+[\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2\}dt$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{(t_2-t_1)}[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-2\sum_{j=1}^{n}C_j\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_j(t)dt+\sum_{j=1}^{n}C_j^{\ 2}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j(t)^2dt]$$

$$=\frac{1}{(t_2-t_1)}[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-2\sum_{j=1}^{n}C_j^{\ 2}K_j+\sum_{j=1}^{n}C_j^{\ 2}K_j]$$

$$=\frac{1}{(t_2-t_1)}[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-\sum_{j=1}^{n}C_j^{\ 2}K_j]$$

$\geqslant 0$

$\geqslant 0$

当n→∞时均方差最小，为0。则：$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt=\sum_{j=1}^{n}C_j^{\ 2}K_j$

此时 $f(t)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j\varphi_j(t)$

§4.2 傅立叶级数

1、三角傅立叶级数

因为三角函数集{1，cos(Ω t)， cos(2Ω t)，… cos(mΩ t)，…， sin (Ω t)， sin (2Ω t)，…， sin (nΩ t)，…}是一个完备的正交函数集，因此对于任一周期为T的周期信号，都可以用三角函数集的线性组合来表示：

$$f(t)=a_0/2+a_1\cos(\Omega t)+a_2\cos(2\Omega t)+\ldots+a_n\cos(n\Omega t)+\ldots$$

$$+b_1\sin(\Omega t)+b_2\sin(2\Omega t)+\ldots+b_n\sin(n\Omega t)+\ldots$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

这就是函数在区间(t_0,t_0+T)内的三角傅立叶级数表示式。a_0/2是该函数在区间内的平均值，亦即直流分量。当n为1时，$a_1$cos (Ω t)和$b_1$sin (Ω t)合成一频率为Ω的正弦分量，称为基波分量， Ω称为基波频率。n大于1时称为n次谐波分量。

T=2π / Ω

式中傅立叶系数

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\Omega t dt} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\Omega t dt} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

将$a_n\cos(n\Omega t)$和$b_n\sin(n\Omega t)$合成一正弦分量为：

$$a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t$$

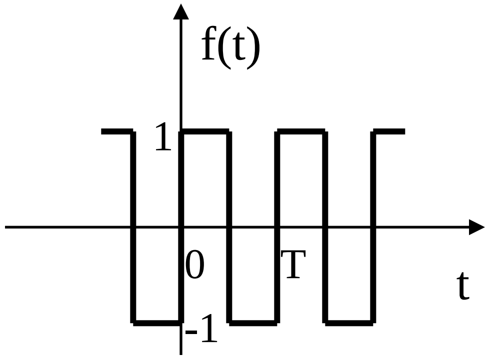
$$= \sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}\Big(\underbrace{\frac{a_n}{\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}}_{\cos\varphi_n}\cos n\Omega t + \underbrace{\frac{b_n}{\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}}_{-\sin\varphi_n}\sin n\Omega t\Big)$$

$$= A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

则 $$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

可见，系数a_n和振幅A_n都是频率$n\Omega$的偶函数，系数b_n和相位φ_n都是频率$n\Omega$的奇函数。

例4.1 将如图所示的方波信号f(t)展开为傅立叶级数。



解：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} (-1)\cos n\Omega t dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} (1)\cos n\Omega t dt$$

$$= \frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}(-\sin n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}(\sin n\Omega t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

因为$\Omega = 2\pi / T$，所以$a_n = 0$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\sin n\Omega t dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}(1)\sin n\Omega t dt$$

$$=\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}(\cos n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}-\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}(\cos n\Omega t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\pi(\cos 0-\cos n\pi)-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)$$

$$=\frac{2}{n\pi}(\cos 0-\cos n\pi) \qquad =\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, n\text{为奇数}\\ 0, n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$$

2、指数傅立叶级数

因为复函数集$\{e^{jn\Omega t}\}$在区间(t_0,t_0+T) 是完备的正交函数集，所以对于任一周期为T的周期信号，也可以用指数函数集的线性组合来表示：

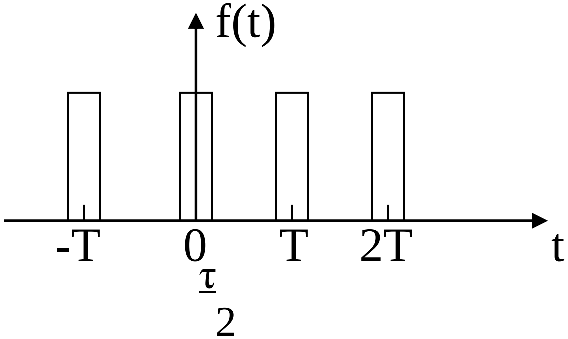
$$f(t)=F_0+F_1 e^{j\Omega t}+ F_2 e^{j2\Omega t}+\ldots+ F_n e^{jn\Omega t} +\ldots$$

$$+ F_{-1} e^{-j\Omega t}+ F_{-2} e^{-j2\Omega t} +\ldots+ F_{-n} e^{-jn\Omega t} +\ldots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

其中 $$F_n=\frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-jn\Omega t}e^{jn\Omega t}dt}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

例：求幅度为1，脉冲宽度为τ的周期性矩形脉冲的指数傅里叶级数，其周期为T，如图：



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\left.\frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega}$$

$$=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{\frac{n\Omega\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\frac{n\pi\tau}{T})}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

定义取样函数Sa(x)=sin(x)/x，则

$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})e^{jn\Omega t}$$

指数傅立叶级数也可由三角傅立叶级数得到。因为

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

把三角傅立叶级数变为：
$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}]$$

因为振幅A_n是频率n Ω的偶函数， $A_{-n} = A_n$，相位φ_n是频率n Ω的奇函数， $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ 。所以：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} e^{jn\Omega t}$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t}$$

若令φ_0=0，则上式变为：

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}$$

其中 $\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}=F_n$ 称为复傅立叶系数，简称傅立叶系数，其模为$|F_n|$，相角为φ_n，则：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(A_n \cos\varphi_n + jA_n \sin\varphi_n) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

3、奇偶函数的傅立叶系数

奇函数的波形对称于原点，偶函数的波形对称于纵坐标轴，因此，对于奇函数$f_o(t)$有：

$$\int_{-t}^{0} f_o(\tau)d\tau = -\int_{0}^{t} f_o(\tau)d\tau \qquad \int_{-t}^{t} f_o(\tau)d\tau = 0$$

对于偶函数$f_e(t)$有：

$$\int_{-t}^{0} f_e(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f_e(\tau)d\tau \qquad \int_{-t}^{t} f_e(\tau)d\tau = 2\int_{0}^{t} f_e(\tau)d\tau$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t dt$$

若f(t)为偶函数，则f(t)cos (nΩ t)为偶函数而f(t)sin (nΩ t)为奇函数，由对称关系可知：

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t dt \qquad b_n = 0$$

只包含余弦分量和直流分量

若f(t)为奇函数，则f(t)cos (nΩ t)为奇函数而f(t)sin (nΩ t)为偶函数，由对称关系可知：

只包含正弦分量

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t dt$$

对于一般的非奇非偶的信号，总可以分解为一个奇分量和一个偶分量相加：

$$f(t)=f_o(t)+f_e(t)$$

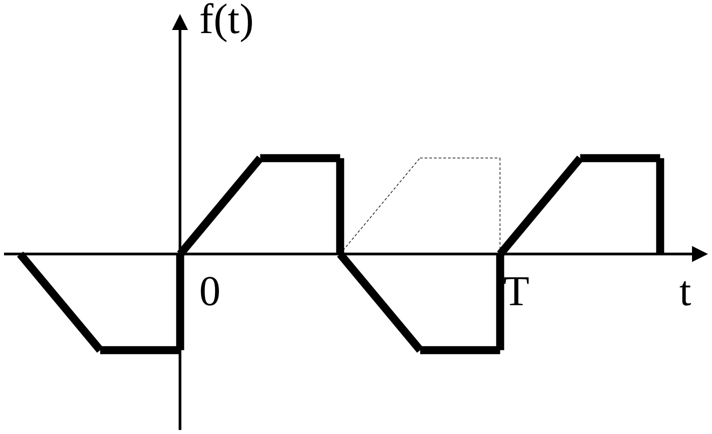
$$f(-t)=f_o(-t)+f_e(-t)= -f_o(t)+f_e(t)$$

可得：

$$f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2} \qquad f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

4、奇谐函数和偶谐函数

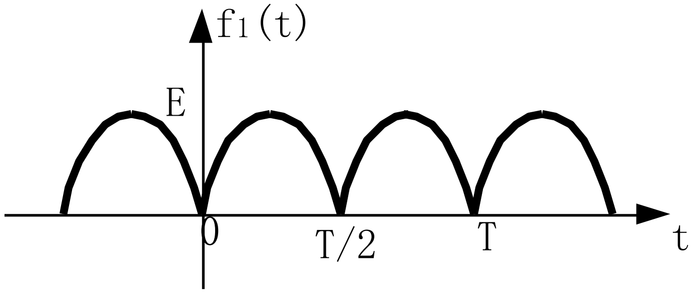
如果函数f(t)的前半周期波形平移T/2后和后半周期的波形对称于横轴，即$f(t)=-f(t\pm T/2)$：则这种函数称为奇谐函数。如图：



在这种情况下，函数的傅立叶级数展开式中只包含奇次谐波而不包含直流分量和偶次谐波。

类似的，偶谐函数满足：$f(t)=f(t\pm T/2)$，其傅立叶级数展开式中只包含偶次谐波和直流分量。

例4.2 求正弦交流信号$E\sin(\omega_0 t)$经全波或半波整流后的傅立叶展开式。



全波整流信号

解：1）全波整流信号

$$f_1(t) = E\left|\sin(\omega_0 t)\right| = E\left|\sin(\frac{2\pi}{T}t)\right|$$

由于$f_1(t)$是偶函数，因此$b_n=0$。

$$a_n = \frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_0 t)\cos n\Omega t dt \quad = \frac{2E}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx$$

$\Omega = \omega_0$, $\Omega t = x$

$$a_n = \frac{2E}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(1+n)x}{2}+\frac{\sin(1-n)x}{2}\right]dx$$

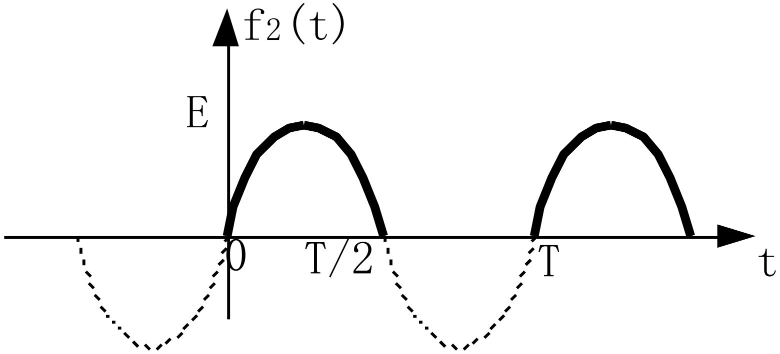
$$= \begin{cases} \dfrac{2E}{\pi}\left[-\dfrac{\cos[(n+1)x]}{2(n+1)}+\dfrac{\cos[(n-1)x]}{2(n-1)}\right]_0^{\pi}, n \neq 1 \\ \dfrac{2E}{\pi}\dfrac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\pi} = 0, n = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{2E}{\pi}\left[-\frac{(n-1)\cos[(n+1)\pi]-(n+1)\cos[(n-1)\pi]}{2(n^2-1)}+\frac{(n-1)\cos 0-(n+1)\cos 0}{2(n^2-1)}\right]$$

$$= -\frac{2E}{\pi}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}$$

n为偶数时a_n不为零，因此：

$$f_1(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}\cos(2\omega_0 t)-\frac{2}{15}\cos(4\omega_0 t)-\ldots\right]$$



