

基于沪深300指数期权的复制

核心观点:

● 基于沪深300指数期权的复制

对于基金等市场参与者，通常需要进行风险管理。有些期权等产品是为特定目的设定，而市场上没有现成的工具，这就需要我们构造。这里我们讨论利用 Delta 对冲来完成 HS300 指数期权的复制。

● 沪深300指数历史路径的期权复制

基于不同时间段内，采用沪深300历史路径，对一年期的平价看涨期权进行复制；同时对不同的复制频率10分钟、1小时、半天、一天下的结果进行对比，复制频率高时产生的成本也大；另外给出每个时点的 delta 和 gamma 值，不同频率下的结果未出现明显差异。

● 沪深300指数收益分布进行蒙特卡洛模拟

首先，介绍蒙特卡洛不同的抽样方法，本文采用筛选抽样方法，该方法要优于传统直接和变化抽样法，特别是可以生成满足在金融领域中常见的厚尾分布等较为复杂的分布函数的随机序列；在前面单一路径的基础上，基于沪深300指数收益分布，构造不同路径，进行期权复制，并将结果进行统计分析。

● 拟合沪深300指数收益分布函数，采用多种分布进行期权复制

介绍市场上多种资产收益存在的非正态分布情况，如厚尾分布等；对沪深300指数收益函数进行拟合，如正态分布拟合、柯西分布拟合、约翰逊分布拟合等；基于以上几种不同分布，采用蒙特卡洛方法生成多种路径，进行期权复制，并将结果进行统计分析；不同分布下，给出的结果是不同的；这涉及到拟合历史分布，选取合适的分布函数对于蒙特卡洛模拟很重要的，不同资产收益适合的分布是不同的，如文中提到的约翰逊分布就能很好的实现对非正态分布的拟合。

分析师

王红兵

☎: 0755-83479312

✉: wanghongbing_yj@chinastock.com.cn

执业证书编号: S0130514060001

特别感谢

吴俊鹏

☎: 010-83574080

✉: wujunpeng@chinastock.com.cn

相关研究

目 录

一、理论基础.....	3
二、期权复制原理.....	4
三、不同复制频率下的结果.....	6
四、蒙特卡洛模拟.....	9
(一) 蒙特卡洛基础理论.....	9
(二) 蒙特卡洛历史模拟.....	10
五、基于不同分布下期权的蒙特卡洛模拟.....	14
(一) 历史收益分布.....	14
(二) 采用不同分布下蒙特卡洛模拟.....	18
六、结语.....	29
七、风险提示.....	29

近期特别是 2015 年下半年以来，市场波动风险非常大，对于基金等市场参与者，通常需要进行风险管理。除了使用股指期货进行风险对冲以外，还需要一些非对称收益的期权产品。而有些期权等产品是为特定目的设定，而市场上没有现成的工具直接对冲来完成风险管理，这就需要我们构造。通常的方法有裸露头寸和带保头寸、止损交易、Delta 对冲等。

这里我们讨论利用 Delta 对冲来完成 HS300 指数期权的复制。

一、理论基础

首先，需要知道期权的价格公式，通常使用 Black-Scholes-Merton 微分方程。要想得到 Black-Scholes-Merton 微分方程，首先，假定无股息股票价格满足以下表达式：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

这是伊藤过程，是一个更为广义的维纳过程。通过伊藤引理我们知道，如果 x 服从伊藤过程，这函数 $G(x,t)$ 满足以下方程：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

dz 是维纳过程。则依赖于股价价格的某衍生品 f (如看涨期权)，满足以下方程：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

构建一个组合，含有一份期权的短头寸，和适当数量的股票，则该组合等于：

$$\Psi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

在一段时间间隔内其价值变化为：

$$\Delta \Psi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

将前面方程带入可以得到：

$$\Delta \Psi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t$$

上面表达式中不含有维纳项，该证券组合在这段时间间隔内是无风险的，所以通过无套利定价，其可以通过买入无风险资产获利，所以：

$$\Delta \Psi = r \Psi \Delta t$$

将前面表达式带入上式，消去 Δt ，就可以得到衍生品（标的为无股息股票）价格应该满足的 Black-Scholes-Merton 微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

不同衍生品，方程的解与特定的边界条件有关，欧式看涨期权的边界条件是：

$$f = \max(S - K, 0) \quad t = T$$

欧式看跌期权的边界条件是：

$$f = \max(K - S, 0) \quad t = T$$

对于方程求解过程这里就不再赘述，可参阅相关文献。这里直接给出看涨期权 c 和看跌期权 p 的价格表达式：

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}, d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$N(x)$ 为标准正态分布累积函数。

$$N(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

二、期权复制原理

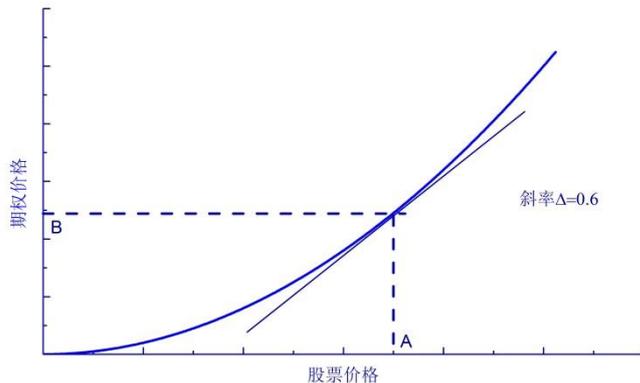
对于一个交易组合 Π 的差分 $\Delta \Pi$ 可以用级数展开写成：

$$\Delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t} \Delta S \Delta t + \dots$$

其中的一阶项 $\frac{\partial \Pi}{\partial S}$ 就是 Delta，二阶项 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$ 就是 Gamma。对于期权的 Delta 等于期权价

格变动与标的资产价格变动的比率，如图所示，就是图中曲线的斜率。

图 1: Delta 计算



资料来源：中国银河证券研究部

对于欧式看涨期权的 Delta 为：

$$\Delta(\text{call}) = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

看跌期权的 Delta 为：

$$\Delta(\text{put}) = \frac{\partial p}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

欧式看涨期权的 Gamma 为：

$$\Gamma(\text{call}) = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

$N'(x)$ 为标准正态分布函数。

在下表中给出看涨期权 Delta 动态对冲模拟流程，不同复制频率下所对应的周期数是不一样的，每个周期数对应一个时间点，整个 N 代表的是一年（这里讨论的期权是一年期的）。相应的指数点数就是 HS300 的历史数据。

表 1 Delta 动态对冲模拟

周期数	指数点数	Delta	购买期货数目	购买费用	累积现金流	利息费用
-----	------	-------	--------	------	-------	------

0	P_0	D_0	$D_0 \times \text{base}$	C_0	AC_0	In_0
1	P_1	D_1	$(D_1 - D_0) \times \text{base}$	C_1	AC_1	In_1
2	P_2	D_2	$(D_2 - D_1) \times \text{base}$	C_2	AC_2	In_2
i	P_i	D_i	$(D_i - D_{i-1}) \times \text{base}$	C_i	AC_i	In_i
...
N	P_N	D_N	$(D_N - D_{N-1}) \times \text{base}$	C_N	AC_N	In_N

资料来源：中国银河证券研究部

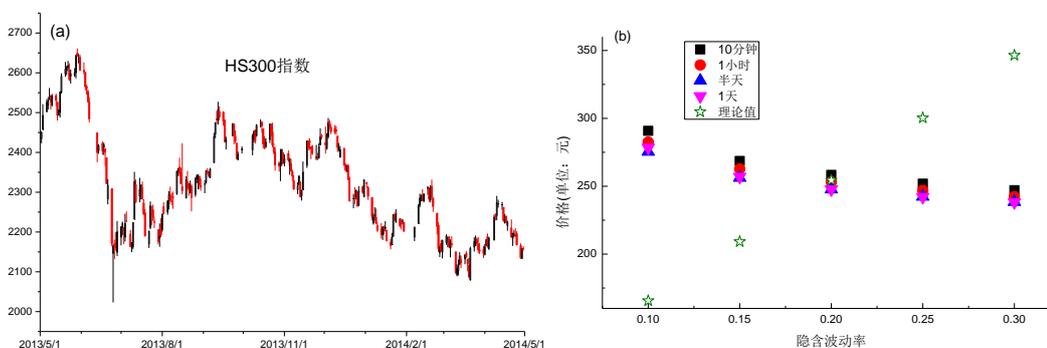
每期需要对冲股指期货的数目为 $(D_i - D_{i-1}) \times \text{base}$ ，相应的购买费用的计算是用该期的价格乘以 $(1 + \text{手续费率})$ ，再乘以相应的数目；该期的累计现金流等于上期累计现金流和利息加上本期的费用。

所以，最后的对冲成本等于 $AC_N - K$ （行权，收到的现金 K ），不行权的话就是 AC_N 。所有的计算都是用对冲成本来替代相应期权的价格。

三、不同复制频率下的结果

首先，基于 HS300 的历史数据，分别给出不同频率下期权复制的成本（价格）。基于 2013 年 5 月到 2014 年 4 月时间序列，进行历史期权复制，结果如下图所示。图 2 (a) 是 HS300 指数（时间 2013 年 5 月-2014 年 4 月），(b) 不同波动率下，不同复制频率 10 分钟、1 小时、半天、一天，HS300 看涨期权的价格和理论值。

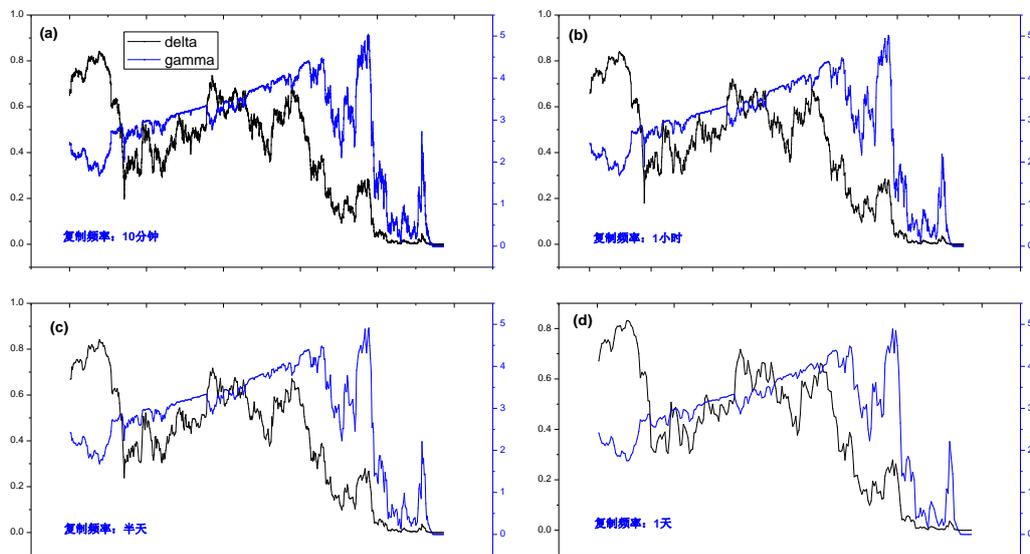
图 2：HS300 历史路径的期权复制（2013）



资料来源：中国银河证券研究部

图 3 是不同复制频率下，每个时间点的 delta 和 gamma 值，横轴表示为时间 2013 年 5 月-2014 年 4 月；图 3 (a) 复制频率为 10 分钟，图 3 (b) 复制频率为 1 小时，图 3 (c) 复制频率为半天，图 3 (d) 复制频率为 1 天。

