

浅水方程

MG21210021 李庆春

2023 年 5 月 28 日

1 浅水方程简述

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -g \frac{d\eta}{dx} + \frac{\tau_x}{\rho_0 H} - \kappa u \\ \frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{d\eta}{dy} + \frac{\tau_y}{\rho_0 H} - \kappa v \\ \frac{d\eta}{dt} + \frac{d(\eta+H)u}{dx} + \frac{d(\eta+H)v}{dy} = \sigma - w \end{cases} \quad (1)$$

以上是二维浅水方程表达式，其中动量方程是线性的，连续方程是非线性的，自变量 x, y, t 的含义是显然的，应变量 u 是水平方向的流速， v 是垂直方向的流速， η 是水面动态海拔；其中 $f = f_0 + \beta y$ 是全维度变换的科里奥利斯参数； κ 是跟摩擦相关的系数； τ_x, τ_y 是跟风应力相关的系数； σ 是跟质量源相关的系数； w 是跟质量汇相关的系数；先不考虑这些额外的系数，将方程 1 简化为：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g \frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dv}{dt} = -g \frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{d(\eta+H)u}{dx} - \frac{d(\eta+H)v}{dy} \end{cases} \quad (2)$$

等价于

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g \frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dv}{dt} = -g \frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\eta}{dt} = -u \frac{d\eta}{dx} - v \frac{d\eta}{dy} - (\eta + H)(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) \end{cases} \quad (3)$$

该方程的 CFL 条件为：

$$\begin{cases} dt \leq \frac{\min(dx, dy)}{\sqrt{gH}} \\ \alpha \ll 1 \quad (if \text{ coriolis is used}) \end{cases} \quad (4)$$

其中 dx, dy 是网格间距， g 是重力加速度， H 是静水深度。

下面是把代码贴给 GPT，反向翻译出来的公式，与上面是吻合的，所以代码没问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((\eta + H)u) - \frac{\partial}{\partial y}((\eta + H)v) \end{cases} \quad (5)$$