目录

****

高等数学（下）复习建议

【注意】本文红字标识的内容都在高数 QQ 群的文件夹中.

1. 请根据本文档，结合各章知识点归纳（或自己总结的笔记）复习上、下册的相关内容.
2. 如何刷题？

(1) 大题的题型相对固定，刷了一定量的题目后，如果能够做到快速判断积分类型、准确套用公式并写出恰当的积分范围，可以减少刷题；每天少量做题，保持熟练度即可.

(2) 选择题、填空题的题型多变，分值高（往年占 48 分），无解题过程，一锤定音判对错，建议大家尽量多刷题.

3. 建议的刷题内容

(1) 《高等数学习题册》(题型全面，值得重点关注，尤其是附带的测试模拟卷、测试真题）

(2) 书中各章总习题部分（尤其是选择题、填空题部分）

(3) 两份高数测验卷

(4) 一份往年高数期末试卷（关注往年考点!）

(5) 《高数习题全解指南》中的历届考研题（尤其是选择题、填空题部分）

****

高等数学（下）期末考试范围说明

章节	不属于考试范围的内容
第 8 章	✧ 曲面的参数方程（**P.48**）
第 9 章	✧ 雅可比行列式（**P.88** 定理 **3**，在实际计算中不必直接套用公式，关键是掌握求隐函数组偏导数的方法，例如 **P.90** 例 **3**、**P.99** 例 **5**） ✧ 向量值函数及其导数（**P.92~P.96**） ✧ 二元函数的泰勒公式（**P.122~P.127**） ✧ 最小二乘法（**P.127~P.132**）
第 10 章	✧ 含参变量的积分（**P.179~P.184**）
第 11 章	✧ 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件（**P.236**） ✧ 空间曲线积分与路径无关的条件（**P.244~P.246**）
第 12 章	✧ 绝对收敛级数的性质（**P.268 ~P.271**） ✧ 函数的幂级数展开式的应用（**P.290~P.298**） ✧ 函数项级数的一致收敛性（**P.299~P.307**） ✧ 傅里叶级数的复数形式（**P.325~P.327**）

章节	不大可能考查的内容有（红字部分适当关注，有时间才复习）
第 10 章	✧ 二重积分的换元法（**P.152~P.156**） ✧ 重积分的应用之质心、转动惯量、引力（**P.172~P.177**）
第 11 章	✧ 通量与散度（**P.237~P.239**，结合高斯公式，掌握概念） ✧ 斯托克斯公式（**P.240~P.244**） ✧ 环流量与旋度（**P.246~P.248**，结合斯托克斯公式，掌握概念）

高等数学（上）相关复习要点

- 常见的等价无穷小

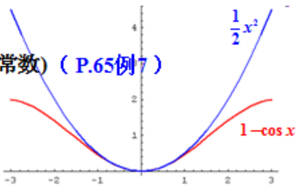
- $\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x$

（P.48例1、例3及P.55第4题）

- $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$，$a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a>0)$（P.64例5、例6）

$\ln(1+x) \sim x$，$\quad e^x - 1 \sim x$

- $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ （P.48例2）



- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ （$\alpha \neq 0$且为常数）（P.65例7）

意义：利用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

- 两个多项式的商的极限（高数上册 P.44）

3. 当m、n为非负整数，且$a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$时，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \\ 0, & n>m. \\ \infty, & n<m \end{cases}$$

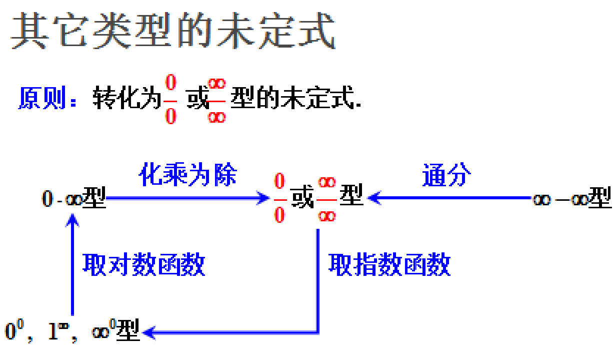
- 两个重要极限
- 常见的求导公式、积分公式（高数上册 P.92、P.113~P.114、P.188~P.189、P.205）
- 换元积分法（三角代换、倒代换等）
- 分部积分法（如何选择 u、v）

前提：设m，n都是正整数	u的选择：反对幂指三（ILAET）	
被积函数的类型	$u(x)$	例子
$x^n e^{mx}$ $x^n \sin mx$ $x^n \cos mx$	x^n	$\int x^2 \sin 2x dx$
$x^n \ln x$ $x^n \arcsin mx$ $x^n \arccos mx$ $x^n \arctan mx$ $x^n \operatorname{arccot} mx$	$\ln x$ $\arcsin mx$ $\arccos mx$ $\arctan mx$ $\operatorname{arccot} mx$	$\int x^3 \ln x dx$ $\int x \arctan x dx$
$e^{nx}\sin mx$ $e^{nx}\cos mx$	u，v可随意选择，但在两次分部积分中，必须选取同类型的u，以便产生循环式，从而解出所求的积分.	$\int e^x \sin x dx$

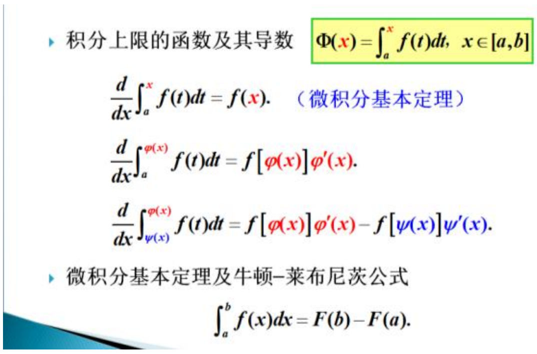
- $$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}. \end{cases}$$

