第二章 连续系统的时域分析

§2.1 LTI连续系统的响应

一、微分方程的经典解

对于一个线性系统，其激励信号$x(t)$与响应函数$y(t)$之间的关系，可用下列形式的微分方程式来描述

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$

$$=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0 x(t)$$

上式就是一个常系数 n 阶线性常微分方程。

此方程的完全解由两部分组成，这就是齐次解和特解。齐次解应满足

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=0$$

特征方程为

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0=0$$

1）特征根为单根，微分方程的齐次解为

$$y_h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\ldots+A_ne^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设 α_1 是特征方程的K重根，那么，在齐次解中，相应于α_1的部分将有K项

$$(A_1t^{K-1}+A_2t^{K-2}+\ldots+A_{K-1}t+A_K)e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2为共轭复根，即 $\alpha_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ 那么，在齐次解中，相应于α_1、α_2的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)$$

下面讨论求特解的方法，特解的函数形式与激励的函数形式有关。将激励信号代入微分方程的右端，代入后的函数式称为“自由项”。

自由项	特解
E(常数)	p(常数)
$e^{\alpha t}$	$pe^{\alpha t}$
$e^{\alpha t}$	$(p_1 t + p_0)e^{\alpha t}$

例2.1求微分方程y ' ' (t)+5y ' (t)+6y(t) = f(t)

1)当$f(t) = 2e^{-t}$, $t\geqslant 0$; $y(0)=2$, $y'(0)=-1$时全解；

2) 当$f(t) = e^{-2t}$, $t\geqslant 0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$时全解。

解: 1) 特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$

特征根 $\lambda_1=-2$， $\lambda_2=-3$

齐次解$y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

当$f(t)=2e^{-t}$ 时特解为 $y_p(t)=pe^{-t}$

代入得$pe^{-t}-5pe^{-t}+6pe^{-t}=2e^{-t}$ $\rightarrow p=1$

全解为$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+e^{-t}$

$y(0)= c_1+c_2+1=2$

$y'(0)= -2c_1-3c_2-1=-1$

$\Rightarrow$ $c_1=3$, $c_2=-2$

可得：$y(t) = \underbrace{3e^{-2t} - 2e^{-3t}}_{\text{齐次解}} + \underbrace{e^{-t}}_{\text{特解}},\ t\geqslant 0$

齐次解：自由响应

特解：强迫响应

2）当$f(t) = e^{-2t}$, $t\geqslant 0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$时全解。

2）齐次解仍为$y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

当$f(t)=e^{-2t}$ 时特解为 $y_p(t)=p_1te^{-2t}+p_0e^{-2t}$

代入得$(4p_1-10p_1+6p_1)te^{-2t}+(-4p_1+4p_0+5p_1-10p_0+6p_0)e^{-2t}=e^{-2t}$

$\rightarrow p_1=1$

全解为$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+te^{-2t}+p_0e^{-2t}$

其一阶导数$y'(t)=-2(c_1+p_0)e^{-2t}-3c_2e^{-3t}+e^{-2t}-2te^{-2t}$

代入初始条件得：$y(0)=c_1+c_2+p_0=1$

$y'(0)=-2(c_1+p_0)-3c_2+1=0$

$c_1+p_0=2,\ c_2=-1$

得微分方程的全解$y(t)=2e^{-2t}-3e^{-3t}+te^{-2t}\ ,t\geqslant 0$

全响应中随时间衰减的分量称为瞬态响应，不随时间衰减的部分是稳态响应

如P44例

全响应＝零输入响应＋零状态响应

＝自由响应＋强迫响应

＝瞬态响应＋稳态响应

讨论

1） 若初始条件不变，输入信号改变，则系统的全响应 $y(t)$ = ？

2） 若输入信号不变，初始条件改变, 则系统的全响应 $y(t)$ = ？

经典法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

二、关于0_+与0_-初始值

为了确定待定系数所需的初始值y(0)、 y '(0)等都是指t= 0_+时刻的值。而t= 0_-时激励尚未接入，才真正反映系统的初始情况。而且比较容易求得。因此解LTI系统微分方程时需要由$y^{(j)}(0_-)$求出$y^{(j)}(0_+)$ 。

例2.2 y ' ' (t)+3y ' (t)+2y(t) =2 f ' (t)+6 f(t)已知$y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$, f(t)= ε (t) 求$y(0_+)$、 $y'(0_+)$ 。

解：将f(t)代入得

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$$

设$y''(t)=a\delta(t)+r_0(t)$

则$y'(t)=a\varepsilon(t)+\int_{-\infty}^{t} r_0(\tau)d\tau=r_1(t)$ $y(t)=\int_{-\infty}^{t} r_1(\tau)d\tau=r_2(t)$

$$a\delta(t)+r_0(t)+3r_1(t)+2r_2(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$$

a=2 $y''(t)=2\delta(t)+r_0(t)$

$$\int_{0_-}^{0_+} y''(t)dt=2\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt+\int_{0_-}^{0_+}r_0(t)dt=2$$

$y'(0_+)-y'(0_-)=2$ y ' (0_+) = y ' (0_-) +2=2

$$\int_{0_-}^{0_+} y'(t)dt=\int_{0_-}^{0_+}r_1(t)dt=0$$

$y(0_+)-y(0_-)=0$ y(0_+)=y(0_-)=2

三、零输入响应和零状态响应

LTI系统的全响应y(t)可以分解为零输入响应$y_{zi}(t)$和零状态响应$y_{zs}(t)$ 。即$y(t)= y_{zi}(t) +y_{zs}(t)$ 。

用经典法求零输入和零状态响应时需要用响应及其各阶导数的初始值来确定待定系数。

$$y^{(j)}(t)=y^{(j)}_{zi}(t)+ y^{(j)}_{zs}(t) \qquad \begin{cases} y^{(j)}(0_+)=y^{(j)}_{zi}(0_+)+ y^{(j)}_{zs}(0_+) \\ y^{(j)}(0_-)=y^{(j)}_{zi}(0_-)+ y^{(j)}_{zs}(0_-) \end{cases}$$

对于零状态响应，由于$t=0_-$时激励尚未接入，故

$y^{(j)}_{zs}(0_-)=0$ $\qquad$ $y^{(j)}_{zs}(0_+)$待求

对于零输入响应，由于激励为零，故

$$y^{(j)}_{zi}(0_+) = y^{(j)}_{zi}(0_-)= y^{(j)}(0_-)$$

例2.3某LTI系统的微分方程为$y''(t)+3y'(t)+2y(t) =2 f'(t)+6 f(t)$ 已知$y(0_-)=2, y'(0_-)=0, f(t)= \varepsilon(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：1）零输入响应

$$y_{zi}''(t)+3y_{zi}'(t)+2y_{zi}(t) =0$$

特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$

故零输入响应$y_{zi}(t) = c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

$$\begin{cases} y'_{zi}(0_+) = y'_{zi}(0_-) = y'(0_-) = 0 \\ y_{zi}(0_+) = y_{zi}(0_-) = y(0_-) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'_{zi}(0_+) = -c_1 - 2c_2 = 0 \\ y_{zi}(0_+) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

故系统的零输入响应为$y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}$， $t \geqslant 0$

2）零状态响应

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

$$y'_{zs}(0_+) - y'_{zs}(0_-) = 2$$

$y_{zs}'(0_+) = 2$

$$y_{zs}(0_+) - y_{zs}(0_-) = 0$$

$y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) = 0$

$t \geqslant 0_+$时系统的微分方程可写为：

$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 6$

齐次解为$d_1e^{-t} + d_2e^{-2t}$，特解为3

$y_{zs} = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t} + 3$

$y_{zs}(0_+) = d_1 + d_2 + 3 = 0$

$y_{zs}'(0_+) = -d_1 - d_2 = 2$

$\Rightarrow$

$d_1 = -4$

$d_2 = 1$

故系统的零状态响应为$y_{zs}(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$， $t \geqslant 0$

§ 2.2 冲激响应和阶跃响应

一、冲激响应

LTI系统初始状态为零时，由单位冲激函数引起的响应称为单位冲激响应h(t)。

例2.4求系统$y''(t)+5y'(t)+6y(t) = f(t)$ 的单位冲激响应

解：当$f(t) = \delta(t)$ 时， $y_{zs}(t) = h(t)$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t) = \delta(t)$$

$$h(0_-) = h'(0_-)=0$$

冲激函数仅在t=0时作用，$t=0_+$以后系统的输入实际为零。因此h(t)和零输入响应具有相同的形式

故$h(t)=(c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t})\varepsilon(t)$

$$h''(t)=\delta(t)+r_0(t) \qquad h'(t)=r_1(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+} h''(t)dt=1 \qquad \int_{0_-}^{0_+} h'(t)dt=0$$

$$[h'(0_+)-h'(0_-)]=1 \quad [h(0_+)-h(0_-)]=0$$

$\Rightarrow$ $h'(0_+)=1,\ h(0_+)=0$

$$\begin{cases} h(0_+)=c_1+c_2=0 \\ h'(0_+)=-2c_1-3c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1=1 \\ c_2=-1 \end{matrix}$$

得$h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

对于更一般的情况，可以利用LTI系统的特性求解

例2.5求系统$y''(t)+5y'(t)+6y(t) = f''(t)+2f'(t)+3f(t)$ 的单位冲激响应

解：设$y_1(t)$满足$y_1''(t)+5y_1'(t)+6y_1(t) = f(t)$

其冲激响应为$h_1(t)$，则原系统的单位冲激响应h(t)满足

$$h(t) = h_1''(t)+2h_1'(t)+3h_1(t)$$

由上题知$h_1(t)= (e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

可得$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$

二、阶跃响应

LTI系统初始状态为零时，由单位阶跃函数引起的响应称为单位阶跃响应g(t)

对n阶微分方程$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_0y(t)=f(t)$ 当$f(t)=\varepsilon(t)$ 时，

$$g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\dots+a_0g(t)=\varepsilon(t)$$

初始条件为

$$\begin{cases} g^{(j)}(0_+) = 0,\ j=0,1,\dots,n-1 \\ g^{(j)}(0_-) = 0,\ j=0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

$g^{(n)}(t)$中包含阶跃函数，g(t)以及其至n-1阶的各阶导数不包含阶跃函数，且在t=0均连续

由ε(t)和δ(t)的关系可得：

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{dg(t)}{dt} \\ g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x)dx \end{cases}$$

例2.6求系统$y''(t)+3y'(t)+2y(t) = -f'(t)+2f(t)$的单位阶跃响应

解：设g_1满足$g_1''(t)+3g_1'(t)+2g_1(t) = \varepsilon(t)$

特征值 $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=-2$，特解为 1/2

$g_1(t) = (c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} + 1/2)\varepsilon(t)$

$$g_1(0_+) = c_1+c_2 + 1/2 = 0 \qquad c_1=-1$$

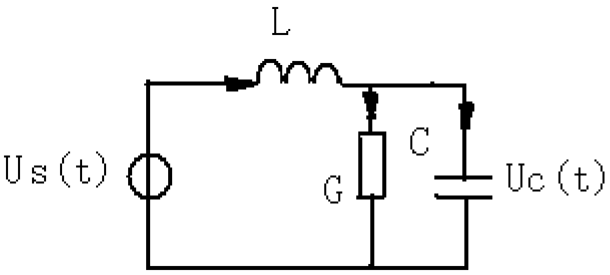
$$g_1'(0_+) = -c_1-2c_2 = 0 \qquad c_2=1/2$$