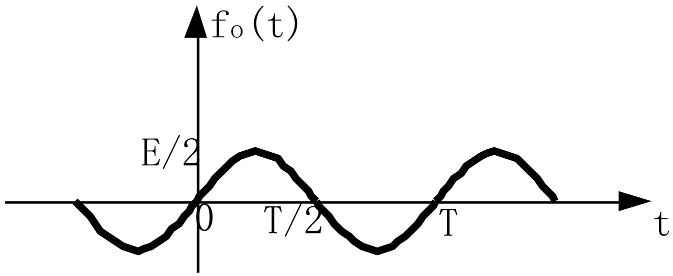
半波整流信号

2）半波整流信号

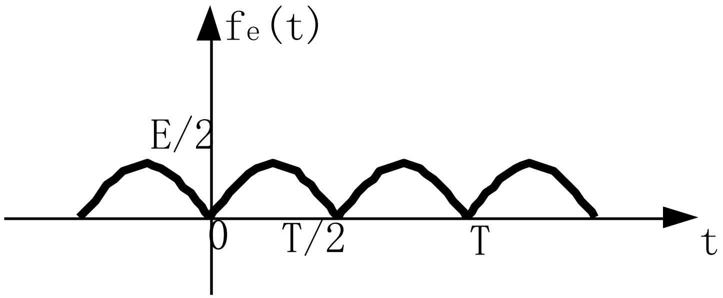
半波整流信号可以由公式推出，也可以分解为奇函数和偶函数两部分。

$$f_o(t)=\frac{f_2(t)-f_2(-t)}{2}$$

$$=\frac{E}{2}\sin(\omega_0 t)$$

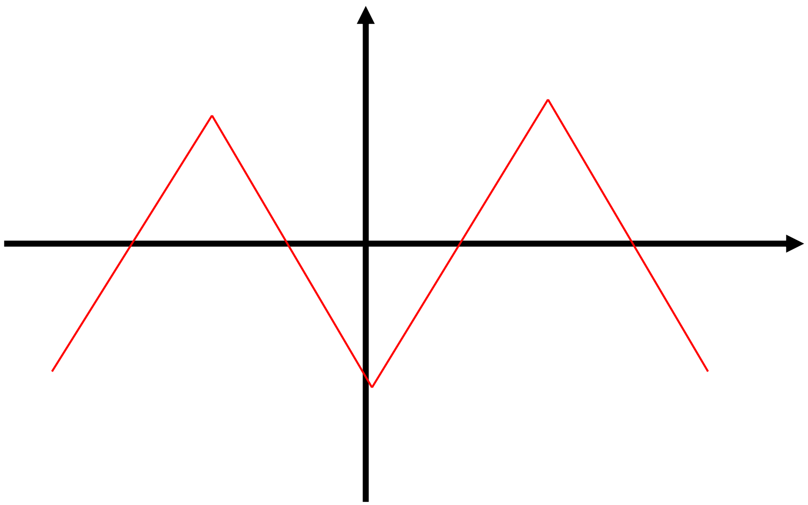


$$f_e(t) = \frac{f_2(t) + f_2(-t)}{2} = \frac{1}{2} f_1(t)$$

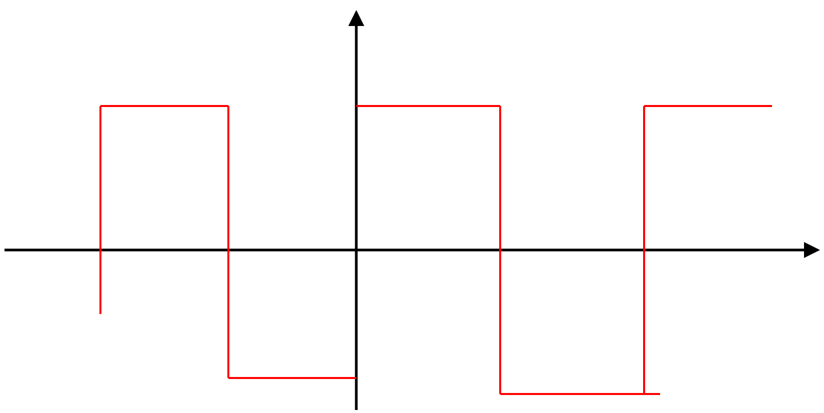


$$f_2(t) = \frac{E}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\sin(\omega_0 t) - \frac{2}{3}\cos(2\omega_0 t) - \frac{2}{15}\cos(4\omega_0 t) - \ldots\right]$$

例：利用傅立叶级数的对称性判断所含有的频率分量

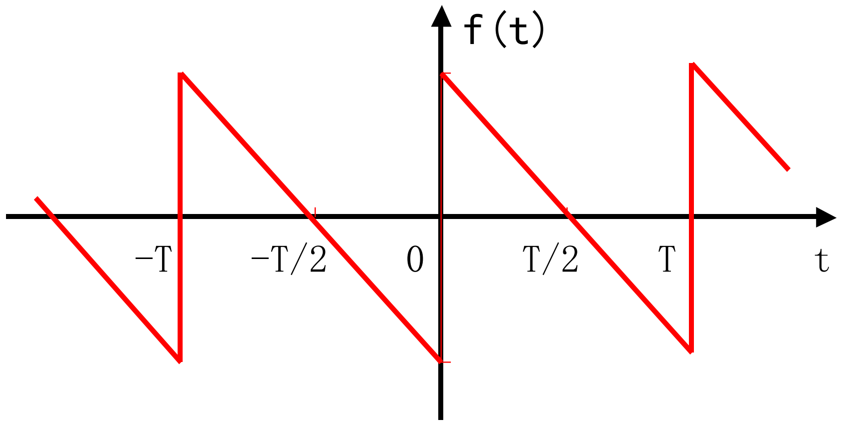


周期偶函数，奇谐函数，只含基波和奇次谐波的余弦分量



周期奇函数，奇谐函数，只含基波和奇次次谐波的正弦分量

例4.3 将图示信号展开为三角函数形式和指数形式的傅里叶级数



解题思路：判断信号的奇偶性→求出标准形式的系数

→求出常用形式的系数和相位

→求出指数形式的系数和相位。

解：

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{2}{T}t+1, & 0<t\le\dfrac{T}{2}\\ -\dfrac{2}{T}t-1, & -\dfrac{T}{2}<t\le 0\end{cases}$$

$\because f(t)$为奇函数 $\quad\therefore a_n=0$

$$\therefore f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[-\frac{2}{T}t+1]\sin(n\Omega t)dt$$

$$=-\frac{4}{Tn\Omega}\int_0^{\frac{T}{2}}[-\frac{2}{T}t+1]d[\cos(n\Omega t)]$$

$\because$ 分部积分法 $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$

$$\therefore b_n = -\frac{4}{Tn\Omega}\left\{\left[-\frac{2}{T}t+1\right]\cos(n\Omega t)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}}\cos(n\Omega t)\bullet\left(-\frac{2}{T}\right)dt\right\}$$

$$b_n = -\frac{4}{n\Omega T}\left\{-1+\frac{2}{T}\bullet\frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right\}$$

$$= \frac{4}{n\Omega T} = \frac{2}{n\pi}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\therefore\ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(n\Omega t)$$

$$\therefore \text{常用形式} \quad f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\omega_1 t-90^\circ)$$

$$\text{其中}\begin{cases} A_0=0 & \text{（直流分量）} \\ A_n=b_n=\dfrac{2}{n\pi} & \text{（第n次谐波分量的幅值）} \\ \varphi_n=-arctg\dfrac{b_n}{a_n}=-90^\circ & \text{（第n次谐波分量的相位）} \end{cases}$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2j}b_n = \frac{1}{jn\pi}$$

$$\left|F_n\right| = \frac{1}{n\pi}, \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{j(-90^\circ)} e^{jn\Omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{j\left(n\Omega t - 90^\circ\right)}$$

§4.3 周期信号的频谱

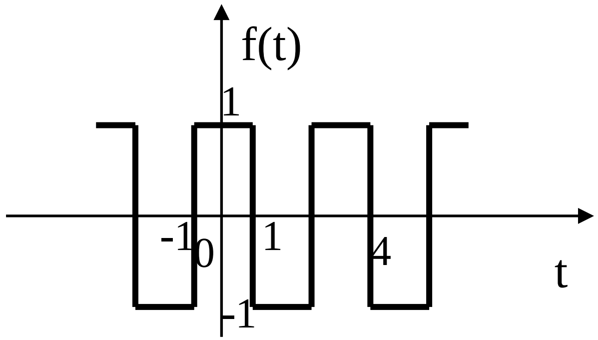
一、周期信号的频谱

周期信号可以分解为一系列正弦信号或复指数信号之和，即：

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

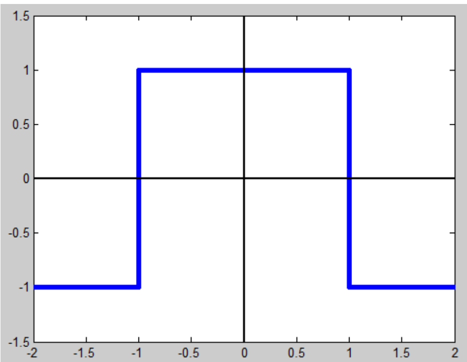
例 将如图所示的方波信号f(t)展开为三角傅立叶级数。



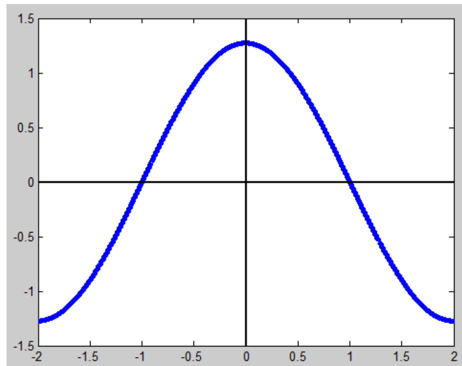
解：

$$a_n = \frac{4}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) \qquad b_n = 0$$

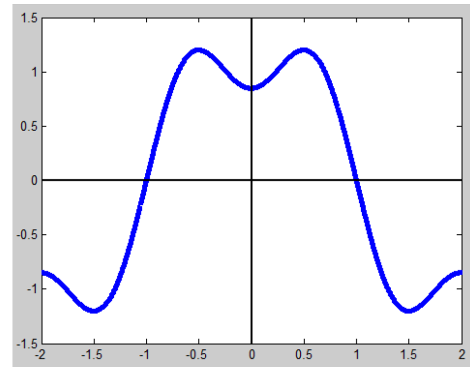
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\Omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\Omega t) - \ldots\right]$$