（高数上册P.253例12）

- 洛必达法则

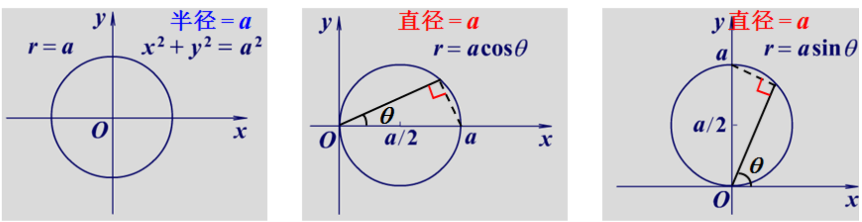


- 变上限积分求导



- 三种圆的极坐标方程

圆的极坐标方程



圆域D：$0\le r\le a$ $0\le\theta\le 2\pi$ 或 $-\pi\le\theta\le\pi$

圆域D：$0\le r\le a\cos\theta$ $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$

圆域D：$0\le r\le a\sin\theta$ $0\le\theta\le\pi$

- 常见的三角公式（例如：积化和差公式、和差化积公式、倍角公式、半角公式等）

【积化和差公式口诀】

积化和差得和差，余弦在后要相加；

异名相乘取正弦，同名相乘取余弦；

正正相乘带负号，外面一半别忘掉.

高等数学（下）各章复习要点

第八章

【复习要点】（结合第八章知识点归纳复习!!!）

✧ 向量的单位化、向量的方向余弦（两者等价，**P.11**）

✧ 求向量在轴上的投影（**P.12**）

注意：向量的投影是一个数，而不是向量.

✧ 向量平行与垂直的判定及其适用范围

✧ 直线的方程、平面的方程

注意：不要混淆直线的对称式方程、平面的一般方程.

✧ 线线、线面、面面位置关系的判定

✧ 平面束（**P.35**）

✧ 投影柱面、投影曲线（**P.49**）

✧ 其它

(1) 各种二次曲面的标准方程及其图形（结合重积分、曲面积分复习，会画草图!）

(2) 四种夹角：向量的夹角、直线的夹角、平面的夹角、线面的夹角

注意：四种夹角的取值范围和相互联系.

(3) 三种距离：两点间的距离、点到面的距离、平行平面之间的距离

第九章

【复习要点】

✧ 二元函数求极限（**P.60** 例 **4** 至例 **5**）关键点：计算题不能取特殊路径求极限!

✧ 多元抽象复合函数求偏导（**§9.4**）关键点：理清函数复合的层次!

✧ 隐函数求偏导（**§9.5**）

- P.86定理1

$$F(x,y)=0 \xrightarrow[y=f(x)\text{存在}]{\text{在一定的条件下}} \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

- P.87定理2

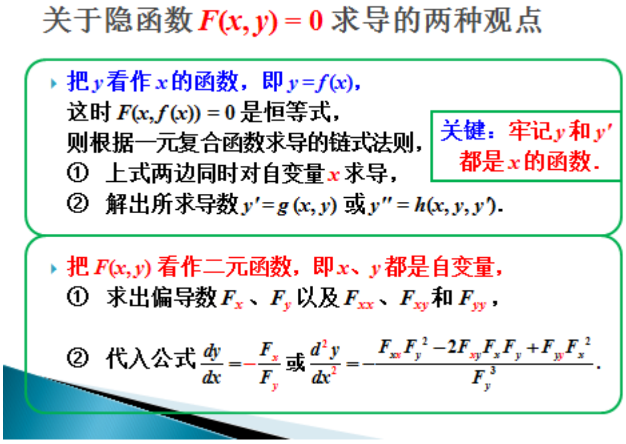
$$F(x,y,z)=0 \xrightarrow[z=f(x,y)\text{存在}]{\text{在一定的条件下}} \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

- P.88定理3

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases} \xrightarrow[\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}\text{存在}]{\text{在一定的条件下}} \text{P. 89公式(5-6)}$$

掌握公式推导过程，不要死记公式.

注意：关于一元隐函数 $F(x,y)=0$ 求导的两种观点!



✧ 方向导数、梯度（§9.7）注意：方向导数的最大值就是梯度的模.

✧ 二元分段函数在分界点处的连续性、可导性和可微性（**P.61**、**P.69**、**P.73~P.74**）

✧ 空间曲线的切线、法平面

✧ 空间曲面的切平面、法线（注意线、面的对应关系：线切线，面切面！）

✧ 函数的极值、条件极值（拉格朗日乘数法）、函数的最值

注意：根据题目要求建立可导的目标函数和约束条件.

结合第八章三种距离复习.

