Review Lesson: Design and Analysis of Computer Algorithms

Yanhui Li
Department of Computer Science, Nanjing University
yanhuili@nju.edu.cn

March 7, 2018

Problem 1

腾讯大厦有39层，你手里有两颗一模一样的玻璃球，当你拿着玻璃球在某一层往下扔的时候，一定会有两个结果:玻璃球碎了或者没碎，大厦有个临界楼层，低于它的楼层，往下扔玻璃球，玻璃球不会碎，等于或者高于它的楼层，扔下玻璃球一定会碎。玻璃球碎了就不能再扔了。现在让你设计一种方法，使得在该方法下，最坏情况下扔的次数比其他任何方式最坏的次数都少，也就是设计一种最有效的方法。请给出正确答案。

Solution

假设$T(n,m)$表示有n层楼,m个球解决方案的最坏扔次数. 假设第一次检查的是k楼,那么两种可能性: a)没碎,则需在后续的$n-k$楼检查; b)碎了,则需在之前的$k-1$楼检查,注意碎了球不能复用,所以只剩下$m-1$个球可用.显然具有以下公式:

$$T(n,m) = \min_{1\le k\le n}\{\max(T(k-1,m-1),T(n-k,m))+1\}$$

- $m=1$, 只能遍历所有情况, $T(n,1)=n$;
- $m=2$, $T(n,2)$的序列为:
  $T(1,2)=1$,
  $T(2,2)=2$,$T(3,2)=2$,
  $T(4,2)=3$,$T(5,2)=3$,$T(6,2)=3$,
  $T(7,2)=4$,$T(8,2)=4$,$T(9,2)=4$,$T(10,2)=4$,
  $\ldots$

从以上数值可以发现猜想，在区间$\frac{(i-1)i}{2} < n \leq \frac{i(i+1)}{2}$中$(i \geq 1), T(n) = i$,保持不变,以下证明该结论对所有$n \geq 1$成立

- 归纳基础：当$1 \leq n \leq 8$时，$T(n, 2)$满足公式
- 归纳假设：当$n \leq n_0$时，$T(n, 2)$满足公式
- 归纳证明：当$n = n_0 + 1$时，证明$T(n, 2)$满足公式，分情况讨论：
  1. $n_0 = \frac{i_0(i_0+1)}{2}(i_0 > 0)$,即$n_0$处在区间的右端点处，而$n_0 + 1$处于下一个区间的左端点处。根据归纳假设，$T(n_0, 2) = i_0$。由递归公式

     $$T(n_0+1, 2) = \min_{1 \leq k \leq n_0+1}\{\max(T(k-1, 1), T(n_0+1-k, 2)) + 1\}$$

     可得，$T(n_0 + 1, 2) \leq T(n_0, 2) + 1 = i_0 + 1$。以下证明$T(n_0 + 1, 2) \leq i_0$不可能。假设$T(n_0 + 1, 2) \leq i_0$成立，则存在$k_0$使得

     $$\max(T(k_0 - 1, 1), T(n_0 + 1 - k_0, 2)) + 1 \leq i_0$$

     显然可得

     $$T(k_0 - 1, 1), T(n_0 + 1 - k_0, 2) \leq i_0 - 1,$$

     则$k_0 \leq i_0$,$n_0 + 1 - k_0$与n_0同处一个区间内，即

     $$T(n_0 + 1 - k_0, 2)) = T(n_0, 2) = i_0$$

     矛盾！综上所述，$T(n_0 + 1, 2) = i_0 + 1$。
  2. $\frac{(i_0-1)i_0}{2} < n_0 < \frac{i_0(i_0+1)}{2}$,$T(n_0, 2) = i_0$, 且$n_0$与$n_0 + 1$同处于一个区间,由公式

     $$T(n_0+1, 2) = \min_{1 \leq k \leq n_0+1}\{\max(T(k-1, 1), T(n_0+1-k, 2)) + 1\}$$

     取$k = i_0$可得

     $$T(n_0 + 1, 2) \leq \max(T(i_0 - 1, 1), T(n_0 + 1 - i_0, 2)) + 1 = i_0$$

     同样可证明$T(n_0 + 1, 2) \leq i_0 - 1$不可能(请自行验证)。

根据以上证明可得，$T(n, 2)$序列为

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots, n-1, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{n}, n+1, \ldots,$$

代入$n = 39$，$T(39, 2) = 9$;
对应设计的最优解为:

- 先检查9,17,24,30,35,39;
- 然后升序遍历检查没碎和碎了之间的所有楼层