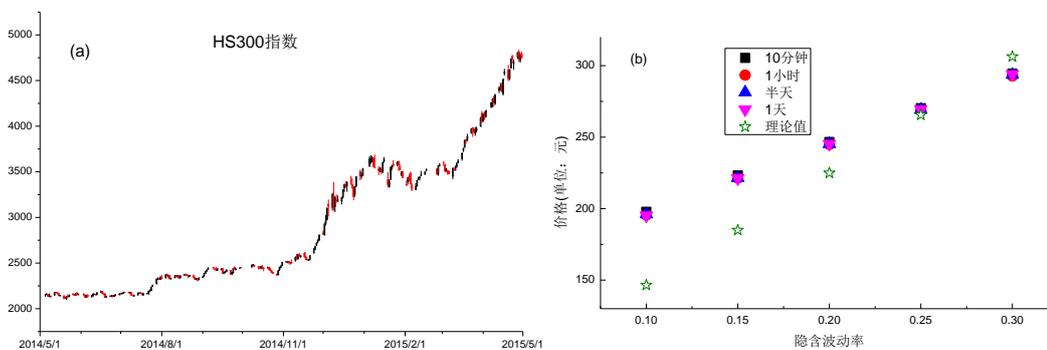
图 3：不同复制频率下，每个时间点的 delta 和 gamma 值



资料来源：中国银河证券研究部

基于 2013 年 5 月到 2014 年 4 月时间序列，进行历史期权复制，结果如下图所示。图 4(a) 是 HS300 指数（时间 2013 年 5 月-2014 年 4 月），(b) 不同波动率下，不同复制频率 10 分钟、1 小时、半天、一天，HS300 看涨期权的价格和理论值。

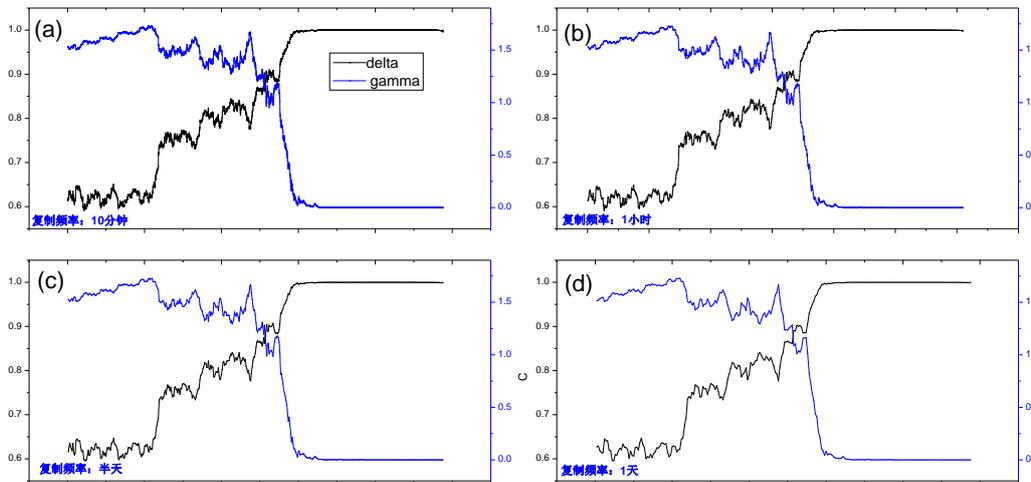
图 4：HS300 历史路径的期权复制（2014）



资料来源：中国银河证券研究部

图 5 是不同复制频率下，每个时间点的 delta 和 gamma 值，横轴表示为时间 2014 年 5 月-2015 年 4 月；图 5(a)复制频率为 10 分钟，图 5 (b) 复制频率为 1 小时，图 5 (c) 复制频率为半天图，5 (d) 复制频率为 1 天。

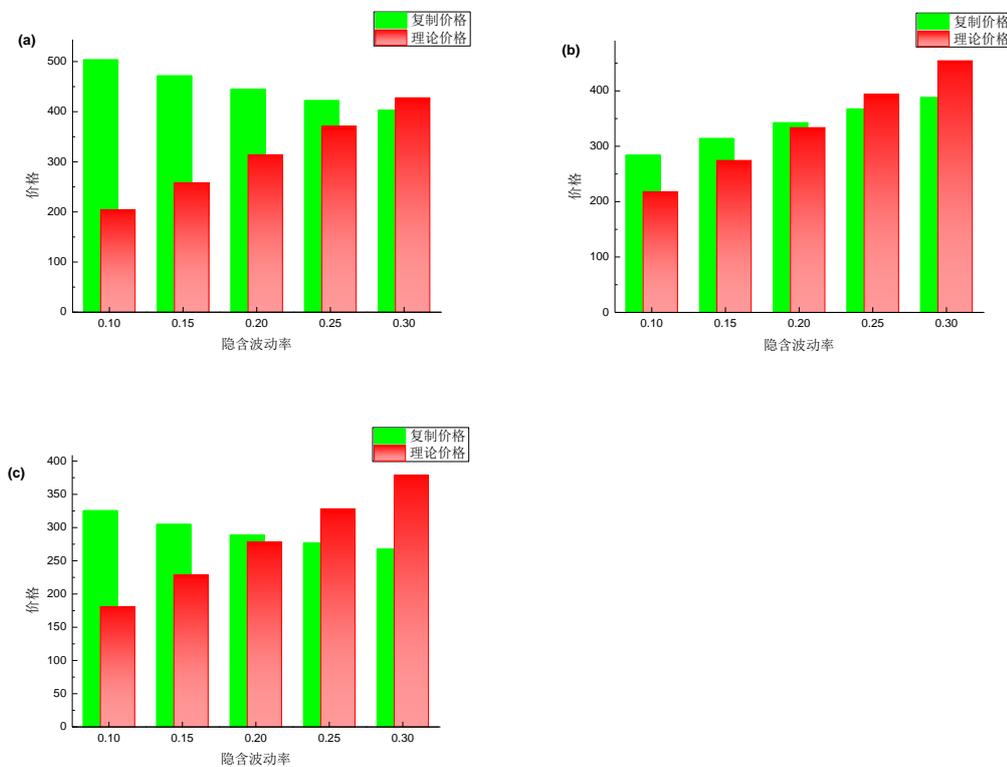
图 5：不同复制频率下，每个时间点的 delta 和 gamma 值



资料来源：中国银河证券研究部

从图 (3) 和图 (5) 可以看出，在不同的复制频率下，delta 和 gamma 的计算结果是一致的。下面将复制对冲频率取为一天，给出一年期 HS300 指数看涨期权的复制结果。

图 6：不同波动率下复制频率为一天 HS300 看涨期权的价格和理论值



资料来源：中国银河证券研究部

图 6(a) 不同波动率下复制频率为一天 HS300 看涨期权的价格和理论值 (时间 2010 年 5 月-2011 年 4 月); 图 6(b) 不同波动率下复制频率为一天 HS300 看涨期权的价格和理论值 (时间 2011 年 5 月-2012 年 4 月); 图 6(c) 不同波动率下复制频率为一天 HS300 看涨期权的价格和理论值 (时间 2012 年 5 月-2013 年 4 月), 期权均为一年期。

四、蒙特卡洛模拟

(一) 蒙特卡洛基础理论

下面, 采用利用历史收益分布, 给出多种路径, 计算出每种路径下期权的复制成本, 即采用蒙特卡洛模拟。从计算机模拟采用的方法来看, 大致包括两大部分。第一种就是通过求解特定的动力学方程, 模拟整个系统的行为, 如分子动力学模拟等; 第二大类, 就是 Monte Carlo 方法, 或称为随机模拟方法, 它是通过产生随机序列来模拟整个过程。

在实际生成随机序列中即抽样, 在 0-1 区间的均匀分布抽样是最常见的, 关于生成均匀随机数的算法如利用 Metropolis 等, 这里就不详细论述, 一般的计算机语言如 C、Fortran、Java 等都有相应的函数支持, 对于某些高级语言如 MATLAB、Python 等有支持生成更丰富不同分布的随机序列的函数。在实际问题中, 我们通常需要生成的伪随机数, 需要满足不同形式的概率密度函数。通常的做法是首先在 0-1 区间生成均匀分布的随机序列, 再从该随机序列抽取一个简单样本, 使得它的分布满足所需概率密度函数。对于不同的分布密度函数, 需要采用不同的方法, 这正是蒙特卡洛方法的核心内容之一。

1) 离散型分布随机抽样

如果离散随机变量 x 等于 x_i 的概率为 p_i , p_i 满足归一化条件, 则该随机变量的生成方法如下:

第一步, 在 0-1 区间生成均匀分布的随机数 ξ , 判断不等式

$$F(x_{j-1}) \leq \xi < F(x_j)$$

第二步, 与 j 对应的 x_j 就是所需的抽样 $\eta=x_j$ 。

2) 连续分布随机抽样

2.1 直接抽样法

直接抽样即反函数法, 如果随机变量的满足的分布函数为 $f(x)$, 其累积函数为 $F(x)$, 如果其反函数存在, 则 0-1 均匀分布的随机数为 ξ , 取 $\xi = F(\eta)$, 则 $\eta = F^{-1}(\xi)$ 就是满足概率密度函数 $f(x)$ 的一个抽样值。

这种方法简单, 如果不能给出反函数或者概率密度函数过于复杂, 这种情况下该方法不再适用。

2.2 变换抽样法

所谓变换抽样，就是将复杂分布变化为已知的分布。例如常见的生成正态分布的变换方法等

2.3 筛选抽样方法

该方法是 von Neumann 给出的，它是在给定的分布函数下，对均匀分布的随机序列进行筛选，在概率密度函数单峰的地方，保留较多的随机数，在概率密度较小的地方保留较少的随机数。

此外，还有复合抽样法、特殊抽样法等。

在本文中，采用筛选抽样方法。首先，给出基于历史数据收益的随机序列。

(二) 蒙特卡洛历史模拟

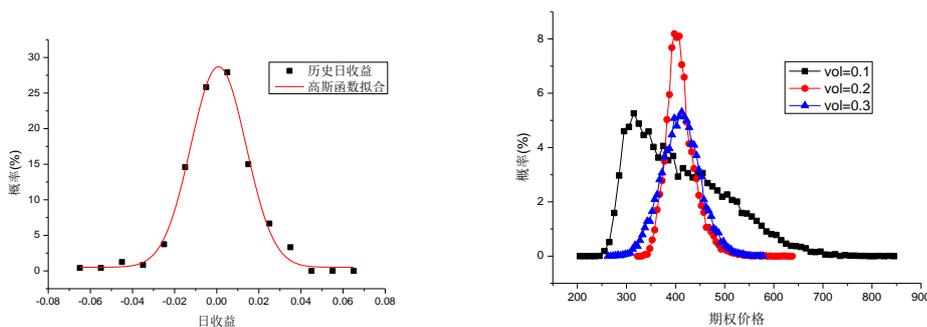
下面采用历史 HS300 指数每日收益的离散分布，进行蒙特卡洛模拟计算看涨平价期权的价格。采用的历史数据是四个时间段，分别为：2010 年 5 月-2011 年 4 月、2011 年 5 月-2012 年 4 月、2012 年 5 月-2013 年 4 月和 2013 年 5 月-2014 年 4 月。