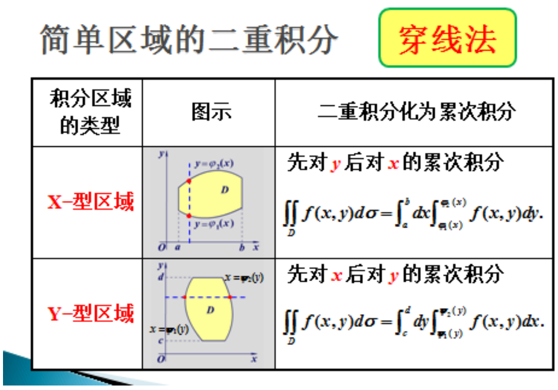
绝对值函数连续，但不可导，怎么办？取平方！！！

第十、十一章

【复习要点】

✧ 二重积分交换积分次序（**P.143** 公式**(2-3)**）

✧ 二重积分的计算——穿线法（直角坐标系、极坐标系）



✧ 三重积分的计算

(1) 直角坐标系之投影法、截面法（**P.161**、**P.163**）

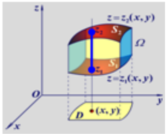
(2) 柱面坐标系（**P.163**）

(3) 球面坐标系（**P.165**）（虽然是星号内容，但估计会考）

三重积分的投影法和截面法

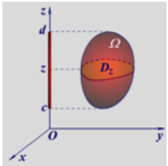
- **投影法**（①投影；②穿线；③积分）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]d\sigma =\iint\limits_{D} d\sigma\boxed{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz}.$$



- **截面法**（①截面；②积分）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d\left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma\right]dz =\int_c^d dz\boxed{\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma}.$$



✧ 第一类曲线积分的计算（**P.190~P.193**）

【口诀】一代（代入曲线的参数方程）

二投（把曲线投影到与参数 t 对应的数轴上，即确定参数 t 的取值范围）

三积分（积分下限 $\leq$ 积分上限）

✧ 第二类曲线积分的计算（**P.197~P.201**）

方法 1：直接计算

【口诀】一代（代入曲线的参数方程）

二投（把曲线投影到与参数 t 对应的数轴上，即确定参数 t 的取值范围）

三定号（积分下限对应曲线起点、积分上限对应曲线终点）

方法 2：利用格林公式转化为二重积分求解．

适用范围：① 积分曲线应该是封闭曲线．若不满足，封口!!!

② 二重积分中函数 ***P***、***Q*** 有偏导数存在．若不满足，挖洞!!!

方法 3：<u>当第二类曲线积分与路径无关时，</u>可采用特殊路径积分或采用曲线积分的牛顿-莱布尼茨公式计算．

- **牛顿–莱布尼茨公式**

设 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

- **曲线积分的牛顿–莱布尼茨公式**　**P.216公式(3 - 9)**

设 $u(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的任意一个原函数，则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)}-\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\quad \boxed{\text{固定}(x_0,y_0)}$$

例如：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

✧ 第一类曲面积分的计算（**P.219~P.222**）

【口诀】一代（代入曲面所对应的二元函数）

二投（把曲面投影到与积分变量对应的坐标面上，确定积分变量范围）

三积分（积分下限 $\le$ 积分上限）

✧ 第二类曲面积分的计算（**P.227~P.229**）

方法 **1**：直接计算

【口诀】一代（代入曲面所对应的二元函数，自变量的选择取决于积分变量）

二投（把曲面投影到与积分变量对应的坐标面上，确定积分变量范围）

三定号（确定积分前面的正负号，与曲面的侧向有关，下限≤上限）

方法 **2**：利用高斯公式转化为三重积分求解.

适用范围：① 积分曲面应该是封闭曲面．若不满足，封口!!!

② 三重积分中函数 P、Q、R 有偏导数存在．若不满足，挖洞!!!

✧ 几种积分之间的关系（格林公式、高斯公式、斯托克斯公式）

(1) 对称区域，偶倍奇零.

适用范围：定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分.

注意：第二类曲线积分、第二类曲面积分不满足该结论.

(2) 弧长微元与坐标微元——微分三角形（高数上册）

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}>0,\quad dx=\cos\alpha ds,\quad dy=\cos\beta ds,\quad dz=\cos\gamma ds$$

(3) 两类曲面积分的微元（注意：x、y、z 都出现，缺啥补啥，余弦不带绝对值!）

$$dxdy=\cos\gamma dS,\quad dydz=\cos\alpha dS,\quad dzdx=\cos\beta dS$$

注意：

- 这里 $dxdy$ 表示空间曲面在坐标平面上的有向投影，而不是直角坐标系下二重积分的面积微元，因此当 γ 是锐角时，$dxdy>0$；当 γ 是直角时，$dxdy=0$；当 γ 是钝角时，$dxdy<0$．其余情形以此类推.
- 不要混淆弧长微元 ds 与曲面微元 dS，但因为这两个微元都是正的，所以下限 $\le$ 上限.

(4) 两种面积微元

曲面微元 dS	坐标面上的面积微元 $d\sigma$
空间曲面 Σ 上的一小块曲面的面积 >0	dS 在坐标面上的投影区域的面积 >0 直角坐标系下，$d\sigma = dxdy$ 极坐标系下，$d\sigma = rdrd\theta$
若 $\Sigma: z = z(x,y)$，则 $dS = \dfrac{1}{\lvert\cos\gamma\rvert}d\sigma \overset{\text{直角坐标系}}{=} \dfrac{1}{\lvert\cos\gamma\rvert}dxdy = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy > 0$. 若 $\Sigma: x = x(y,z)$，则 $dS = \dfrac{1}{\lvert\cos\alpha\rvert}d\sigma \overset{\text{直角坐标系}}{=} \dfrac{1}{\lvert\cos\alpha\rvert}dydz = \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz > 0$. 若 $\Sigma: y = y(z,x)$，则 $dS = \dfrac{1}{\lvert\cos\beta\rvert}d\sigma \overset{\text{直角坐标系}}{=} \dfrac{1}{\lvert\cos\beta\rvert}dzdx = \sqrt{1+y_z^2+y_x^2}dzdx > 0$.	

