
廣東工業大學
Guangdong University of Technology
广东工业大学
通信电路与系统
信息工程学院
李志忠


廣東工業大學
Guangdong University of Technology
广东工业大学
第七章　角度调制与解调
信息工程学院
李志忠

目录

7.1 调频信号和调相信号

$$u_c = U_{cm}\cos\left(\omega_C t + \varphi\right)$$

AM： Amplitude Modulation

$$\Delta U_{cm} = K u_\Omega\left(t\right)$$

$$\Delta\omega_c = K u_\Omega\left(t\right)$$

FM： Frequency Modulation

$$\Delta\varphi = K u_\Omega\left(t\right)$$

PM： Phase Modulation

$$\omega\left(t\right) = \frac{d\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{dt}$$

7.1 调频信号和调相信号

7.1.1 时域表达式和参数

1. 调频信号FM

载波：$u_c = U_{cm}\cos(\omega_C t + \varphi)$

$$\Delta\omega_C = k_f u_\Omega = k_f U_{\Omega m}\cos\Omega t = \Delta\omega_m \cos\Omega t$$

调制信号：$u_\Omega = U_{\Omega m}\cos\Omega t$

瞬时频率：$\omega(t) = \omega_C + \Delta\omega_C = \omega_C + \Delta\omega_m \cos\Omega t$

ω_C：载波中心频率　　$\Delta\omega_m = k_f U_{\Omega m}$　　最大频偏

$$\varphi(t) = \int^t \omega(t)dt = \int^t (\omega_C + k_f u_\Omega)dt = \int^t (\omega_C + k_f U_{\Omega m}\cos\Omega t)dt$$

$$= \int^t (\omega_C + \Delta\omega_m \cos\Omega t)dt = \omega_C t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}\sin\Omega t + \varphi_0$$

$$= \omega_C t + m_f \sin\Omega t + \varphi_0$$

调频指数 $m_f = \dfrac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \dfrac{k_f U_{\Omega m}}{\Omega}(rad)$

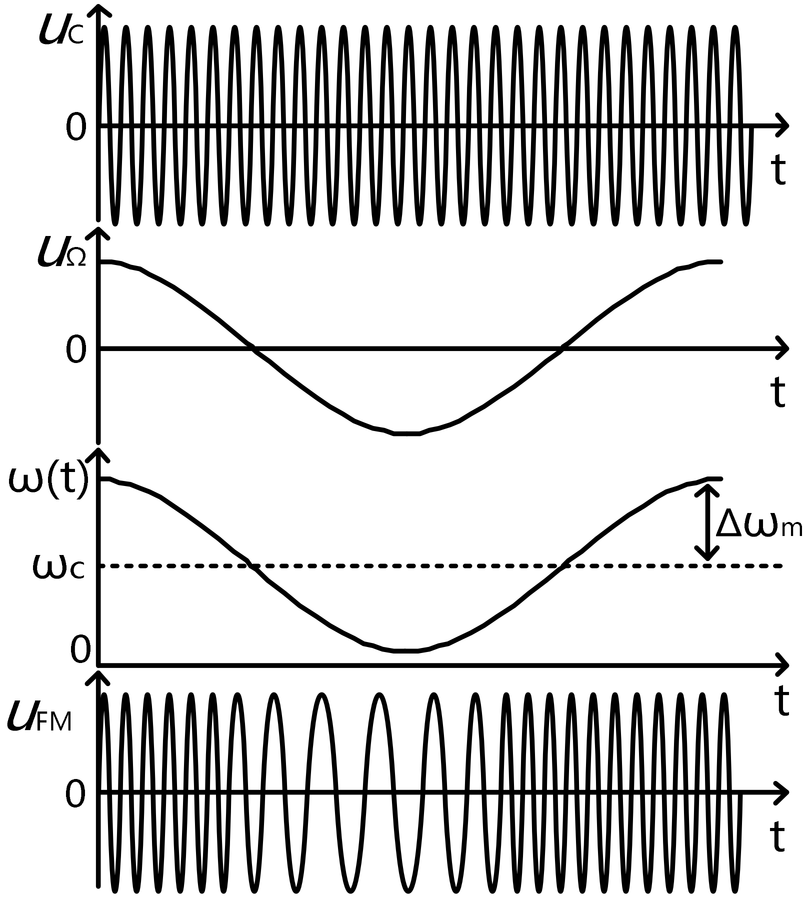
$$u_{FM} = U_{sm}\cos(\omega_C t + m_f \sin\Omega t + \varphi_0)$$