如无特别指出，所有的期权价格均以点数为单位，蒙特卡洛模拟路径的个数为 10000。

2010 年 5 月-2011 年 4 月

图（7）左边给出的是在 2010 年 5 月-2011 年 4 月时间段内，HS300 指数每日收益的概率分布，黑点是历史数据，红线是拟合曲线。

图 7：HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果（2010）

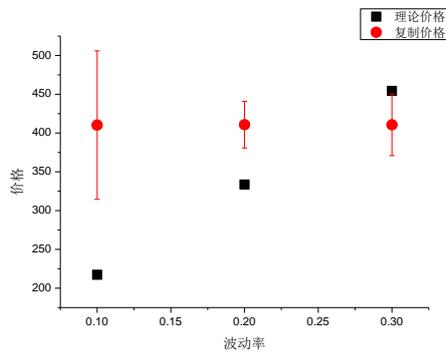


资料来源：中国银河证券研究部

按照图（7）的离散概率分布，随机生成每日的指数序列，采用 delta 复制的方法得到期权的价格。图（7）右边给出蒙特卡洛模拟结果，模拟路径为 10000 次，黑、红、蓝三条线分别对应的波动率为 10%、20% 和 30%；横轴表示期权的价格，纵轴为概率值。

复制结果与理论结果的对比见下图。

图 8：复制结果与理论结果（2010）



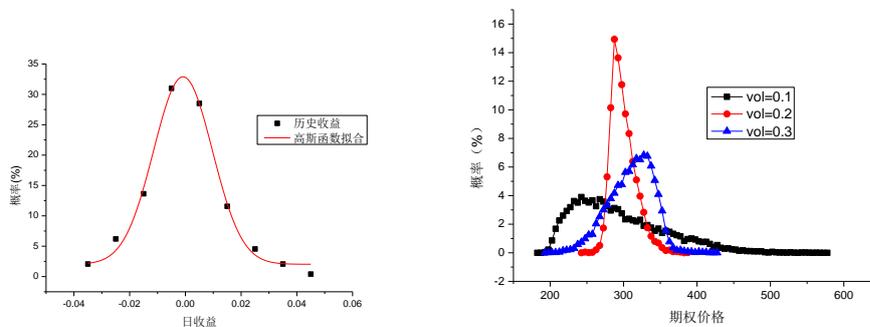
波动率	理论价格	复制价格	标准差
0.1	217.272	410.27471	95.67139
0.2	333.671	410.81632	30.13966
0.3	454.382	410.62573	39.79318

资料来源：中国银河证券研究部

2011年5月-2012年4月

图(9)左边给出的是在2011年5月-2012年4月时间段内，HS300指数每日收益的概率分布，黑点是历史数据，红线是拟合曲线。

图 9：HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2011)

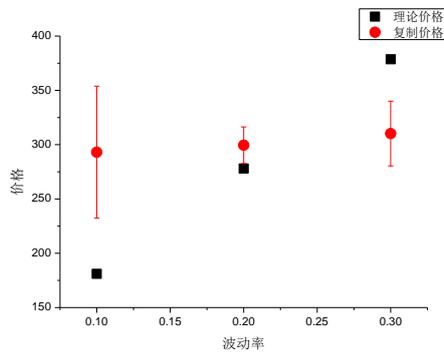


资料来源：中国银河证券研究部

按照图(9)的离散概率分布，随机生成每日的指数序列，采用 delta 复制的方法得到期权的价格。图(9)右边给出蒙特卡洛模拟结果，模拟路径为 10000 次，黑、红、蓝三条线分别对应的波动率为 10%、20%和 30%；横轴表示期权的价格，纵轴为概率值。

复制结果与理论结果的对比见下图。

图 10：复制结果与理论结果 (2011)



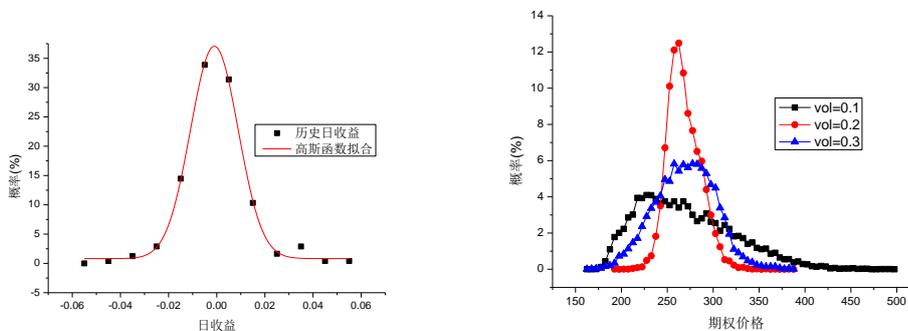
波动率	理论价格	复制价格	标准差
0.1	181.058	293.06939	60.75541
0.2	278.056	299.53926	16.80334
0.3	378.647	310.24833	29.79413

资料来源：中国银河证券研究部

2012年5月-2013年4月

图(11)左边给出的是在2012年5月-2013年4月时间段内，HS300指数每日收益的概率分布，黑点是历史数据，红线是拟合曲线。

图 11: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2012)

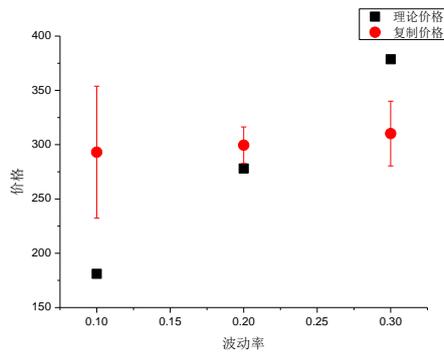


资料来源：中国银河证券研究部

按照图(11)的离散概率分布，随机生成每日的指数序列，采用delta复制的方法得到期权的价格。图(11)右边给出蒙特卡洛模拟结果，模拟路径为10000次，黑、红、蓝三条线分别对应的波动率为10%、20%和30%；横轴表示期权的价格，纵轴为概率值。

复制结果与理论结果的对比见下图。

图 12: 复制结果与理论结果 (2012)



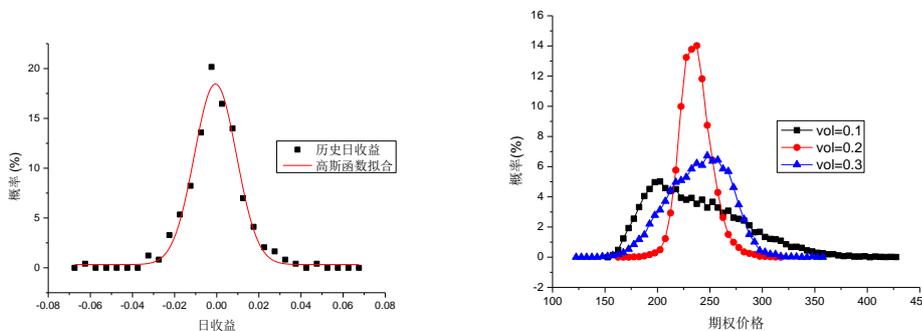
波动率	理论价格	复制价格	标准差
0.1	165.674	270.05776	51.67625
0.2	254.43	268.1271	17.77262
0.3	346.475	269.24935	32.24305

资料来源：中国银河证券研究部

2013年5月-2014年4月

图 (13) 左边给出的是在 2013 年 5 月-2014 年 4 月时间段内，HS300 指数每日收益的概率分布，黑点是历史数据，红线是拟合曲线。

图 13: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2013)

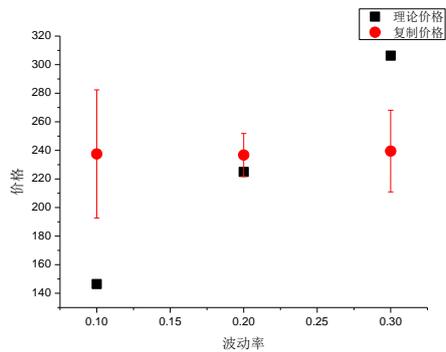


资料来源：中国银河证券研究部

按照图 (13) 的离散概率分布，随机生成每日的指数序列，采用 delta 复制的方法得到期权的价格。图 (13) 右边给出蒙特卡洛模拟结果，模拟路径为 10000 次，黑、红、蓝三条线分别对应的波动率为 10%、20% 和 30%；横轴表示期权的价格，纵轴为概率值。

复制结果与理论结果的对比见下图。

图 14: 复制结果与理论结果 (2013)



波动率	理论价格	复制价格	标准差
0.1	146.483	237.51301	44.84397
0.2	224.958	236.75219	15.07242
0.3	306.341	239.49843	28.56572

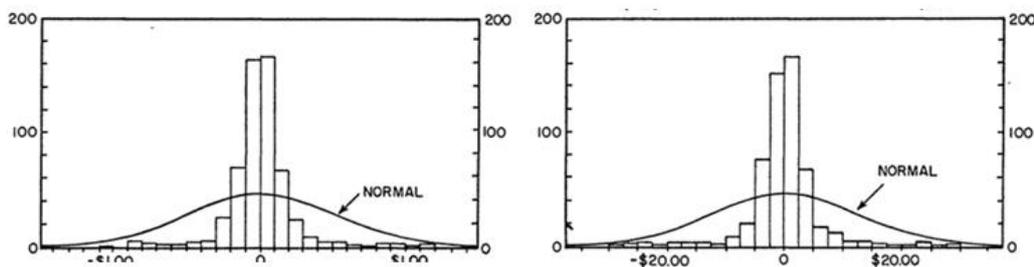
资料来源：中国银河证券研究部

五、基于不同分布下期权的蒙特卡洛模拟

(一) 历史收益分布

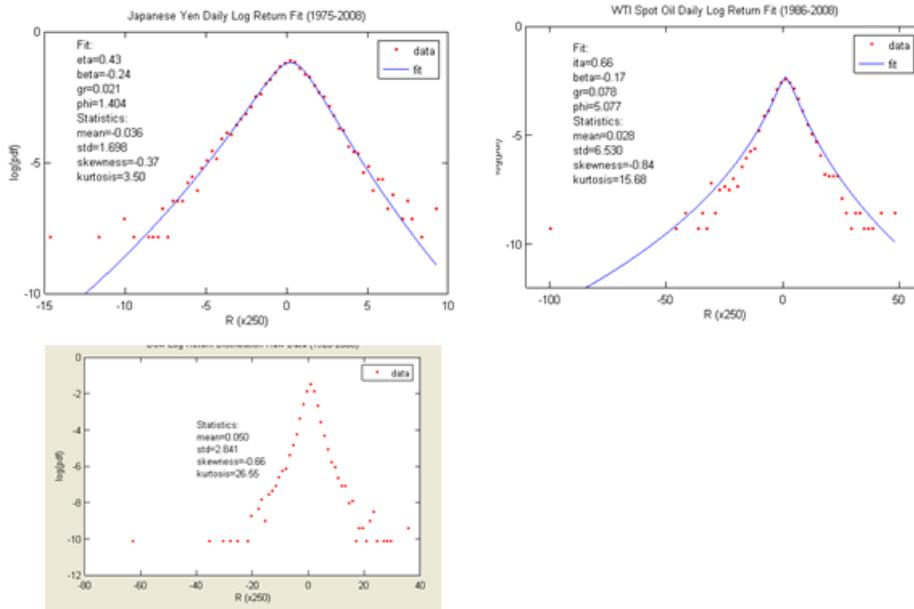
对于金融、期货市场收益率的研究由来已久，通常是认为收益率分布是正态分布，在实际研究中发现会出现厚尾（或重尾）的分布。1963年 Mandelbrot 在研究棉花和羊毛的价格时发现，收益率分布不是正态分布，就有尖峰胖尾的特征（详见下图）（来源：Benoit Mandelbrot 《the variation of certain speculative prices》1963）。