注意！！！

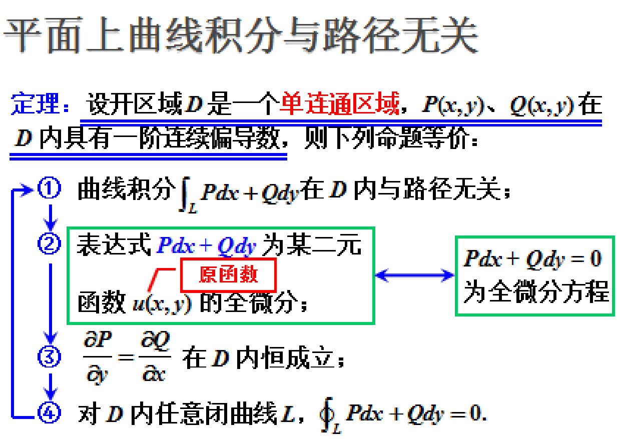
- dS 在 xOy 面上的有向投影 $dxdy = \cos\gamma dS$ 可正可负（余弦不带绝对值），
- dS 在 xOy 面上的投影区域的面积 $d\sigma = \lvert\cos\gamma\rvert dS > 0$（余弦带绝对值）.

(5) 格林公式

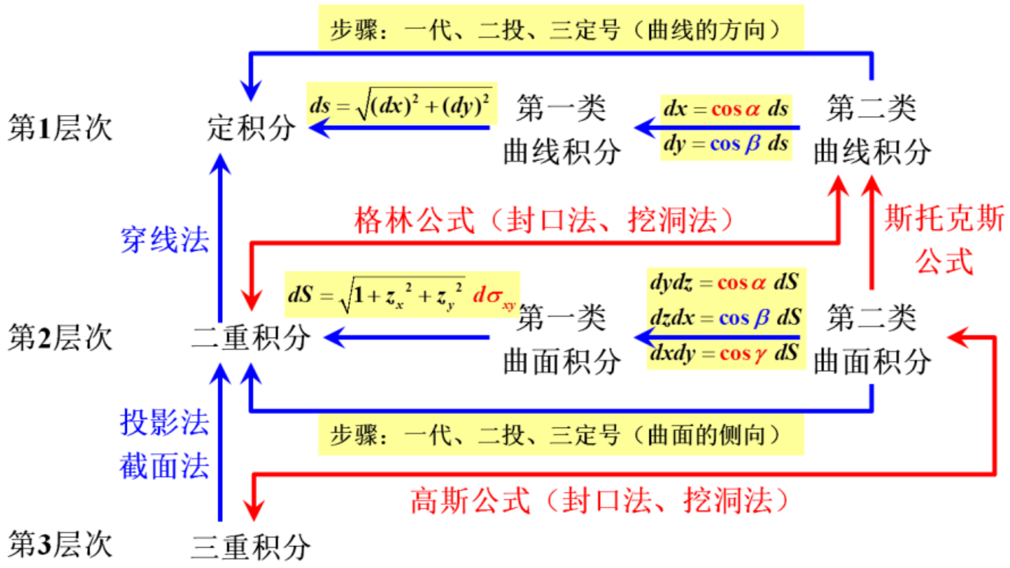
封口法、挖洞法（**P.208** 例 **4**）注意：格林公式只适用于封闭曲线！！！

平面图形的面积 **P.207** 公式**(3-4)**

平面曲线积分与路径无关的判定及其应用（非常重要，看课件！！！）



(6) 高斯公式（封口法）注意：高斯公式只适用于封闭曲面！！！



✧ 全微分方程的求解（**P.213**）

(1) 分项组合法

(2) 逐步积分法

(3) 特殊路径法、公式法（**P.213**）

✧ 各种积分在几何上的应用

积分概念的比较			
概念	应用	解释	特例
二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$	几何：曲顶柱体的体积	$f(x,y)$：曲顶 D：底面	若 $f(x,y)=1$，积分表示 ✓高 = 1 的平顶柱体的体积 ✓底面（薄片）的面积 设 Σ：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$， 若 $f(x,y)=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$， 则积分表示曲面 Σ 的面积
	物理：平面薄片的质量	$f(x,y)$：密度 D：平面薄片	
三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$	物理：空间立体的质量	$f(x,y,z)$：密度 Ω：空间立体	若 $f(x,y,z)=1$，积分表示任意空间立体的体积
第一类曲线积分 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds$	物理：曲线构件的质量	$f(x,y,z)$：密度 Γ：空间曲线	若 $f(x,y,z)=1$，积分表示任意空间曲线的弧长
第一类曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$	物理：曲面构件的质量	$f(x,y,z)$：密度 Σ：空间曲面	若 $f(x,y,z)=1$，积分表示任意空间曲面的面积

(1) 求曲线的弧长（利用第一类曲线积分，被积函数设为 1，即 $\int_\Gamma ds$）

弧长微元 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$\overset{y=y(x)}{=}\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx\overset{x=x(y)}{=}\sqrt{1+[x'(y)]^2}dy\overset{r=r(\theta)}{=}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}d\theta>0.$$

(2) 求平面图形的面积

方法 **1**：视为两个曲边梯形的面积之差，利用定积分计算，即

$$\int_a^b \left[f_{上边界}(x) - f_{下边界}(x) \right] dx \text{，其中 } a < b\text{；}$$

方法 **2**：利用二重积分，被积函数设为 **1**，即

$$\iint_D d\sigma = \iint_D dxdy = \iint_D rdrd\theta \text{，其中 } D \text{ 为所求平面图形；}$$

方法 **3**：利用曲线积分及格林公式，即

$$\frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx \text{，其中 } L \text{ 为所求平面图形 } D \text{ 的正向边界曲线.}$$

(3) 求空间曲面的面积

利用第一类曲面积分，被积函数设为 **1**，即

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma dS &= \iint_\Sigma \frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ &= \iint_\Sigma \frac{1}{|\cos\beta|}dzdx = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dzdx \\ &= \iint_\Sigma \frac{1}{|\cos\alpha|}dydz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz.\end{aligned}$$

注意：

这里 $dxdy$ 表示直角坐标系下二重积分的面积微元，而不是第二类曲面积分之空间曲面在坐标平面上的有向投影，因此不论 γ 是锐角、直角还是钝角，$dxdy > 0$ 总成立．其余情形以此类推.