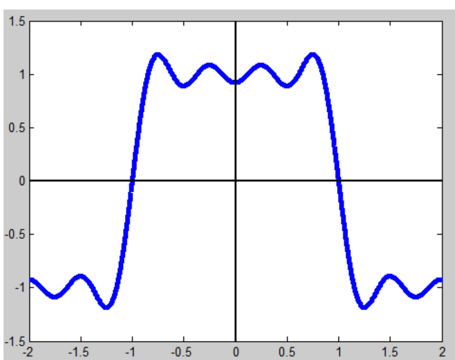
方波信号



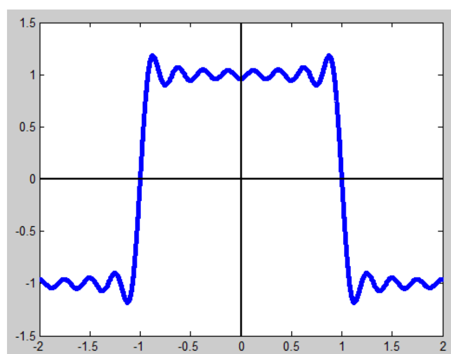
基波分量



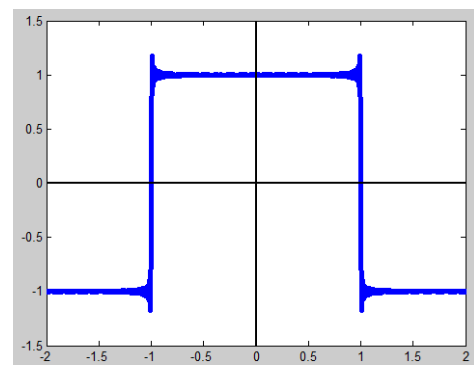
基波+3次谐波



基波+3、5、7次谐波

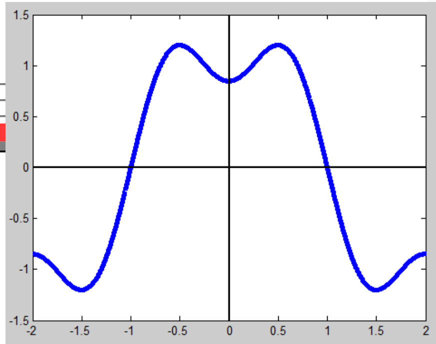
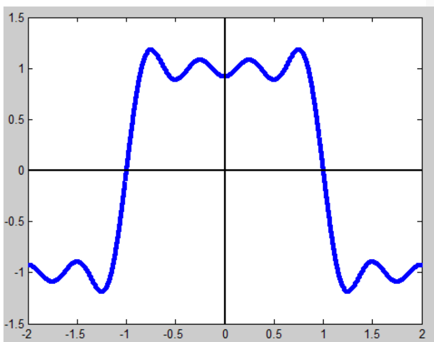
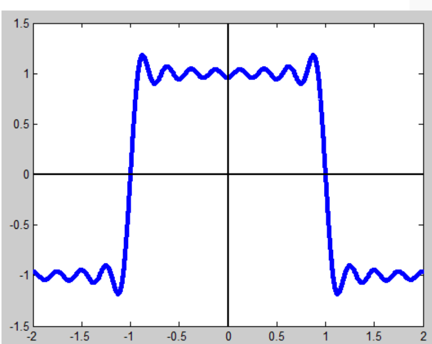
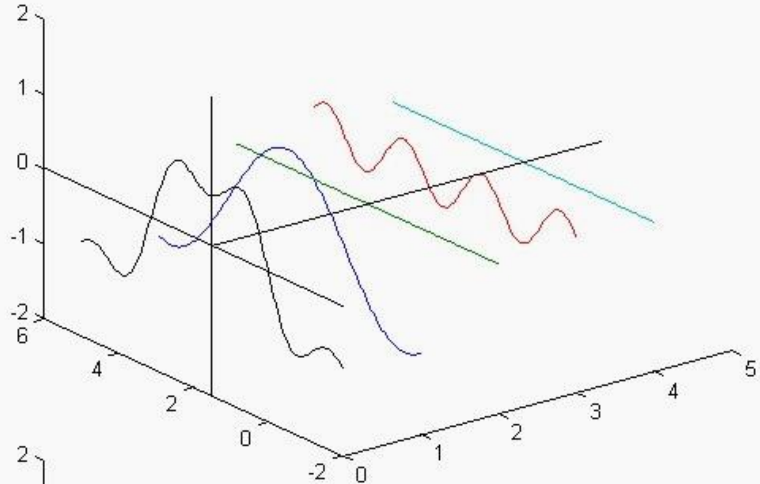
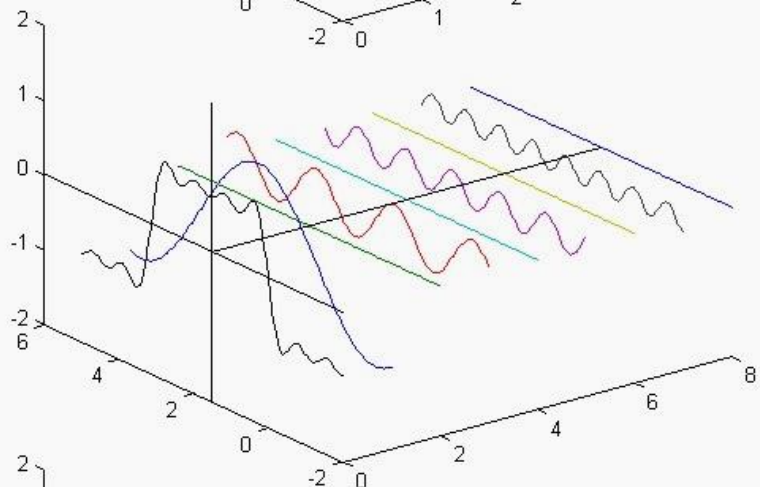
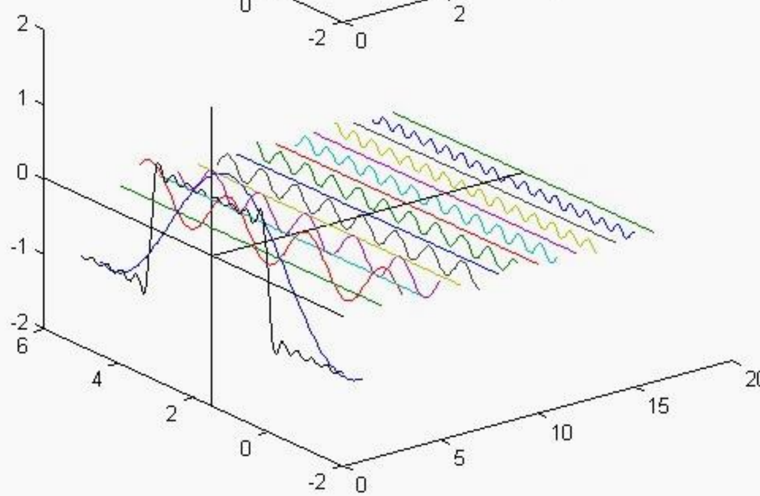
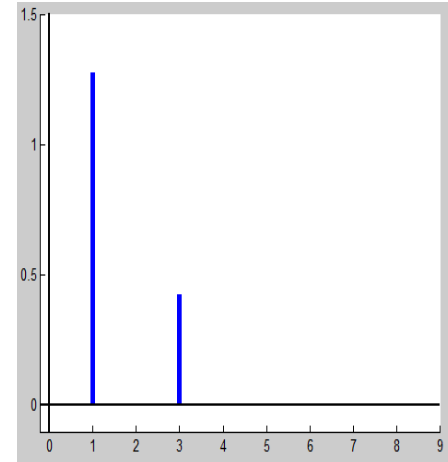
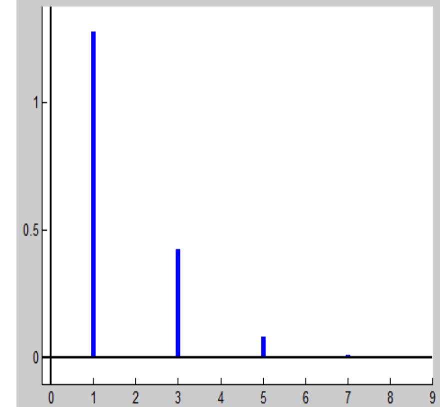


基波+3、…、15次谐波



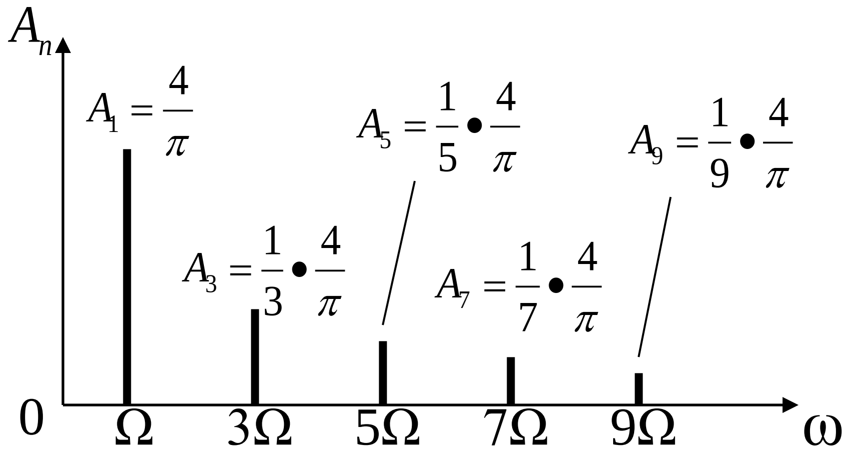
基波+3、…、199次谐波

吉布斯现象

可以看出，幅度A_n和F_n及相位φ_n都是$n\Omega$的函数，如果把它们对$n\Omega$的关系绘成线图，则可清楚而直观地看出各分量相对大小。这种图称为幅度频谱或相位频谱。

周期性方波 $f(t)=\dfrac{4}{\pi}\left[\sin\Omega t+\dfrac{1}{3}\sin 3\Omega t+\dfrac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$