图 15：羊毛收益统计直方图（采用价差）



资料来源：中国银河证券研究部

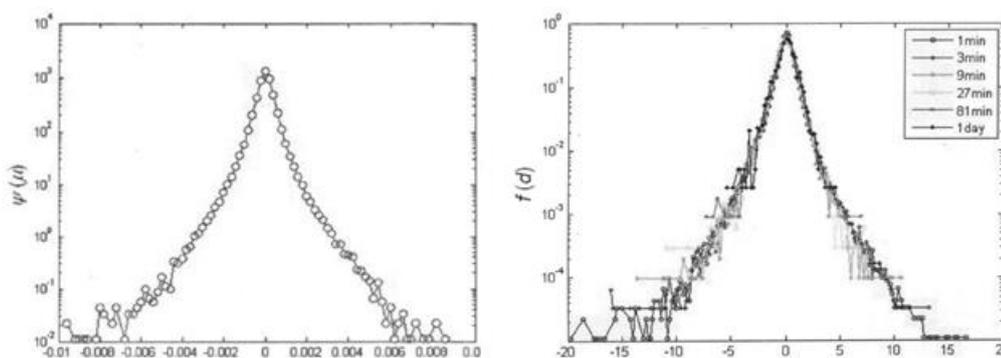
图 16：WTI、Dow、日元/美元汇率 收益分布



资料来源：中国银河证券研究部

同样在国外的金融市场和商品市场中，如德州轻质原油、日元美元汇率等，它们的收益也呈现出非正态性、厚尾性（详见上图，来源：<http://www.skew-lognormal-cascade-distribution.org/apps/>）；在国内，已有的研究表明，上交所 A 股的收益率也呈现幂指数衰减的特点（见下图，来源：《中国股市高频截面数据的概率分布及其时间相关性研究》）。

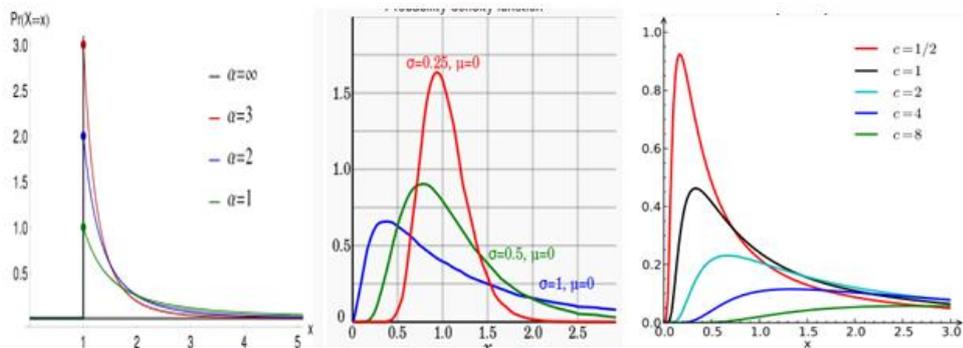
图 17：上交所 A 股 2000 年 1 月-2008 年 3 月不同时间间隔下收益率的概率分布



资料来源：中国银河证券研究部

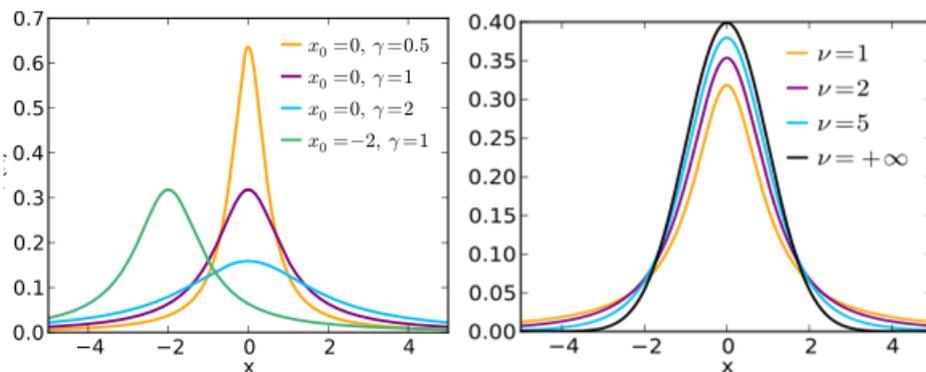
常见的重尾分布，对于单尾分布有帕累托 Pareto 分布、对数正态分布、列维 levy 分布、对数 gamma 分布、对数柯西分布等；对于双尾分布有 Cauchy-Lorentz 分布、t 分布、幂指数衰减的分布等。

图 18：单尾-肥尾分布图（帕累托 Pareto 分布、对数正态分布、列维 levy 分布）



资料来源：中国银河证券研究部

图 19：双尾-肥尾分布图（Cauchy-Lorentz 分布、t 分布）



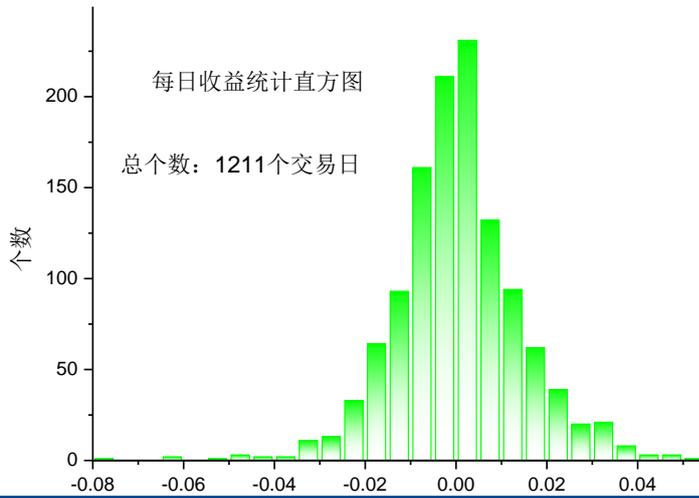
资料来源：中国银河证券研究部

首先，采用 Cauchy-Lorentz 概率分布对 HS300 指数每日收益进行拟合。Cauchy-Lorentz 概率分布函数是

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}$$

下图是 2010 年 5 月-2015 年 4 月 HS 300 指数每日收益的统计直方图。

图 20：HS 300 指数每日收益的统计直方图

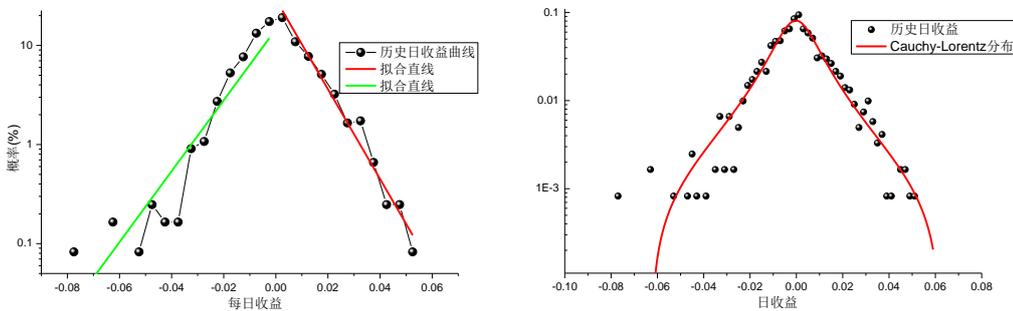


资料来源：中国银河证券研究部

每日收益

在对数坐标下，分布两边拟合的幂指数是不相等的（详见下图左边绿色和红色两条线的斜率不等），在下图右边给出了采用 Cauchy-Lorentz 分布拟合的结果（红线）。

图 21：HS300 指数每日收益的统计概率分布拟合



资料来源：中国银河证券研究部

左边是幂指数拟合，两边的直线是不对称的；右边是采用 Cauchy-Lorentz 分布拟合的结果（红线）。

表 2 HS300 指数每日收益率相关的统计结果

时间段	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
2010.5-2015.4	1211	4.74916E-4	0.01392	-0.11383	2.19547	1.66561E-4	-0.07702	0.05049
2010.5-2011.4	240	3.73087E-4	0.01556	-0.52241	1.50848	9.44835E-4	-0.06215	0.03781
2011.5-2012.4	242	-7.15088E-4	0.01359	0.26305	0.77517	-6.7698E-4	-0.03573	0.04901
2012.5-2013.4	242	-2.07383E-4	0.01301	0.48666	2.09921	-8.97805E-4	-0.04613	0.05049
2013.5-2014.4	243	-4.3284E-4	0.01293	-0.15711	2.71997	-9.0414E-4	-0.06308	0.04614
2014.5-2015.4	244	0.00334	0.01407	-0.42371	4.59579	0.00149	-0.07702	0.0461

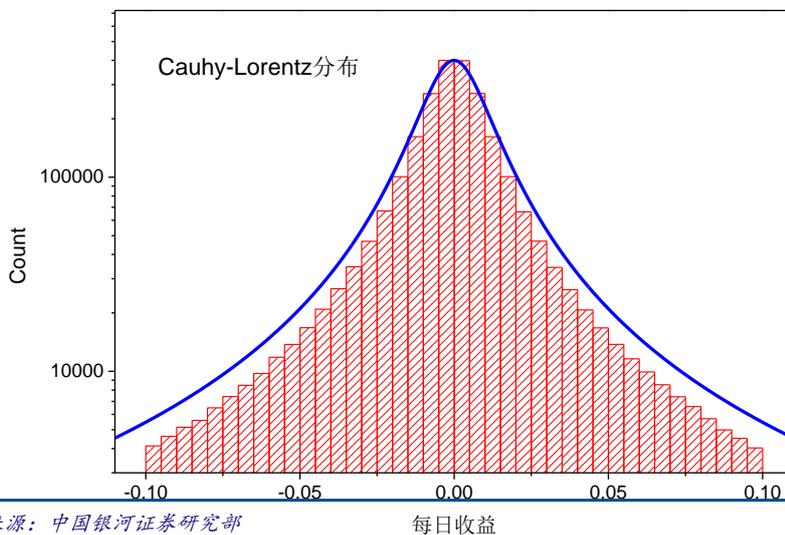
资料来源：中国银河证券研究部

(二) 采用不同分布下蒙特卡洛模拟

为统一起，设定的期权的初始价格和行权价格均为 1000 点；在进行期权复制时已考虑交易成本为 0.3%；价格单位以点数表示，MC 路径模拟次数为 10000 次。