(4) 求空间立体的体积

方法 **1**：视为两个曲顶柱体的体积之差，利用二重积分计算；

方法 **2**：利用三重积分，被积函数设为 **1**.

第十二章

【复习要点】

✧ 常数项级数收敛性的判断

(1) 正项级数的四种判别法（注意每种审敛法的适用范围）

正项级数的审敛法

审敛法	特点及适用范围
比较审敛法	需要选取一个适当的、收敛性已知的级数作为比较对象，例如：等比级数、调和级数、p-级数．
比值审敛法	不需要寻找比较对象，利用级数自身特点直接进行判断．适用范围：u_n 与 u_{n+1} 有公因子且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在或等于 $+\infty$ 的情形．
根值审敛法	不需要寻找比较对象，利用级数自身特点直接进行判断．适用范围：u_n 中含有表达式的 n 次幂且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 存在或等于 $+\infty$ 的情形．
积分审敛法	级数 $\Rightarrow$ 广义积分，离散 $\Rightarrow$ 连续．

(2) 交错级数的莱布尼茨定理　注意：这是交错级数收敛的充分非必要条件

在讨论一般常数项级数（包括交错级数）时需要区分绝对收敛、条件收敛.

✧ 求常数项级数的和

方法 1：部分和数列的极限（**P.252** 定义）

方法 2：利用收敛级数的运算性质（**P.254~P.256**）

方法 3：阿贝尔方法（补充内容，必须掌握！！！）

例：求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解法1：构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，因为该幂级数缺少奇次幂的项，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}\right|=\frac{x^2}{2}$.

所以由比值判别法可得

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，幂级数绝对收敛；

当 $\frac{x^2}{2}>1$，即 $x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}$ 时，幂级数发散；

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数的一般项不趋于零，幂级数发散.

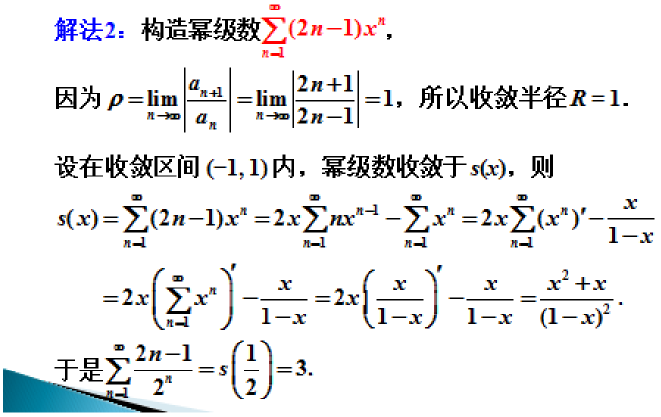
综上所述，幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设该幂级数的和函数为 $s(x)$，则当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，

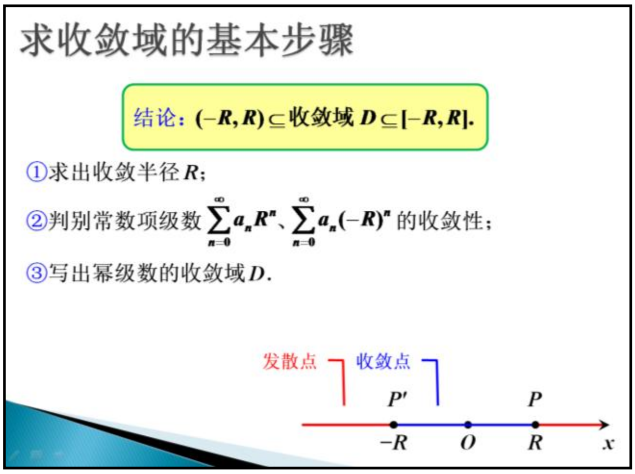
$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(x^{2n-1}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}\right)'$$

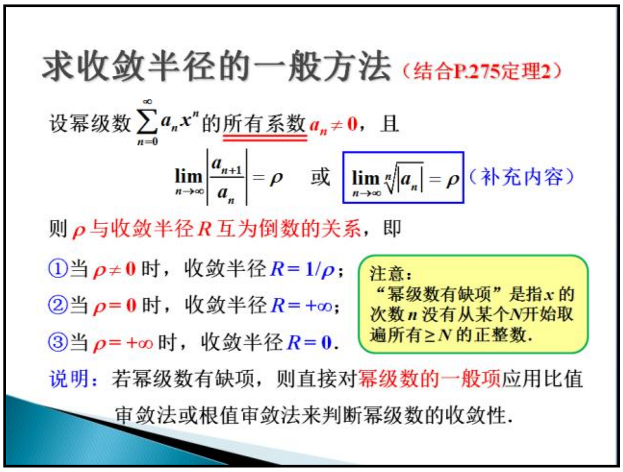
$$=\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]'=\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right]'=\left[\frac{x}{2-x^2}\right]'=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}.$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=s(1)=3.$



✧ 求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域（阿贝尔定理及其推论 P.274~P.278）





收敛区间$(-R,R)\subseteq$收敛域$D\subseteq[-R,R]$.

