1．一线性码的校验矩阵为 $H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$

求其系统生成矩阵。

解：将校验矩阵进行行列式变换，变成典型阵

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\text{和}r_4\text{交换}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\text{和}r_4\text{交换}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\text{和}r_4\text{交换}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2\oplus r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1=r_1\oplus r_4}\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1\oplus r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\left(P\middle|I_{\mathrm{r}}\right)$$

由线性分码组（9,5），系统生成矩阵表示为$G=\left(I_k\middle|P^T\right)$，得系统生成矩阵为：

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

2、已知（7，3）分组码的校验关系式为

$$\begin{cases} x_6 & & & +x_3 & +x_2 & +x_1 & & = & 0 \\ x_6 & & & & +x_2 & +x_1 & +x_0 & = & 0 \\ x_6 & +x_5 & & & & +x_1 & & = & 0 \\ x_6 & & +x_4 & & & & +x_0 & = & 0 \end{cases}$$

求其校验矩阵、生成矩阵、全部码字及纠错能力。

解：设 $A=\begin{bmatrix}x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0\end{bmatrix}$，线性方程组可表示为 $H\cdot A^T=0^T$，校验矩阵直接写为：$H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$

将校验矩阵进行行列式变换，变成典型阵。行列式变换为：

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2=r_2\oplus r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2=r_2\oplus r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1=r_1\oplus r_3}\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1=r_1\oplus r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PI_r\end{bmatrix}$$

系统生成矩阵为 $G=\left(I_k\middle|P^T\right)$，得系统生成矩阵为：$G=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$

（7，3）分组码的全部码字为：

0000000　1001111

0011101　1010010

0100110　1101001

0111011　1110100

由于最小汉明距离 $d_{\min}=2$，所以（7，3）线性分组码可以检测 1 个错误，没有纠错能力。