7.1 调频信号和调相信号

$$\Delta\omega_C = k_f u_\Omega(t) = k_f U_{\Omega m}\cos\Omega t = \Delta\omega_m \cos\Omega t$$

$$\omega(t) = \omega_C + \Delta\omega_C = \omega_C + \Delta\omega_m \cos\Omega t$$

$$u_{FM} = U_{sm}\cos\left(\omega_C t + m_f \sin\Omega t + \varphi_0\right)$$



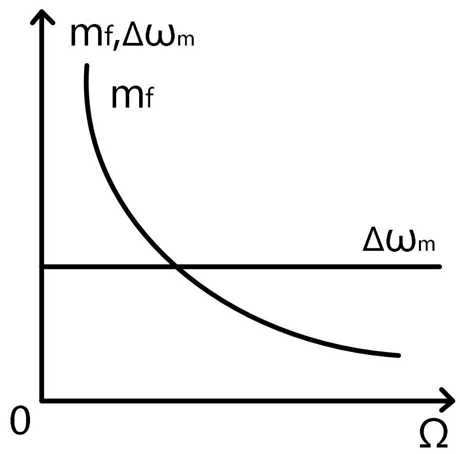
调频信号波形

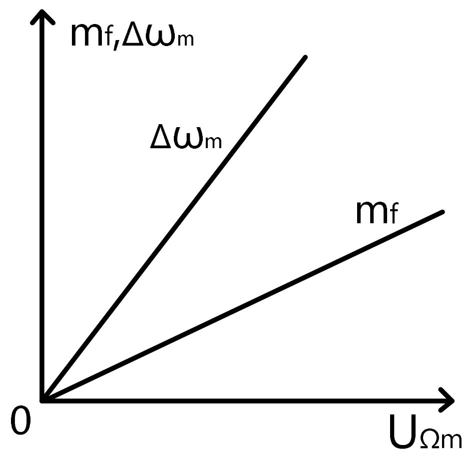
7.1 调频信号和调相信号

$$\Delta\omega_C = k_f u_\Omega(t)$$

$$\Delta\omega_m = k_f U_{\Omega m}$$

$$m_f = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \frac{k_f U_{\Omega m}}{\Omega}$$





$$u_{FM} = U_{sm}\cos\left(\omega_C t + m_f \sin\Omega t + \varphi_0\right)$$

$$u_{FM} = 3\cos\left(2\pi\cdot 10^6 t + 0.4\sin 2\pi\cdot 10^3 t\right)$$

$$u_\Omega = 2\cos 2\pi\cdot 10^3 t\,(V)$$

$m_f = 0.4$ $\Delta\omega_m = 0.8\pi\cdot 10^3$

(1) $U_{\Omega M} = 4V$

m_f: $0.4 \to 0.8$ $\Delta\omega_m = 1.6\pi\cdot 10^3$

(2) $U_{\Omega M} = 2V$

$\mathrm{F} = 5kHz$

m_f: $0.4 \to 0.08$ $\Delta\omega_m = 0.8\pi\cdot 10^3$

7.1 调频信号和调相信号

2. 调相信号PM

$\Delta\varphi(t) = k_P u_\Omega$　　k_P为调相比例常数，单位为rad/V

$\Delta\varphi(t)$ 的最大值：$m_P = k_P U_{\Omega m}$　调相指数，单位rad

$$\varphi(t) = \omega_c t + \varphi_0 + \Delta\varphi(t) = \omega_c t + k_p u_\Omega + \varphi_0 = \omega_c t + m_p \cos\Omega t + \varphi_0$$

瞬时频率：

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_C - m_P \Omega \sin\Omega t$$

最大频偏，即绝对最大频偏

$$\Delta\omega_m = m_P \Omega = k_P U_{\Omega m} \Omega$$

$$m_P = k_P U_{\Omega m} = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$$