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径有两种方法：

(1) 幂级数没有缺项时，由 P.275 定理 2 得收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$，其中$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$或$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

(2) 幂级数有缺项时，P.275 定理 2 失效，直接根据比值审敛法或根值审敛法来求收敛半径，此时不能取倒数!!! 例如：P.277 例 4.

注意：“幂级数有缺项”是指x的次数n没有从某个N开始取遍所有$\geq N$的正整数.

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径的方法：换元，令$t=x-x_0$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$的收敛半径就是$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径.

收敛半径虽然相同，但$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$的收敛区间关于$t=0$对称，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛区间关于$x=x_0$对称.

例：求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

分析：该幂级数缺少偶数次幂的项，则直接对幂级数的一般项应用比值审敛法或根值审敛法来判断幂级数的收敛性.

比值审敛法：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{|x|^{2n-1}}=\frac{|x|^2}{2}$.

根值审敛法：$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{2n-1}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2-\frac{1}{n}}}{2}=\frac{|x|^2}{2}$.

当$\frac{|x|^2}{2}<1$，即$|x|<\sqrt{2}$时，绝对收敛；

当$\frac{|x|^2}{2}>1$，即$|x|>\sqrt{2}$时，发散；

综上所述，收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当$|x|=\sqrt{2}$时，级数的一般项不趋于零，发散.

例：求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$的收敛域.

解：令$t=x-1/2$，题设级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}}t^n$. $a_n=(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}$.

因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n}=2$,

或　$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[2n]{n}}=2$（因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$），

所以收敛半径$R=1/2$，收敛区间为$-1/2<t<1/2$，$0<x<1$.

当$x=0$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，发散；

当$x=1$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，收敛.

从而所求收敛域为$(0,1]$.

- 求幂级数的和函数

  幂级数的运算性质（特别是逐项积分、逐项求导 P.279）

  函数展开成麦克劳林级数（背！P.253 例 1、P.285 六个麦克劳林公式，间接法，P.286 例 3）

  函数展开成泰勒级数（变量代换+间接法，P.286 例 4、P.287 例 5）

- 利用函数的幂级数展开式求函数的高阶导数

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，则 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，从而 $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$.

注意：

幂级数求和务必先求幂级数的收敛域，幂级数的收敛域就是和函数的定义域！

常用的麦克劳林展开式（P.285－P.289）

关键：牢记级数的一般项，n 从零开始.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

欧拉公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$且 $\sin x$ 是奇函数

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

幂级数逐项求导

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1)$$

把 x 换成 $-x$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\quad x\in(-1,1)$$

从 0 到 x 积分

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad x\in(-1,1]$$

P.289二项展开式 $(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$，$x\in(-1,1)$

（m 为任意实数）

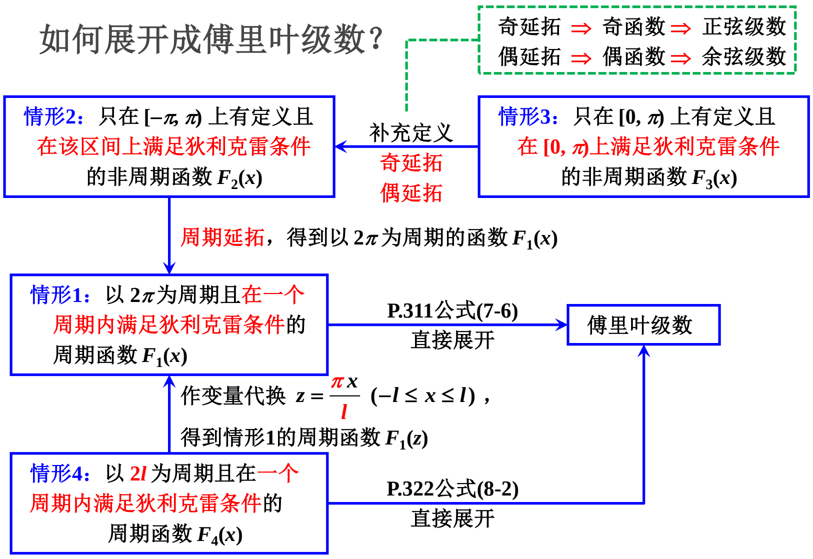
✧ 傅里叶级数的收敛问题

(1) 傅里叶系数（P.311 公式(7-6)、P.322 公式(8-2)）

(2) 狄利克雷充分性条件（P.311）（必考!!!）

(3) 周期延拓（P.314）

(4) 正弦级数（余弦级数）（P.316）、奇延拓（偶延拓）（P.318~P.319）



【傅里叶级数补充例题】

5、设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,(n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ ，则 $S(-2021)=$ __________.

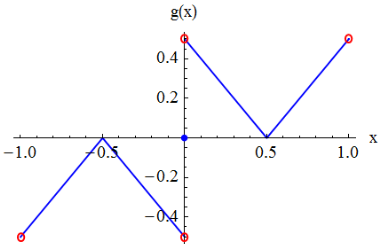
【分析】设正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 是周期函数 $g(x)$ 的傅里叶级数，则由 P.322 公式(8-2)可得 $\ell=1$，从而 $g(x)$ 的周期等于 $2\ell=2$.

因为 $S(x)$ 是该正弦级数的和函数，所以由狄利克雷充分性条件可得，当 x 是 $g(x)$ 的连续点时，$S(x)=g(x)$；当 x 是 $g(x)$ 的第一类间断点时，$S(x)=\frac{g(x-0)+g(x+0)}{2}=\frac{g(x-0)+g(-x+0)}{2}$.