得到$g_1(t) = (-e^{-t}+0.5e^{-2t} + 0.5)\varepsilon(t)$

$g_1'(t) = (-e^{-t}+0.5e^{-2t} + 0.5)\delta(t)+ (e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)= (e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$

原系统的阶跃响应$g(t)= - g_1'(t)+2g_1(t)= (-3e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$

例2.7如图所示的二阶电路，已知L=0.4H, C=0.1F, G=0.6S, 若以$u_s(t)$为输入，以$u_c(t)$为输出，求该电路的冲激响应和阶跃响应



解：1）列写微分方程

根据电压定理和电流定理，有：

$$i_L=i_C+i_G=Cu'_C+Gu_C$$

$$u_L+u_C=u_S$$

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=LCu''_C+LGu'_C$$

整理得： $u_C'' + \frac{G}{C}u_C' + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u_S$

根据已知条件，电路的微分方程为

$$u_c''(t)+6u_c'(t)+25u_c(t)=25u_s(t)$$

2）求冲激响应

当$u_s(t)=\delta(t)$ 时，电路的冲激响应h(t)满足：

$$\begin{cases} h''(t)+6h'(t)+25h(t)=25\delta(t) \\ h(0_-)=h(0_+)=0 \\ h'(0_-)=0,\ h'(0_+)=25 \end{cases}$$

微分方程的特征根 $\lambda_1=-3+j4$， $\lambda_2=-3-j4$

$h(t)=e^{-3t}(C\cos4t+D\sin4t)\,\varepsilon(t)$

$h(0_+)=C=0,$ $\Rightarrow$ $C=0$

$h'(0_+)=4D-3C=25$ $\quad$ $D=6.25$

系统的冲激响应$h(t)=6.25e^{-3t}\sin4t\varepsilon(t)$

3）求阶跃响应

当$u_s(t)=\varepsilon(t)$时，电路的阶跃响应$g(t)$满足：

$$\begin{cases} g''(t)+6g'(t)+25g(t)=25\varepsilon(t) \\ g(0_-)=g(0_+)=0 \\ g'(0_-)=0,\ g'(0_+)=0 \end{cases}$$

$g(t)=[e^{-3t}(C\cos 4t+D\sin 4t)+1]\ \varepsilon(t)$

$g(0_+)=C+1=0,$

$g'(0_+)=4D-3C=0$

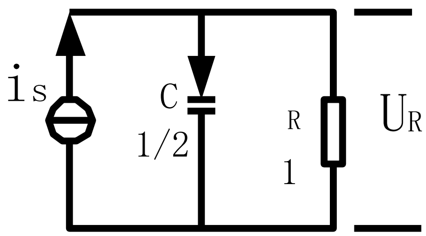
$\Rightarrow$

$C=-1$

$D=-0.75$

系统的阶跃响应$g(t)=[1-e^{-3t}(\cos 4t+0.75\sin 4t)]\varepsilon(t)$

习题1.10如图所示的电路，以$i_s(t)$为输入，以$u_R(t)$为输出，求该电路的冲激响应和阶跃响应



解：1）列微分方程：

$$i_s=i_C+i_R=CU_R{}'+U_R/R$$

$$U_R{}'+2U_R=2\,i_s$$

2）求冲激响应

特征根为-2，冲激响应$h(t)=ce^{-2t}\,\varepsilon(t)$

根据冲激函数匹配法，h'包含冲激函数，h包含阶跃函数，对微分方程两边求积分：

$$\int_{0_-}^{0_+} h'(t)dt = 2$$

$h(0_+) - h(0_-) = 2$ $h(0_+) = 2$

$h(0_+) = c = 2$

$c = 2$

冲激响应$h(t)=2e^{-2t}\,\varepsilon(t)$

3）求阶跃响应

t>0时，微分方程变为：$g'+2g=2$

齐次解： $g_h(t)=c_2e^{-2t}$

特解：$g_p(t)=1$

根据冲激函数匹配法， g ‘不包含冲激函数

$$\int_{0_-}^{0_+} g'(t)dt = 0$$

$g(0_+)- g(0_-)=0$ $g(0_+)=0$

$g(0_+) = c_2 + 1 = 0$

$c_2 = -1$

阶跃响应$g(t)=(-e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$

也可根据冲激函数和阶跃函数之间的关系由冲激响应求解阶跃响应:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x)dx$$

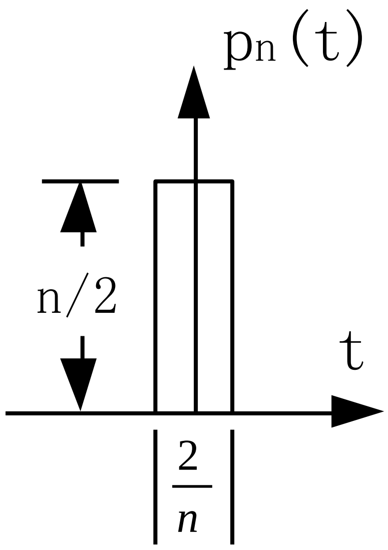
或由阶跃响应求解冲激响应:

$$h(t)=g'(t)$$

§2.3 零状态响应与卷积积分

一、卷积积分

在第一章中定义了强度为1，宽度很窄的脉冲$P_n(t)$：



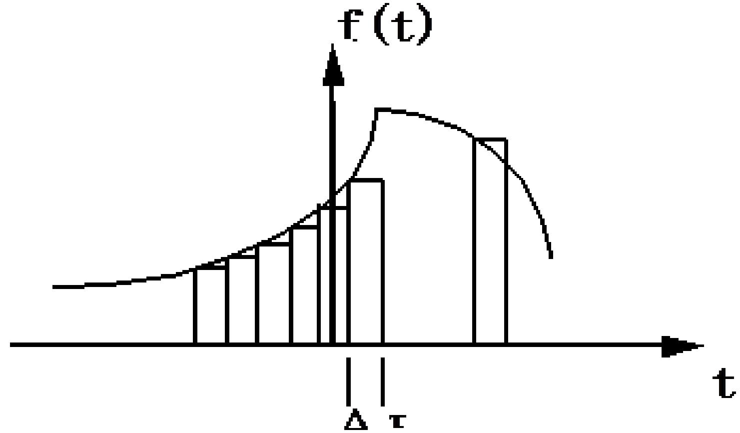
当$P_n(t)$作用于LTI系统时，其零状态响应为$h_n(t)$。由于

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$$

因此，LTI系统的冲激响应为

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(t)$$

对于任意信号f(t)，令Δτ =2/n，把f(t)分解为许多宽度为Δτ 的窄脉冲，其中第k个脉冲出现在t=kΔτ 时刻，其强度（即脉冲的面积）为f(kΔτ) Δτ



则f(t)等于许多强度不同、位置不同的脉冲的和：

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau) p_n(t - k\Delta\tau)\Delta\tau$$

如果LTI系统在窄脉冲$P_n(t)$作用下的零状态响应为$h_n(t)$，那么根据LTI系统的性质，在上面一系列窄脉冲的作用下系统的零状态响应近似为：

$$y_{zs}(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau) h_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

在Δτ —>0的极限情况下， Δτ 变为dτ，kΔτ变为τ，求和符号变为积分符号，则f(t)变为：

$$f(t) \approx \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau) p_n(t - k\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

激励为f(t)时LTI系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) \approx \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau) h_n(t - k\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

这样的式子称为卷积积分。上式表明，LTI系统的零状态响应$y_{zs}(t)$ 是激励f(t)与冲激响应h(t)的卷积积分。

两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分为：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

通常记做 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

二、卷积积分的图示

卷积图解步骤：(1)换坐标 $f_1(t), f_2(t)\rightarrow f_1(\tau), f_2(\tau)$;

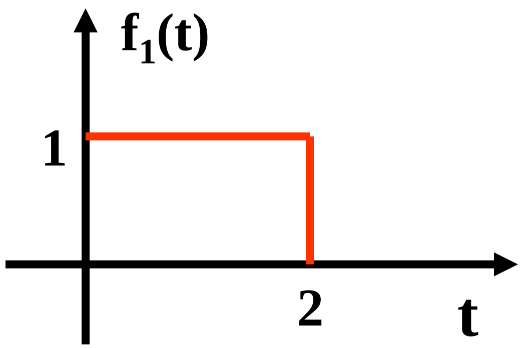
(2)反折其中之一信号 $f_1(\tau)\rightarrow f_1(-\tau)$;

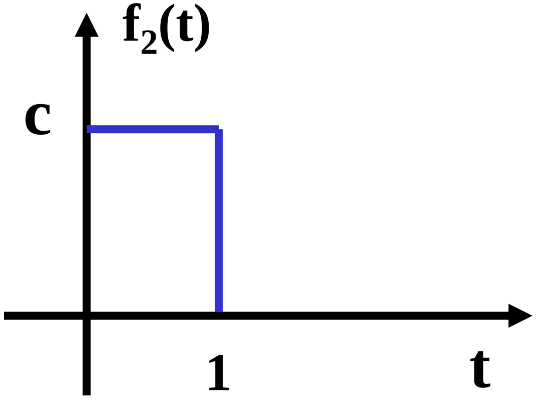
(3)移位反折的信号 $f_1(t-\tau)\rightarrow f_1(t-\tau)$;

(4)相乘两信号的重叠部分 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)$;

(5)积分相乘内容 $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$;

例：两个矩形波$f_1(t)$与 $f_2(t)$ 如图所示



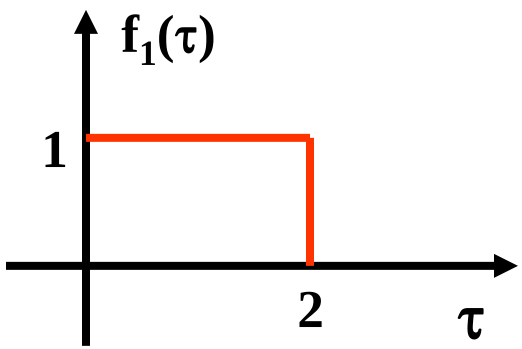


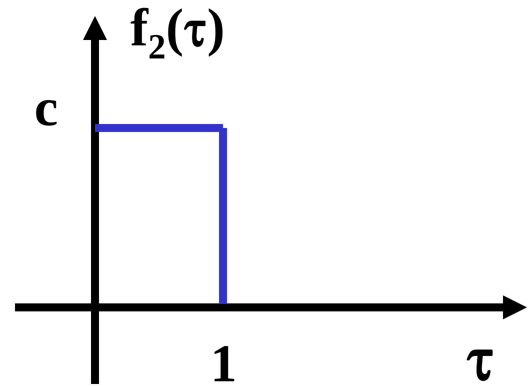
$$f_1(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}c & 0<t<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

