

# 电路分析基础

主讲： 董江莉

JLDONG@GDUT.EDU.CN

# 上节内容回顾

## 向量法分析正弦稳态电路一般步骤

画出与时域电路相对应的相量形式的电路



选择适当的分析方法或定理求解待求的相量响应



将求得的相量响应变换为时域响应

§9-1

• 阻抗和导纳

§9-2

• 电路的相量图

§9-3

• 正弦稳态电路的分析

§9-4

• 正弦稳态电路的功率

§9-5

• 复功率

§9-6

• 最大功率传输

## 第九章 正弦稳态电路的分析

# 本次课学习内容及目标

## 知识目标

- 正确列写瞬时功率、平均功率、无功功率、视在功率的表达式及其关系
- 正确描述各类功率的物理意义

## 能力目标

- 计算分析正弦稳态电路的各类功率

以下关于阻抗和导纳相关描述正确的是\_\_\_\_\_。

A

$$\varphi_Y = \varphi_Z$$

B

$$R = |Z| \cos \varphi_Z$$

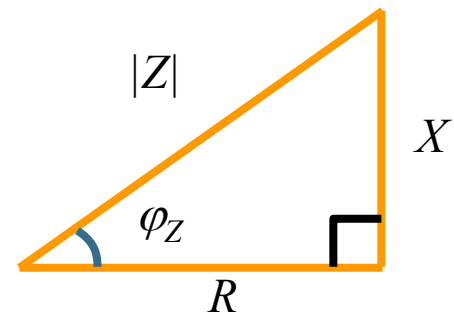
C

$$B = |Y| \cos \varphi_Y$$

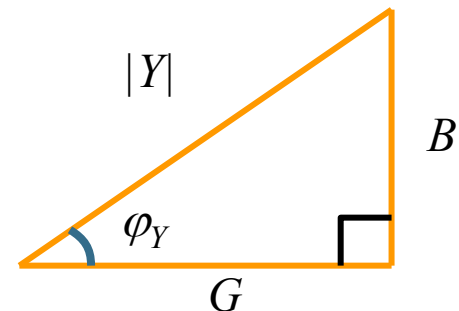
D

$\varphi_Z > 0$ , 电路呈容性

E



F

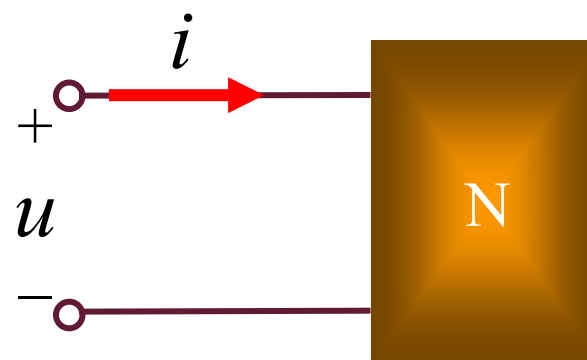


提交

## §9-4 正弦稳态电路的功率

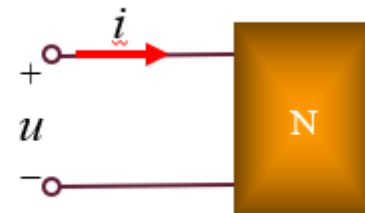
### 前提

- 设N为任意线性网络， $u$ 、 $i$ 取关联参考方向，且有
  - $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$
  - $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$
  - 电压和电流的相位差  $\varphi = \phi_u - \phi_i$



## §9-4 正弦稳态电路的功率

- $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$
- $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$
- 电压和电流的相位差  $\varphi = \phi_u - \phi_i$



### 1. 瞬时功率 $p(t)$ (instantaneous power)

- $p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$

#### 第一种分解方法

$$\begin{aligned}
 &= UI[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] \\
 &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\
 &= \underline{UI \cos \varphi} + \underline{UI \cos(2\omega t + 2\phi_u - \varphi)}
 \end{aligned}$$

恒定量

正弦量

#### 第二种分解方法

$$\begin{aligned}
 &= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\phi_u) \\
 &\quad + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u) \\
 &= \underline{UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_u)]} \\
 &\quad + \underline{UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u)}
 \end{aligned}$$

不可逆部分

可逆部分

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 1. 瞬时功率 $p(t)$ (instantaneous power)

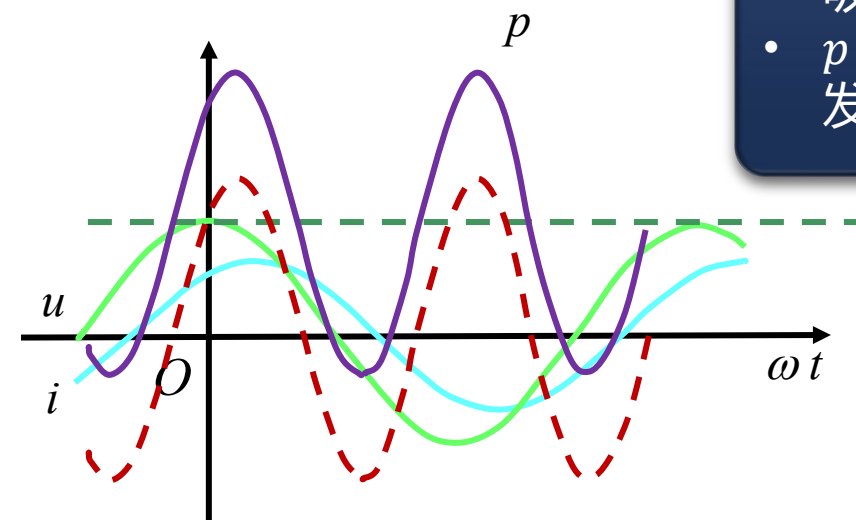
■  $p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$