$$u_{PM} = U_{sm} \cos\left(\omega_c t + m_p \cos\Omega t + \varphi_0\right)$$

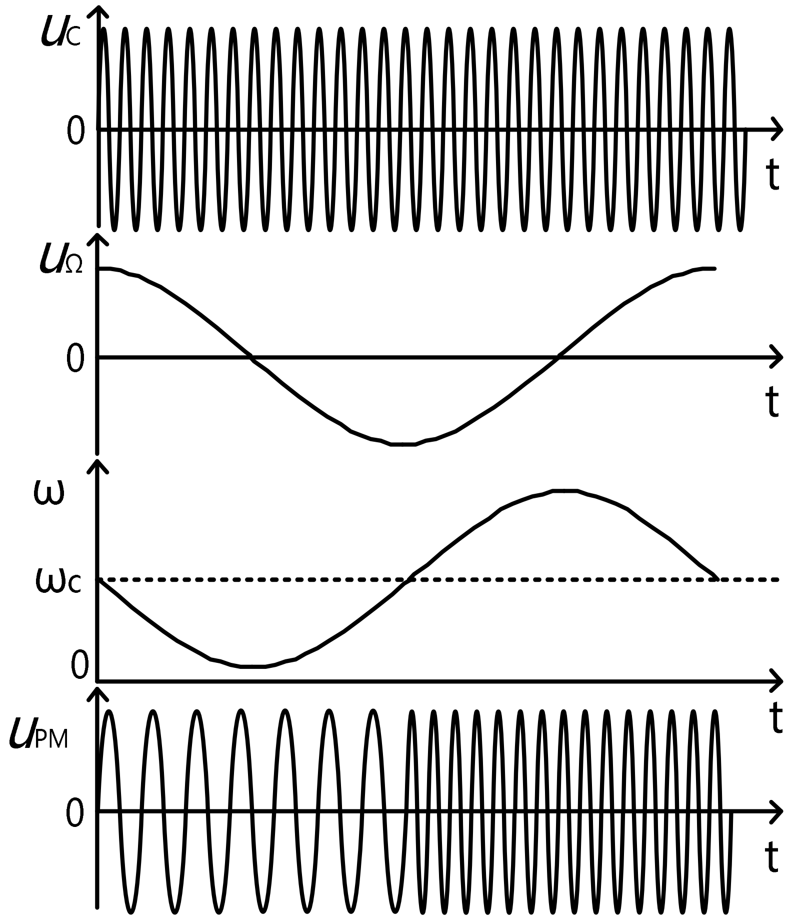
7.1 调频信号和调相信号

$$\Delta\varphi(t)=k_P u_\Omega$$

$$\varphi(t)=\omega_C t+\Delta\varphi$$

$$\omega(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$u_{PM}=U_{sm}\cos\left(\omega_C t+m_P\cos\Omega t+\varphi_0\right)$$

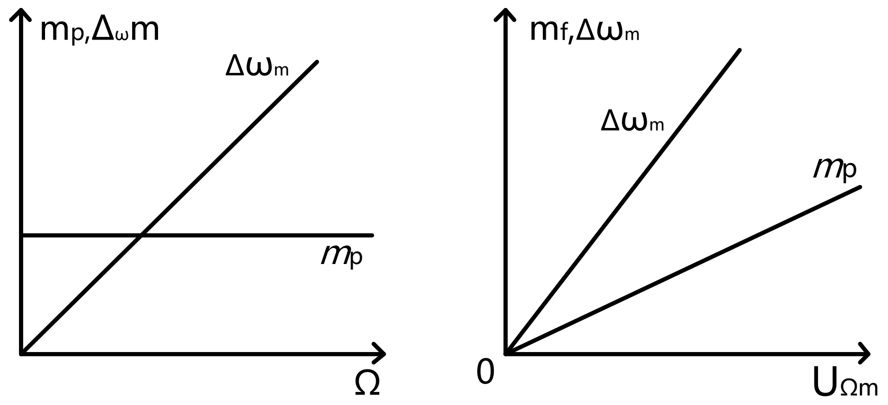


调相信号波形

7.1 调频信号和调相信号

$$m_p = k_p U_{\Omega m}$$

$$\Delta\omega_m = k_p U_{\Omega m}\Omega$$



调相信号$\Delta\omega_m$、m_p与$U_{\Omega m}$、Ω的关系

$$u = 5\cos\left(2\pi\cdot 10^6 t + 3\cos 2\pi\cdot 10^3 t\right)$$

$$\varphi(t) = 2\pi\cdot 10^6 t + 3\cos 2\pi\cdot 10^3 t$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = 2\pi\cdot 10^6 - 6\pi\cdot 10^3\cdot\sin 2\pi\cdot 10^3 t$$

$$u_\Omega(t) = U_{\Omega M}\cos 2\pi\cdot 10^3 t \qquad \text{PM}$$

$$u_\Omega(t) = U_{\Omega M}\sin 2\pi\cdot 10^3 t \qquad \text{FM}$$

7.1 调频信号和调相信号

$$u_{\Omega} = U_{\Omega m} \sin \Omega t$$

$$u_{\mathrm{FM}} = U_{\mathrm{sm}} \cos\left(\omega_c t - m_f \cos \Omega t + \varphi_0\right)$$

$$u_{\mathrm{PM}} = U_{\mathrm{sm}} \cos\left(\omega_c t + m_p \sin \Omega t + \varphi_0\right)$$