图中每条竖线代表该频率分量的幅度，称为谱线。

类似地，也可以画出各谐波相位φ_n与$n\Omega$的线图，称为相位频谱。

周期信号的频谱具有离散性、谐波性和收敛性。

例 $$f(t)=1+3\cos(\pi t+10°)+2\cos(2\pi t+20°)$$

$$+0.4\cos(3\pi t+45°)+0.8\cos(6\pi t+30°),$$

试画出$f(t)$的振幅谱和相位谱。

解 $f(t)$为周期信号，题中所给的$f(t)$表达式可视为$f(t)$的傅里叶级数展开式。据

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

可知，其基波频率$\Omega=\pi$(rad/s)，基本周期$T=2$ s，$\omega=2\pi$、4π、 6π分别为二、 三、六次谐波频率。且有

$$\frac{A_0}{2} = 1 \qquad \varphi_1 = 0°$$

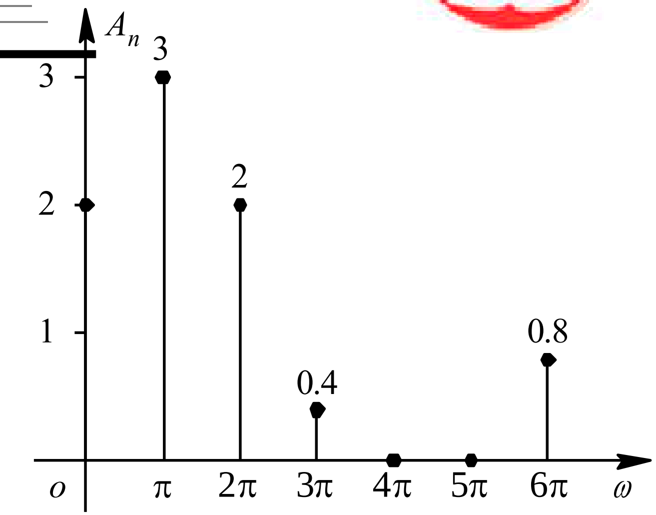
$$A_1 = 3 \qquad \varphi_1 = 10°$$

$$A_2 = 2 \qquad \varphi_2 = 20°$$

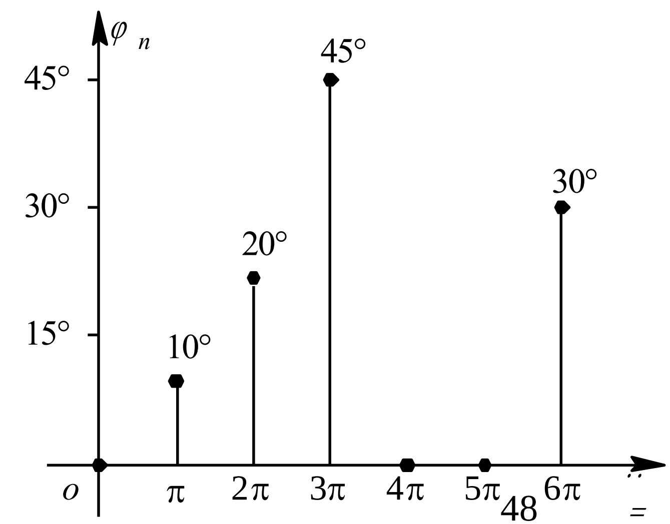
$$A_3 = 0.4 \qquad \varphi_3 = 45°$$

$$A_6 = 0.8 \qquad \varphi_6 = 30°$$

其余 $\dot{A}_n = 0$



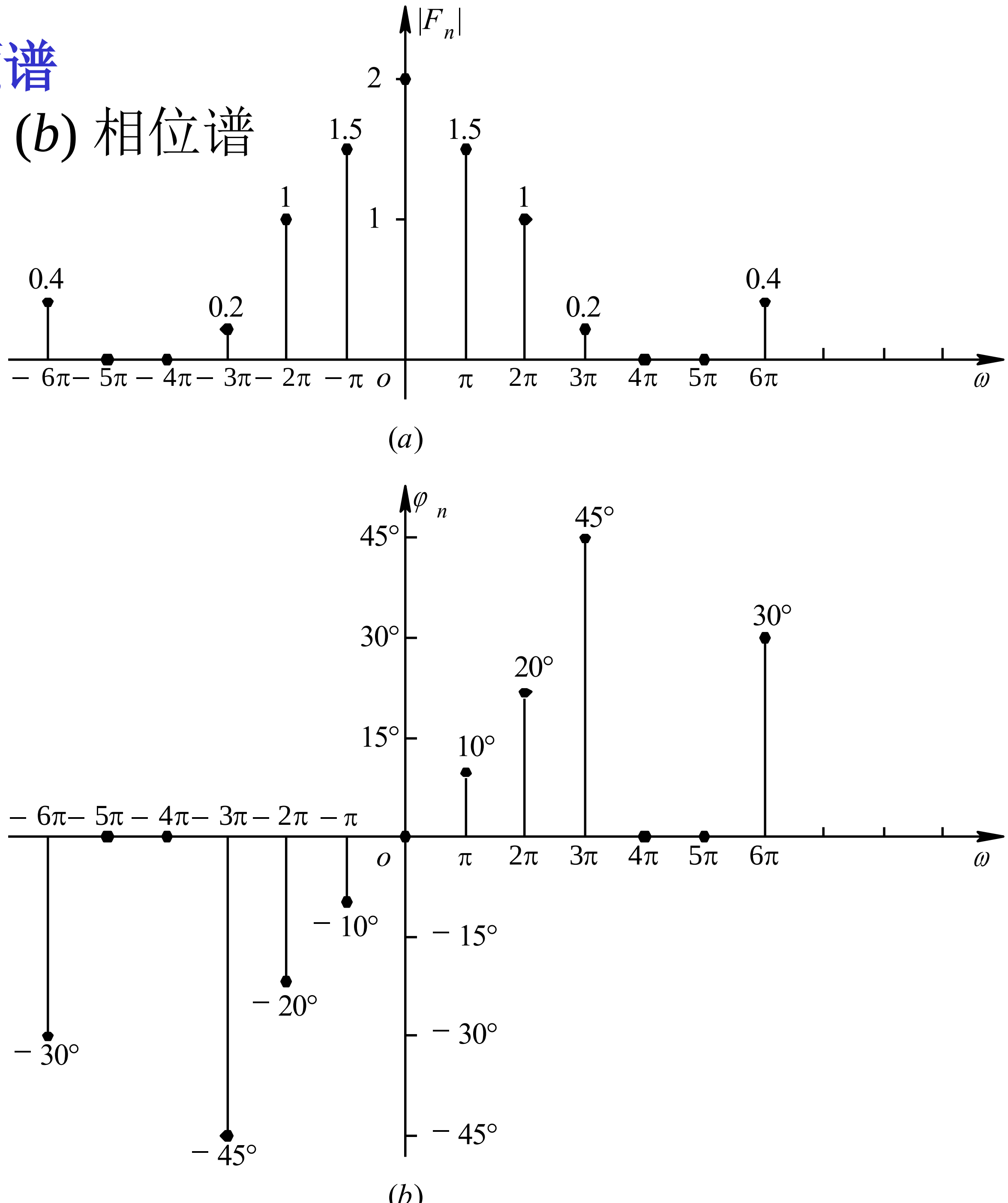
(a)



(b)

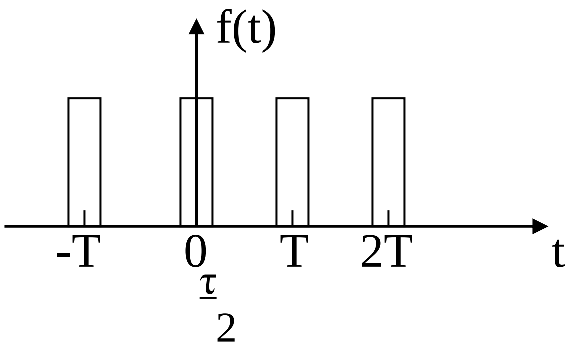
信号的双边频谱

(*a*) 振幅谱； (*b*) 相位谱



二、周期矩形脉冲的频谱

幅度为1，脉冲宽度为τ的周期性矩形脉冲，其周期为T，如图：



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \quad = \frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega}$$

$$=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{\frac{n\Omega\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\frac{n\pi\tau}{T})}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

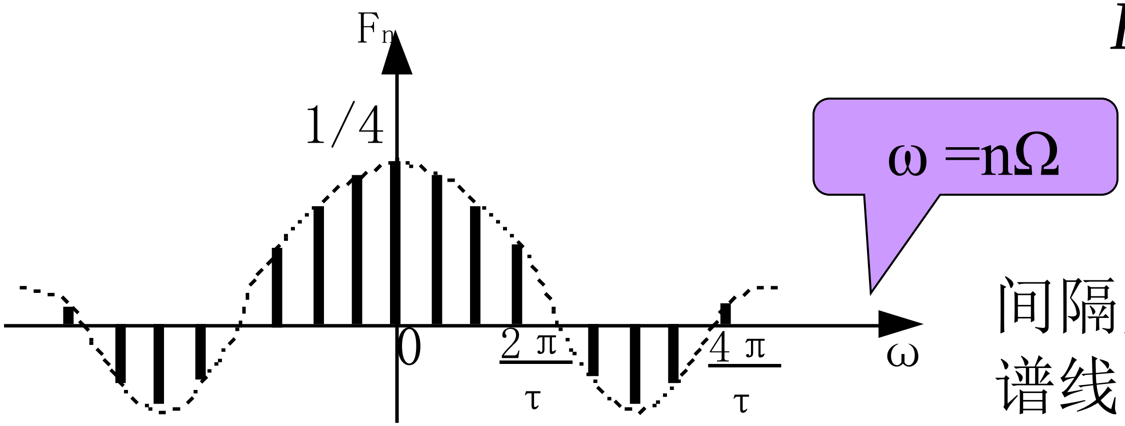
定义取样函数Sa(x)=sin(x)/x，则

$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})e^{jn\Omega t}$$

T=4τ 时的幅度频谱如图：

$$F_n = \frac{1}{4} Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})$$



图中两条谱线之间的间隔是Ω， 周期T越大，谱线间隔越小，频谱越稠密。

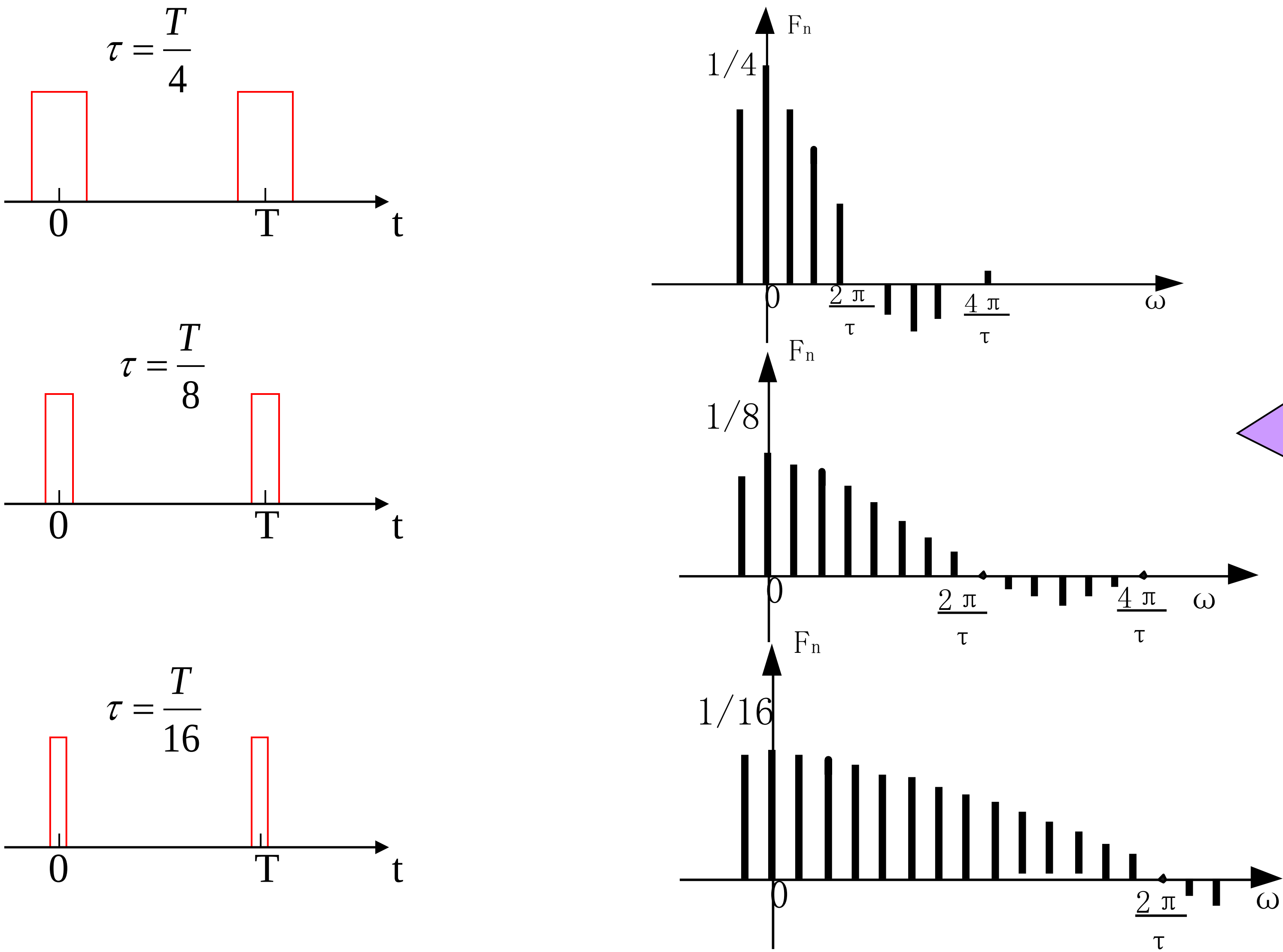
对于周期矩形脉冲，其谱线的幅度按包络线Sa(ωτ/2)的规律变化。在ωτ/2＝mπ 各处，包络为零，其相应的谱线也为零。