#### 第一种分解方法

$$\begin{aligned}
 &= UI[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] \\
 &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\
 &= \underline{UI \cos \varphi} + \underline{UI \cos(2\omega t + 2\phi_u - \varphi)}
 \end{aligned}$$

恒定量

正弦量



- $p$  有时为正, 有时为负。
- $p > 0$ , 电路吸收功率。
- $p < 0$ , 电路发出功率。



## §9-4 正弦稳态电路的功率

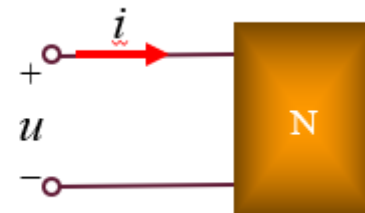
### 1. 瞬时功率 $p(t)$ (instantaneous power)

$$p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$$

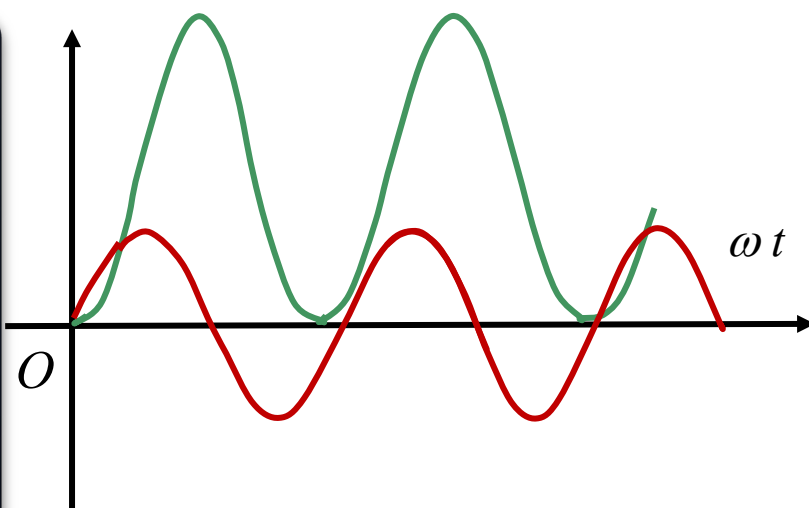
$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\text{电压和电流的相位差 } \varphi = \phi_u - \phi_i$$



- 不可逆分量：相当于元件消耗的功率
- 可逆分量：相当于无源网络电抗吸收的瞬时功率，与外电路周期性交换



### 第二种分解方法

$$= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\phi_u)$$

$$+ UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u)$$

$$= UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_u)]$$

$$+ UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u)$$

不可逆部分

可逆部分

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 2. 平均功率 $P$ (average power)

一般情况下所说的功率指平均功率

平均功率指瞬时  
功率在一个周期  
内的平均值

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\phi_u - \varphi)] dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_0^T \{UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_u)] + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u)\} dt \\ &= UI \cos \varphi = UI \cos(\phi_u - \phi_i) \end{aligned}$$

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 2. 平均功率 $P$ (average power)

$$P = UI \cos \varphi = UI \cos(\phi_u - \phi_i)$$

- 瞬时功率中的恒定分量——有功功率 (active power)
- 单位: W (瓦) , kW (千瓦)
- 功率因数角:  $\varphi = \phi_u - \phi_i$
- 功率因数:  $\cos \varphi = \lambda$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$$

$$P_R = U_R I_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R}$$

$$P_L = U_L I_L \cos 90^\circ = 0$$

$$P_C = U_C I_C \cos(-90^\circ) = 0$$

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 2. 平均功率 $P$ (average power)

$$P = UI \cos \varphi = UI \cos(\phi_u - \phi_i)$$

- 瞬时功率中的恒定分量——有功功率 (active power)
- 单位: W (瓦) , kW (千瓦)
- 功率因数角:  $\varphi = \phi_u - \phi_i$
- 功率因数:  $\cos \varphi = \lambda$

- 对不含独立源的线性网络 (无源网络) , 为其等效阻抗的阻抗角。

- $P = UI \cos \varphi = |Z|I^2 \cos \varphi = RI^2$

- 平均功率实际上是电阻消耗的功率, 即有功功率
- 与电压和电流的有效值乘积、其相位差有关
- 直流电路与交流电路的区别在于, 储能元件在交流电路中产生了阻抗角

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 3. 无功功率 $Q$ (reactive power)

$$Q = UI \sin \varphi = UI \sin(\phi_u - \phi_i)$$

- 反应电路中电感、电容等储能元件与外电路或电源之间能力交换的情况
- 单位: var (乏) , kvar (千乏)
- $Q > 0$ , 网络吸收无功功率
- $Q < 0$ , 网络发出无功功率

$$\bullet Q_R = U_R I_R \sin 0^\circ = 0$$

$$\bullet Q_L = U_L I_L \sin 90^\circ = U_L I_L \\ = \omega L I_L^2 = \frac{U_L^2}{\omega L}$$

$$\bullet Q_C = U_C I_C \sin(-90^\circ) \\ = -U_C I_C = -\frac{I_C^2}{\omega C} = -\omega C U_C^2$$

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 3. 无功功率 $Q$ (reactive power)

$$Q = UI \sin \varphi = UI \sin(\phi_u - \phi_i)$$

- 反应电路中电感、电容等储能元件与外电路或电源之间能量交换的情况
- 单位: var (乏), kvar (千乏)
- $Q > 0$ , 网络吸收无功功率
- $Q < 0$ , 网络发出无功功率