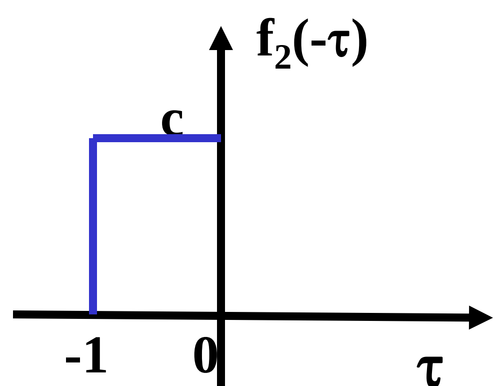
求解 $f_1(t)*f_2(t)$

解：1、变量 替换：



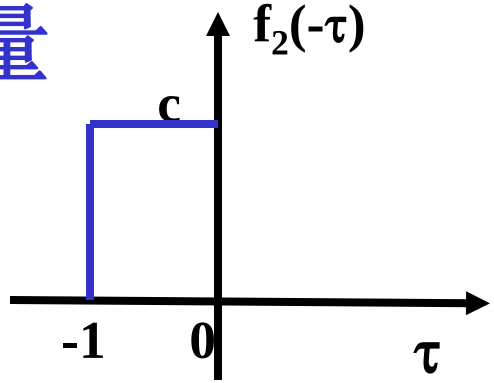


2、反转：



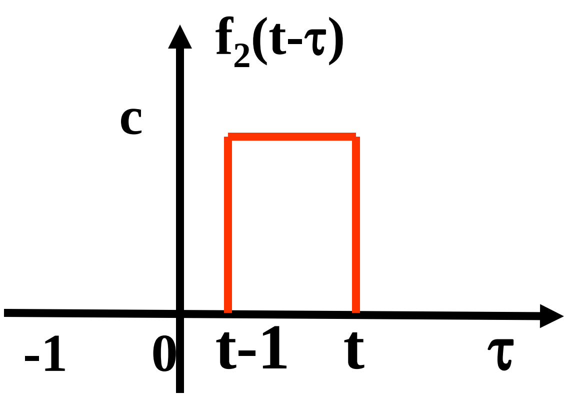
3、平移：

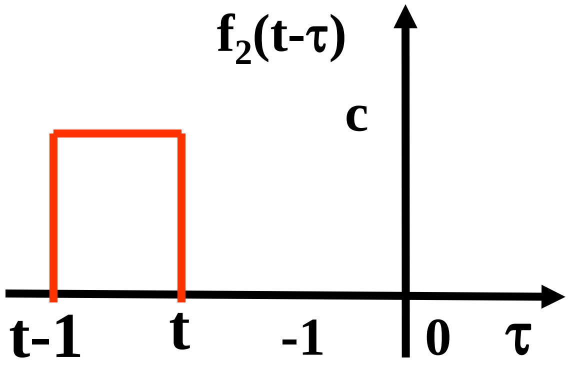
将$f_2(-\tau)$沿时间轴τ平移t，t为参变量



$$f_2(t-\tau)=f_2[-(\tau-t)]$$

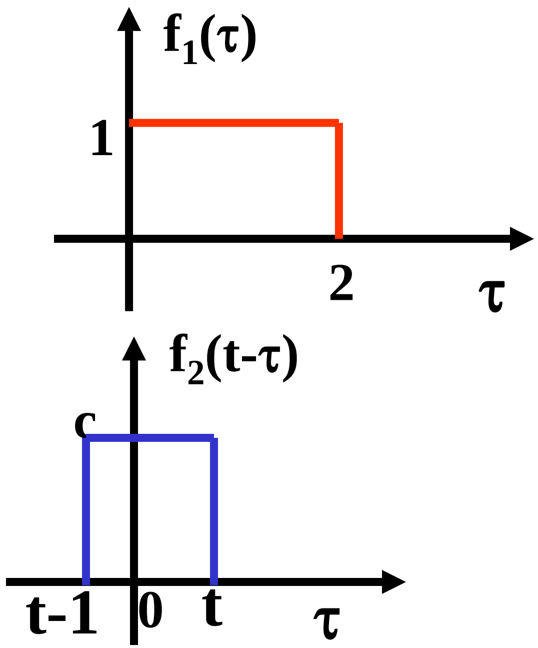
t>0时向右平移，t<0时向左平移

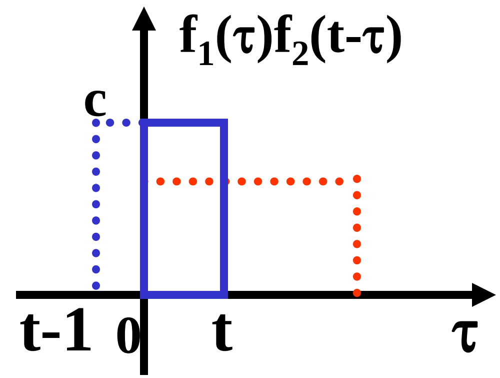




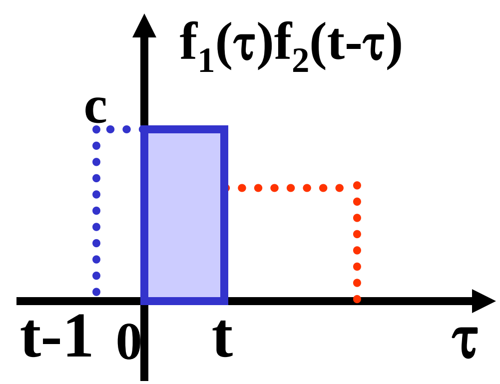
随t取值不同，$f_2(t-\tau)$出现在不同位置

4、相乘：将$f_1(\tau)$和 $f_2(t-\tau)$相乘

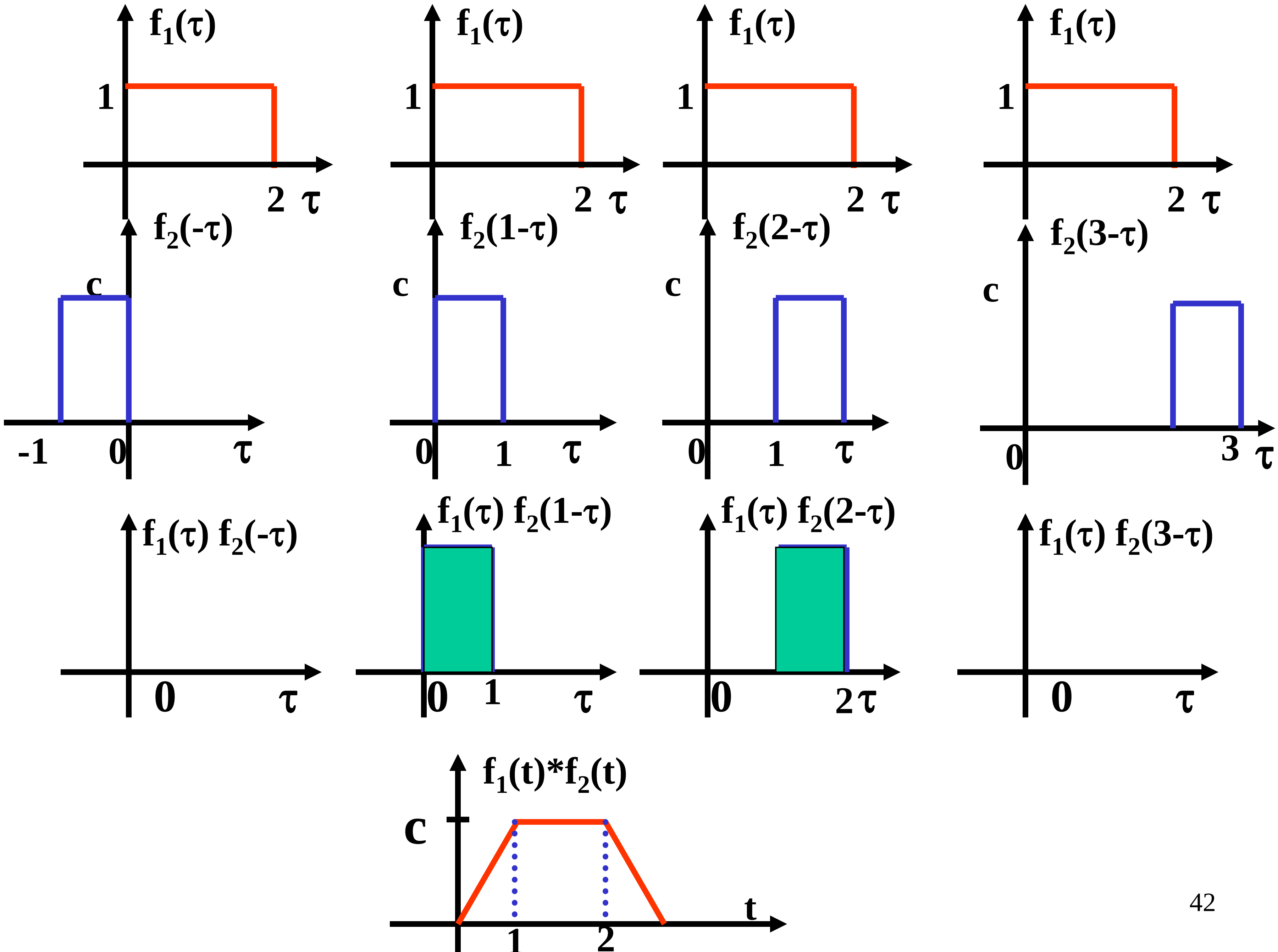




5、积分



阴影的面积，即g(t)的值，
是t时刻的卷积结果。

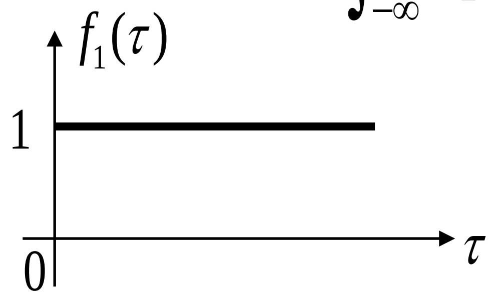

f1(τ)
1
2 τ
f1(τ)
1
2 τ
f1(τ)
1
2 τ
f1(τ)
1
2 τ
f2(-τ)
c
-1
0
τ
f2(1-τ)
c
0
1
τ
f2(2-τ)
c
0
1
τ
f2(3-τ)
c
0
3
τ
f1(τ) f2(-τ)
0
τ
f1(τ) f2(1-τ)
0
1
τ
f1(τ) f2(2-τ)
0
2 τ
f1(τ) f2(3-τ)
0
τ
f1(t)*f2(t)
c
t
1
2

三、卷积积分的解析法

例： 已知 $f_1(t)=\varepsilon(t),\ f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

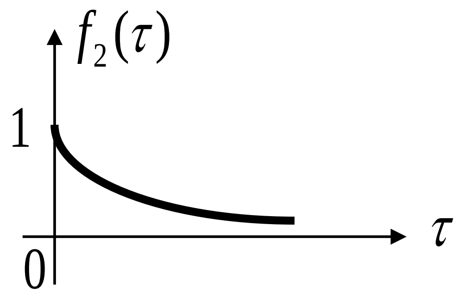
解：

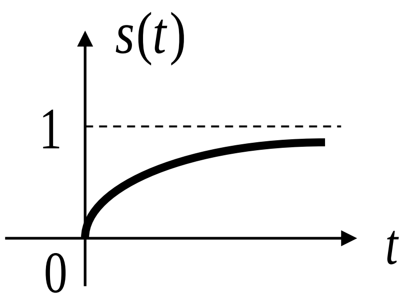
$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\tau)e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$