注意在 P.311 公式(7-6)、P.322 公式(8-2)中，傅里叶系数 a_n、b_n 都是在对称区间 $(-\pi,\pi)$ 或 $(-l,l)$ 上积分．在本题中，已知 $\ell=1$，则 $b_n=\int_{-1}^{1}g(x)\sin n\pi x dx$.

又因为 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$（题设条件），且 $\sin n\pi x$ 是奇函数，由此可知，$g(x)$ 是 $(-1,1)$ 上的奇函数且当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=f(x)=|x-1/2|$（见下图）.

于是 $S(-2021)\overset{\text{周期等于2}}{=}S(1)=\dfrac{g(1-0)+g(1+0)}{2}=\dfrac{g(1-0)+g(-1+0)}{2}=\dfrac{1/2+(-1/2)}{2}=0$.



✧ 相关结论（必须准确背下来!!!）

- 旋转曲面的生成及二次曲面的标准方程

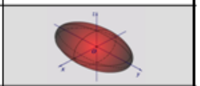
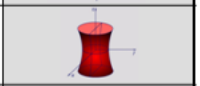
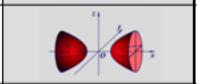
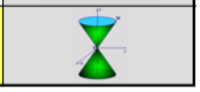
旋转曲面的方程

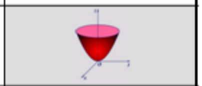
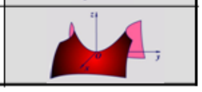
结论：设给定 yOz 面上的曲线 $C:\begin{cases}f(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$，则

- 曲线 C 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面为 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0.$
- 曲线 C 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面为 $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$

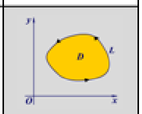
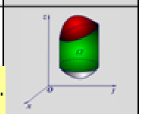
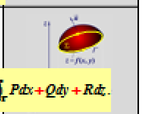
二次曲面

前提：设 $a>0,b>0,c>0$.

曲面名称		曲面方程	曲面的图形
椭球面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
双曲面	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭圆锥面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

曲面名称		曲面方程	曲面的图形
抛物面	椭圆抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
	双曲抛物面	$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	

- 格林公式 P.205、高斯公式 P.232（斯托克斯公式不确定考不考，有时间才复习）

名称	意义	图示
格林公式	建立了平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的联系. $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$.	
高斯公式	建立了空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的联系. $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$.	
斯托克斯公式	建立了空间曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的联系. $\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$.	

- 等比级数 P.253 例 1、调和级数 P.256 公式(1-5)、p-级数 P.260 例 1
- P.285~P.289 六个麦克劳林公式

****

值得关注的知识点及题型

说明：【册】指《高等数学习题册》（下册）；【书】指教材

序号	知识点		示例
1	向量积的模		【册】第 **4** 页第 **12** 题；第 **13** 页第 **6** 题 【书】第 **52** 页第 **11** 题；第 **53** 页第 **19** 题
2	线、面的位置关系 (线、面间的夹角）	面 vs.面	【册】第 **5** 页第 **1**、**3**、**6**、**7** 题
		线 vs.面	【册】第 **7** 页第 **2**、**5** 题；第 **13** 页第 **5** 题； 第 **16** 页第 **19** 题；第 **91** 页第 **1** 题； 第 **99** 页第 **2** 题
		线 vs.线	【册】第 **7** 页第 **1**、**3** 题；第 **15** 页第 **18** 题
3	旋转曲面的方程	会画草图，为三重积分、曲面积分做准备.	【册】第 **9** 页第 **1~5** 题；第 **13** 页第 **9** 题； 第 **13** 页第 **4** 题；第 **87** 页第 **3** 题
	投影柱面、投影曲线		【册】第 **11** 页第 **1**、**3**、**4**、**7** 题；第 **12** 页第 **11** 题
4	一、二阶偏导数	显函数	【册】第 **23** 页第 **1~3**、**5**、**7** 题；第 **96** 页第 **18** 题； 第 **100** 页第 **13** 题
		隐函数	【册】第 **26** 页第 **9~11** 题；第 **33** 页第 **4** 题； 第 **34** 页第 **12** 题
5	全微分	显函数	【册】第 **23** 页第 **4**、**6** 题
		隐函数	【册】第 **25** 页第 **5** 题
6	连续、可导、可微的综合讨论		【册】第 **17** 页第 **3** 题；第 **21** 页第 **1~3** 题； 第 **22** 页第 **10** 题；第 **30** 页第 **10** 题； 第 **33** 页第 **1~3** 题；第 **36** 页第 **15** 题； 第 **87** 页第 **1** 题；第 **95** 页第 **4** 题； 第 **102** 页第 **18** 题 【书】第 **133** 页第 **8** 题
7	梯度、方向导数		【册】第 **29** 页第 **1~3**、**7**、**8**、**9** 题
8	曲线的切线、法平面		【册】第 **27** 页第 **1**、**2**、**9**、**10** 题； 第 **92** 页第 **14** 题
	曲面的切平面、法线		【册】第 **27** 页第 **3**、**4**、**7**、**8**、**11**、**13** 题； 第 **33** 页第 **5** 题