- 无功: 这部分能量在往复交换的过程中, 没有“消耗”掉
- $Q$ 的大小反映了网络与外电路交换功率的速率, 由储能元件 $L$ 、 $C$ 的性质决定
- 瞬时功率中可逆分量的幅值:  
$$Q = UI \sin \varphi = |Z| I^2 \sin \varphi = X I^2$$

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 4. 视在功率 $S$ (apparent power)

$$S = UI$$

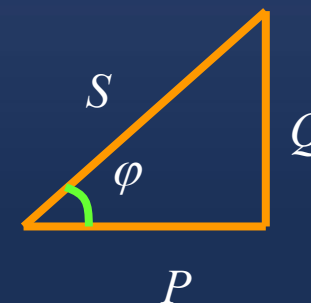
- 反应电气设备容量
- 相当于在给定电压和电流下所能获得的最大有功功率
- 单位: VA (伏安), kVA (千伏安)
- 一般不满足功率守恒定律

- $\frac{P}{S} = \cos \varphi = \lambda$
- 表示传输系统有功功率所占的比率



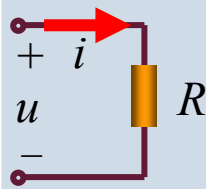
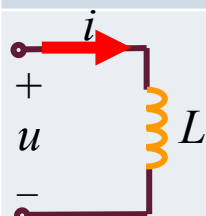
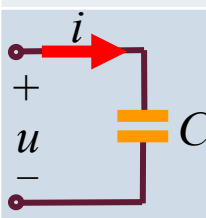
- 有功功率:  $P = UI \cos \varphi$
- 无功功率:  $Q = UI \sin \varphi$
- 关系:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

- 功率三角形:



## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 5. $R$ 、 $L$ 、 $C$ 元件的 $P$ 和 $Q$

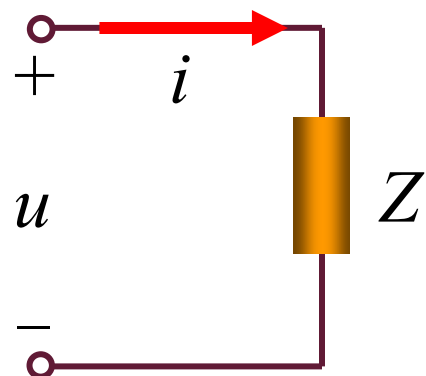
	$P = UI \cos \varphi$ $= UI \cos(\phi_u - \phi_i)$	$Q = UI \sin \varphi = UI \sin(\phi_u - \phi_i)$	
	$P_R = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$	$Q_R = UI \sin 0^\circ = 0$	吸收有功 功率
	$P_L = UI \cos 90^\circ = 0$	$Q_L = UI \sin 90^\circ = UI = \omega L I_L^2 = \frac{U_L^2}{\omega L}$	吸收无功 功率
	$P_C = UI \cos(-90^\circ) = 0$	$Q_C = UI \sin(-90^\circ) = -UI = -\frac{I_C^2}{\omega C} = -\omega C U_C^2$	发出无功 功率

$$\omega L = X_L, \quad -\frac{1}{\omega C} = X_C$$

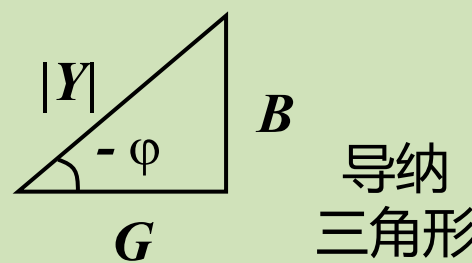
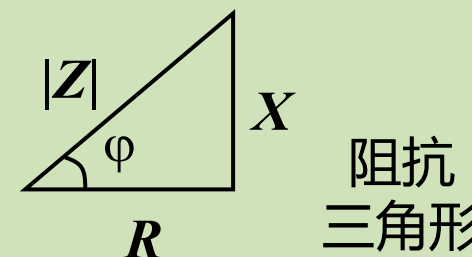
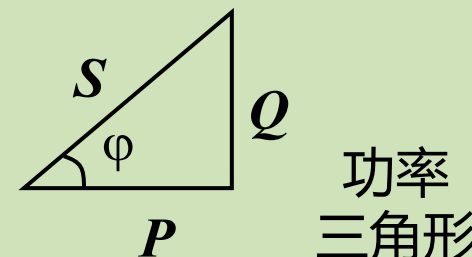


## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 6. 任意阻抗的功率计算



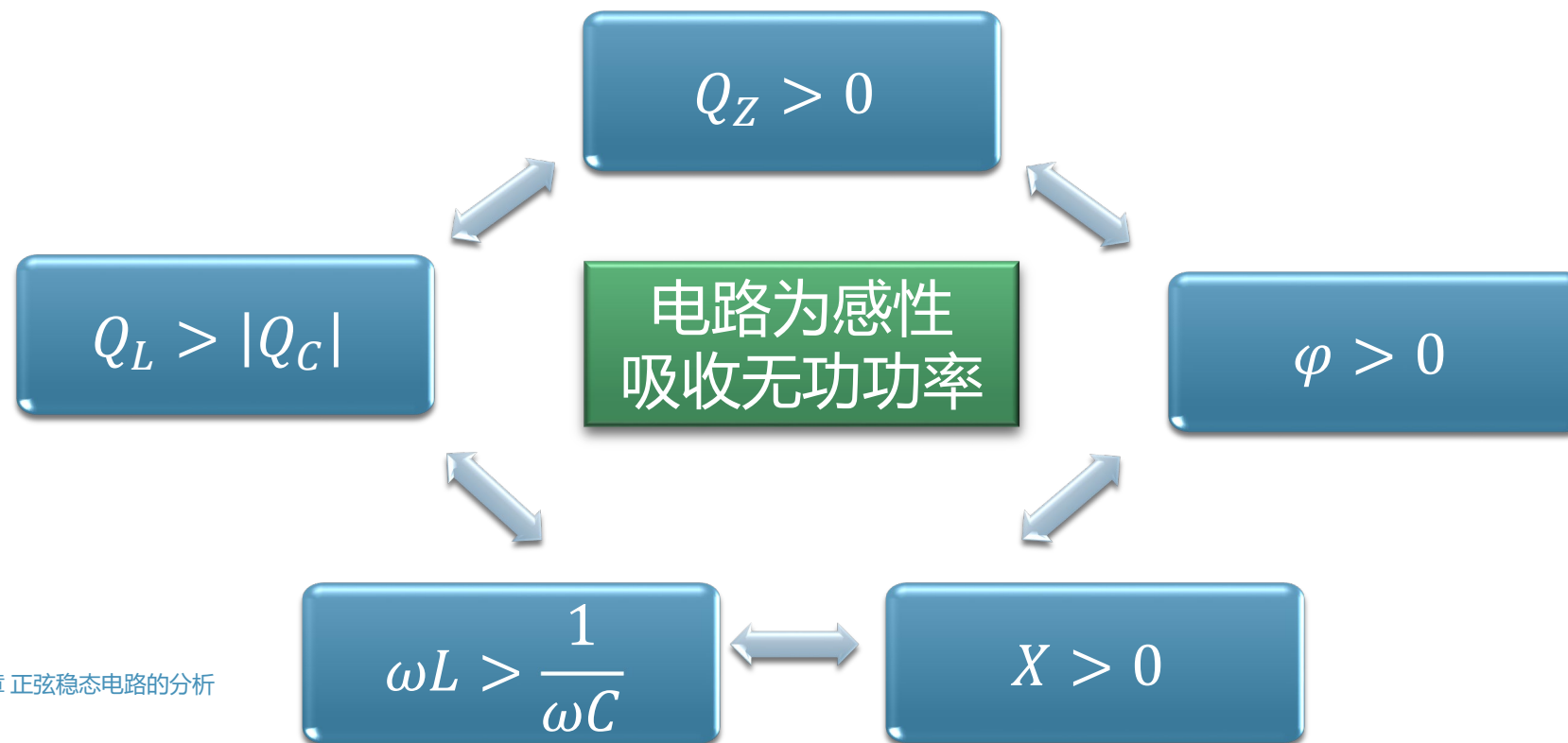
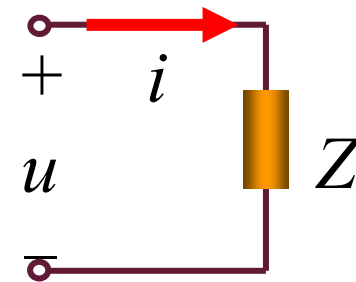
- $Z = R + jX$
- 有功功率:  $P_Z = UI \cos \varphi = I^2 |Z| \cos \varphi = I^2 R$
- 无功功率:  $Q_Z = UI \sin \varphi = I^2 |Z| \sin \varphi = I^2 X$   
 $= I^2 (X_L + X_C) = Q_L + Q_C$
- 视在功率:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2 \sqrt{R^2 + X^2} = I^2 |Z|$



## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 6. 任意阻抗的功率计算

- 无功功率:  $Q_Z = UI \sin \varphi = I^2 |Z| \sin \varphi = I^2 X = I^2 (X_L + X_C) = Q_L + Q_C$

