浅水方程

MG21210021 李庆春

2023 年 6 月 7 日

1 2D 浅水方程简述

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -g\frac{d\eta}{dx} + \frac{\tau_x}{\rho_0 H} - \kappa u \\ \frac{dv}{dt} + fv = -g\frac{d\eta}{dy} + \frac{\tau_y}{\rho_0 H} - \kappa v \\ \frac{d\eta}{dt} + \frac{d(\eta+H)u}{dx} + \frac{d(\eta+H)v}{dy} = \sigma - w \end{cases} \tag{1}$$

以上是二维浅水方程表达式，其中动量方程是线性的，连续方程是非线性的，自变量 x，y，t 的含义是显然的，应变量 u 是水平方向的流速，v 是垂直方向的流速，η 是水面动态海拔；其中 $f = f_0 + \beta y$ 是全维度变换的科里奥利斯参数；κ 是跟摩擦相关的系数；$\tau_x \tau_y$ 是跟风应力相关的系数；σ 是跟质量源相关的系数；w 是跟质量汇相关的系数；先不考虑这些额外的系数，将方程 1简化为:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g\frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dv}{dt} = -g\frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{d(\eta+H)u}{dx} - \frac{d(\eta+H)v}{dy} \end{cases} \tag{2}$$

等价于

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g\frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dv}{dt} = -g\frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\eta}{dt} = -u\frac{d\eta}{dx} - v\frac{d\eta}{dy} - (\eta + H)(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) \end{cases} \tag{3}$$

该方程的 CFL 条件为:

$$\begin{cases} dt \leq \frac{min(dx,dy)}{\sqrt{gH}} \\ \alpha \ll 1 \qquad (if \quad coriolis \quad is \quad used) \end{cases} \tag{4}$$

其中 dx，dy 是网格间距，g 是重力加速度，H 是静水深度。
下面是把代码贴给 GPT，反向翻译出来的公式，与上面是吻合的，所以代码没问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left((\eta + H)u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((\eta + H)v\right) \end{cases} \tag{5}$$

2 1D 浅水方程简述

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}hv = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}hv + \frac{\partial}{\partial x}(hv^2 + \frac{gh^2}{2}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

或

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -h\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial x} \\ h\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial t} = -2hv\frac{\partial v}{\partial x} - (v^2 + gh)\frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \tag{7}$$

第一个方程式质量守恒方程，第二个方程是动量守恒方程；对应的积分形式如下：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} hdx = h(x_0,t)v(x_0,t) - h(x_1,t)v(x_1,t) = \int_{x_0}^{x_1} -\frac{\partial}{\partial x}(hv)dx \\ \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} hvdx = h(x_0,t)v^2(x_0,t) + \frac{gh^2(x_0,t)}{2} - h(x_1,t)v^2(x_1,t) - \frac{gh^2(x_1,t)}{2} \end{cases} \tag{8}$$

对于浅水方程，对于每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$，需要存储质量的平均值和动量的平均值：

$$\begin{cases} H_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} hdx \\ M_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} hvdx \end{cases} \tag{9}$$

把 H_i, M_i 带入积分形式：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H_i\Delta x = h(x_i,t)v(x_i,t) - h(x_{i+1},t)v(x_{i+1},t) \\ \frac{d}{dt}M_i\Delta x = h(x_i,t)v^2(x_i,t) - h(x_{i+1},t)v^2(x_{i+1},t) + \frac{gh^2(x_i,t)}{2} - \frac{gh^2(x_{i+1},t)}{2} \end{cases} \tag{10}$$

对于任意的 $x \in (x_i, x_{i+1})$，我们可以把 $h(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 看成常值函数，因为：

$$\begin{cases} h(x,t) \approx H_i(t) \\ h(x,t)v(x,t) \approx M_i(t) \\ v(x,t) \approx \frac{M_i(t)}{H_i(t)} \end{cases} \tag{11}$$

在边界点 x_i 和 x_{i+1} 上，我们可以通过对边界点左右两个区间的守恒量取平均值，对于 FVM 以及其他同类数值解函数存在不连续性的数值方法，这样给定两个相邻的控制体积上的函数解，求两个控制体积交界处的函数值的策略被称为数值通量（numerical flux）。这样简单取两个值的平均的通量被称为中央通量（central flux），不过它只是众多通量选择中的一种。在方程比较简单并且解函数比较平滑的时候，中央通量还是比较可靠的。但是对于 SWE，中央通量是数值不稳定（numerically unstable）的。为了解决这一问题，这里我们采用 Lax-Friedrichs 通量。Lax-Friedrich 通量很容易计算：分别取左边和右边两区间上的值计算通量，取二值的平均，再加上一修正参数，即系统中的波速乘以该守恒量在两个区间上的差再除以二。这一修正参数被称为数值消散（numerical dissipation）。

$$h(x_i,t)v(x_i,t) \approx \frac{M_{i-1} + M_i}{2} + wavespeed \cdot \frac{H_{i-1} - H_i}{2} \tag{12}$$

对于边界点 x_0 和 x_n，当我们使用反射强边界条件时，我们可以人为地设置两个假想体积（ghost cell）。比如，我们可以认为在区间 $[x_0, x_1]$ 的左边还有一个区间：$[x_{-1}, x_0]$。并且 $H_{-1} =$

$H_0, M_{-1} = -M_0$。也就是说：我们认为在 $[x_{-1}, x_0]$ 上的水和 $[x_0, x_1]$ 上的水有相同的高度但是相反的运动方向。形象一点来说的话，那就是我们可以认为 x_0 上有一面镜子，只不过这个"镜子"反射的不是光，而是动量。
所以，我们得到最终的 FVM 格式：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H_i(t) = \frac{1}{\Delta x}[h(x_i,t)v(x_i,t) - h(x_{i+1},t)v(x_{i+1},t)] \\ \frac{d}{dt}M_i(t) = \frac{1}{\Delta x}\{[h(x_i,t)v^2(x_i,t) + \frac{gh^2(x_i,t)}{2}] - [h(x_{i+1},t)v^2(x_{i+1},t) + \frac{gh^2(x_{i+1},t)}{2}]\} \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases} h(x_i,t)v(x_i,t) = \frac{M_{i-1}+M_i}{2} + c \cdot \frac{H_{i-1}-H_i}{2} \\ h(x_i,t)v^2(x_i,t) + \frac{gh^2(x_i,t)}{2} = \frac{\frac{M_{i-1}^2}{H_{i-1}} + \frac{M_i^2}{H_i}}{2} + \frac{gH_{i-1}^2 + gH_i^2}{4} + c \cdot \frac{M_{i-1}-M_i}{2} \end{cases} \tag{14}$$

其中 c 为波速，$H_{-1} = H_0, H_{n+1} = H_n, M_{-1} = -M_0, M_{n+1} = -M_n$
CFL 条件：$c \cdot \Delta t < \Delta x$
所以最终格式为：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H_i(t) = \frac{1}{2\Delta x}[M_{i-1} - M_{i+1} + c \cdot (H_{i-1} - 2H_i + H_{i+1})] \\ \frac{d}{dt}M_i(t) = \frac{1}{2\Delta x}[(\frac{M_{i-1}^2}{H_{i-1}} - \frac{M_{i+1}^2}{H_{i+1}}) + \frac{g}{2}(H_{i-1}^2 - H_{i+1}^2) + c(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1})] \end{cases} \tag{15}$$