1) Cauchy-Lorentz 分布 MC 模拟

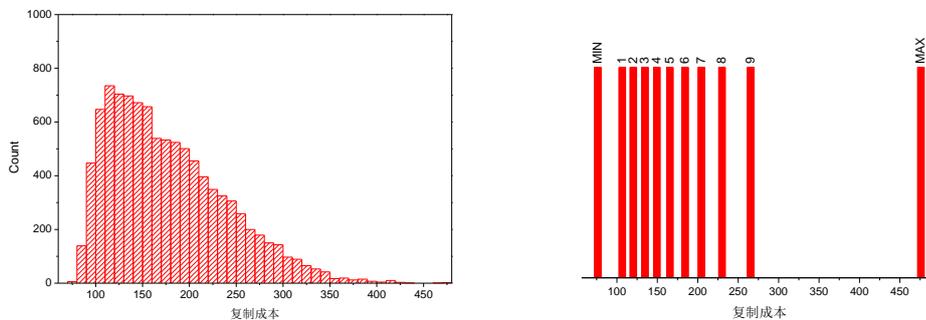
图 22：Cauchy-Lorentz 分布的随机收益序列



资料来源：中国银河证券研究部

图 (22) 给出的程序符合 Cauchy-Lorentz 分布的随机收益序列的统计直方图，蓝线是表示 Cauchy-Lorentz 的概率密度函数。图 (23) 左边表示在波动率为 0.1 的情况下，采用 delta 复制期权成本的统计直方图，右边给出的十分位数的位置。

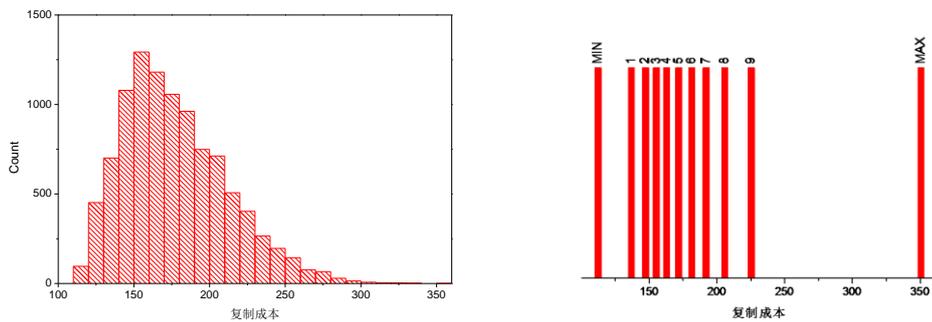
图 23：波动率 0.1 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

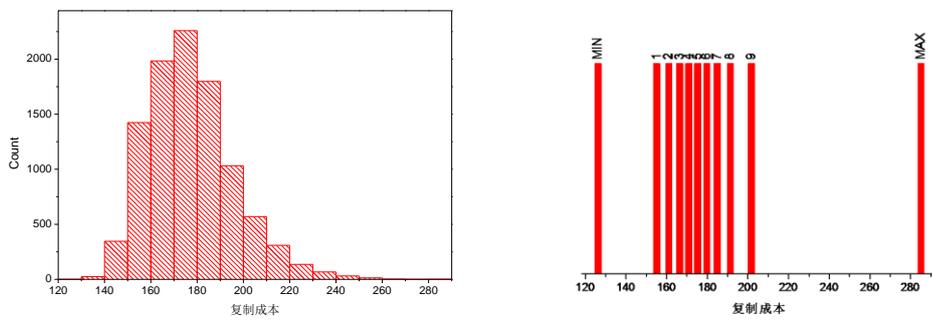
图 (24) 和图 (25) 给出是波动率分别为 0.2 和 0.3 情况下 delta 复制期权成本的统计结果。

图 24：波动率 0.2 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

图 25：波动率 0.3 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

下表给出的是相关统计数据的详细结果

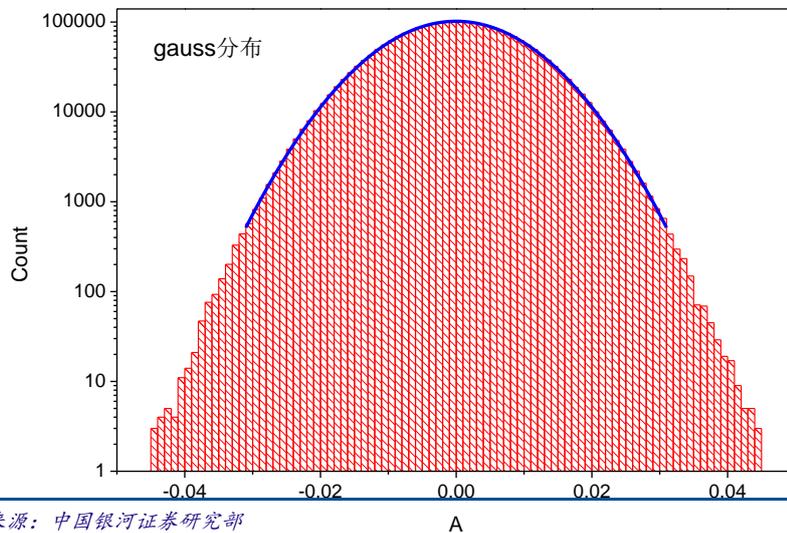
表 3 采用 Cauchy-Lorentz 分布进行 MC 模拟，期权复制成本的统计结果

波动率	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
0.1	10000	177.2936	62.24954	0.82764	0.34931	165.50245	76.35953	475.98804
0.2	10000	177.2275	34.60571	0.72894	0.37032	171.82242	112.27004	350.67921
0.3	10000	177.28567	18.58841	0.79212	1.05994	175.31857	126.24846	285.19912

资料来源：中国银河证券研究部

2) Gauss 分布 MC 模拟

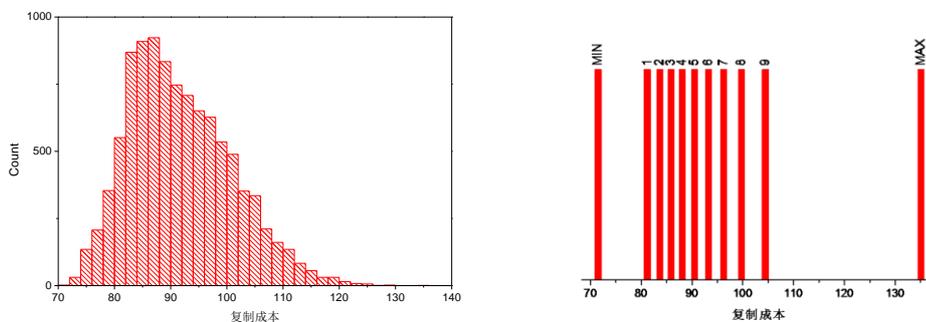
图 26：Gauss 分布的随机收益序列



资料来源：中国银河证券研究部

图 (26) 给出的程序符合 Gauss 分布的随机收益序列的统计直方图，蓝线是表示 Gauss 的概率密度函数。图 (27) 左边表示在波动率为 0.1 的情况下，采用 delta 复制期权成本的统计直方图，右边给出的十分位数的位置。

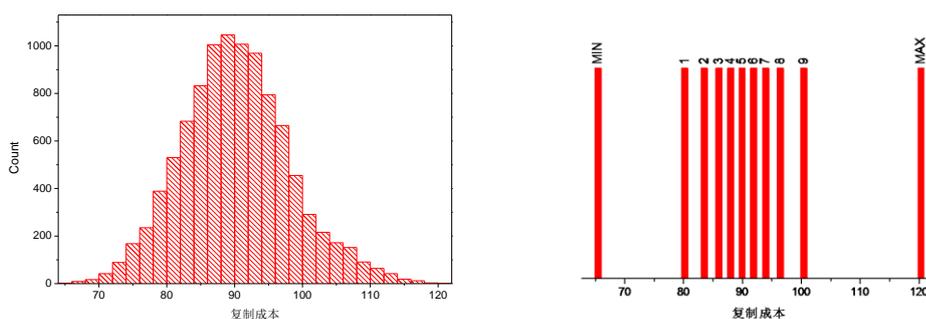
图 27：波动率 0.1 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

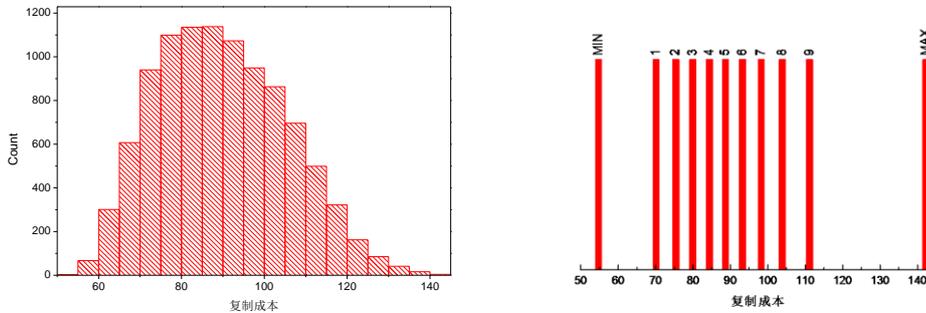
图 (28) 和图 (29) 给出是波动率分别为 0.2 和 0.3 情况下 delta 复制期权成本的统计结果。

