

实验结果梳理

MG21210021 李庆春

2023 年 8 月 31 日

1 反应扩散方程简述

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku^2 \quad (x, t) \in (0, 1] \times (0, 1] \quad (1)$$

其中，扩散系数 $D=0.01$ ，反应速率 $k=0.01$ ，边值为零函数；

1.1 DeepONet

考虑初值为方程参数的问题，即初值不确定，记为 $u_0(x)$ ，由高斯径向基函数生成 5000 个初值函数：

$$k(x, x') = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|x - x'\|^2}{2l^2}\right) \quad (2)$$

其中， $\sigma = 1, l = 0.2$

分支网络的结构为：[100, 64, 64, 64, 64, 64]，其输入由 5000 个初值函数构成；

主干网络的结构为：[2, 64, 64, 64, 64, 64]，主干网络的输入训练点由三部分构成：

1. 100 个初值点；
2. 200 个边值点，每个边 100 个；
3. 200 个配置单，即物理信息点；

训练结果为：相对误差大概在 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ ，图 1 和图 2 为一个测试样例：

2 1D 浅水方程简述

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} h v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} h v + \frac{\partial}{\partial x} (h v^2 + \frac{g h^2}{2}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

或

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -h \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial x} \\ h \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial t} = -2 h v \frac{\partial v}{\partial x} - (v^2 + g h) \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