周期矩形脉冲信号包含无限多条谱线，但由于各谱线的幅度随频率的增高而减小，其信号能量主要集中在第一个零点($\omega = 2\pi/\tau$)以内。通常把$0 \le \omega < 2\pi/\tau$的频率范围称为周期矩形脉冲信号的带宽，用ΔF表示。

$$\Delta F = \frac{1}{\tau}$$

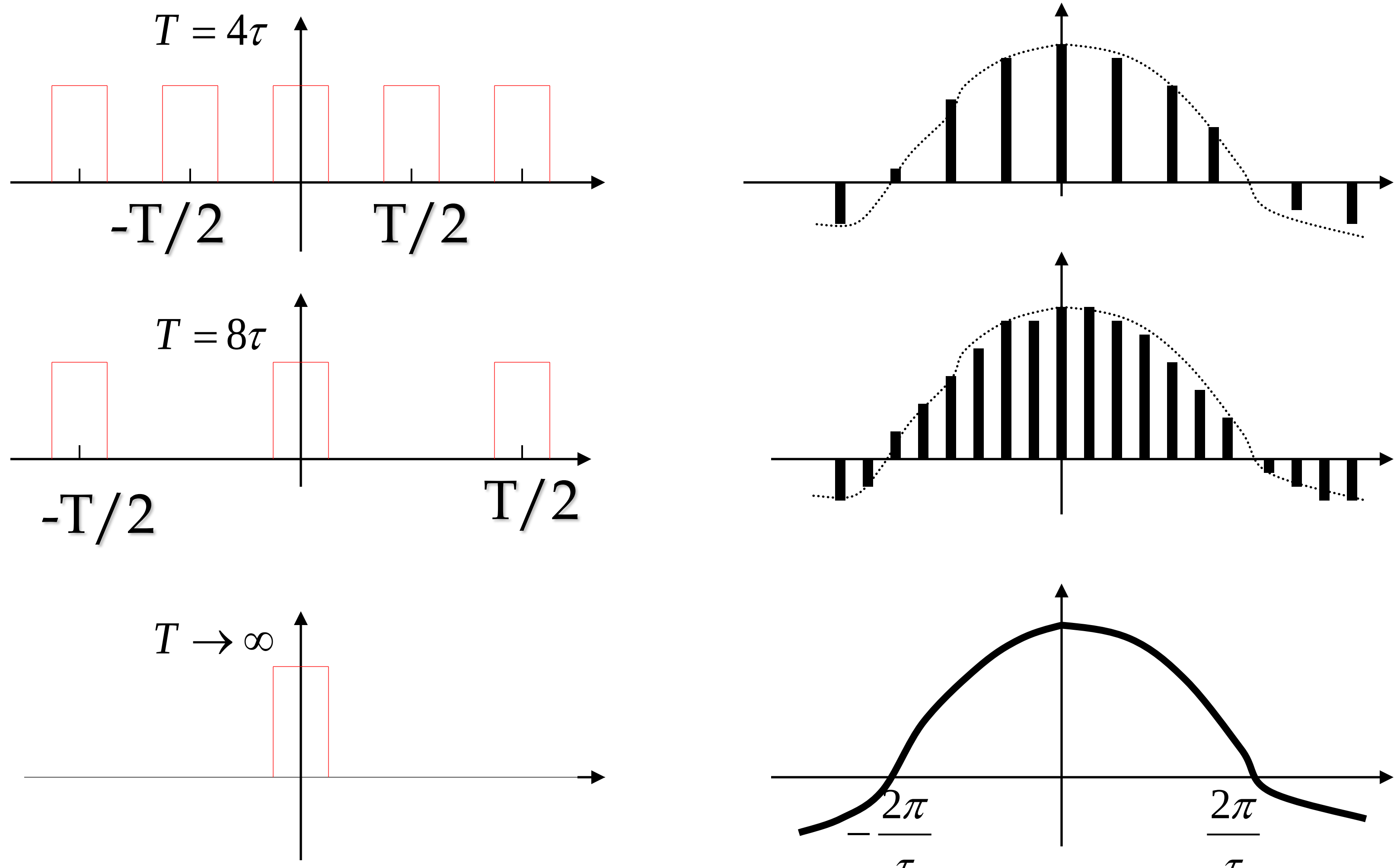
下面画出了周期相同，脉冲宽度不同的信号及其频谱，以及脉冲宽度相同而周期不同的信号及其频谱。

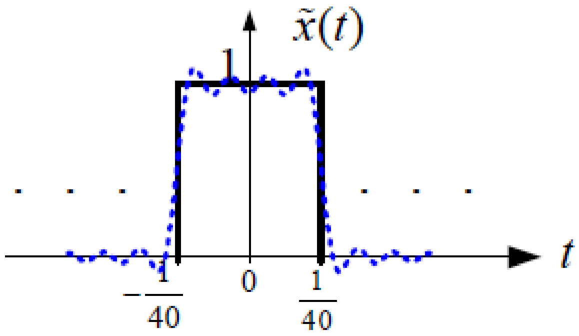
$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

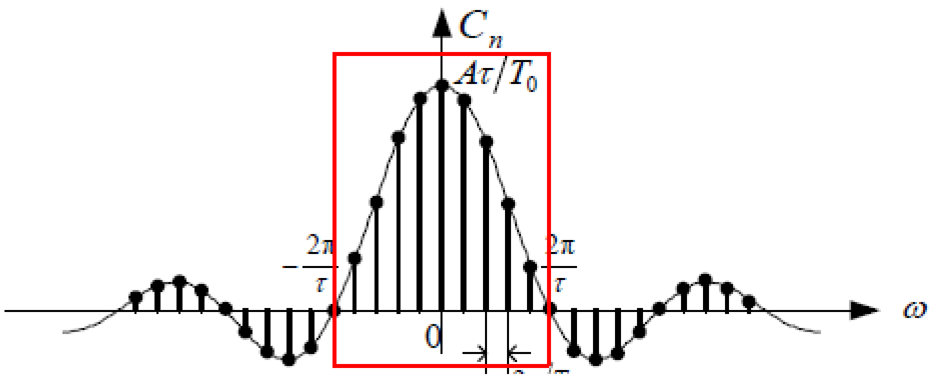


频带宽度与脉冲宽度成反比

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$







◆ 丢失有效带宽以外的谐波成分，不会对信号产生明显影响

四、周期信号的功率

周期信号是功率信号。周期信号f(t)的平均功率与傅立叶级数有下列关系：

$$P=\overline{f^2(t)}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)]^2dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\{(\frac{A_0}{2})^2+A_0\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)+[\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)]^2\}dt$$

$$=(\frac{A_0}{2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2$$

$$P=(\frac{A_0}{2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2$$

上式右端第一项为直流功率，第二项为各次谐波的功率之和。可见，周期信号的功率等于直流功率与各次谐波功率之和。

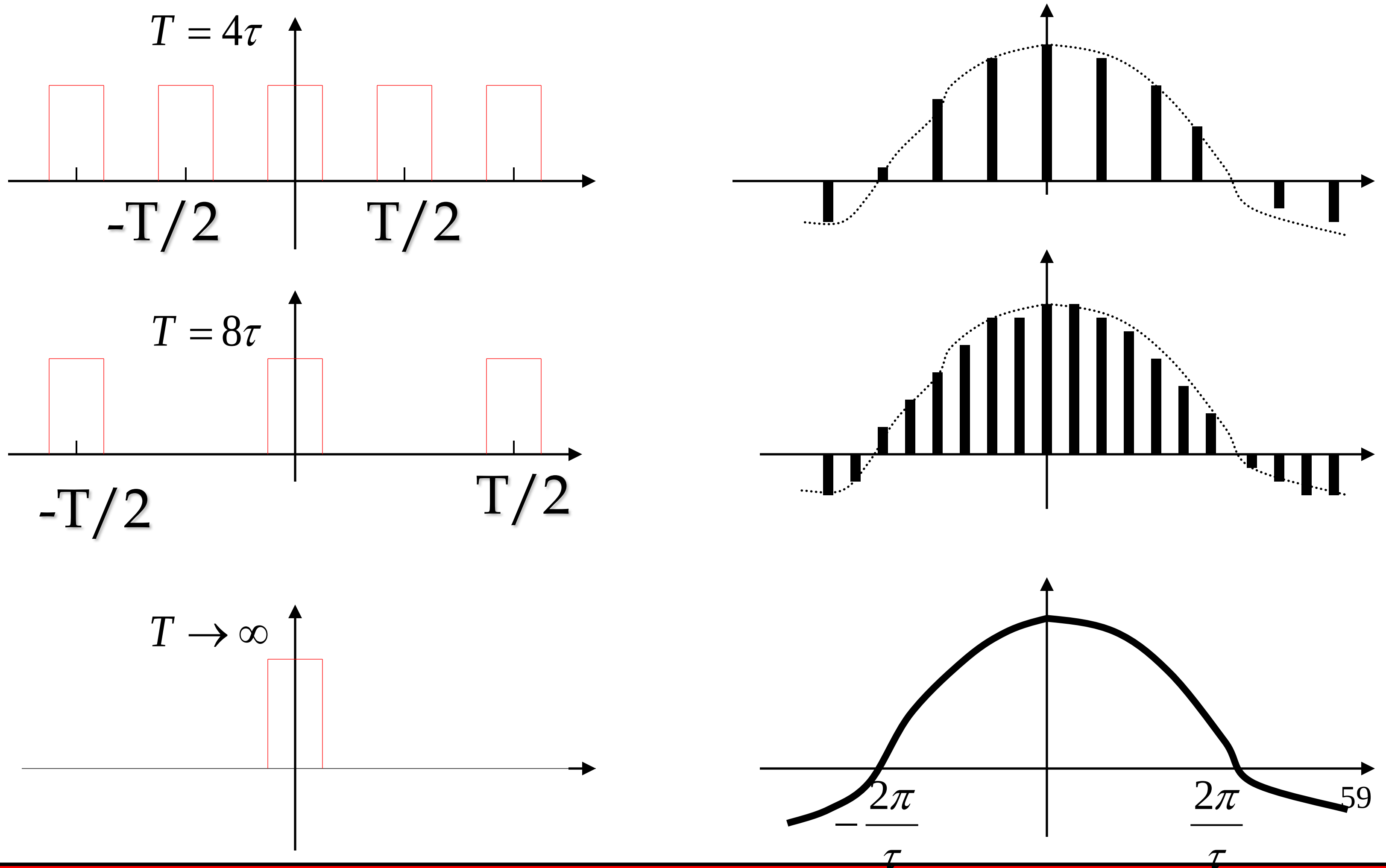
由于$|F_n|$是n的偶函数，且$|F_n| =A_n/2$，上式可以改写为：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

这两个式子表明，时域和频域的能量是守恒的。

§ 4.4 非周期信号的频谱

一、傅立叶变换的定义



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

当周期信号的周期T趋于∞时，周期信号就演变成了非周期信号，谱线间的间隔变得无穷小，谱线的长度趋于零。

因此，对于非周期信号，引入“频谱密度函数”：

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{F_n}{1/T} = \lim_{T\to\infty} F_n T$$

单位频带的频谱值

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$T \to \infty \qquad n\Omega = \omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n T e^{jn\Omega t}\bullet\frac{1}{T}$$

$$T\to\infty\quad \Omega=\frac{2\pi}{T}=\Delta\omega\to d\omega\quad \frac{1}{T}=\frac{\Omega}{2\pi}\to\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

以上两式称为傅立叶变换和傅立叶逆变换。F(jω)称为f(t)的频谱密度函数，而f(t)称为F(jω)的原函数。

F(jω)一般为复函数 $F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)$

也可写成三角形式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|\sin[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