$$u_{\Omega} = U_{\Omega m} f(t)$$

调制信号是多频率分量合成的复杂信号

$U_{\Omega m}$是最大幅度，$|f(t)| \le 1$，代表归一化的波形函数

$$u_{FM} = U_{\mathrm{sm}} \cos\left[\omega_c t + \Delta\omega_m \int^t f(t)\,dt\right]$$

$$\Delta\omega_m = k_f U_{\Omega m}$$

$$u_{PM} = U_{\mathrm{sm}} \cos\left[\omega_c t + \omega_p f(t) + \varphi_0\right]$$

$$m_p = k_p U_{\Omega m}$$

频谱和功率分布

调频信号和调相信号具有相似的频谱结构

设$\varphi_0 = 0$

$$u_{FM} = \mathrm{U}_{sm}\cos\left(\omega_c t + m_f \sin\Omega t\right)$$

$$= \mathrm{U}_{sm}\,\mathrm{Re}\left[e^{j\left(w_c t + m_f sinWt\right)}\right]$$

$$= \mathrm{U}_{sm}\,\mathrm{Re}\left[e^{j\omega_c t} e^{jm_f \sin\Omega t}\right]$$

$$e^{jm_f \sin\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n\left(m_f\right) e^{jn\Omega t}$$

$$\mathrm{J}_n\left(m_f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jm_f \sin\Omega t} e^{-jn\Omega t} d\Omega t$$

称为宗数为m_f的n阶第一类贝赛尔函数，由m_f和n共同决定其取值

五、调角波的频谱与有效频宽

单频调制时，调相波与调频波的数学表示式相似，它们具有相同的频谱，故分析时以单频调制的调频波为例进行说明。

（一）调频波的展开式：

调制信号是 $\boldsymbol{u_\Omega(t)=U_{\Omega m}\cos\Omega t}$ 的调频波为

$$u(t)=U_{cm}\cos[\omega_c t+m_f\sin\Omega t]$$

$$=U_{cm}\cos\omega_c t\cos(m_f\sin\Omega t)-U_{cm}\sin\omega_c t\sin(m_f\sin\Omega t)$$

式中，$\cos(m_f\sin\Omega t)$和$\sin(m_f\sin\Omega t)$ 可展开为傅里叶级数

$$\cos(m_f\sin\Omega t)=J_o(m_f)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(m_f)\cos 2n\Omega t$$

$$\sin(m_f\sin\Omega t)=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(m_f)\sin(2n+1)\Omega t$$

式中，n为正整数，$J_n(m_f)$ 是以 m_f 为参数的n阶第一类贝塞尔函数。

$$u(t)=U_{cm}J_o(m_f)\cos\omega_c t$$ 载频

$$+U_{cm}J_1(m_f)\cos(\omega_c+\Omega)t-U_{cm}J_1(m_f)\cos(\omega_c-\Omega)t$$ 第一对边频

$$+U_{cm}J_2(m_f)\cos(\omega_c+2\Omega)t+U_{cm}J_2(m_f)\cos(\omega_c-2\Omega)t$$ 第二对边频

$$+\cdots$$

频谱和功率分布

第一类贝塞尔函数表

$$J_n\left(m_f\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jm_f\sin\Omega t}e^{-jn\Omega t}d\Omega t$$

x	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0	1										
0.2	0.99	0.1									
0.4	0.96	0.2	0.2								
0.6	0.91	0.29	0.4								
0.8	0.85	0.37	0.8	0.01							
1	0.77	0.44	0.11	0.02							
1.2	0.67	0.5	0.16	0.03	0.01_						
1.4	0.57	0.54	0.21	0.05	0.01_						
1.6	0.46	0.57	0.26	0.07	0.01						
1.8	0.34	0.5	0.31	0.1	0.02						
2	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	0.01_					
2.2	0.11	0.56	0.4	0.16	0.05	0.01					
2.4	0	0.52	0.43	0.2	0.06	0.02					
2.6	-0.1	0.47	0.46	0.24	0.08	0.02	0.01_				
2.8	-0.19	0.41	0.48	0.27	0.11	0.03	0.01_				
3	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01				
3.2	-0.32	0.26	0.43	0.34	0.16	0.06	0.02				
3.4	-0.36	0.18	0.47	0.37	0.19	0.07	0.02	0.01_			
3.6	-0.39	0.1	0.44	0.4	0.22	0.09	0.03	0.01_			
3.8	-0.4	0.01	0.41	0.42	0.25	0.11	0.04	0.01			
4	-0.4	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02			
4.2	-0.38	-0.14	0.31	0.43	0.31	0.16	0.06	0.02	0.01_		
4.4	-0.34	-0.2	0.25	0.43	0.34	0.18	0.08	0.03	0.01_		