图 28：波动率 0.2 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

图 29：波动率 0.3 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

下表给出的是相关统计数据的详细结果

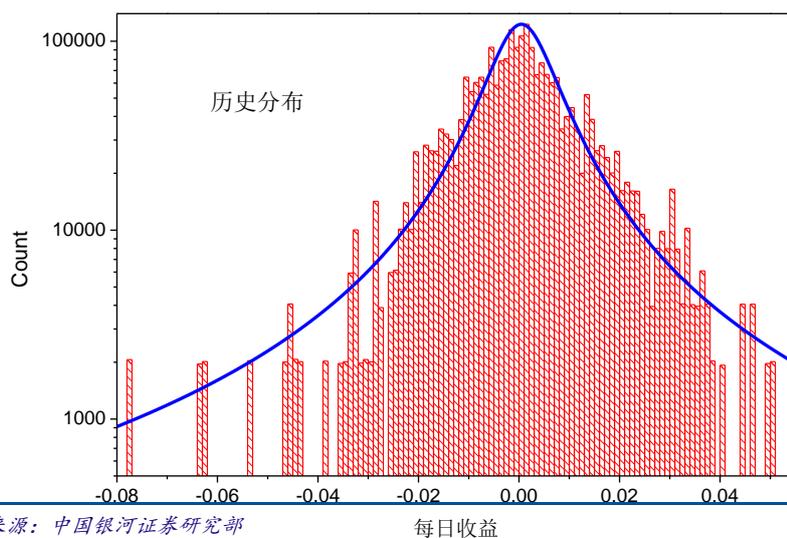
表 4 采用 Gauss 分布进行 MC 模拟，期权复制成本的统计结果

波动率	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
0.1	10000	91.7593	9.14703	0.55869	0.00125	90.49616	71.46013	135.09064
0.2	10000	90.22375	8.02578	0.22492	0.22492	89.91404	65.45275	120.33296
0.3	10000	89.81089	15.61338	0.30659	-0.46264	88.65063	54.73885	142.25888

资料来源：中国银河证券研究部

3) 历史分布 MC 模拟

图 30：历史分布的随机收益序列

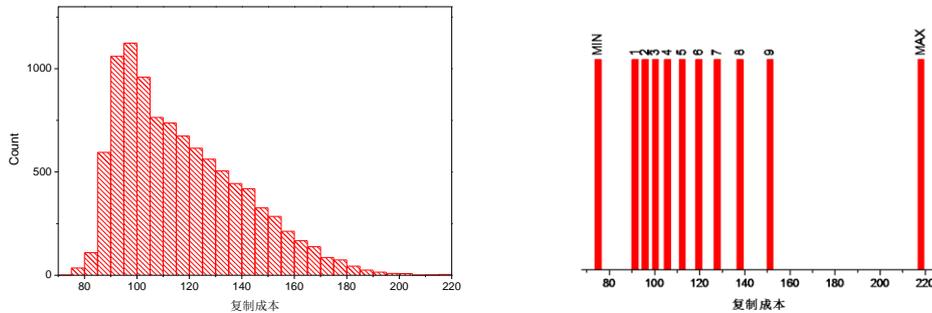


资料来源：中国银河证券研究部

图 (30) 给出的程序符合历史分布的随机收益序列的统计直方图，蓝线是表示 Cauchy-Lorentz 的概率密度函数。图 (31) 左边表示在波动率为 0.1 的情况下，采用 delta 复制

期权成本的统计直方图，右边给出的十分位数的位置。

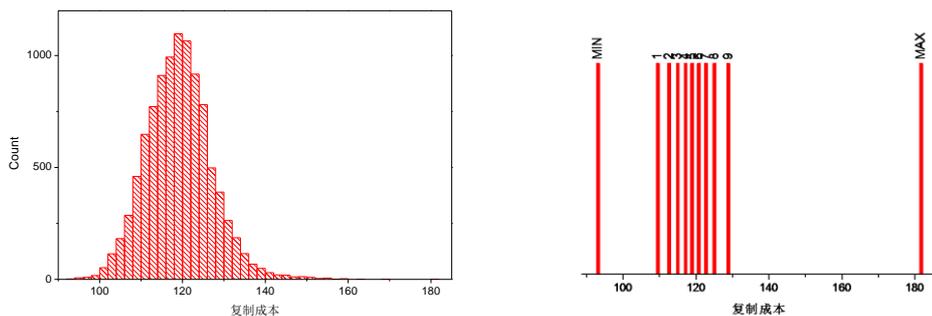
图 31：波动率 0.1 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

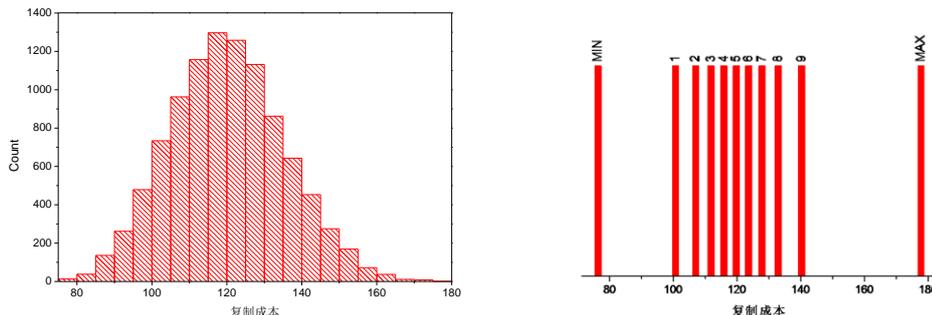
图 (32) 和图 (33) 给出是波动率分别为 0.2 和 0.3 情况下 delta 复制期权成本的统计结果。

图 32：波动率 0.2 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

图 33：波动率 0.3 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

下表给出的是相关统计数据的详细结果

表 5 采用历史分布进行 MC 模拟，期权复制成本的统计结果

波动率	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
0.1	10000	117.26132	23.50919	0.80344	0.11416	112.31844	74.91636	218.14066

0.2	10000	119.17845	7.91286	0.51213	1.5978	118.95787	93.11621	181.71574
0.3	10000	120.11368	15.24733	0.16605	-0.14527	119.73082	76.31613	177.71657

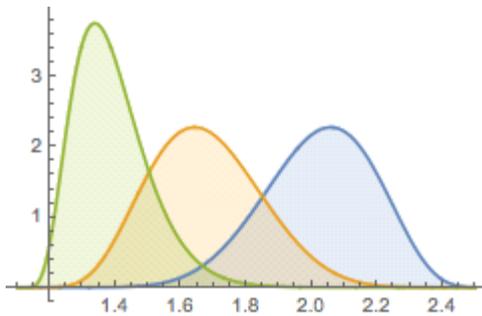
资料来源：中国银河证券研究部

3) Johnson(SU)历史分布 MC 模拟

Johnson(SU)分布是 N. L. Johnson 于 1949 年提出来的, 用来拟合非正态分布。整个 Johnson 分布函数系列有四类, 分别是:

1 JohnsonDistribution["SB",Gamma,Delta,Mu,Sigma] Johnson(SB): 表示形状参数为 Gamma、Delta, 定位参数为 Mu 以及尺度参数为 Sigma 的有界约翰逊分布。该分布是正态分布的一种变换, Johnson 分布已被用在质量控制过程中来描述非正态过程, 可被转换成正态分布用在标准试验中。其函数图见下:

图 34: Johnson(SB) 函数图

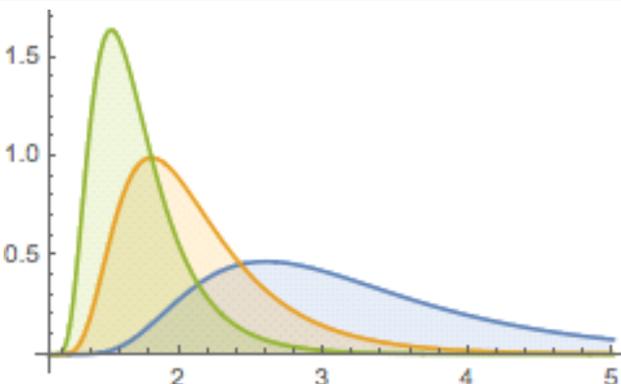


资料来源：中国银河证券研究部

$$\text{函数表达式是} \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\gamma + \delta \text{Log}[\frac{x-\mu}{-x+\mu+\sigma}])^2} \delta \sigma}{\sqrt{2\pi(x-\mu)(-x+\mu+\sigma)}} & \mu < x < \mu + \sigma \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

2 JohnsonDistribution["SL",Gamma,Delta,Mu,Sigma] Johnson(SL): 表示半界约翰逊分布。其函数图见下:

图 35: Johnson(SL) 函数图

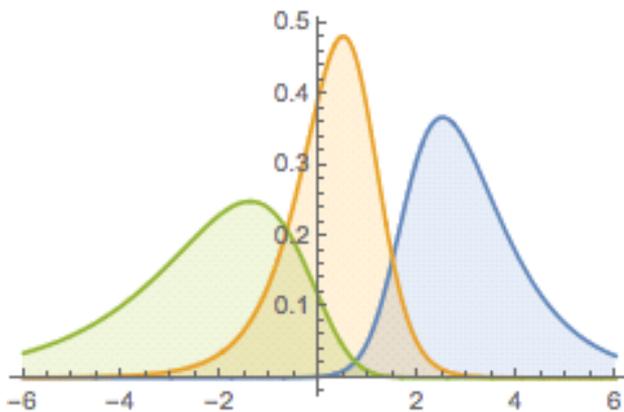


资料来源：中国银河证券研究部

$$\text{函数表达式是} \begin{cases} \frac{\delta e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \log\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^2}}{\sqrt{2\pi}(x-\mu)} & x > \mu \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

3 JohnsonDistribution["SU",Gamma,Delta,Mu,Sigma] Johnson(SU)：表示无界约翰逊分布。此函数分布也是正态分布变化而来，可用于描述非正态过程。此外，其还可用来代替不稳定的皮尔逊分布，其函数图见下：

图 36: Johnson(SU) 函数图

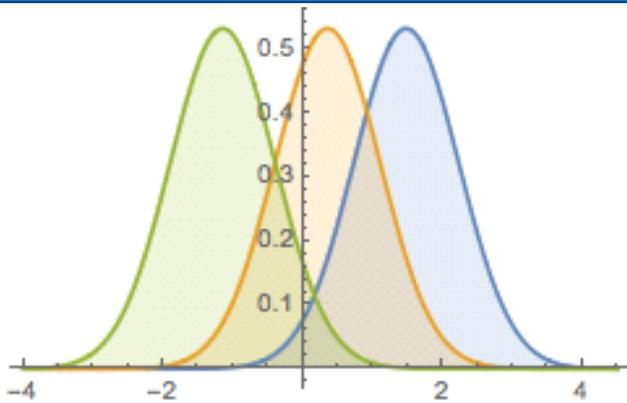


资料来源：中国银河证券研究部

$$\text{函数表达式是} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \operatorname{ArcSinh}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]\right)^2} \delta}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(x-\mu)^2 + \sigma^2}}$$