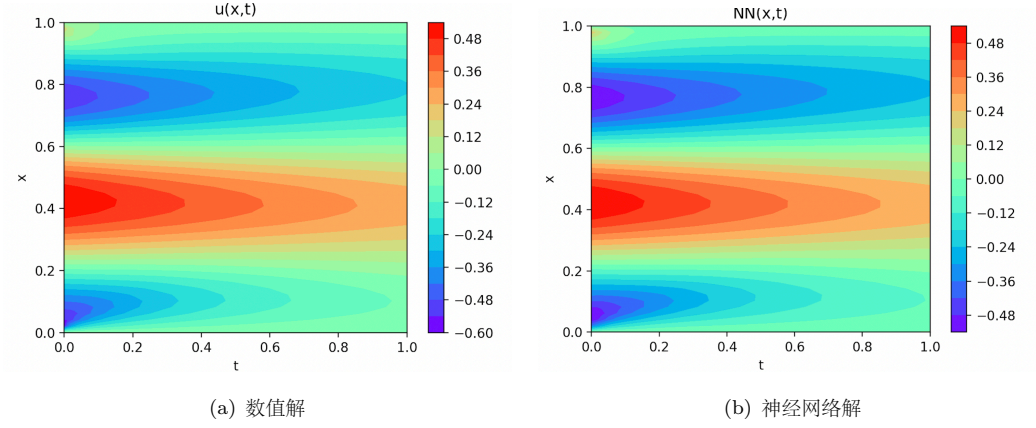


图 1: 等高图

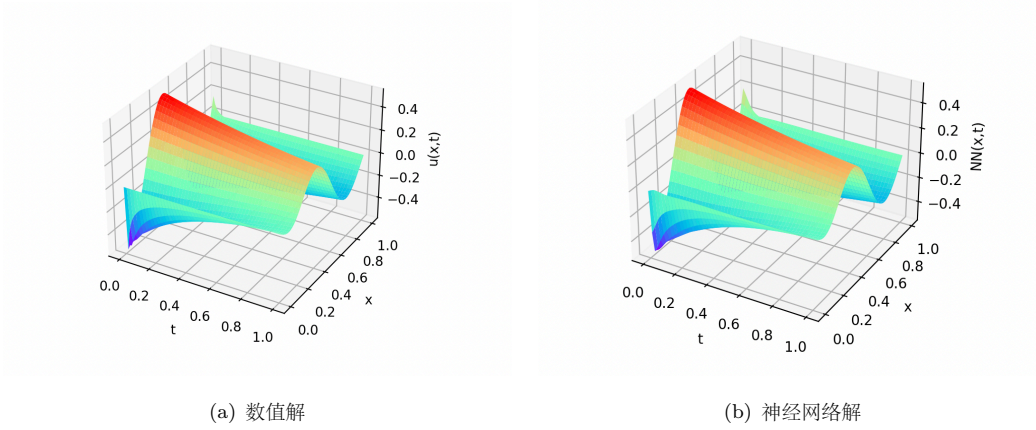


图 2: 三维图

2.1 PINN

边值条件为 $v = 0$ ，初值为高斯径向基 2 生成的随机函数，此时 $\sigma = 1, l = 0.05$ ，观测值为 $x = 0.5, t = [.1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1.]$ 上的数据，配置点（物理信息点）为 10000 个，网络架构为 $[2, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 2]$ 。训练结果的相对误差大概在 10^{-3} ，图 3 为两个时间片的数据，其中红色实线为神经网络解：

2.2 DeepONet

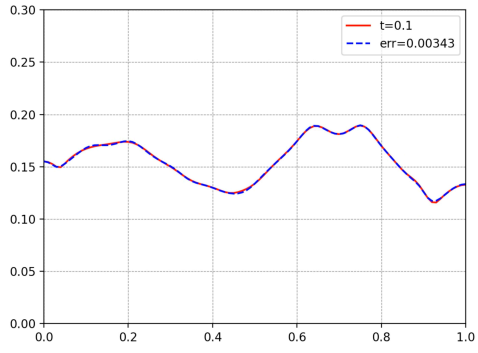
考虑初值为方程参数的问题，即初值不确定，记为 $u_0(x)$ ，由高斯函数生成：

$$u_0(x) = 0.1 + 0.1 \times \exp(-64(x - \mu)^2) \quad (5)$$

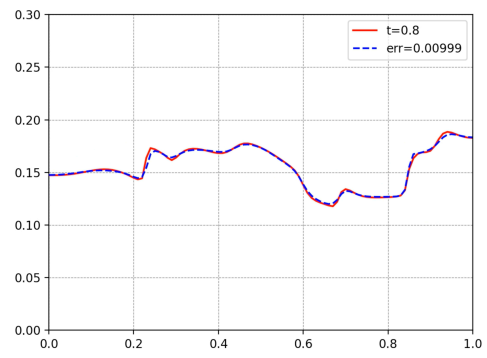
其中， $\mu \in [0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0]$

分支网络的结构为： $[132, 128, 64, 64, 64, 64]$ ，其输入由上述高斯函数构成；

主干网络的结构为： $[2, 64, 64, 64, 64, 64]$ ，主干网络的输入训练点由两部分构成：



(a) $t=0.1$

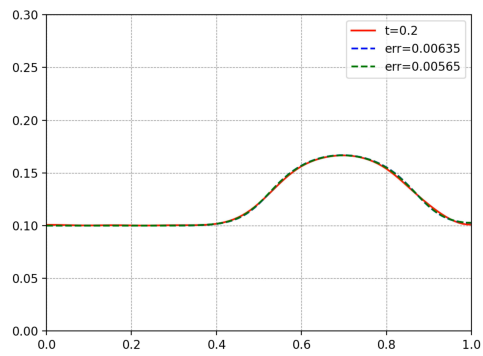


(b) $t=0.8$

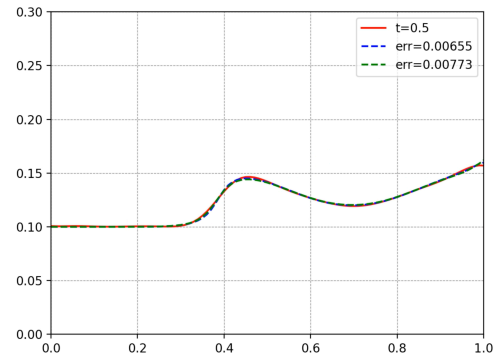
图 3: SWE-PINN

1. 100 个初值点；
2. 5000 个配置单，即物理信息点；

训练结果的相对误差大概在 10^{-3} ，图 4 为两个时间片的数据，其中红色实线为神经网络解：



(a) $t=0.2$



(b) $t=0.5$

图 4: SWE-DeepONet