$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau$$

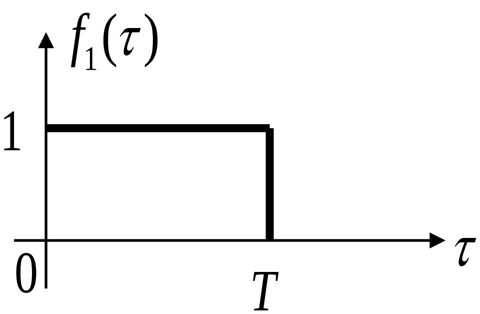
$$=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

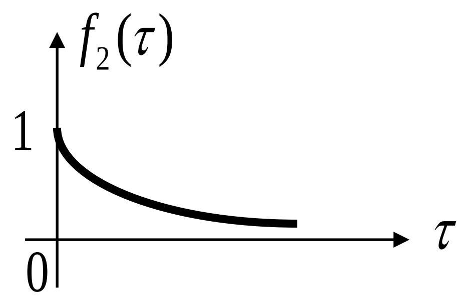


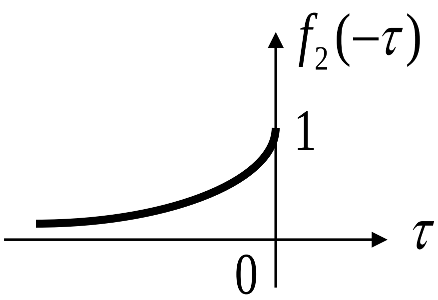


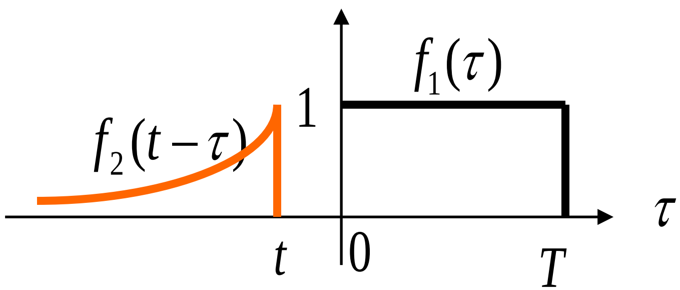
演示

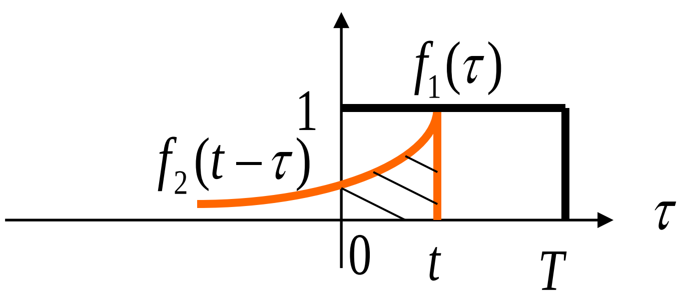
例已知 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T),\ f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$,求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$







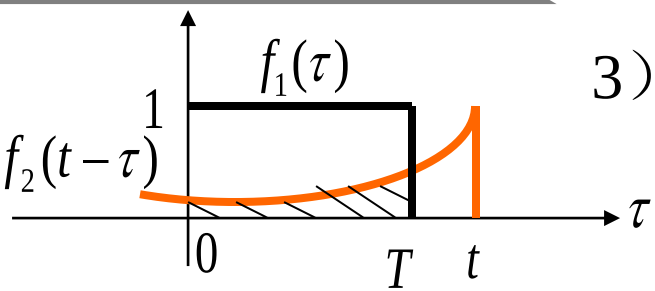




1）当 $t<0$ 时， $s(t)=0$

2）当 $0<t<T$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau\ =(1-e^{-t})$$

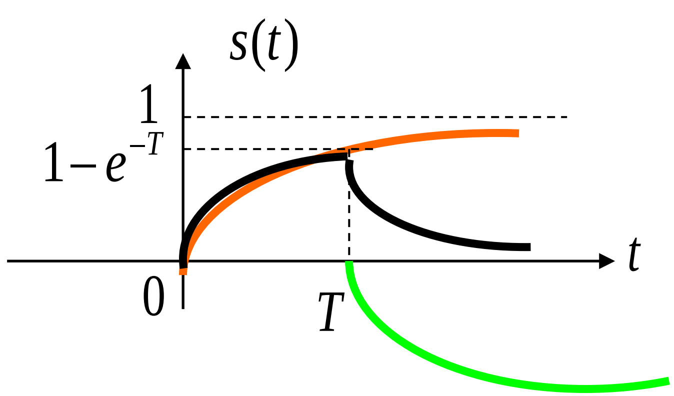


3）当 $t \geq T$ 时，

$$s(t)=\int_0^T 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau \ =e^{-(t-T)}-e^{-t}$$

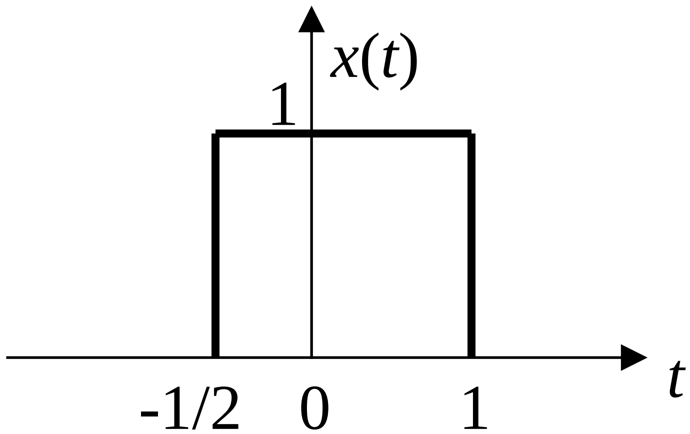
$$s(t)=(1-e^{-t})[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]+(e^{-(t-T)}-e^{-t})\varepsilon(t-T)$$

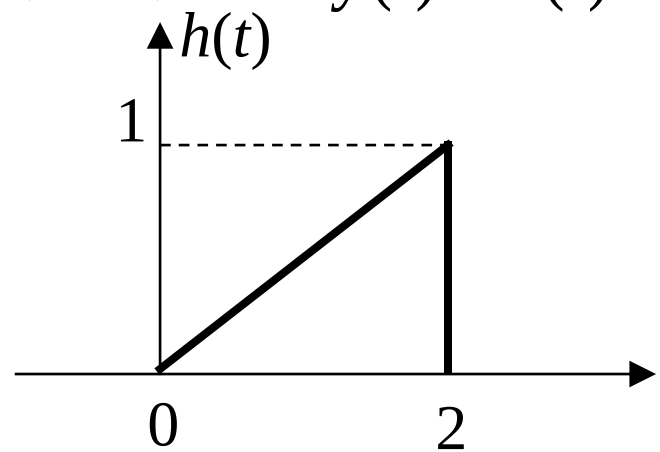
$$=(1-e^{-t})\varepsilon(t)-(1-e^{-(t-T)})\varepsilon(t-T)$$



演示

例 已知信号 $x(t)$ 与 $h(t)$ 如下图所示，求 $y(t)=x(t)*h(t)$

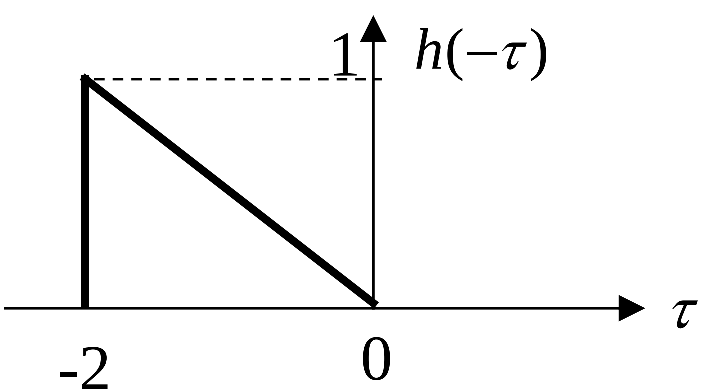




解：

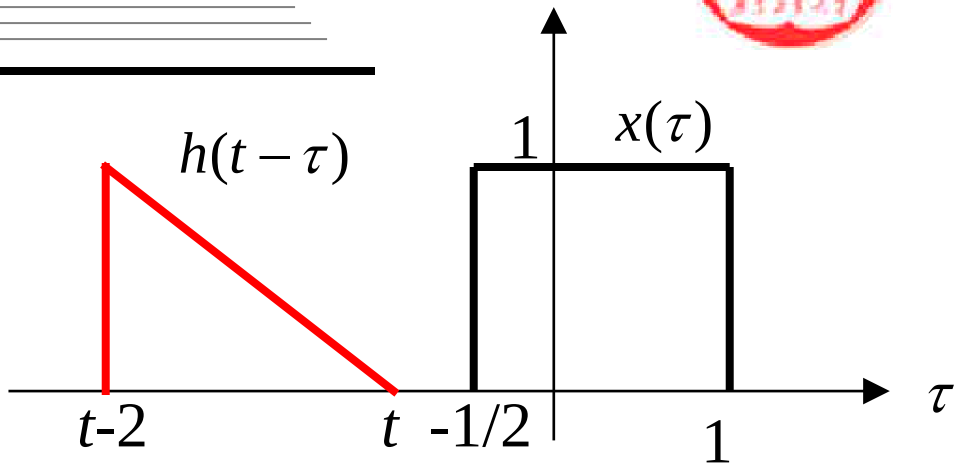
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