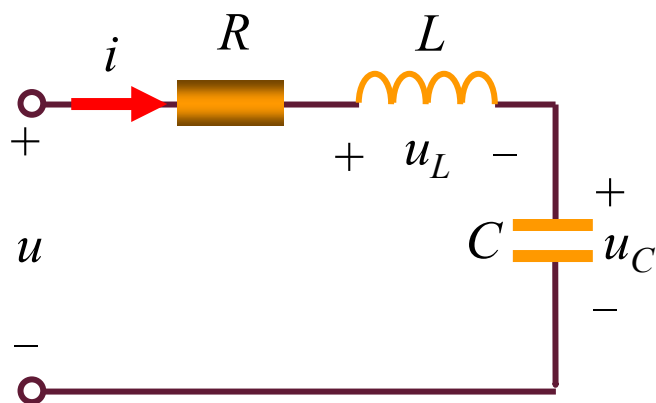


反之，电路为容性，发出无功功率

## §9-4 正弦稳态电路的功率

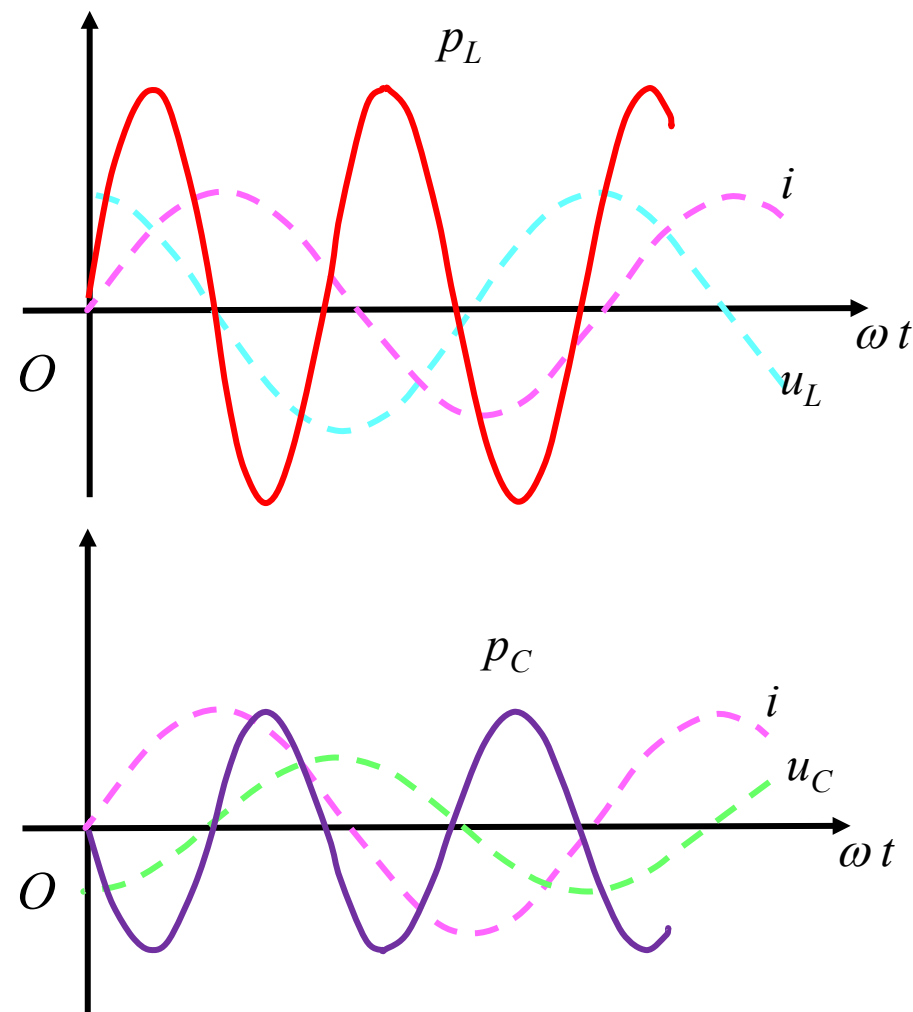
### 6. 任意阻抗的功率计算

#### ■ 电感、电容的无功补偿作用（瞬时状态）



$L$ 发出功率时， $C$ 刚好吸收功率，与外电路交换功率为  $p_L + p_C$ 。

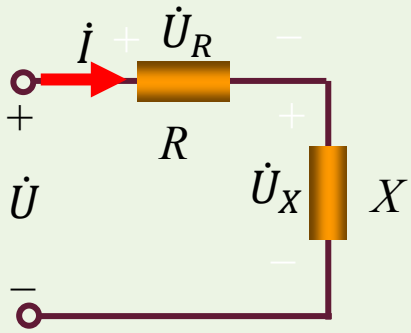
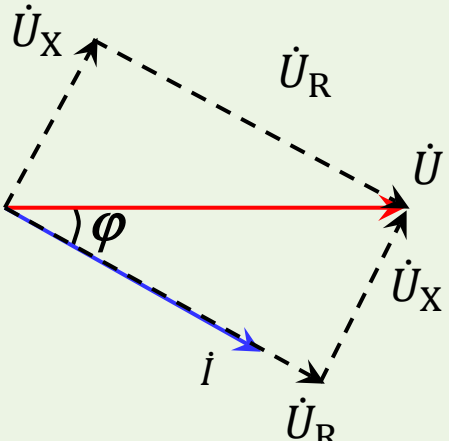
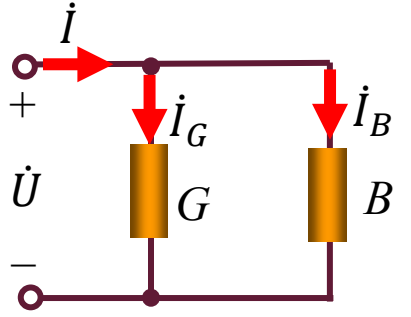
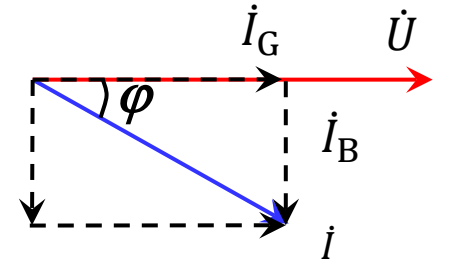
$L$ 、 $C$ 的无功功率具有互相补偿的作用。



## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 6. 任意阻抗的功率计算

- 电压、电流的有功分量和无功分量（以感性负载为例，设  $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ ）

		$P = UI \cos \phi = U_R I$ $Q = UI \sin \phi = U_X I$	<p>称 <math>\dot{U}_R</math> 为 <math>\dot{U}</math> 的有功分量</p> <p>称 <math>\dot{U}_X</math> 为 <math>\dot{U}</math> 的无功分量</p>
		$P = UI \cos \phi = UI_G$ $Q = UI \sin \phi = UI_B$	<p>称 <math>i_R</math> 为 <math>i</math> 的有功分量</p> <p>称 <math>i_X</math> 为 <math>i</math> 的无功分量</p>