若f(t)为实数，则F(jω)实部为偶函数，虚部为奇函数；幅频|F(jω)|为ω的偶函数,相位φ为ω的奇函数

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|F(j\omega)\right|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

上式表明，非周期信号可看作由不同频率的余弦分量所组成。

$\frac{\left|F(j\omega)\right|d\omega}{\pi}$可看作各个余弦分量的振幅，它是无穷小量，所以信号的频谱不能再用幅度表示，而改用密度函数来表示。

△几点说明：

a.正变换给出了非周期信号的频谱的数学表达式。时间函数f(t)可以表示为频率在区间

$$(-\infty < \omega < \infty)$$

内的指数函数的连续和。

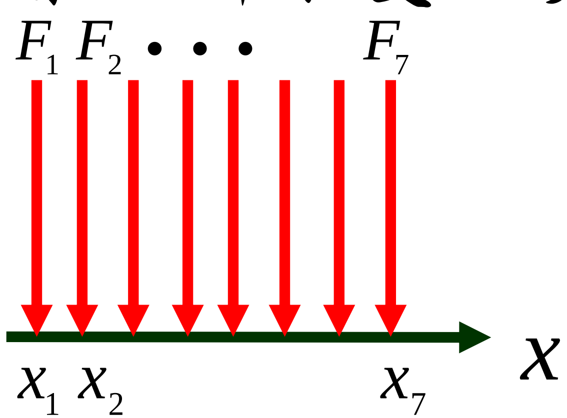
傅里叶变换提供了信号的频率描述和时间描述之间相互变换的工具。正变换通常叫做分析运算，反变换通常叫做综合运算。

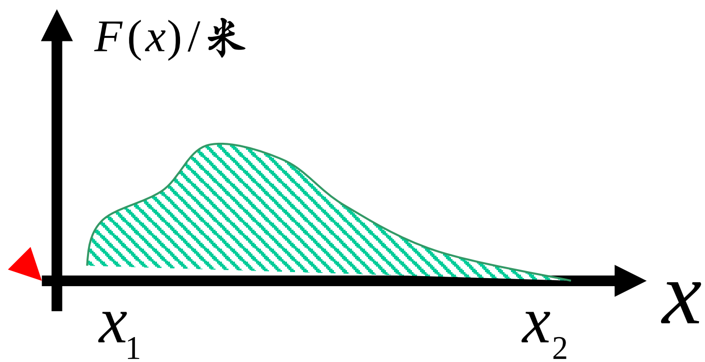
b.关于连续谱的说明

具有离散频谱的信号，其能量集中在一些谐波分量中。

具有连续频谱的信号，其能量分布在所有的频率中，每一频率分量包含的能量则为无穷小量。

用梁上所承受的负荷来说明：





$$w_T=\sum_{r=1}^{7}F_r\rightarrow \text{离散}$$

$$w=\int_{x_1}^{x_7}F(x)dx\rightarrow \text{连续}$$

c.傅立叶变换存在的充分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

用广义函数的概念，允许奇异函数也能满足上述条件，因而如阶跃、冲激一类函数也存在傅立叶变换

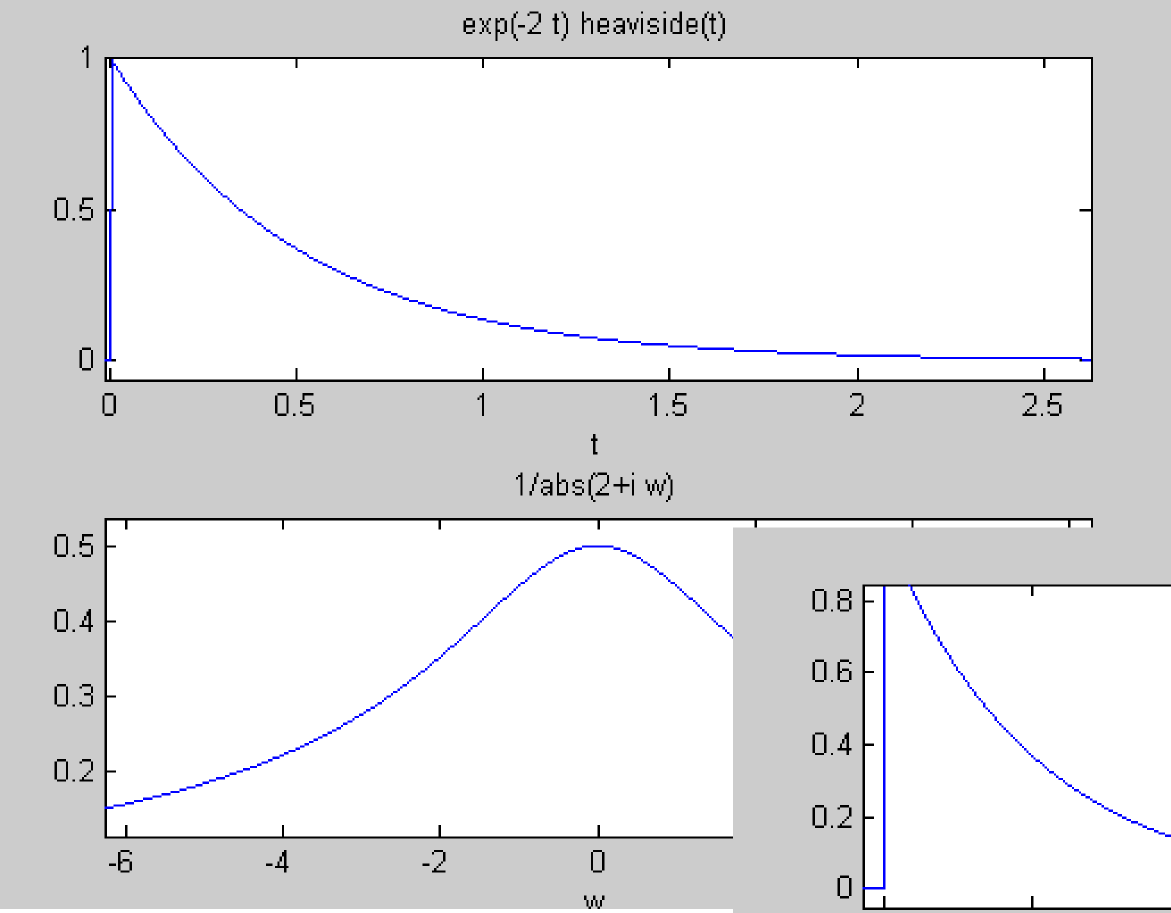
二、典型非周期信号的傅立叶变换

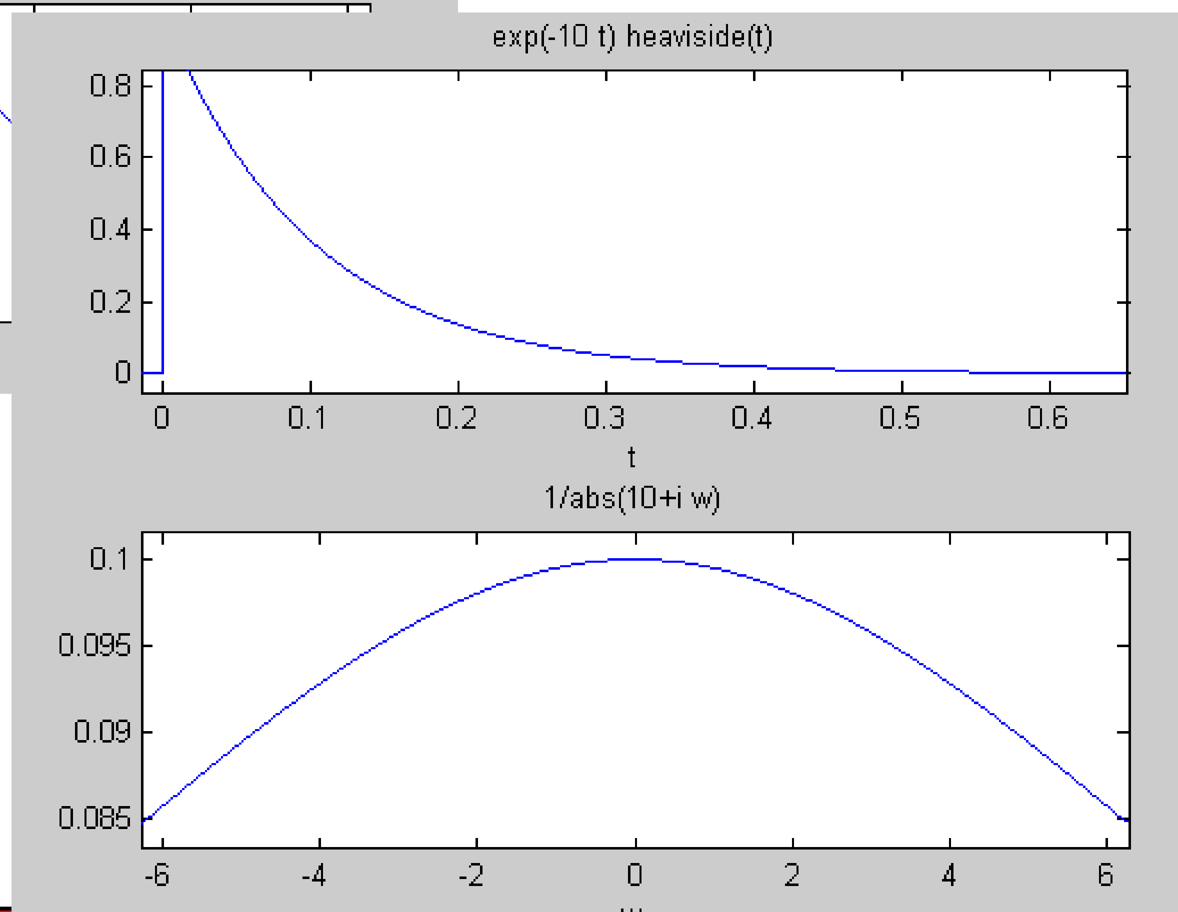
1 .单边指数信号

- 信号表达式 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & (t\geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega} \qquad (\alpha>0)$$