4 JohnsonDistribution["SN",Gamma,Delta,Mu,Sigma] Johnson(SN)：表示正态约翰逊分布。其函数图见下：

图 37: Johnson(SN) 函数图

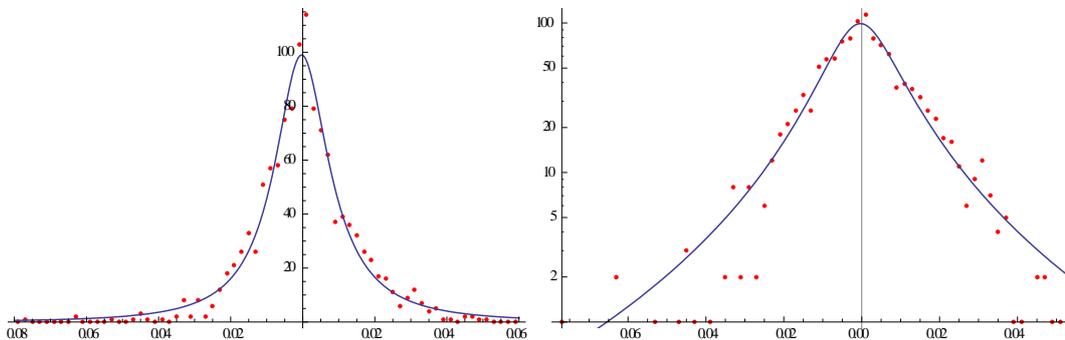


资料来源：中国银河证券研究部

函数表达式是
$$e^{-\frac{1}{2}(\gamma + \frac{\delta(x-\mu)}{\sigma})^2} \delta$$

这里采用 Johnson(SU)函数, 对 2010 年 5 月到 2011 年 4 月共计 1211 个日收益数据的统计直方图进行拟合。

图 38：HS300 指数每日收益（1211 个数据）的统计直方数据和拟合的 Johnson(SU)曲线



资料来源：中国银河证券研究部

红点是历史数据，蓝线是拟合数据，左右两图数据相同，左图纵坐标是线性的，右图纵轴是对数坐标。

Johnson(SU):分布函数及相应参数为：

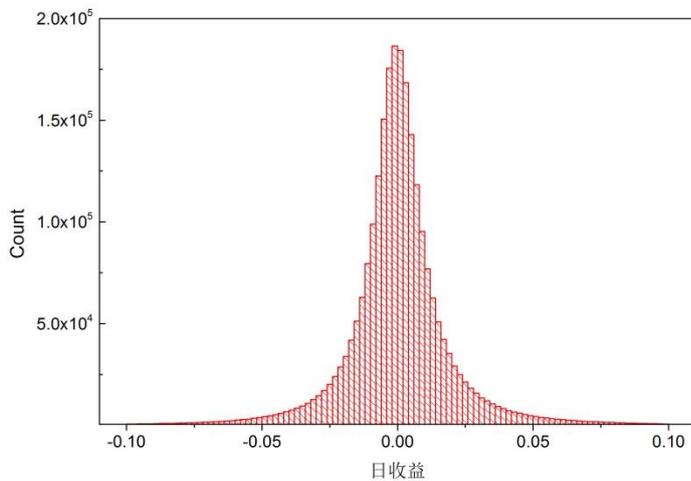
$$(0.811 e^{-\frac{1}{2}(0.0474 - 0.7936 \text{ArcSinh}[122.128(0.0004973 + x)])^2}) / (\sqrt{0.00006704 + (0.0004973 + x)^2})$$

表 6 Johnson(SU)分布函数拟合参数

"参数"	"Estimate"	"Standard Error"	"t-Statistic"	"P-Value"
α	2.561	0.09571	26.763	8.225×10^{-37}
γ	0.04748	0.07703	0.61646	0.5398
δ	0.7936	0.08746	9.074	3.667×10^{-13}
μ	-0.0004973	0.0005542	-0.897	0.373
σ	-0.0081881	0.0008125	-10.077	6.556×10^{-15}

资料来源：中国银河证券研究部

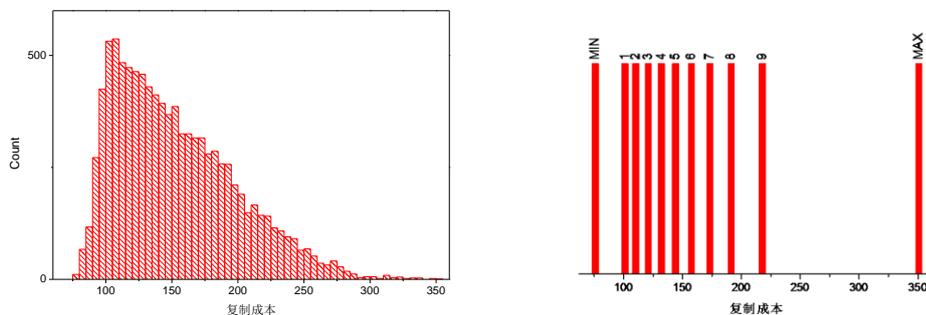
图 39: Johnson 分布的随机收益序列



资料来源：中国银河证券研究部

图 (39) 给出的程序符合历史分布的随机收益序列的统计直方图，蓝线是表示 Cauchy-Lorentz 的概率密度函数。图 (40) 左边表示在波动率为 0.1 的情况下，采用 delta 复制期权成本的统计直方图，右边给出的十分位数的位置。

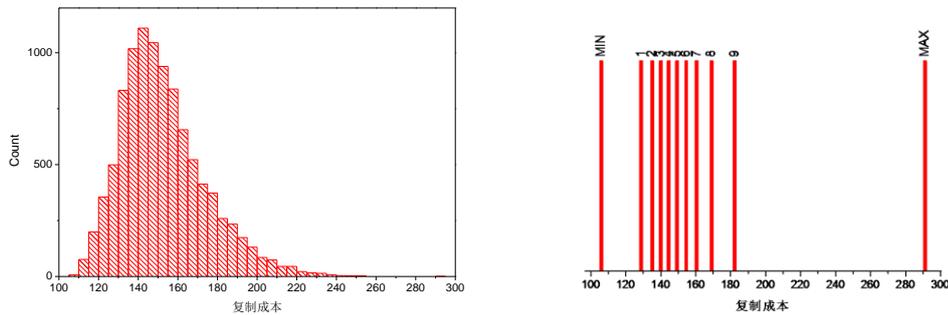
图 40: 波动率 0.1 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

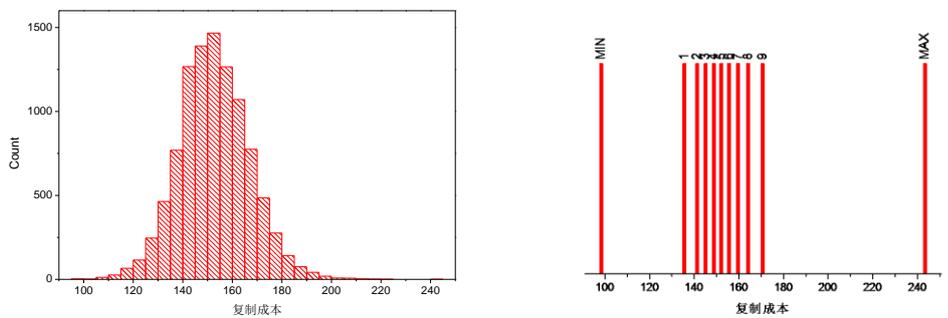
图 (41) 和图 (42) 给出是波动率分别为 0.2 和 0.3 情况下 delta 复制期权成本的统计结果。

图 41: 波动率 0.2 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

图 42：波动率 0.3 delta 复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

下表给出的是相关统计数据的详细结果

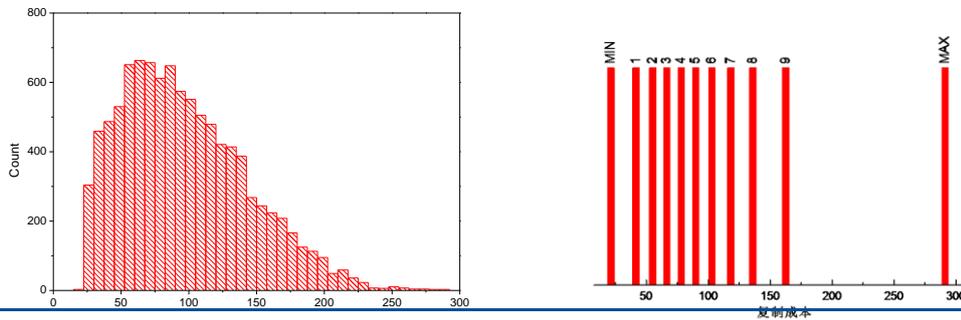
表 7 采用 Johnson 分布进行 MC 模拟，期权复制成本的统计结果

波动率	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
0.1	10000	152.59182	45.61162	0.79525	0.20896	144.13148	75.89613	350.80071
0.2	10000	152.78685	21.42124	0.88154	1.05971	149.34926	105.96523	291.08373
0.3	10000	152.67179	14.13347	0.21273	0.68416	152.16032	98.32219	243.36768

资料来源：中国银河证券研究部

对于看跌期权，采用 Johnson 分布进行期权复制，图（43）左边表示在波动率为 0.1 的情况下，采用 delta 复制期权成本的统计直方图，右边给出的十分位数的位置。

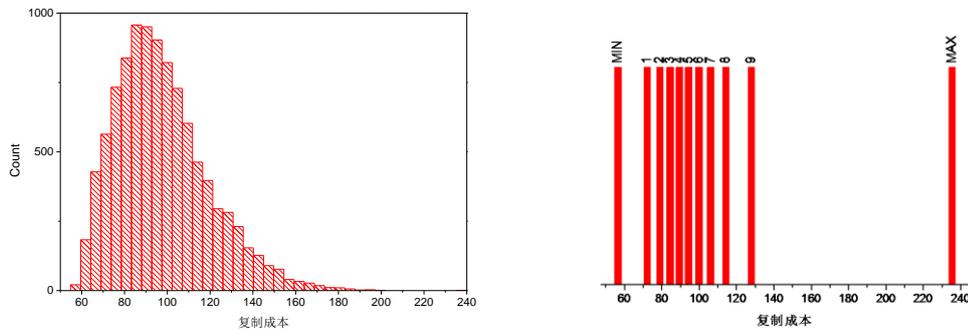
图 43：波动率 0.1 delta 看跌复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

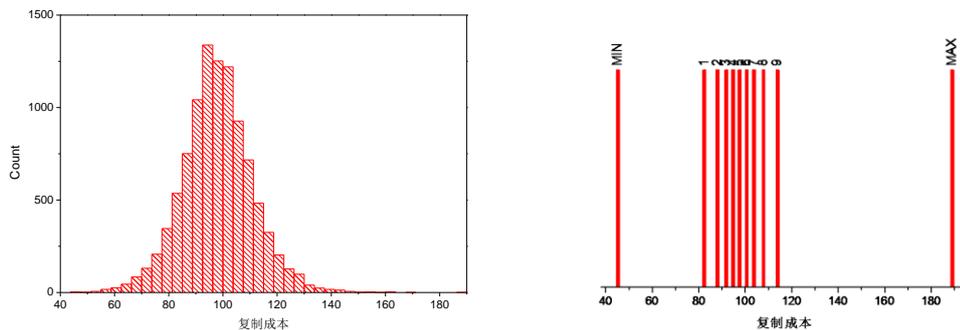
图(44)和图(45)给出是波动率分别为 0.2 和 0.3 情况下 delta 复制期权成本的统计结果。