频谱和功率分布

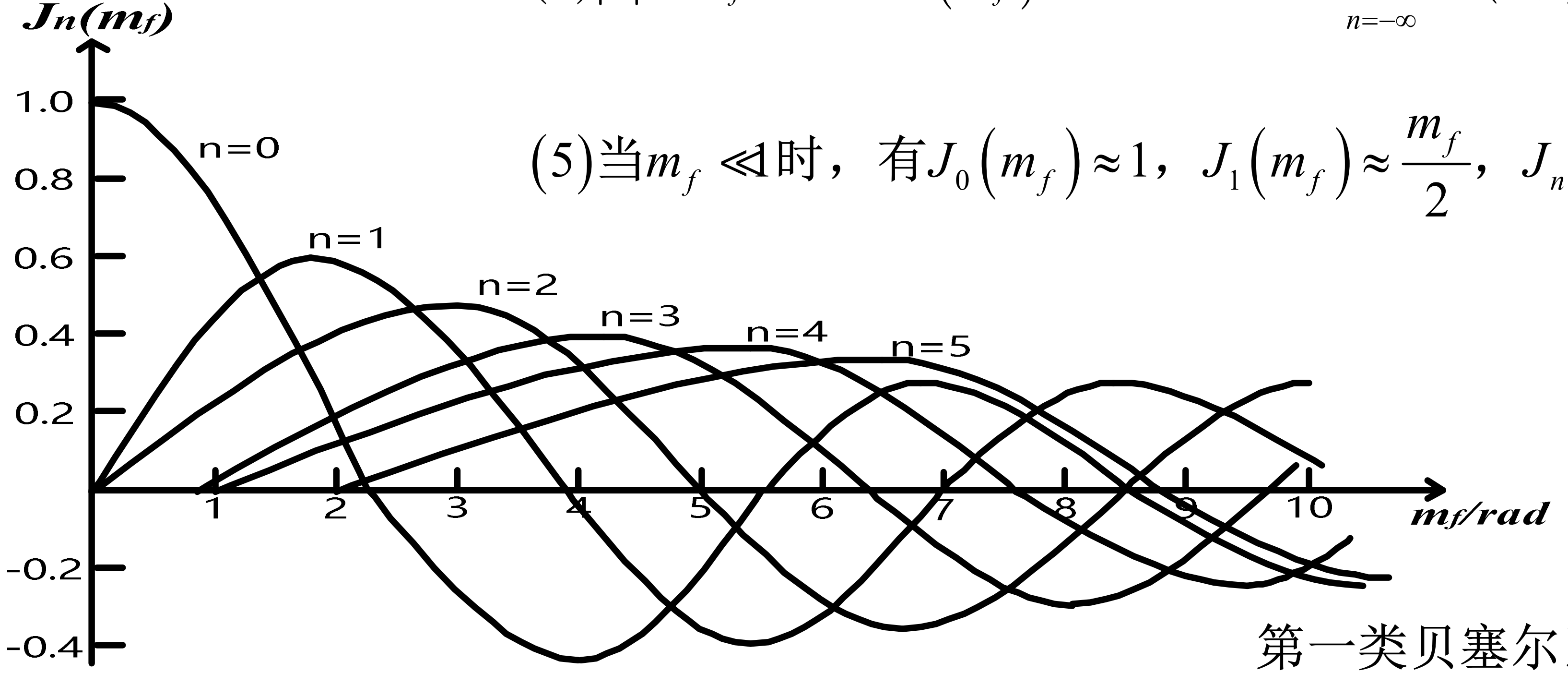
(1)随着 m_f 的增加,$\mathrm{J}_n\left(m_f\right)$ 近似周期震荡，峰值不断下降，相对于载频分量，振荡较大的边频分量数目增加

(2)$\mathrm{J}_{-n}\left(m_f\right)=(-1)^n\,\mathrm{J}_n\left(m_f\right)(n>0)$ ∞ n=±1，±2…对应的每对边频分量的振荡大小相等，n为奇数时相位相反，n为偶数时相位相同

(3)$|n|>m_f+1$时,$\mathrm{J}_n\left(m_f\right)\approx 0$

(4)$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(m_f\right)=1$

(5)当$m_f \ll 1$时，有$J_0\left(m_f\right)\approx 1$，$J_1\left(m_f\right)\approx \dfrac{m_f}{2}$，$J_n\left(m_f\right)\approx 0(n\neq 0)$



