

# 期权定价树状模型

## 期权笔记系列之二

### 报告摘要:

#### ● 树状模型简介

树状模型是期权定价的一种离散模型，它的核心思想是用树状离散结构来近似标的资产的运动过程，通过将剩余期限划分成一些离散的区间，在每一个区间用一些节点来反映此时的标的资产和期权的价格状态。假设每一个节点处的标的资产价格都是以事先给定的概率上升或下降一定幅度形成下一个区间可能的标的资产价格，这样就形成了标的资产树。由无套利原理可以通过下一个区间的期权节点价格得到上一个节点的期权价格，经过一步一步的倒向推导就可以得到初始时刻的期权价格。树状模型分为两类：一类是一般的期权定价树状模型，一类是隐含波动率树状模型。

#### ● 一般期权定价树状模型

期权价格树状模型都是通过对标的资产分布进行假设，通过构造每个区间标的资产节点的上升、下降幅度及相应的概率来构建标的资产树，然后由无套利原理对期权价格进行反向归纳，从而得出现时的期权价格的期权价格。最早的期权价格树状模型是 CRR 二叉树模型，这个模型的缺点是收敛到欧式 BS 期权价格过程中的波动比较大，而且标的资产的分布也没有考虑偏度和峰度。Leisen-Reimer 模型、Flexible 模型在 CRR 模型的基础上做了改进，目的是使收敛曲线光滑，而 Edgeworth 模型则是在标的资产的分布中加入了峰度和偏度。三叉树模型、AMM 三叉树模型是对 CRR 模型的推广，比 CRR 二叉树模型更加灵活、精细。

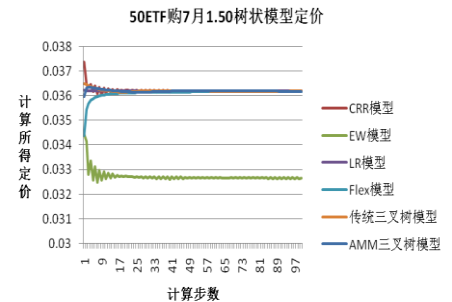
#### ● 隐含波动率树状模型

隐含波动率树状模型与一般树状模型相比的优势在于，隐含波动率树状模型是基于某些标的资产价格、标的资产远期价格、Arrow-Debreu 价格、看涨和看跌期权的价格共同得出的，其中包含了很多市场的信息（波动率微笑等）。

#### ● 核心假设风险:

本文旨在对所研究问题的主要关注点进行分析，因此对市场及相关交易做了一些合理假设，但这样会导致建立的模型以及基于模型所得出的结论并不能完全准确地刻画现实环境。而且由于分析时采用的相关数据都是过去的时间序列，因此可能会与未来真实的情况出现偏差。

图 1



分析师: 俞文冰 S0260512040002



021-60750622



ywb2@gf.com.cn

#### 相关研究:

- 夫未战而庙算胜者,得算多也: 2014-03-10  
关于期权进展官方表态的点评
- 个股与股指期权全真模拟(仿真)交易规则纵览——期权笔记系列之一 2014-03-10

## 目录索引

一、期权定价树状模型特点速览.....	4
二、一般的期权定价树状模型 .....	4
1、CRR 二叉树模型.....	4
2、LEISEN-REIMER (LR) 二叉树模型.....	6
3、EDGEWORTH (EW) 二叉树模型 .....	7
4、FLEXIBLE (FLEX) 二叉树模型 .....	9
5、三叉树模型.....	10
6、ADAPTIVE MESH METHOD (AMM) 三叉树模型.....	11
二、隐含波动率树状模型.....	13
1、隐含波动率二叉树模型 .....	13
2、隐含波动率三叉树模型 .....	16

## 图表索引

图 1: LR 树状模型期权定价与传统二叉树模型定价对比图 .....	7
图 2: EW 树状模型与传统二叉树模型期权定价收敛性比较 .....	9
图 3: Flex 树状模型与传统二叉树模型期权定价收敛性比较 .....	10
图 4: AMM 三叉树模型与传统三叉树模型期权定价收敛性比较 .....	12
图 5: 一般期权定价树状模型收敛性汇总比较图 .....	13
图 6: 隐含波动率二叉树模型期权定价 .....	16
图 7: 隐含波动率三叉树模型期权定价 .....	18
表 1: 期权树状模型特点速览表 .....	4
表 2: 隐含波动率二叉树模型 6 个区间步所得的局部隐含波动率树 .....	16
表 3: 隐含波动率三叉树模型 10 个区间步所得的局部隐含波动率树 .....	19