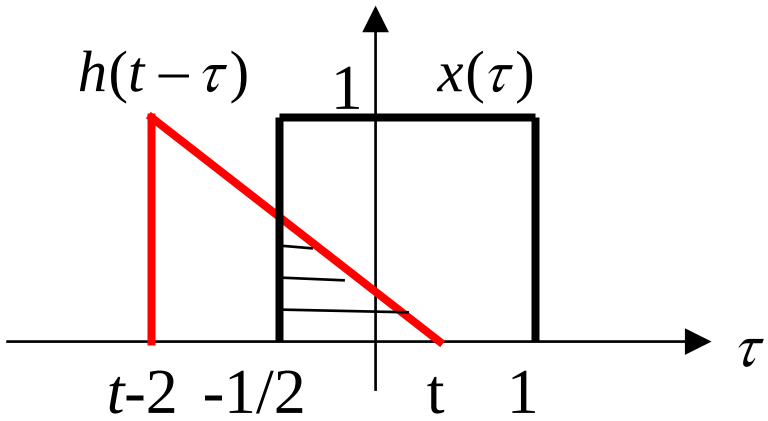
$$h(t)=\frac{t}{2}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$$



$$h(t-\tau)=\frac{t-\tau}{2}[\varepsilon(t-\tau)-\varepsilon(t-\tau-2)]$$

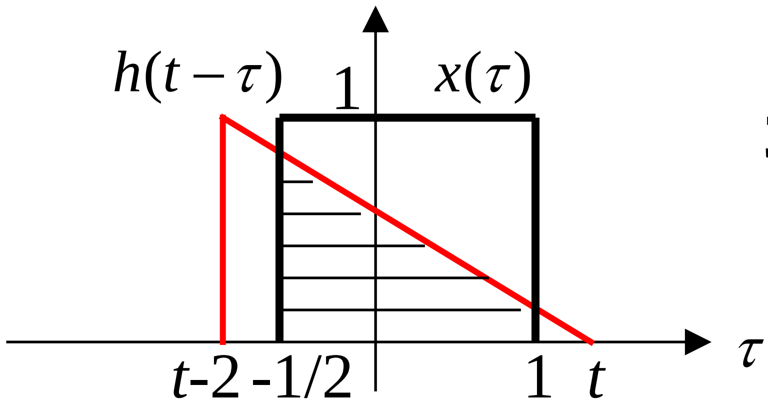
1） 当 $t \le -\frac{1}{2}$ 时， $y(t) = 0$





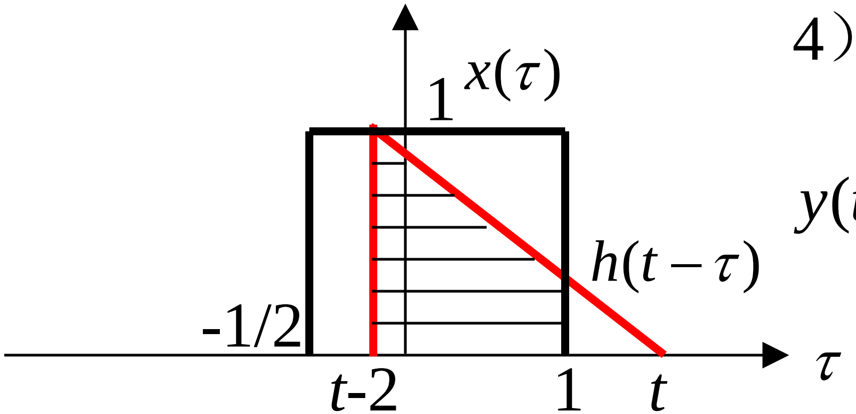
2）当 $-\dfrac{1}{2}\le t\le 1$ 时，

$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{t}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau\quad=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}+\frac{1}{16}$$



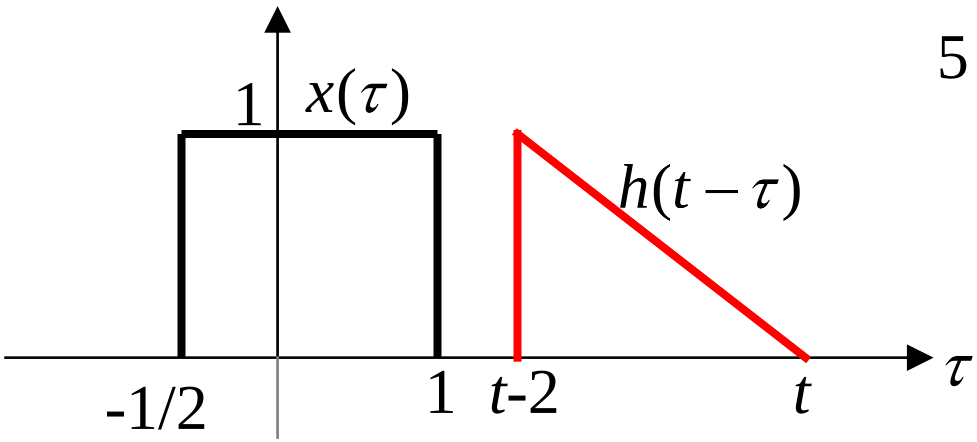
3）当 $t\ge 1, t-2\le -\dfrac{1}{2}$，即当 $1\le t\le \dfrac{3}{2}$ 时

$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}$$



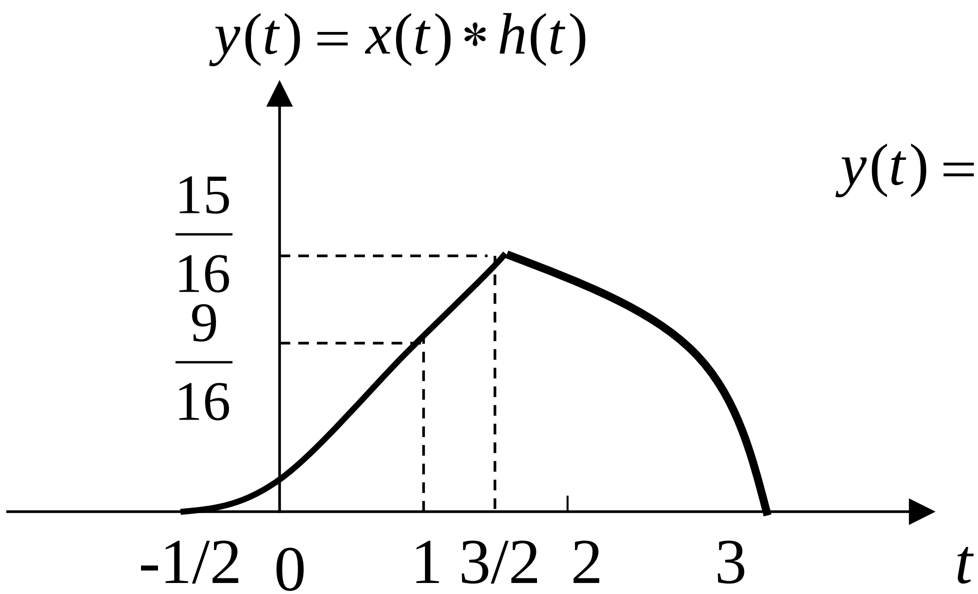
4）当 $-\dfrac{1}{2}\le t-2\le 1$，即当 $\dfrac{3}{2}\le t\le 3$时，

$$y(t)=\int_{t-2}^{1}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau\ =-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}$$



5）当 $t-2\geq 1$，即 $t\geq 3$ 时，

$$y(t)=0$$



$$y(t)=\begin{cases} 0 & t\leq -\frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}+\frac{1}{16} & -\frac{1}{2}\leq t\leq 1 \\ \frac{3}{4}t-\frac{3}{16} & 1\leq t\leq \frac{3}{2} \\ -\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4} & \frac{3}{2}\leq t\leq 3 \\ 0 & t\geq 3 \end{cases}$$

演示

两个信号卷积运算的结果仍然是一个信号，其起点等于两个信号起点之和，终点等于两个信号终点之和。

§ 2.4 卷积积分的性质

一、代数运算

（1）交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

证明：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

将变量τ替换为t-η，则上式变为：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{\infty}^{-\infty}f_1(t-\eta)f_2(\eta)d(-\eta)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\eta)f_1(t-\eta)d\eta=f_2(t)*f_1(t)$$

例2.9 设$f_1(t)=e^{-at}\,\varepsilon(t)$， $f_2(t)=\varepsilon(t)$， 分别求$f_1(t)*f_2(t)$和$f_2(t)*f_1(t)$ 。

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{a}(1-e^{-at})\varepsilon(t)$$

$$f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-a(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-a(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{1}{a}(1-e^{-at})\varepsilon(t)$$

（2）分配律：$f_1(t)*\left[f_2(t)+f_3(t)\right]=$

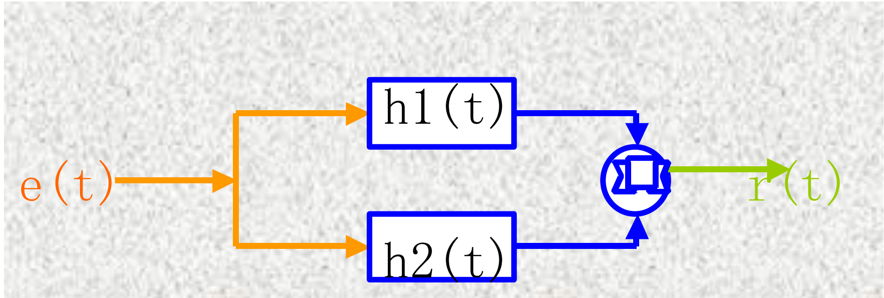
$$f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

证明：

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)[f_2(t-\tau)+f_3(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_3(t-\tau)d\tau$$

上式的物理含义是：若$f_2(t)+f_3(t)$是系统的冲激响应，则当输入为$f_1(t)$时的零状态响应等于分别作用于冲激响应为$f_2(t)$和$f_3(t)$的两个系统并联所产生的零状态响应。



（3）结合律：$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$

证明：

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\eta-\tau)d\tau]f_3(t-\eta)d\eta$$

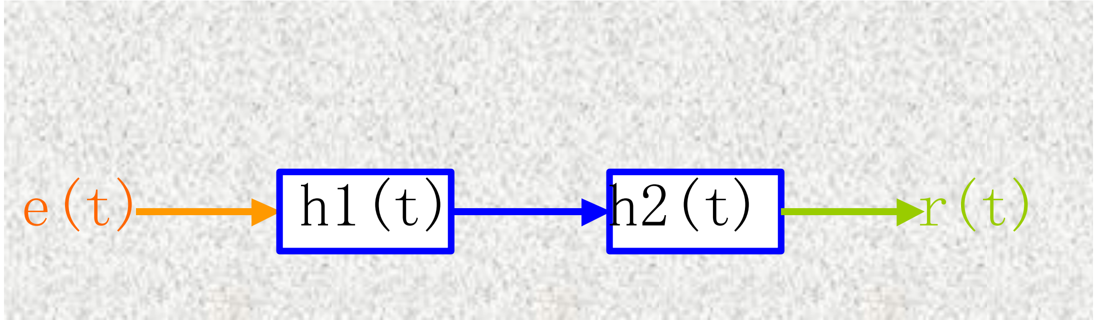
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\underbrace{\eta-\tau}_{x})f_3(t-\eta)d\eta]d\tau$$

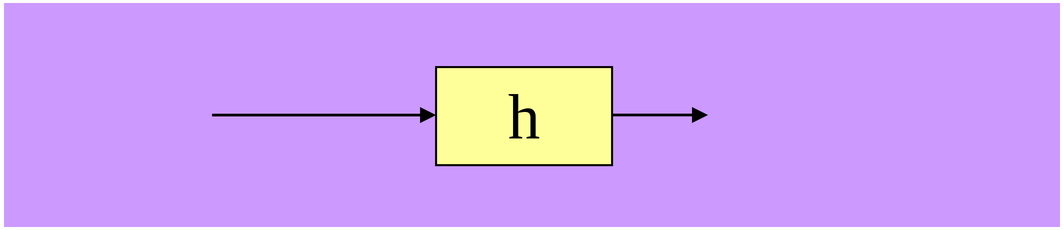
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)f_3(t-\tau-x)dx]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_{23}(t-\tau)d\tau$$

$$=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

结合率的物理含义是：冲激响应为$f_2(t)$和$f_3(t)$的两个系统级联，其零状态响应等于一个冲激响应为$f_2(t)*f_3(t)$的系统的零状态响应，且级联的子系统可以交换次序。