图 44：波动率 0.2 delta 看跌复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

图 45：波动率 0.3 delta 看跌复制结果



资料来源：中国银河证券研究部

下表给出的是看跌期权复制成本的详细统计分析数据。

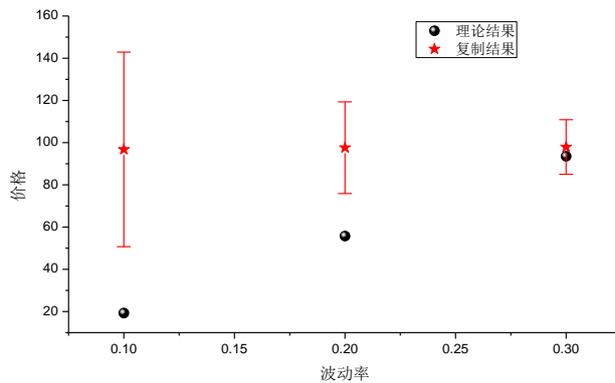
表 8 采用 Johnson 分布进行 MC 模拟，看跌期权复制成本的统计结果

波动率	数据个数	均值	标准差	偏度	峰度	中位数	最小	最大
0.1	10000	96.80905	46.08834	0.67285	0.06439	89.88468	21.27286	291.31598
0.2	10000	97.61818	21.72254	0.83695	0.82883	94.3814	56.44899	235.44219
0.3	10000	97.95253	12.93865	0.19886	1.27935	97.56098	45.19854	189.02791

资料来源：中国银河证券研究部

下面给出看跌期权理论结果和复制结果对比图。

图 46：看跌期权理论结果和复制结果对比图



资料来源：中国银河证券研究部

六、结语

本文通过 delta 复制的方法实现对 HS300 指数期权的复制。这里，采用的是固定的波动率值，而实际上估计波动率的方法有很多，如指数加权移动平均、自回归条件方差方法、广义自回归异方差等等

我们知道 Black-Scholes-Merton 方程在实际已经取得广泛的应用，标准期权合约是采用波动率来报价而不是直接给出货币价格，其价值就是将报价的波动率带入 Black-Scholes-Merton 期权定价公式得到。但任何理论都不是完美的，Black-Scholes-Merton 模型假设 Delta 对冲是连续的而且无成本，但实际上在成本较低的金融市场我们也应该尽量避免频繁对冲，而在成本较高的市场，有可能无法进行频繁对冲；第二，Black-Scholes-Merton 模型将波动率假定为一常数，实际上通过市场价格倒推出“隐含波动率曲面”的存在；此外，还包括利率设定为常数、标的资产路径连续等等，这都需要我们进一步深入研究。

七、风险提示

报告结论基于历史价格信息和统计规律，但二级市场受各种即时性政策影响易出现统计规律之外的走势，所以报告结论有可能无法正确预测市场发展，报告阅读者需审慎参考报告结论。

图表目录

图 1: Delta 计算	5
图 2: HS300 历史路径的期权复制 (2013)	6
图 3: 不同复制频率下, 每个时间点的 delta 和 gamma 值.....	6
图 4: HS300 历史路径的期权复制 (2014)	7
图 5: 不同复制频率下, 每个时间点的 delta 和 gamma 值.....	7
图 6: 不同波动率下复制频率为一天 HS300 看涨期权的价格和理论值	8
图 7: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2010)	10
图 8: 复制结果与理论结果 (2010)	10
图 9: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2011)	11
图 10: 复制结果与理论结果 (2011)	11
图 11: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2012)	12
图 12: 复制结果与理论结果 (2012)	12
图 13: HS300 指数期权蒙特卡洛模拟结果 (2013)	13
图 14: 复制结果与理论结果 (2013)	13
图 15: 羊毛收益统计直方图 (采用价差)	14
图 16: WTI、Dow、日元/美元汇率 收益分布.....	14
图 17: 上交所 A 股 2000 年 1 月-2008 年 3 月不同时间间隔下收益率的概率分布.....	15
图 18: 单尾-肥尾分布图 (帕累托 Pareto 分布、对数正态分布、列维 levy 分布)	15
图 19: 双尾-肥尾分布图 (Cauchy-Lorentz 分布、t 分布)	16
图 20: HS 300 指数每日收益的统计直方图.....	16
图 21: HS300 指数每日收益的统计概率分布拟合	17
图 22: Cauchy-Lorentz 分布的随机收益序列	18
图 23: 波动率 0.1 delta 复制结果	18
图 24: 波动率 0.2 delta 复制结果	18
图 25: 波动率 0.3 delta 复制结果	19
图 26: Gauss 分布的随机收益序列	19
图 27: 波动率 0.1 delta 复制结果	20
图 28: 波动率 0.2 delta 复制结果	20
图 29: 波动率 0.3 delta 复制结果	21
图 30: 历史分布的随机收益序列	21
图 31: 波动率 0.1 delta 复制结果	22
图 32: 波动率 0.2 delta 复制结果	22
图 33: 波动率 0.3 delta 复制结果	22
图 34: Johnson(SB) 函数图	23
图 35: Johnson(SL) 函数图.....	23
图 36: Johnson(SU) 函数图	24

图 37: Johnson(SN) 函数图	24
图 38: HS300 指数每日收益 (1211 个数据) 的统计直方数据和拟合的 Johnson(SU)曲线	25
图 39: Johnson 分布的随机收益序列	26
图 40: 波动率 0.1 delta 复制结果	26
图 41: 波动率 0.2 delta 复制结果	26
图 42: 波动率 0.3 delta 复制结果	27
图 43: 波动率 0.1 delta 看跌复制结果	27
图 44: 波动率 0.2 delta 看跌复制结果	28
图 45: 波动率 0.3 delta 看跌复制结果	28
图 46: 看跌期权理论结果和复制结果对比图	29
表 1 Delta 动态对冲模拟	5
表 2 HS300 指数每日收益率相关的统计结果	17
表 3 采用 Cauchy-Lorentz 分布进行 MC 模拟, 期权复制成本的统计结果	19
表 4 采用 Gauss 分布进行 MC 模拟, 期权复制成本的统计结果	21
表 5 采用历史分布进行 MC 模拟, 期权复制成本的统计结果	22
表 6 Johnson(SU)分布函数拟合参数	25
表 7 采用 Johnson 分布进行 MC 模拟, 期权复制成本的统计结果	27
表 8 采用 Johnson 分布进行 MC 模拟, 看跌期权复制成本的统计结果	28

评级标准

银河证券行业评级体系：推荐、谨慎推荐、中性、回避

推荐：是指未来 6—12 个月，行业指数（或分析师团队所覆盖公司组成的行业指数）超越交易所指数（或市场中主要的指数）平均回报 20% 及以上。该评级由分析师给出。

谨慎推荐：行业指数（或分析师团队所覆盖公司组成的行业指数）超越交易所指数（或市场中主要的指数）平均回报。该评级由分析师给出。

中性：行业指数（或分析师团队所覆盖公司组成的行业指数）与交易所指数（或市场中主要的指数）平均回报相当。该评级由分析师给出。

回避：行业指数（或分析师团队所覆盖公司组成的行业指数）低于交易所指数（或市场中主要的指数）平均回报 10% 及以上。该评级由分析师给出。

银河证券公司评级体系：推荐、谨慎推荐、中性、回避

推荐：是指未来 6—12 个月，公司股价超越分析师（或分析师团队）所覆盖股票平均回报 20% 及以上。该评级由分析师给出。

谨慎推荐：是指未来 6—12 个月，公司股价超越分析师（或分析师团队）所覆盖股票平均回报 10%—20%。该评级由分析师给出。

中性：是指未来 6—12 个月，公司股价与分析师（或分析师团队）所覆盖股票平均回报相当。该评级由分析师给出。

回避：是指未来 6—12 个月，公司股价低于分析师（或分析师团队）所覆盖股票平均回报 10% 及以上。该评级由分析师给出。

王红兵，证券分析师。本人具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格并注册为证券分析师，本人承诺，以勤勉的职业态度，独立、客观地出具本报告。本报告清晰地反映本人的研究观点。本人不曾因，不因，也将不会因本报告中的具体推荐意见或观点而直接或间接接受到任何形式的补偿。（本人承诺不利用自己的身份、地位和执业过程中所掌握的信息为自己或他人谋取私利）。

免责声明

本报告由中国银河证券股份有限公司（以下简称银河证券，银河证券已具备中国证监会批复的证券投资咨询业务资格）向其机构或个人客户（以下简称客户）提供，无意针对或打算违反任何地区、国家、城市或其它法律管辖区域内的法律法规。除非另有说明，所有本报告的版权属于银河证券。未经银河证券事先书面授权许可，任何机构或个人不得更改或以任何方式发送、传播或复印本报告。

本报告所载的全部内容只提供给客户做参考之用，并不构成对客户的投资建议，并非作为买卖、认购证券或其它金融工具的邀请或保证。银河证券认为本报告所载内容及观点客观公正，但不担保其内容的准确性或完整性。客户不应单纯依靠本报告而取代个人的独立判断。本报告所载内容反映的是银河证券在最初发表本报告日期当日的判断，银河证券可发出其它与本报告所载内容不一致或有不同结论的报告，但银河证券没有义务和责任去及时更新本报告涉及的内容并通知客户。银河证券不对因客户使用本报告而导致的损失负任何责任。

银河证券不需要采取任何行动以确保本报告涉及的内容适合于客户。银河证券建议客户如有任何疑问应当咨询证券投资顾问并独自进行投资判断。本报告并不构成投资、法律、会计或税务建议或担保任何内容适合客户，本报告不构成给予客户个人咨询建议。

本报告可能附带其它网站的地址或超级链接，对于可能涉及的银河证券网站以外的地址或超级链接，银河证券不对其内容负责。本报告提供这些地址或超级链接的目的纯粹是为了客户使用方便，链接网站的内容不构成本报告的任何部份，客户需自行承担浏览这些网站的费用或风险。

银河证券在法律允许的情况下可参与、投资或持有本报告涉及的证券或进行证券交易，或向本报告涉及的公司提供或争取提供包括投资银行业务在内的服务或业务支持。银河证券可能与本报告涉及的公司之间存在业务关系，并无需事先或在获得业务关系后通知客户。

银河证券无需因接收人收到本报告而视其为客户。本报告是发送给银河证券客户的，属于机密材料，只有银河证券客户才能参考或使用，如接收人并非银河证券客户，请及时退回并删除。

所有在本报告中使用的商标、服务标识及标记，除非另有说明，均为银河证券的商标、服务标识及标记。

银河证券版权所有并保留一切权利。

联系

中国银河证券股份有限公司 研究部

上海浦东新区富城路 99 号震旦大厦 15 楼
深圳市福田区金田路卓越世纪中心 1 号楼 38 层
北京市西城区金融街 35 号国际企业大厦 C 座
北京市西城区金融街 35 号国际企业大厦 C 座
北京市西城区金融街 35 号国际企业大厦 C 座
公司网址：www.chinastock.com.cn

机构请致电：

上海地区：何婷婷	021-20252612	hetingting@chinastock.com.cn
深广地区：詹璐	0755-83453719	zhanlu@chinastock.com.cn
海外机构：李笑裕	010-83571359	lixiaoyu@chinastock.com.cn
北京地区：王婷	010-66568908	wangting@chinastock.com.cn
海外机构：刘思瑶	010-83571359	liusiyao@chinastock.com.cn