幅度 $\left|F(j\omega)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$ 相位 $\varphi(\omega)=-arctg(\dfrac{\omega}{\alpha})$


exp(-2 t) heaviside(t)
t
1/abs(2+i w)
w


exp(-10 t) heaviside(t)
t
1/abs(10+i w)
w

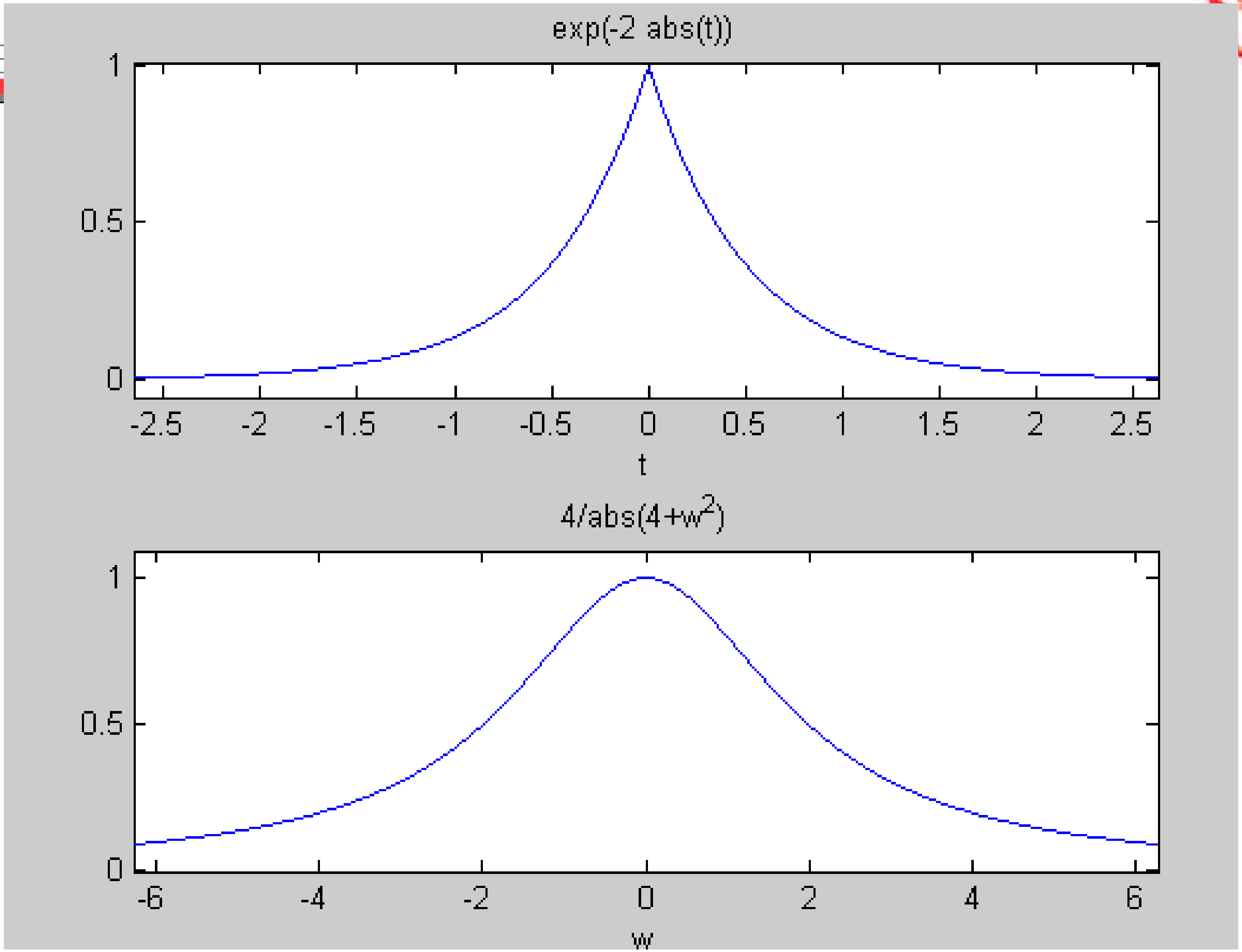
2 .双边指数信号

- 信号表达式 $f(t)=e^{-\alpha|t|} \qquad (-\infty<t<+\infty)$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}$$

$$\varphi(\omega)=0$$

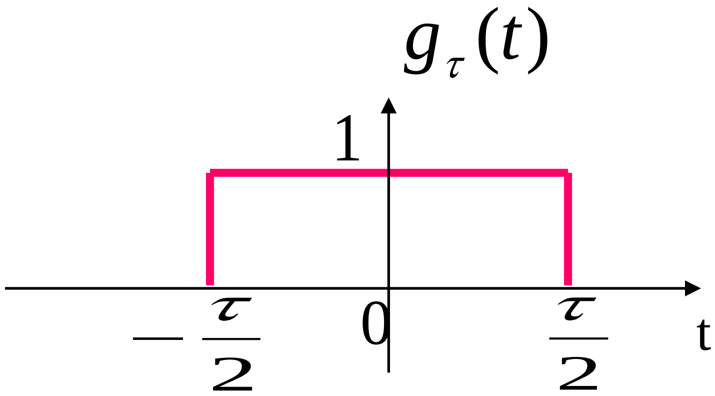

exp(-2 abs(t))
1
0.5
0
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t
4/abs(4+w2)
1
0.5
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
w

3 .矩形脉冲信号（门函数）

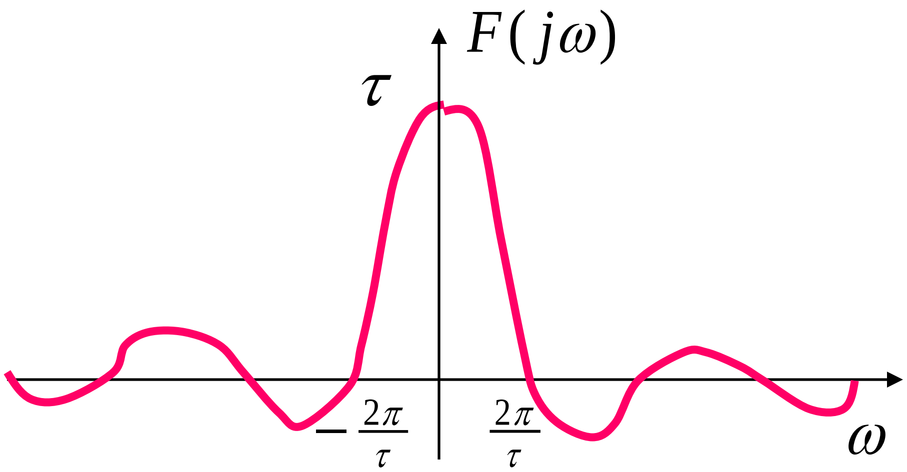
- 信号表达式$g_\tau(t)=\begin{cases}1 & (|t|\le\tau/2)\\ 0 & (|t|>\tau/2)\end{cases}$

$$F(j\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{e^{-j\tau\omega/2}-e^{j\tau\omega/2}}{-j\omega}=\frac{2\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega}$$

$$=\tau\left(\frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}}\right)=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$



$g_\tau(t)$
1
$-\frac{\tau}{2}$
0
$\frac{\tau}{2}$
t



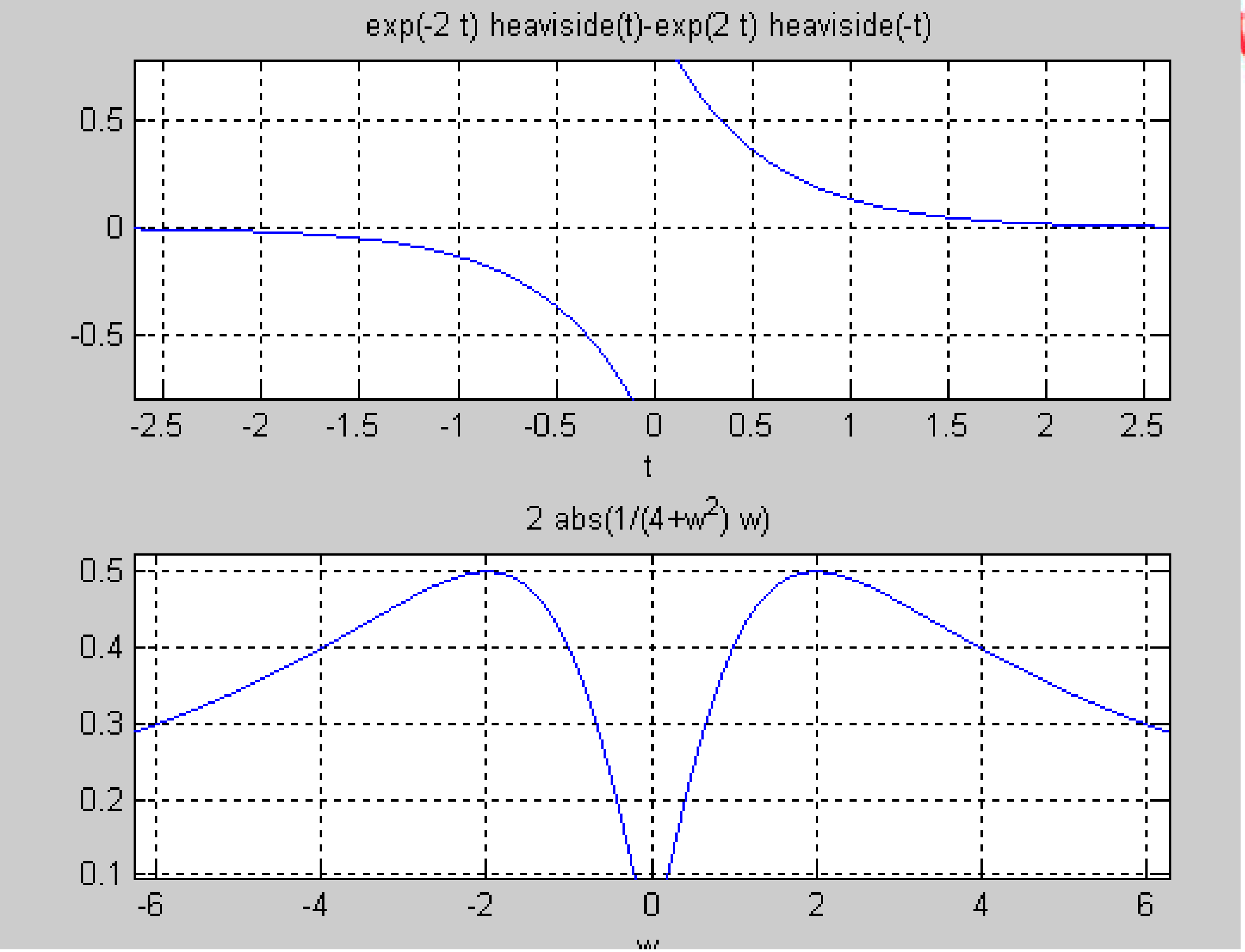
$F(j\omega)$
τ
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
ω

4．函数 $f_1(t)=\begin{cases}-e^{at}, t<0\\ e^{-at}, t>0\end{cases}$（其中$a>0$）

$$F_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=-\frac{2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\left|F_1(j\omega)\right|=\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2} \qquad \varphi_1(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & (\omega>0)\\ \frac{\pi}{2} & (\omega<0)\end{cases}$$


exp(-2 t) heaviside(t)-exp(2 t) heaviside(-t)
0.5
0
-0.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t
2 abs(1/(4+w^2) w)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-6
-4
-2
0
2
4
6
w