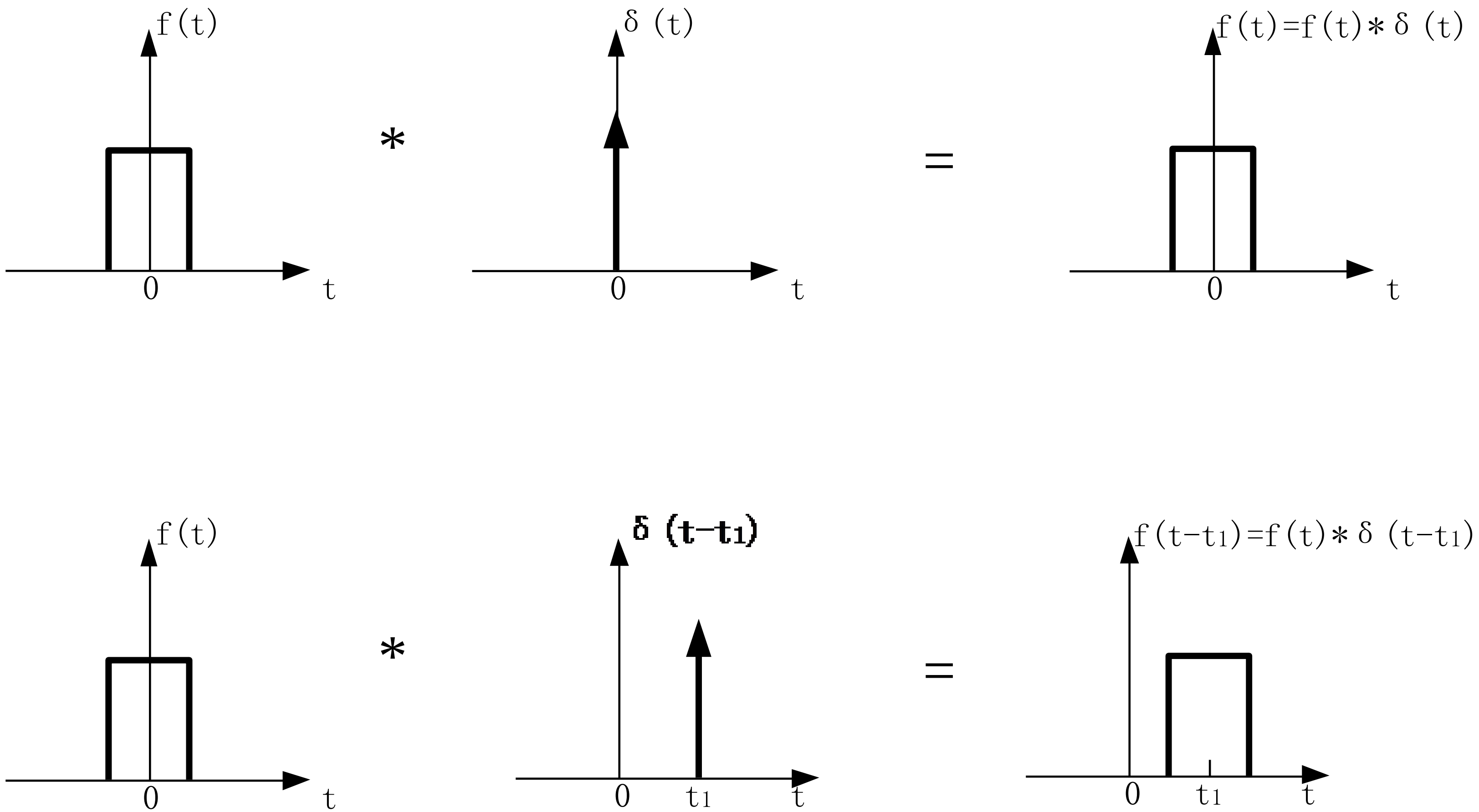
二、函数与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)$$

上式表明，函数与冲激函数的卷积就是其本身。进一步推广，得到：

$$f(t)*\delta(t-t_1)=\delta(t-t_1)*f(t)=f(t-t_1)$$

如图所示：


f(t)
*
δ (t)
=
f(t)=f(t)∗δ (t)
0
t
f(t)
*
δ (t−t1)
=
f(t−t1)=f(t)∗δ (t−t1)
0
t1
t

如果令$f(t)=\delta(t-t_2)$，则有：

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_2)*\delta(t-t_1)=\delta(t-t_1-t_2)$$

此外还有：

$$f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_2)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$$

由上可知，若$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$$

证明：

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2) = [f_1(t)*\delta(t-t_1)]*[f_2(t)*\delta(t-t_2)]$$

$$= f_1(t)*\delta(t-t_1)*f_2(t)*\delta(t-t_2)$$

$$=f_1(t)*f_2(t)*\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)$$

$$=f(t)*\delta(t-t_1-t_2)$$

$$= f(t-t_1-t_2)$$

上式表明，对于冲激响应为$f_2(t)$的系统，当输入为$f_1(t)$时零状态响应为$f(t)$，当延迟t_1的激励作用于延迟t_2的系统，与延迟t_2的激励作用于延迟t_1的系统的零状态响应相同，其延迟为 $t_1 + t_2$。

例2.10

$$\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau+3)\varepsilon(t-\tau-5)d\tau$$

$$= \int_{-3}^{t-5} d\tau$$

积分上限大于下限，t-5≥ -3

$$=(t-2)\,\varepsilon(t-2)$$

例2.10 $e^{-2t}\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\varepsilon(\tau+3)\varepsilon(t-\tau-5)d\tau$$

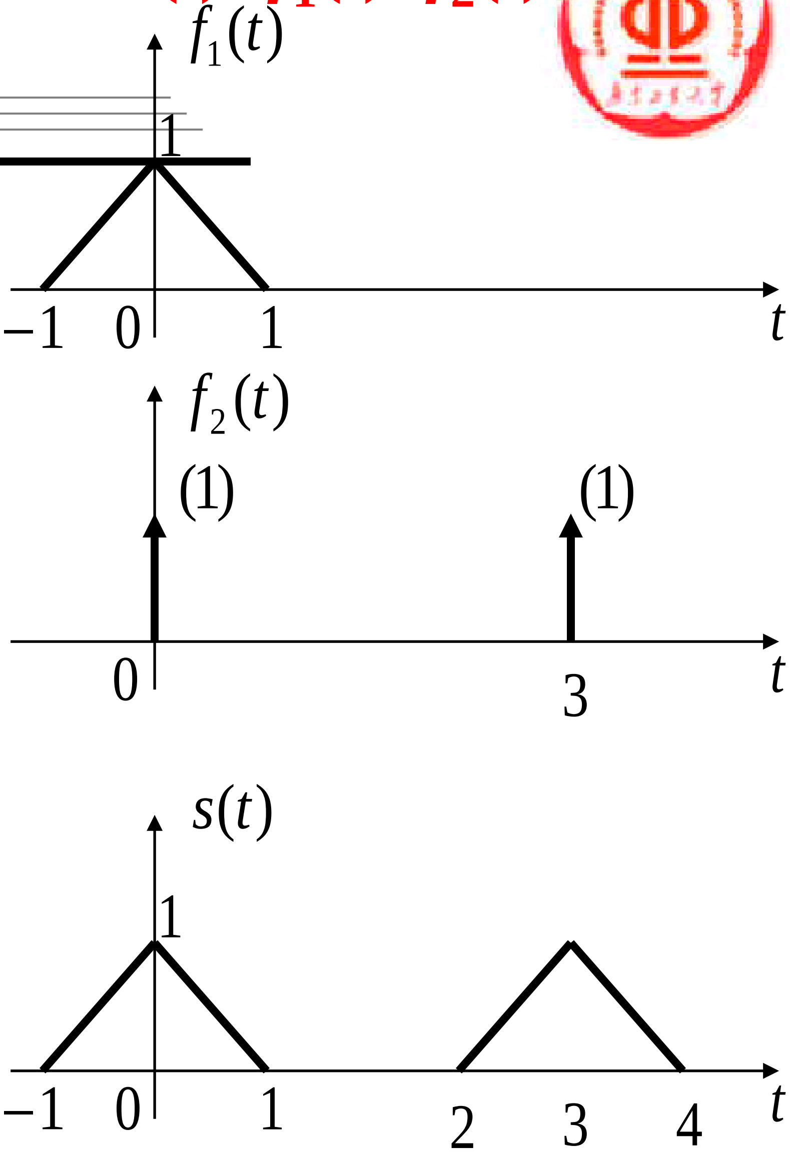
$$=\int_{-3}^{t-5} e^{-2t}d\tau$$

积分上限大于下限，t-5≥ -3

$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{-3}^{t-5}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2t+10}-e^{6})\varepsilon(t-2)$$

例：已知 $f_1(t)$、 $f_2(t)$如图所示，求$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ ，并画出 $s(t)$ 的波形。



解：$f_2(t) = [\delta(t)+\delta(t-3)]$，则

$$s(t) = f_1(t)*[\delta(t)+\delta(t-3)]$$

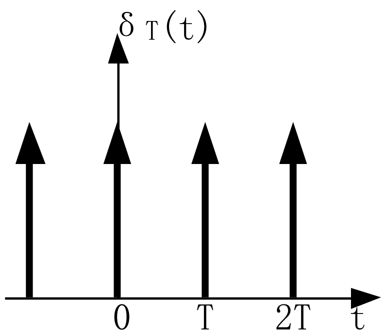
$$= f_1(t)*\delta(t)+ f_1(t) *\delta(t-3)$$

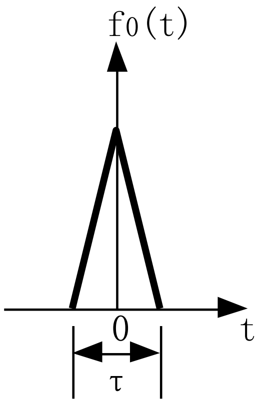
$$= f_1(t)+ f_1(t-3)$$

例2.11

梳状函数

$$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$$





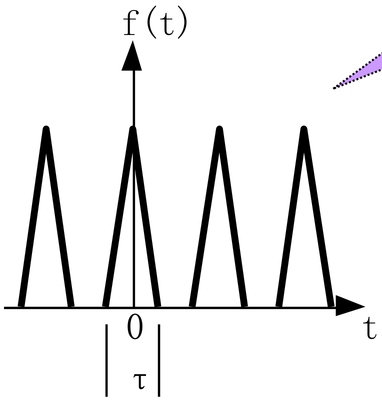
$$f(t)=f_0(t)*\delta_T(t)$$

$$= f_0(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [f_0(t) * \delta(t-mT)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [f_0(t-mT)]$$

假设τ <T



三、卷积的微分与积分

$$f^{(1)}(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$$

若$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_2^{(1)}(t)*f_1(t)$$

$$f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

证明：

$$f^{(1)}(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\frac{d}{dt}f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=f_1(t)*f_2^{(1)}(t)$$

同理，可得 $f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)$

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\int_{-\infty}^{t}[f_2(x-\tau)dx]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\int_{-\infty}^{t-\tau}[f_2(x-\tau)d(x-\tau)]d\tau=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

同理，可得

$$f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$$

对 $f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_2^{(1)}(t)*f_1(t)$ 求积分或