第一类贝塞尔函数

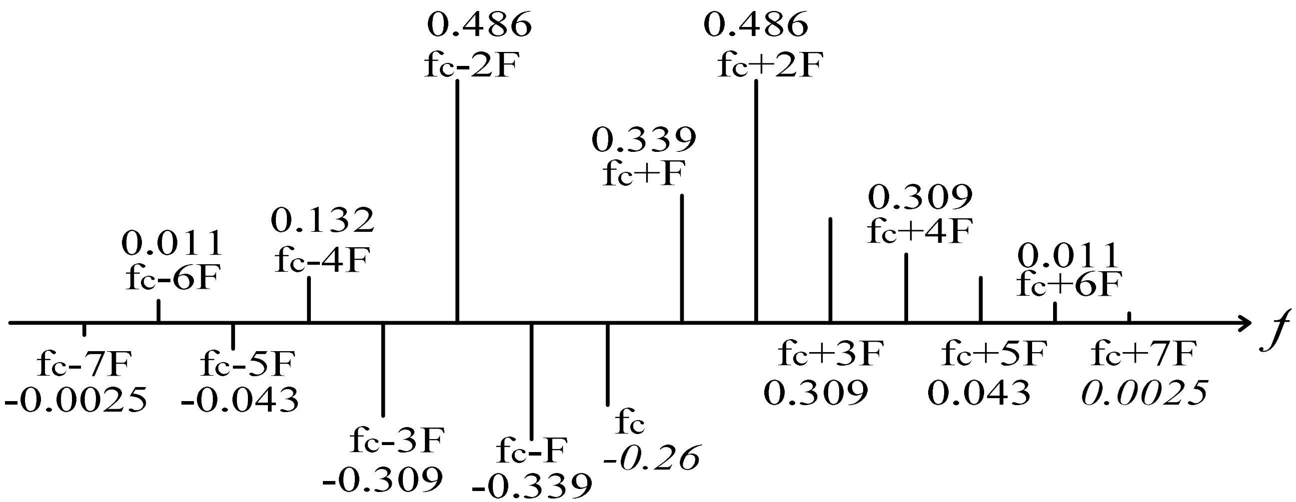
频谱和功率分布

$m_f=2$： $J_0(2)=0.22$ $J_1(2)=0.58$ $J_2(2)=0.35$ $J_3(2)=0.13$ $J_4(2)=0.03$

$m_f=3$： $J_0(3)=-0.26$ $J_1(3)=0.339$ $J_2(3)=0.486$ $J_3(3)=0.309$

$J_4(3)=0.132$ $J_5(3)=0.043$ $J_6(3)=0.011$

$$0.26^2+2(0.339^2+0.486^2+0.309^2+0.132^2+0.043^2)=0.99934$$



FM、PM非线性频率变化

AM线性频率变化

频谱和功率分布

0.01误差带宽和0.1误差带宽

$$\left|J_n(m_f)\right| \geq 0.01$$ 高等质量通讯

0.01误差带宽： $BW_{0.01} = 2n_{max}\Omega$

根据0.1U_{sm}确定带宽为0.1误差带宽，记$BW_{0.1}$，中等质量通讯

卡森带宽

保留$|n| \leq m_f + 1$的频率分量

$$BW_{CR} = 2(m_f + 1)\Omega = 2(\Delta\omega_m + \Omega)$$ 卡森带宽

BW_{CR}基本上介于$BW_{0.01}$和$BW_{0.1}$之间

当$m_f << 1$时， $BW_{CR} \approx 2\Omega$

当$m_f \geq 1$时， BW_{CR}和$BW_{0.1}$近似相等，$BW_{CR} \approx 2m_f\Omega = 2\Delta\omega_m$

频谱和功率分布

$BW_{CR}=2(m_p+1)\Omega$

AM Radio: $F_{\max}=4.5\text{kHz};\quad BW=9K$

FM Radio: $F_{\min}=30\text{Hz};\quad F_{\max}=15k;\quad \Delta f_m=75k$

$\because m_f=5 \qquad BW=2(5+1)15=180K$

高等质量通讯：$J_n(m_f)<0.01 \qquad BW=2\times 8\times 15=240K$

$n=8$

$\therefore$ FM Radio 电台间隔200K　　Carrier: 88 ~ 180M

恒定带宽调制　$\Delta f_m=75k$

$F_{\max}=0.1k \qquad BW=2(75+0.1)=150K$

$F_{\max}=1k \qquad BW=2(75+1)=152K$

$F_{\max}=15k \qquad BW=2(75+15)=180K$

$\therefore$ 模拟信号调制中FM多于PM

频谱和功率分布

调节角功率

Parserval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^2\right| \mathrm{d}f$$

$$\mathrm{P_{av}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathrm{U_{sm}J_n}(\mathrm{m}_f))^2}{2R} = \frac{\mathrm{U_{sm}}^2}{2R} \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{J_n}^2(\mathrm{m}_f) = \frac{\mathrm{U_{sm}}^2}{2R}$$

$$\because \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{J_n}^2(m_f) = 1$$