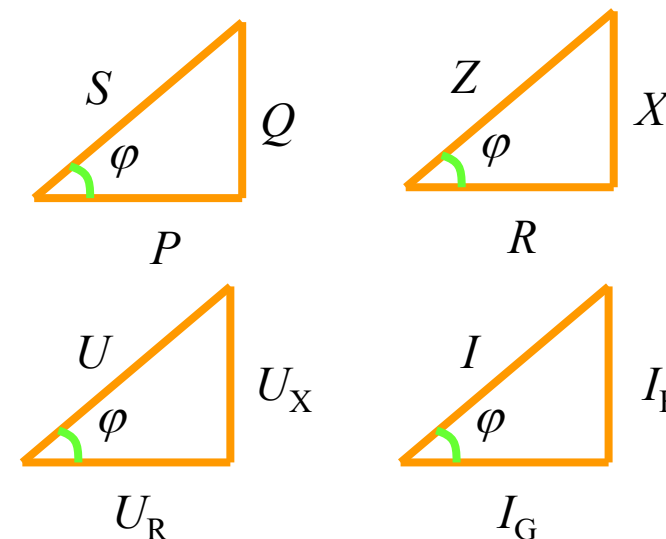
## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 6. 任意阻抗的功率计算

- 电压、电流的有功分量和无功分量（以感性负载为例，设  $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ ）

$$\left. \begin{aligned} P &= UI \cos \phi = U_R I \\ Q &= UI \sin \phi = U_X I \end{aligned} \right\} S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = IU$$

$$\left. \begin{aligned} P &= UI \cos \phi = UI_G \\ Q &= UI \sin \phi = UI_B \end{aligned} \right\} S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \sqrt{I_G^2 + I_B^2} = IU$$



相似三角形

# §9-4 正弦稳态电路的功率

## 6. 任意阻抗的功率计算

China Science & Technology | 油气、地矿、电力设备管理与技术

### 剖析无功功率的物理意义

曹俊

(华电新乡发电有限公司, 河南新乡 453635)

**【摘要】**无功功率是交流电路分析中的重要概念,其物理意义在于交流电源与负载之间的能量交换,无功功率的大小则表明了能量交换的能力。非线性负荷的无功功率分为频域无功功率和畸变功率,前者包含了各次谐波电压与同频率的谐波电流共同作用所产生的无功功率,后者包含了各次谐波电压与其它不同次谐波电流共同作用所产生的无功功率。

**【关键词】**无功功率 能量交换 非线性负荷 频域无功功率 畸变功率

**【Abstract】** Reactive power is the important concept of AC electric circuit and it is also the significant content of power system operation and management. The physical meaning of reactive power is the exchange between AC electric source and load, and the magnitude of reactive power shows the capability of energy exchange. Reactive power of non-linear load includes reactive power in frequency domain and distortion power. The former consists of the reactive power caused by harmonic voltages of all orders and harmonic currents of the same frequency. The latter consists of the reactive power caused by harmonic voltages of all orders and harmonic currents of the other orders.

**【Key words】** reactive power; energy exchange; non-linear load; reactive power in frequency domain; distortion power

#### 1 概述

交流电路的功率分为有功功率和无功功率,其中有功功率是指电路实际消耗的功率,具有十分明显的物理含义,而无功功率作为一种功率的概念,虽然具有功率的量纲,但它终究不是实际做功的功率,其物理含义却不那么明显。正确理解无功功率概念一直是部分电力工程技术人员遇到的一个难点,他们往往把无功功率看成是不消耗能量的无用功率,甚至还有人认为“无功”乃“无用之功”,这显然是十分错误的认识。实际上无功功率是电气工程领域内一个必不可少的重要物理量,本文将对无功功率的计算公式和物理意义给出全面的描述。

#### 2 交流正弦电路的功率

设交流正弦电路的电压和电流分别为:

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \alpha)$$

#### 3 无功功率的物理意义

无功功率的物理意义在于交流电源与负载之间的能量交换,而用(5)式计算出的无功功率就是交流正弦电路中能量交换的最大值,它表明了交流电源与负载之间能量交换的能力。

在线性交流电路中,电感性负载电流的相位滞后于电压的相位,而电容性负载电流的相位超前于电压的相位。因此,如果把电容性负载与电感性负载并联,在电感性负载储存能量的时候,正好是电容性负载在释放能量;而在电感性负载释放能量的时候,正好是电容性负载在储存能量。由于电力系统中的绝大部分负载都是电感性的,因此,通过装设并联电容器,可以把电感性负载与电源之间的能量交换改变成电感性负载与并联电容器之间的能量交换,这样就减少了输电线路的损耗,改善了供电质量,提高了电源(发电机)的效率,增加了电网运行的经济效益,这就是电力系统实施无功补偿的意义所在。

### 3 无功功率的物理意义

无功功率的物理意义在于交流电源与负载之间的能量交换,而用(5)式计算出的无功功率就是交流正弦电路中能量交换的最大值,它表明了交流电源与负载之间能量交换的能力。

在线性交流电路中,电感性负载电流的相位滞后于电压的相位;而电容性负载电流的相位超前于电压的相位。因此,如果把电容性负载与电感性负载并联,在电感性负载储存能量的时候,正好是电容性负载在释放能量;而在电感性负载释放能量的时候,正好是电容性负载在储存能量。由于电力系统中的绝大部分负载都是电感性的,因此,通过装设并联电容器,可以把电感性负载与电源之间的能量交换改变成电感性负载与并联电容器之间的能量交换,这样就减少了输电线路的损耗,改善了供电质量,提高了电源(发电机)的效率,增加了电网运行的经济效益,这就是电力系统实施无功补偿的意义所在。