对 $f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$ 求导得：

$$f(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

推广可得：

$$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

LTI系统的零状态响应

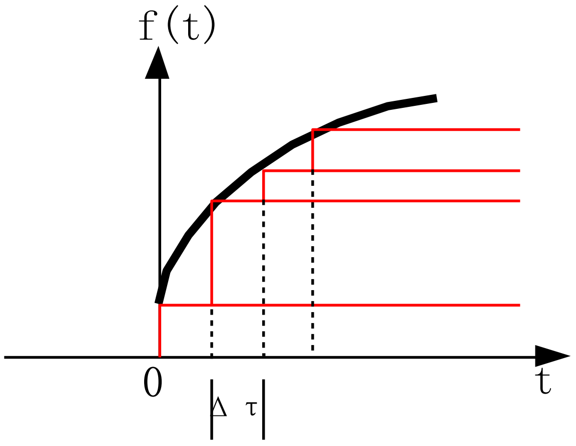
$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)= f^{(1)}(t)* g(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

上式称为杜阿密尔积分，它表示LTI系统的零状态响应等于输入的导数f ' (t)与系统的阶跃响应g(t)的卷积积分。

其物理意义如下：

f(t)分解为阶跃函数之和：



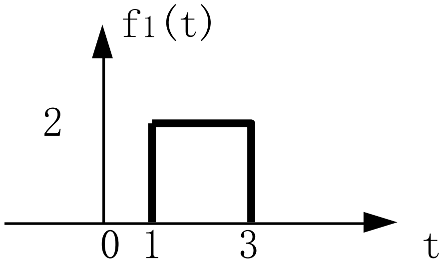
$f_0(t)=f(0)\ \varepsilon(t)$

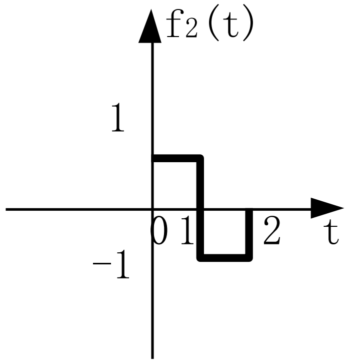
$f_1(t)=[f(\Delta\tau)-f(0)]\ \varepsilon(t-\Delta\tau)$

$$=\left[\frac{f(\Delta\tau)-f(0)}{\Delta\tau}\right]\Delta\tau\varepsilon(t-\Delta\tau)$$

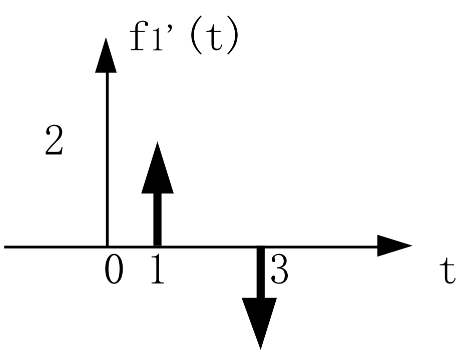
$$f_k(t)=\left[\frac{f(k\Delta\tau)-f(k\Delta\tau-\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right]\Delta\tau\varepsilon(t-k\Delta\tau)$$

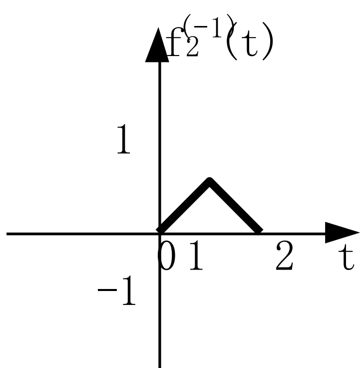
例2.12　求图中所示$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分。





直接求其卷积比较复杂，可以根据卷积积分的性质，对$f_1(t)$求导数，对$f_2(t)$求积分，如图：

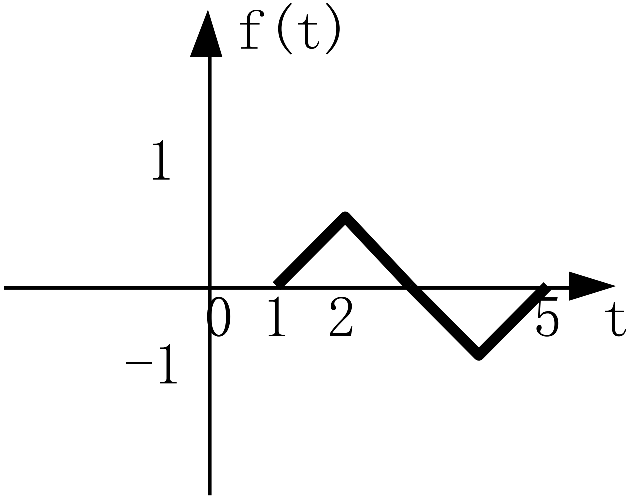




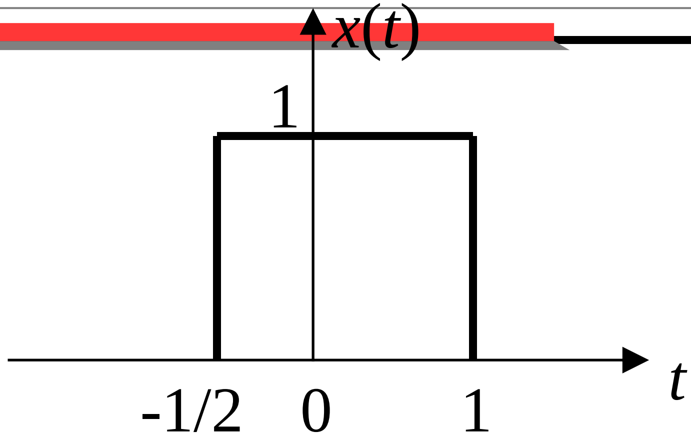
$$f(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

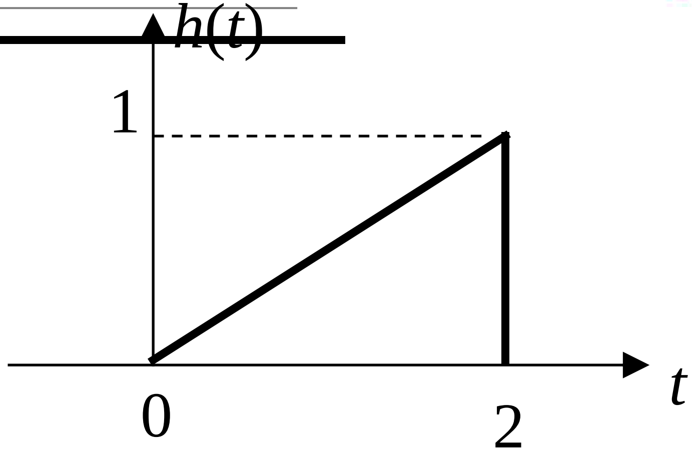
$$= f_2^{(-1)}(t) * [\delta(t-1) - \delta(t-3)]$$

$$= f_2^{(-1)}(t-1) - f_2^{(-1)}(t-3)$$



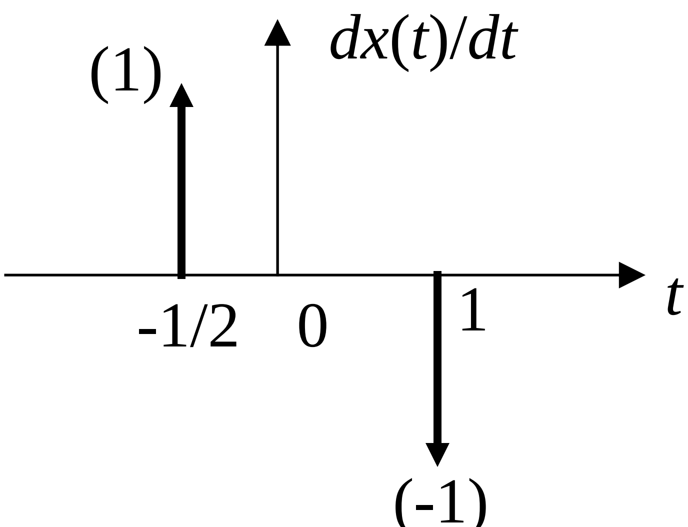
例：用卷积积分的微分与积分特性求例2-13中两信号$x(t)$与$h(t)$的卷积积分$s(t)=x(t)*h(t)$，并画出$s(t)$的波形。

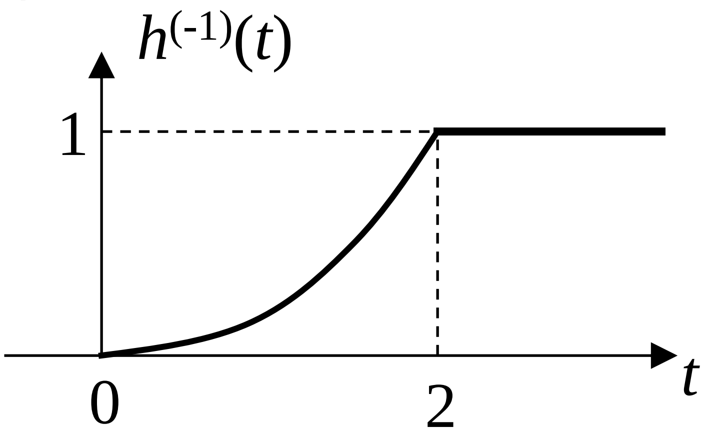




$$\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t+\frac{1}{2})-\delta(t-1)$$

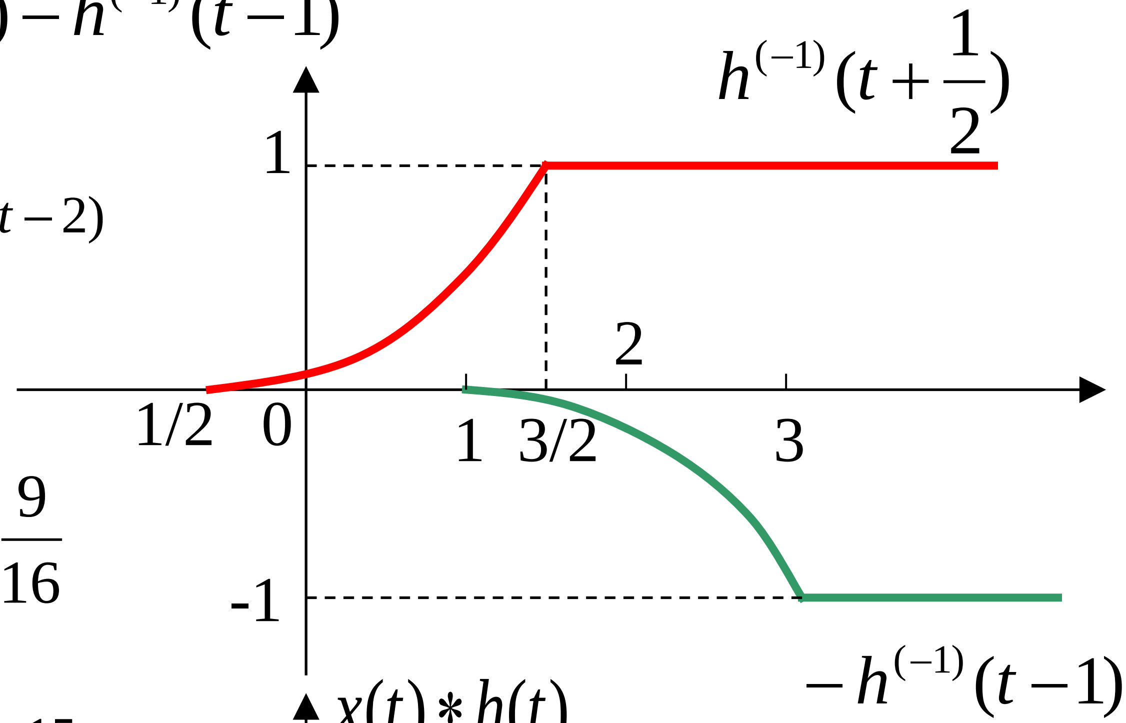
$$h^{(-1)}(t)=\frac{1}{4}t^2[u(t)-u(t-2)]+u(t-2)$$