$\therefore m_f(m_p) = 1 \quad \mathrm{P_{av}}$=Const　　　　　各分量相对值改变

u_{FM}的功率与载波u_c的功率相等，u_C的功率只在载频分量 上

u_{FM}把功率分担到了各个频率分量上。

频谱和功率分布

当$m_f \le \pi/6$时：

$$u_{FM} \approx U_{sm}\cos\omega t + \frac{1}{2}U_{sm}\cos(\omega_C + \Omega)t - \frac{1}{2}U_{sm}\cos(\omega_C - \Omega)t$$

类似AM，下边频分量反相。带宽BW≈2Ω，称窄带**FM**信号

当$m_f > \pi/6$时：

$BW_{0.01}$、$BW_{0.1}$、BW_{CR}均大于2Ω，称宽带FM信号

PM信号的频谱与功率分布与FM信号相似

$$u_{PM} = U_{sm}\cos(\omega_c t + m_p\cos\Omega t + \varphi_0)\frac{1}{2}$$

$$= U_{sm}\cos\left[\omega_c t + m_p\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \varphi_0\right]$$

把调频信号频谱和功率公式中的m_f换成m_p，出现Ω的地方

加上$\frac{\pi}{2}$的相移，就得到了调相信号的有关公式

例1：设角度调制信号为$u(t)=8\cos(4\pi\times10^8 t+10\sin2\pi\times10^3 t)(V)$

(1)求瞬时角频率和瞬时相 位

(2)求载频、调制信号频率 和调制指数

(3)在什么调制信号下，该 调角波为调频波

(4)在什么调制信号下，该 调角波为调相波

(5)计算调频波和调相波的 最大频移

(6)若调频电路和调相电路不变,调制信号的振幅不变,但频率增大到$2kHz$,求输出调频波和调相波的最大频移和表达式

(7)若调频电路和调相电路不变,调制信号的频率不变,但振幅减半,求输出调频波和调相波的最大频移和表达式

(8)求频谱带宽

解:(1)$\theta(t)=4\pi\times10^8 t+10\sin2\pi\times10^3 t$

$$\omega(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}=4\pi\times10^8+20\pi\times10^3\cos2\pi\times10^3 t$$

(2) $f_c=\dfrac{\omega_c}{2\pi}=\dfrac{4\pi\times10^8}{2\pi}=2\times10^8 Hz$

$$F=\frac{\Omega}{2\pi}=\frac{2\pi\times10^3}{2\pi}=10^3 Hz$$

$$m_f=m_p=10$$

(3) 当调制信号为余弦波时，该调角波为调频波。
(4) 当调制信号为正弦波时，该调角波为调相波。
(5)当 $u(t)$为调频波时，

$$m_f = 10, \Delta f_m = m_f \times F = 10 \times 10^3 = 10(kHz)$$

当 $u(t)$为调相波时，

$$m_f = 10, \Delta f_m = m_p \times F = 10 \times 10^3 = 10(kHz)$$

(6)k_f、 k_p、 $U_{\Omega m}$不变， F 由$1kHz$ 增加到 $2kHz$

(i)：当 $u(t)$为调频波时 $, m_f = \dfrac{k_f U_{\Omega m}}{\Omega}, m_f$由10降为 5

$$\Delta f_m = m_f F = 5 \times 2 \times 10^3 = 10\,kHz$$

$$u(t) = 8\cos(4\pi \times 10^8 t + 5\sin 4\pi \times 10^3 t)$$

(ii)：当$u(t)$为调相波时$, m_p = k_p U_{\Omega m}, m_p$不变

$$\Delta f_m = m_p F = 10 \times 2 \times 10^3 = 20kHz$$

$$u(t) = 8\cos(4\pi \times 10^8 t + 10\sin 4\pi \times 10^3 t)$$

$$(8) B_{CR} = 2(m+1)F = 2 \times (10+1) \times 10^3 = 22KHz$$

例1　$u_{FM}=5sin\left[(5\pi\times10^{3}t)-2cos(2\pi\times10^{3}t)\right]V$,调频比例常数$K_f$=10$kHz/V$