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 6. 任意阻抗的功率计算

- 例9-4-1(课本例9-9) 求图9-5(a)所示电路中电源发出的有功功率 $P$ 、无功功率 $Q$ 、视在功率 $S$ 和电路的功率因数 $\lambda$ 。其中  $Z = (10 + j157)\Omega$ ,  $Z_1 = 1000\Omega$ ,  $Z_2 = -j318.47\Omega$ ,  $U_S = 100V$ ,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ 。

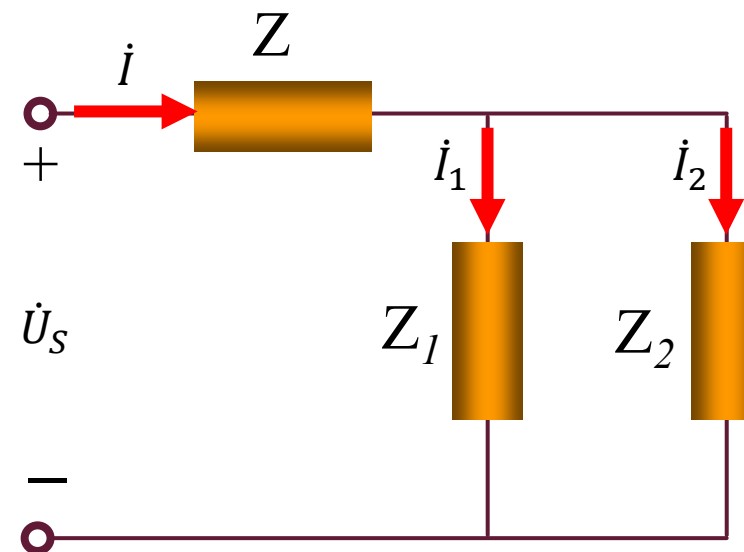


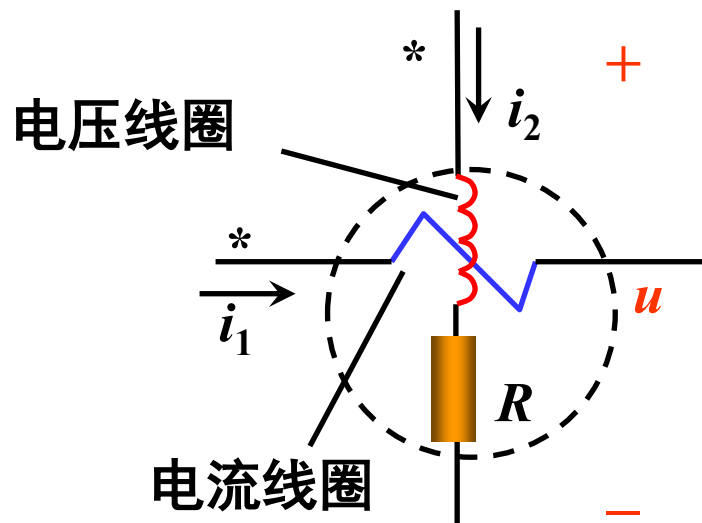
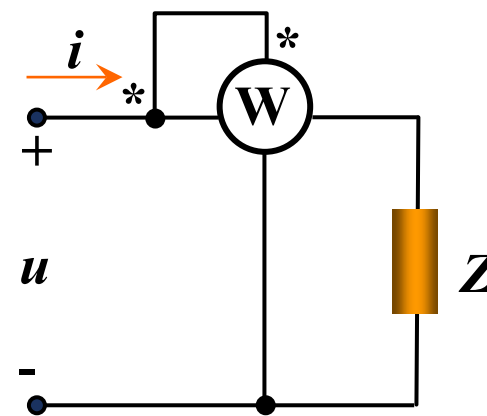
图9-5(a)

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 7. 交流电路功率的测量

#### ■ 使用功率表注意事项：

- ① 同名端：取负载的 $u$ 、 $i$ 为关联参考方向，电流 $i$ 从电流线圈“\*”号端流入，电压 $u$ 正端接电压线圈“\*”号端，此时 $P$ 表示负载吸收的功率。
- ② 量程： $P$ 的量程 =  $U$ 的量程  $\times$   $I$ 的量程  $\times \cos\varphi_N$ ，测量时， $P$ 、 $U$ 、 $I$ 均不能超量程。





## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 7. 交流电路功率的测量

$$P_R = U_R I_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R}$$

$$Q_L = U_L I_L \sin 90^\circ = U_L I_L = \omega L I_L^2 = \frac{U_L^2}{\omega L}$$

- 例9-4-2 已知  $f = 50\text{Hz}$ ，且测得  $U = 50\text{V}$ ， $I = 1\text{A}$ ， $P = 30\text{W}$ 。用三表法求电感线圈的参数  $R$  及  $L$ 。

解法 1

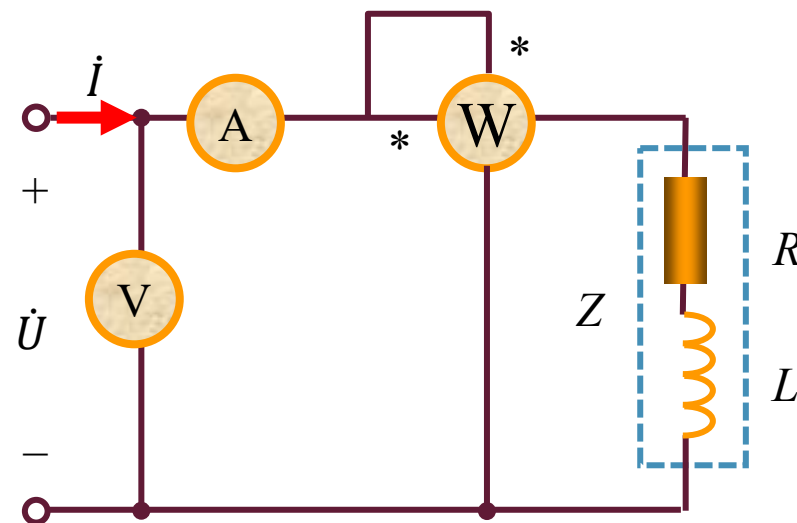
$$S = UI = 50 \times 1 = 50\text{V} \cdot \text{A}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\text{var}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{40}{1} = 40\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127\text{H}$$