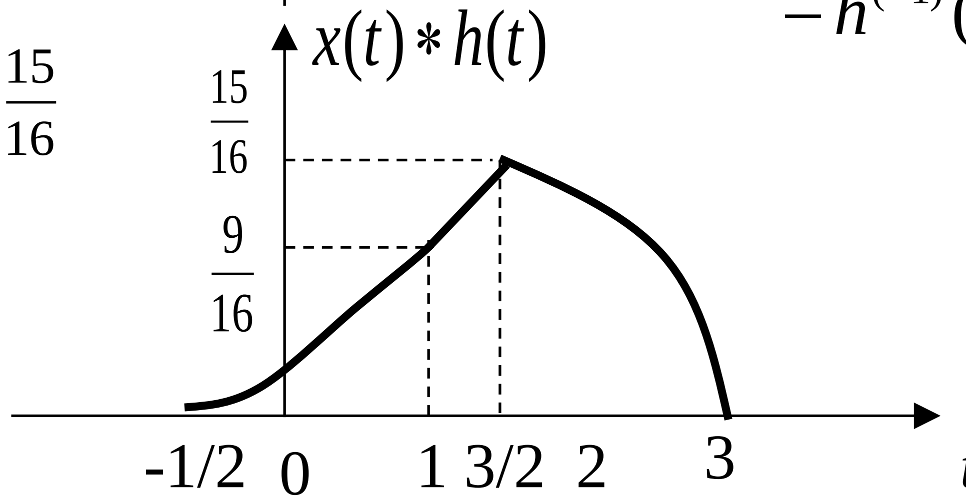
$$x(t)*h(t)=x^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)=[\delta(t+\frac{1}{2})-\delta(t-1)]*h^{(-1)}(t)$$
$$=h^{(-1)}(t+\frac{1}{2})-h^{(-1)}(t-1)$$

$$h^{(-1)}(t)=\frac{1}{4}t^2[u(t)-u(t-2)]+u(t-2)$$



$$h^{(-1)}(t+\frac{1}{2})\Big|_{t=1}=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{16}$$

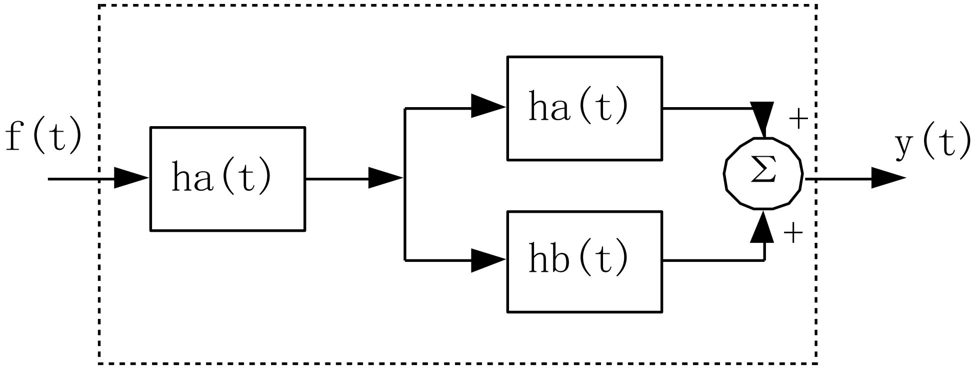
$$1-h^{(-1)}(t-1)\Big|_{t=\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{4}(1-\frac{3}{2})^2=\frac{15}{16}$$

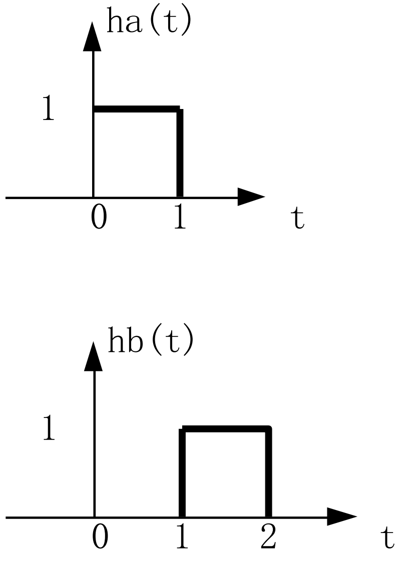


$$\frac{1}{4}(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}(t-1)^2=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}$$

应用卷积积分的性质，可以得到复合系统的冲激响应。

例2.13 如图所示的复合系统由三个子系统构成，已知各个子系统的冲激响应为$h_a(t)$和$h_b(t)$，求复合系统的冲激响应h(t)，画出波形。

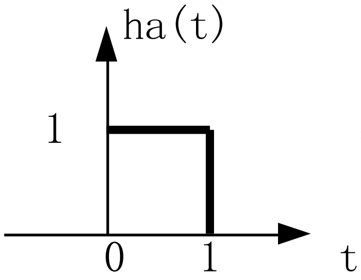




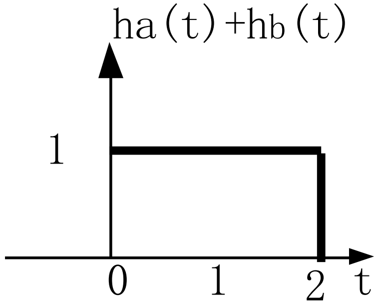
解：

当f(t)= δ (t)时，系统的零状态响应为

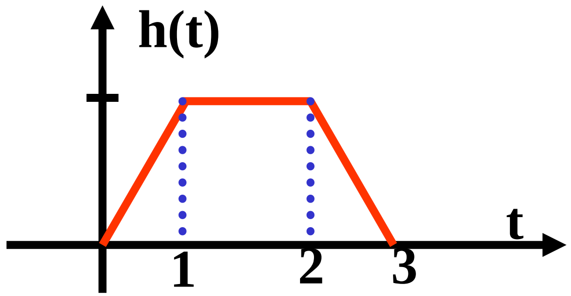
$$h(t)= h_a(t)* h_a(t)+ h_a(t) * h_b(t)= h_a(t) *[h_a(t) + h_b(t)]$$



*



=



综合例题： 已知某连续因果LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=f(t)\quad t>0$$

$$f(t)=\varepsilon(t)\quad y(0\_)=1\quad y'(0\_)=2$$

求: (1) 零输入响应$y_{zi}(t)$ （2）冲激响应$h(t)$、零状态响应$y_{zs}(t)$

(3) 完全响应、暂态响应、稳态响应、固有响应、强迫响应。

解：（1） 系统的特征方程为 $s^2+7s+12=0$

特征根为 $s_1=-3,\quad s_2=-4$（两不等实根）

零输入响应为 $y_{zi}(t)=Ae^{-3t}+Be^{-4t}\quad t\geq 0^-$

代入初始状态$y(0^-)$, $y'(0^-)$

$$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=A+B=1$$

$$y'(0^-)=y_{zi}'(0^-)=-3A-4B=2$$

解得 $A=6$

$B=-5$

系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=6e^{-3t}-5e^{-4t},t\geq 0$

(2) $$h(t) = C\mathrm{e}^{-3t} + D\mathrm{e}^{-4t}$$

$$h(0_-) = 0, h'(0_-) = 0$$

利用冲激匹配法可求出 $h(0_+) = 0, h'(0_+) = 1$

$$C = 1 \qquad D = -1$$

$$h(t) = (\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$$

系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \varepsilon(t) * (\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$$

$$= (\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$$

(3) $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{1}{12}+\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t}, t>0$

系统的固有响应为 $y_h(t)=\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t}, t>0$

强迫响应为 $y_p(t)=\frac{1}{12}, t>0$

系统的稳态响应为 $y_s(t)=\frac{1}{12}, t>0$

暂态响应为 $y_t(t)=\frac{17}{3}e^{-3t}-\frac{19}{4}e^{-4t}, t>0$

作业：

1. 如图 P2.5 所示电路，已知 $f(t)=\varepsilon(t)$，$i(0_-)=1A$，$i'(0_-)=2\,A/s$。求零输入、零状态和全响应。

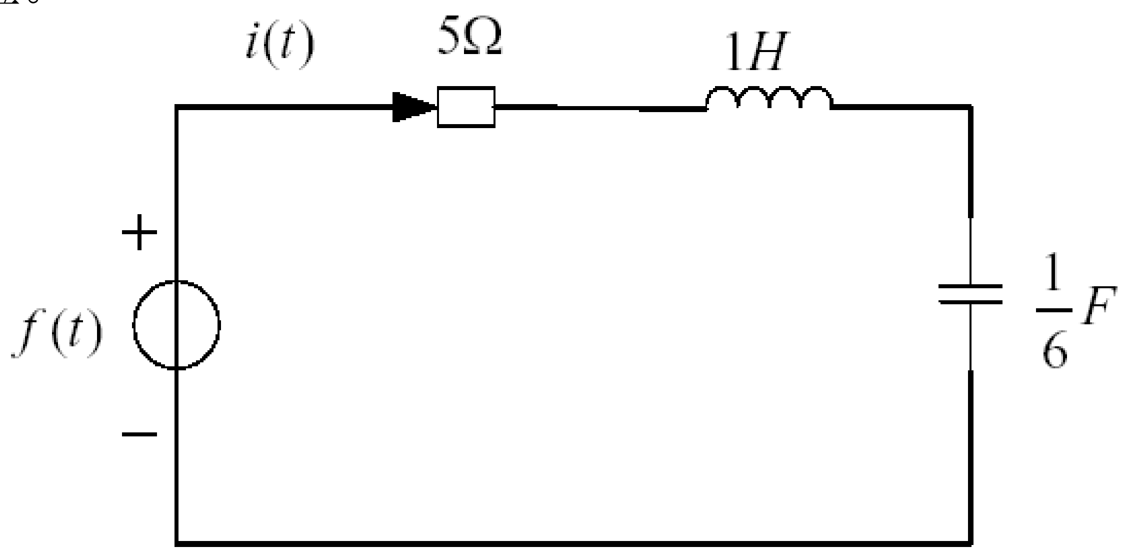


图 P2.5

2.求教材79页题2.18图中f_1和f_2的卷积积分。

3.求阶跃响应为$g(t)=(e^{-3t}-2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$的LTI系统对输入$x(t)=e^{t}\varepsilon(t)$的零状态响应。

4.已知描述系统的微分方程

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t)$$

求其冲激响应和阶跃响应。