写出调制信号u_{Ω}的表达式，并求u_{FM}表的最大频偏Δf_m，和卡森带宽BW_{CR}

解：u_{FM}的相位：$\varphi(t)=5\pi\times10^{6}t-2\cos2\pi\times10^{3}t\,rad$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\frac{d(5\pi\times10^{6}t-2\cos2\pi\times10^{3}t)}{dt}$$

$$=2.5\times10^{6}+2\times10^{3}\sin2\pi10^{3}tHz$$

频率变化：$\Delta f(t)=2\times10^{3}\sin(2\pi\times10^{3}t)\,Hz$

$$u_{\Omega}=\frac{\Delta f(t)}{K_f}=\frac{2\times10^{3}\sin2\pi\times10^{3}t\,Hz}{10kHz/V}=0.2\sin2\pi\times10^{3}t\ V$$

$$\Delta f_m=2\times10^{3}Hz=2kHz$$

$$BW_{CR}=2(m_p+1)F=2(\Delta f_m+F)=2(2kHz+1kHz)=6kHz$$

例2　用$u_\Omega = 0.2\sin(5\pi\times10^3 t)\ V$,对载波$f = 6.5MHz$余弦载波进行调频和调相，要求$\Delta f_m = 50kHz$。写出$u_{FM}$和$u_{FM}$表达式，计算卡森带宽$BW_{CR}$。
如果振幅减小为原来的一半，频率增加一倍，分 析u_{FM}和u_{PM}的带宽变化

解：$\Omega = 5\pi\times10^3\ rad/s$　　$F = \Omega/2\pi = 2.5kHz$

产生调频信号时，u_{FM}的频率：

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_C + \Delta\omega(t) = 2\pi f + 2\pi\Delta f_m \sin\Omega t \\ &= 2\pi\times6.5MHz + 2\pi\times50kHz\times\sin5\pi\times10^3 t \\ &= 13\pi\times10^6 + \pi\times10^5\sin5\pi\times10^3 t\ rad/s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int^t \omega(t)\,dt = \int^t 13\pi\times10^6 + \pi\times10^5\sin5\pi\times10^3 t\ dt \\ &= 13\pi\times10^6 t - 20\cos5\pi\times10^3 + \varphi_0 rad\end{aligned}$$

$$u_{FM} = U_{sm}\cos\varphi(t) = U_{sm}\cos\left[13\pi\times10^6 t - 20\cos(5\pi\times10^6 t) + \varphi_O\right]$$

$$u_{\Omega}=0.2\sin(5\pi\times10^{3}t)$$

$$u_{FM}=\mathrm{U_{sm}}\cos\varphi(\mathrm{t})=\mathrm{U_{sm}}\cos\left[13\pi\times10^{6}t-20\cos(5\pi\times10^{6}t)+\varphi_{\mathrm{O}}\right]$$

产生调相信号时，

调相指数：$m_p=\Delta f_{\mathrm{m}}/F=50k\mathrm{Hz}/2.5k\mathrm{Hz}=20\ \mathrm{rad}$

u_{PM}的相位 $\varphi(\mathrm{t})=\omega_{\mathrm{C}}+\Delta\varphi(\mathrm{t})+\varphi_{O}=2\pi f_{\mathrm{c}}\mathrm{t}+\mathrm{m_p}\sin\Omega\mathrm{t}+\varphi_{O}$

$$=2\pi\times6.5\times10^{6}\,\mathrm{t}+20\times\sin5\pi\times10^{3}\,\mathrm{t}+\varphi_{O}$$

$$=13\pi\times10^{6}\,\mathrm{t}+20\sin5\pi\times10^{3}\,\mathrm{t}+\varphi_{O}\ \mathrm{rad}$$

$$u_{\mathrm{PM}}=\mathrm{U_{sm}}\cos\varphi(\mathrm{t})=\mathrm{U_{sm}}\cos\left[13\pi\times10^{6}t+20\sin(5\pi\times10^{3}t)+\varphi_{\mathrm{O}}\right]$$

$$\mathrm{BW_{CR}}=2(\Delta f_{m}+F)=2(m_{p}+1)F\approx2\Delta f_{m}=2\times50kHz(105k\,\mathrm{Hz})$$

u_{Ω}: 振幅减半 u_{FM}: $\Delta f_{m}=K_{f}\mathrm{U}_{\Omega\mathrm{m}}$ $\mathrm{BW_{CR}}=60kHz$

频率加倍 u_{PM}: $\Delta f_{m}=\mathrm{m_p}F=K_{P}U_{\Omega\mathrm{m}}F$ $\mathrm{BW_{CR}}=110kHz$

谢谢！