5.符号函数

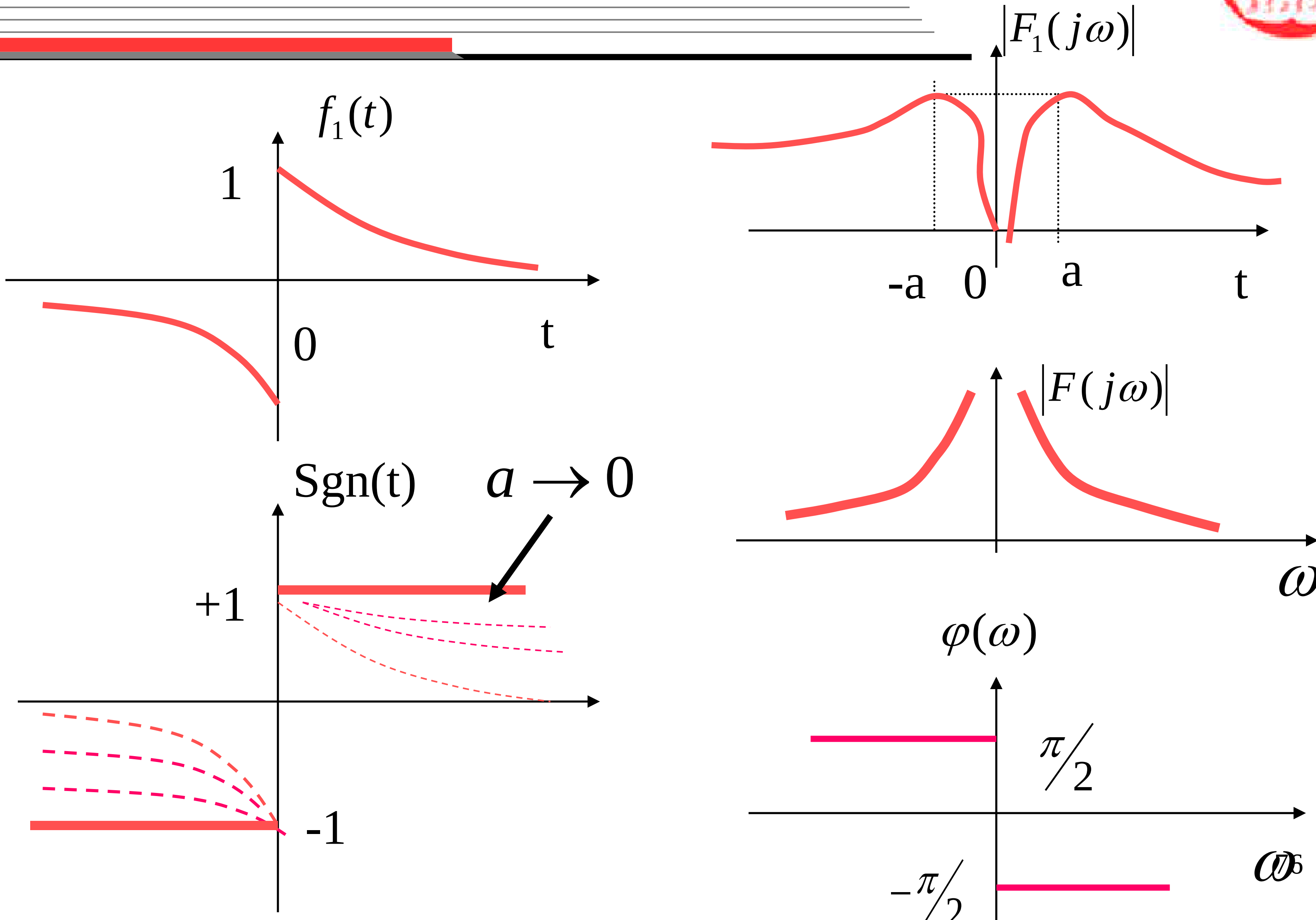
不满足绝对可积条件

- 信号表达式 $f(t)=\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}+1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$

$$f(t)=\lim_{a\to 0} f_1(t)=\lim_{a\to 0}[\mathrm{sgn}(t)e^{-a|t|}]$$

$$F(j\omega)=\lim_{a\to 0}F_1(j\omega)=\lim_{a\to 0}\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{-2j\omega}{\omega^2}=\frac{-2j}{\omega}$$

$$|F(j\omega)|=\frac{2}{|\omega|} \qquad \varphi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & (\omega>0)\\ +\frac{\pi}{2} & (\omega<0)\end{cases}$$



$f_1(t)$
1
0
t
$|F_1(j\omega)|$
-a
0
a
t
Sgn(t)
$a \to 0$
+1
-1
$|F(j\omega)|$
ω
$\varphi(\omega)$
$\pi/2$
$-\pi/2$
ω

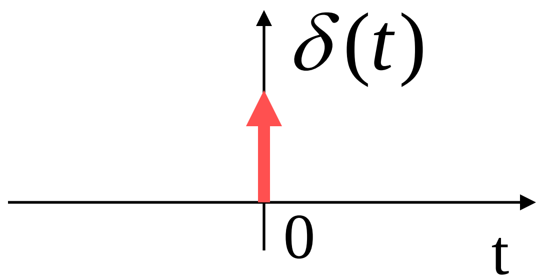
6 .冲激函数 $f(t)=\delta(t)$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

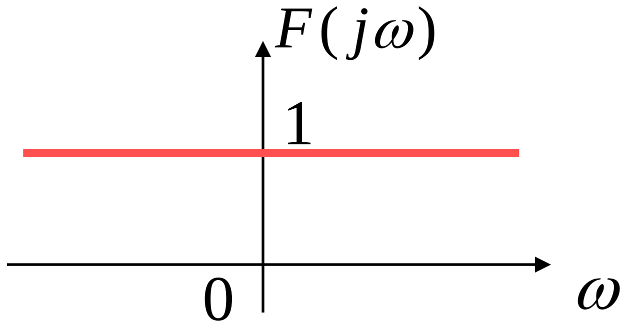
还可以把冲激函数看作幅度为1/τ，脉宽为τ的矩形脉冲当τ→ 0的广义极限。

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}g_{\tau}(t)$$

$$F(j\omega)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}F_g(j\omega)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\bullet\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})=1$$



$\delta(t)$
0
t



$F(j\omega)$
1
0
ω

7 .冲激偶函数 $f(t)=\delta'(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)e^{-j\omega t}dt=-\frac{d}{dt}(e^{-j\omega t})\Big|_{t=0}=j\omega$$

8 .单位直流信号 $f(t)=1$

不满足绝对可积条件

$$f_1(t)=e^{-\alpha|t|} \qquad (a>0)$$

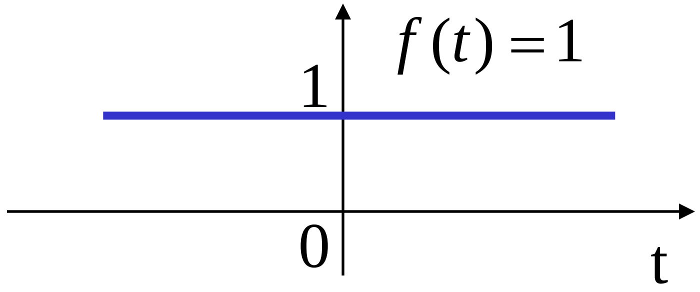
$$f(t)=\lim_{a\to 0} f_1(t)$$

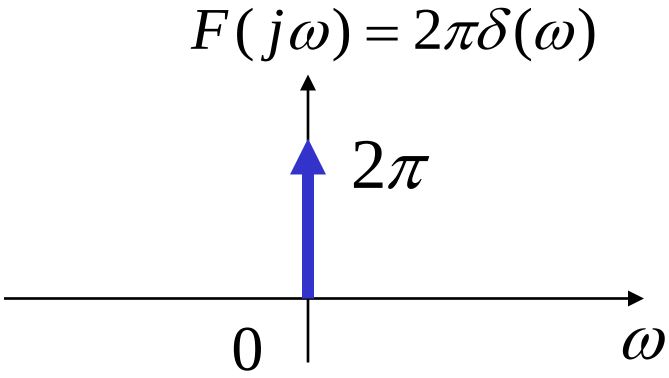
$$F(j\omega)=\lim_{a\to 0}F_1(j\omega)=\lim_{a\to 0}\frac{2a}{a^2+\omega^2}=\begin{cases}0,\omega\neq 0\\ \infty,\omega=0\end{cases}$$

冲激函数

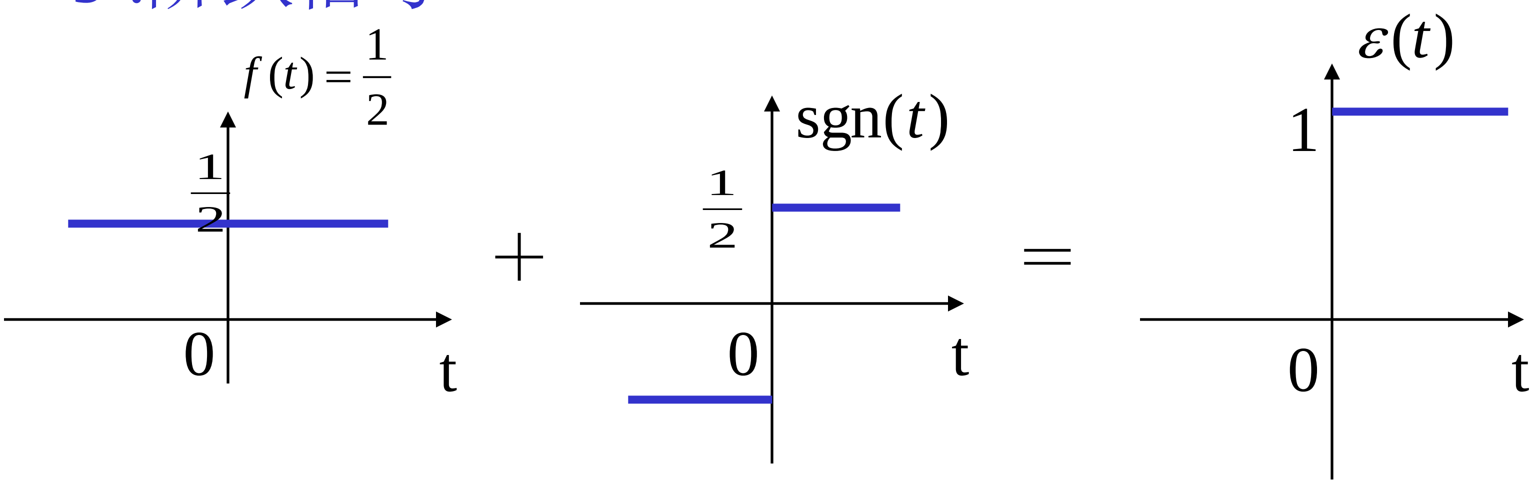
强度为： $\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a}{a^2+\omega^2}d\omega=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+(\frac{\omega}{a})^2}d\frac{\omega}{a}$

$$=\lim_{a\to 0}2acr\tan(\frac{\omega}{a})|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$$


$f(t)=1$
1
0
t

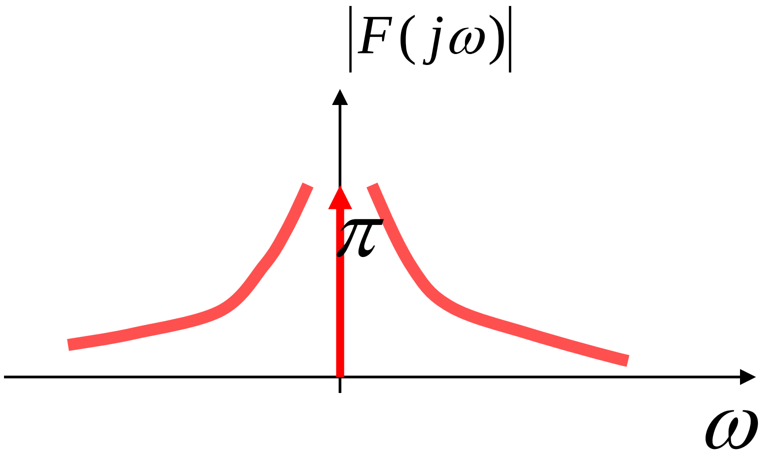

$F(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$
2π
0
ω

9 .阶跃信号



$$\varepsilon(t)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$F(j\omega)=\frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$


$|F(j\omega)|$
π
ω

4.5 连续时间傅立叶变换的性质

1. **线性**

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$

2. **对称性**

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$ ，$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-j\omega)$

证明：$$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt = F(-j\omega)$$

$$\therefore \quad f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

推论： 若 $f(t)$ 为实的，则 $f^*(t) = f(t)$

有 $F^*(-j\omega) = F(j\omega)$, 或 $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\propto X(j\omega)}$$

$$= \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$X^*(-j\omega) = |X(-j\omega)| e^{-j\propto X(-j\omega)}$$

$$= \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\} - j\,\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$$

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \qquad \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$$

$$\propto X(j\omega) = -\propto X(-j\omega) \qquad \mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$$

实部为偶函数，虚部为奇函数；模为偶函数，相位为奇函数。