<table>
<tr><td rowspan="5">9</td><td colspan="2">无条件极值</td><td>【册】第 31 页第 2、4 题；第 88 页第 11 题</td></tr>
<tr><td colspan="2">条件极值、最值</td><td>【册】第 94 页第 20 题；第 98 页第 23、24 题</td></tr>
<tr><td rowspan="3">点、线、面间的距离</td><td>点、面距离</td><td>【书】第 29 页例 7</td></tr>
<tr><td>点、线距离</td><td>【册】第 8 页第 12 题；第 31 页第 7 题；
第 35 页第 14 题</td></tr>
<tr><td>线、面距离</td><td>【册】第 32 页第 9 题；
【书】第 134 页第 17 题</td></tr>
<tr><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">重积分</td><td>改变积分次序</td><td>【书】第 157 页第 6 题；
第 185 页第 1(1)、4 题
【册】第 39 页第 1、4、8、9 题；第 43 页第 3 题；
第 49 页第 6、8 题；第 99 页第 5 题</td></tr>
<tr><td>转换坐标系</td><td>【书】第 158 页第 12~14 题；第 167 页第 9~11 题
【册】第 41 页第 1、3~5 题；第 42 页第 9 题；
第 45 页第 1、3 题；第 46 页第 8 题；
第 100 页第 11 题；</td></tr>
<tr><td>旋转曲面</td><td>【册】第 46 页第 7 题；第 51 页第 12 题</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="2">第一类曲线积分、第一类曲面积分</td><td>【册】第 54 页第 9、11 题；第 61 页第 1 题；
第 62 页第 9、10 题</td></tr>
<tr><td rowspan="4">12</td><td rowspan="4">巧算积分</td><td>带绝对值</td><td>【册】第 40 页第 11 题；第 42 页第 8 题；
第 55 页第 4 题</td></tr>
<tr><td>奇偶对称
（重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分）</td><td>【册】第 45 页第 2、4 题；第 49 页第 2、4 题；
第 61 页第 4、5、7 题；第 87 页第 9 题；
第 89 页第 16 题
【书】第 185 页第 2(1)(2)题；第 249 页第 2 题</td></tr>
<tr><td>轮换对称，令 $x=y=z$
（重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分）</td><td>【册】第 41 页第 2 题；第 62 页第 8 题
【书】第 185 页第 1(2)题</td></tr>
<tr><td>线、面方程直接代入
（第一类曲线积分、第一类曲面积分）</td><td>【册】第 53 页第 2 题；第 54 页第 10、12 题；
第 61 页第 6 题；第 65 页第 6 题；
第 69 页第 4 题；第 96 页第 16 题；
第 99 页第 3 题</td></tr>
</table>

13	第二类曲线积分	直接计算	【册】第 55 页第 4、7、8、11 题
		平面图形面积 【书】第 207 页(3-4)	【书】第 207 页例 3；第 217 页第 2 题 【册】第 57 页第 3、5 题
		格林公式 （注意封口！）	【册】第 58 页第 8、9 题；第 97 页第 20 题； 第 102 页第 17 题
		积分与路径无关 全微分方程 曲线积分的牛莱公式	【册】第 59 页第 1~10 题；第 69 页第 6 题； 第 70 页第 13 题
14	第二类曲面积分	直接计算	【册】第 63 页第 1、2、4、5、6、8 题
		两类曲面积分之间的关系	【册】第 63 页第 7 题；第 65 页第 4 题； 第 95 页第 7 题
		高斯公式 （注意封口！）	【册】第 63 页第 1~3 题， 其中第 2 题是第 65 页第 4 题的解法 2； 第 63 页第 8~10 题（结合通量、散度的概念）； 第 90 页第 19 题；第 95 页第 7 题； 第 97 页第 21 题；第 101 页第 16 题 【书】第 250 页第 4(3)(4)题
15	条件收敛、绝对收敛		【册】第 75 页第 3 题；第 76 页第 8 题； 第 85 页第 9、11 题；第 87 页第 5 题； 第 91 页第 5 题；第 96 页第 10 题； 第 99 页第 1 题 【书】第 328 页第 6 题
16	幂级数	收敛半径等	【册】第 77 页第 1~7、9 题；第 79 页第 5、9 题； 第 85 页第 11、13 题； 第 86 页第 15、19 题（有缺项的幂级数）
		幂级数的分析性质 与幂级数求和	【册】第 77 页第 8 题；第 78 页第 10 题； 第 85 页第 10 题； 第 86 页第 20 题（有缺项的幂级数）； 第 97 页第 22 题；第 101 页第 15 题
		常见的幂级数展开式	【册】第 79 页第 1、3、6、7、8、9 题； 第 85 页第 12 题；第 95 页第 8 题

		常数项级数求和	**【册】第 86 页第 20 题**（有缺项的幂级数） **【书】第 329 页第 10 题**
17	傅里叶级数		**【册】第 81 页第 1~9 题、第 83 页第 1、2、3 题； 第 86 页第 18 题；第 87 页第 10 题； 第 96 页第 15 题；第 99 页第 10 题**
18	综合题	**【书】第 134 页第 18 题** 知识点：曲面的切平面、函数的条件极值、函数的最值	
		【书】第 185 页第 2(3)题 知识点：二重积分交换次序、变上限积分求导	
		【书】第 186 页第 7 题 知识点：待定系数法、二重积分之坐标选择、圆域的极坐标方程	
		【册】第 89 页第 15 题 知识点：洛必达法则、二重积分之坐标选择、变上限积分求导、导数的定义	
		【书】第 186 页第 10 题 知识点：一元函数单调性、洛必达法则、三重积分之坐标选择、变上限积分求导	
		【册】第 89 页第 18 题（即【书】第 250 页第 7 题） 知识点：积分与路径无关、隐函数求导、第二类曲线积分（凑微分法、特殊路径法）	
		【册】第 101 页第 16 题 知识点：第二类曲面积分、高斯公式、隐函数求导、球面坐标	
		【册】第 90 页第 20 题 知识点：幂级数求和函数、递推关系、e^x 的展开式	