图例9-4-2

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 7. 交流电路功率的测量

- 例9-4-2 已知  $f = 50\text{Hz}$ ，且测得  $U = 50\text{V}$ ， $I = 1\text{A}$ ， $P = 30\text{W}$ 。用三表法求电感线圈的参数  $R$  及  $L$ 。

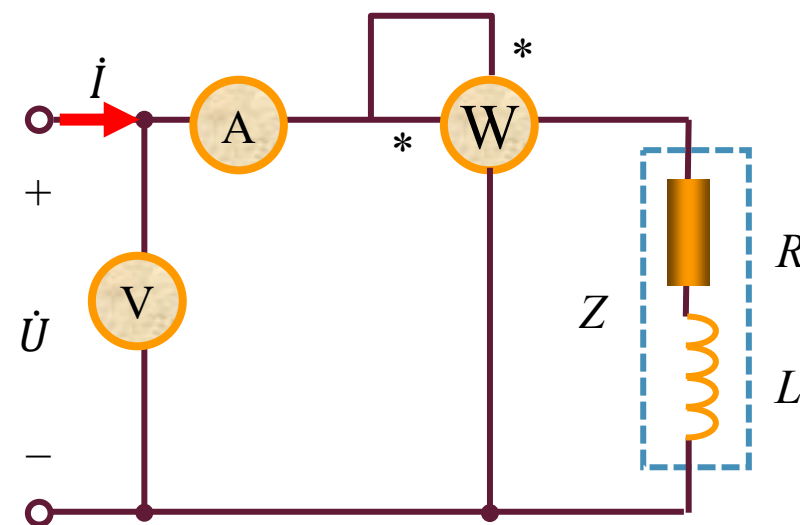
解法 2

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1}\Omega = 50\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314} \sqrt{50^2 - 30^2}\text{H} = 0.127\text{H}$$



图例9-4-2

## §9-4 正弦稳态电路的功率

### 7. 交流电路功率的测量

- 例9-4-2 已知  $f = 50\text{Hz}$ ，且测得  $U = 50\text{V}$ ， $I = 1\text{A}$ ， $P = 30\text{W}$ 。用三表法求电感线圈的参数  $R$  及  $L$ 。

**解法 3**

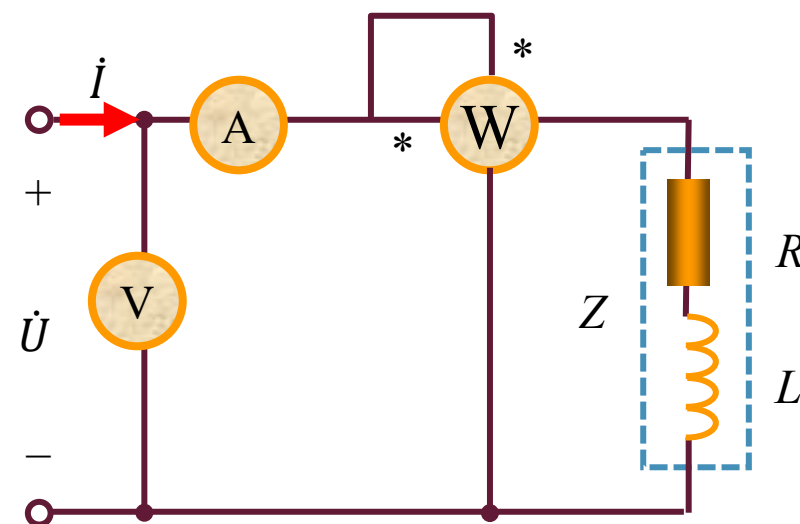
$$S = UI = 50 \times 1 = 50\text{V} \cdot \text{A} \quad |Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

$$\lambda = \cos \phi = \frac{P}{UI} = \frac{30}{50 \times 1} = 0.6$$

$$R = |Z| \cos \phi = 50 \times 0.6\Omega = 30\Omega$$

$$X_L = |Z| \sin \phi = 50 \times 0.8\Omega = 40\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127\text{H}$$



图例9-4-2

# 回顾与总结

	表达式	物理含义
瞬时功率	$p(t) = u(t)i(t)$	电路在瞬时吸收的功率
有功功率 (平均功率)	$P = UI \cos \varphi$	电路中电阻部分消耗的功率，将电能转化为机械能或热能，可直观感受到
无功功率	$Q = UI \sin \varphi$	电路中储能元件与交流电源往复交换的功率，将电能转化为电磁能，建立交变的电磁场（如变压器）
视在功率	$S = UI$	相当于在给定电压和电流下所能获得的最大有功功率反映了为确保网络能正常工作，外电路需传给网络的能量或该网络的容量

## 课件参考及参考教材

- 邱关源, 罗先觉. 电路 (第6版) . 高等教育出版社.
- 陈晓平, 李长杰. 电路原理 (第4版) . 机械工业出版社.
- 王向军. 电路. 机械工业出版社.
- 卢飒. 电路分析基础 (第2版) . 电子工业出版社.