## 一、期权定价树状模型特点速览

为了便于梳理，我们开宗明义，先把各种期权树状模型的特点做一个归纳：

表 1：期权树状模型特点速览表

模型大类	模型名称	优点	缺点
一般树状模型	CRR二叉树模型	简单，容易理解	在收敛的过程中会出现大幅波动，原因在于到期收益在行权价处不连续
	Leisen-Reimer(LR)二叉树模型	只取划分区间总数为奇数的划分来进行反向推导期权价值，这样确保到期可能标的价格不包括行权价，保证了模型的收敛比较光滑；收敛速度很快。	
	Edgeworth(EW)二叉树模型	加入偏度和峰度的考虑	在收敛的过程中会出现大幅波动
	Flexible(FLEX)二叉树模型	通过选择适当的 $u$ 、 $d$ ，使得求得的期权价格的收敛曲线是光滑的，并且不会像 CRR 和 Edgeworth 模型会出现来回震荡的情况	
	三叉树模型	简单，容易理解	与 CRR 二叉树相似
	AMM三叉树模型	在行权价附近的格点上加入更细的分化，计算结果更加精细、准确，常应用于关卡在行权价附近当关卡期权价格计算。	计算复杂度比传统三叉树模型要高，程序运行较慢。
隐含波动率树状模型	隐含波动率二叉树模型	计算时考虑了标的资产波动率不为常数的情形，并且所计算出来的局部隐含波动率是基于某些标的资产价格、标的资产远期价格、Arrow-Debreu 价格、看涨和看跌期权的价格共同得出的，能够体现出波动率曲面。	计算出来的变化概率会出现 $p_{m,j} < 0$ 和 $p_{m,j} > 1$ 情况，与实际不符，需要重新再调整公式。并且计算很复杂，速度较慢。
	隐含波动率三叉树模型	与上面隐含波动率二叉树模型的优势差不多，并且比隐含波动率二叉树模型更加精细。	与隐含波动率二叉树模型类似

数据来源：广发证券发展研究中心

## 二、一般的期权定价树状模型

### 1、CRR 二叉树模型

假设期权的到期日为  $T$ ，行权价为  $K$ ，相应标的资产的波动率为  $\sigma$ ，无风险利率为  $r$ 。将期权的剩余期限  $[0, T]$  等分为  $n$  个子区间：

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

CRR二叉树模型假设标的资产的运动过程符合单时段-双状态模型，则标的资产在 $[0, T]$ 的每个子区间节点上的价格构成一个二叉树。假设标的资产在初始时刻 $t_0$ 的价格为 $S$ ，且标的资产的价格在每一个节点若上升，则上升幅度为 $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ ，若下降，则下降幅度为 $d = \frac{1}{u}$ ，并且上升的概率为 $p = \frac{e^{\frac{rT}{n}} - d}{u - d}$ ，下降的概率为 $\frac{u - e^{\frac{rT}{n}}}{u - d}$ 。在每个节点上的标的资产价格为 $Su^i d^{n-h-i}$  ( $\forall 0 \leq h \leq n, 0 \leq i \leq n-h$ )，相应的期权价格记为 $C_i^{n-h}$ 。

则看涨欧式期权在初始时刻 $t_0$ 的二叉树定价公式为：

$$C = e^{-rT} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max(Su^i d^{n-i} - K, 0)$$

看跌欧式期权在初始时刻 $t_0$ 的二叉树定价公式为：

$$P = e^{-rT} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max(K - Su^i d^{n-i}, 0)$$

其中， $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 。

美式期权定价与欧式期权定价的不同点在于在每个节点 $Su^i d^{n-h-i}$  ( $\forall 0 \leq h \leq n, 0 \leq i \leq n-h$ )，相应节点处看涨期权价格满足 $C_i^{n-h} \geq (Su^i d^{n-h-i} - K)^+$ ，看跌期权价格满足 $P_i^{n-h} \geq (K - Su^i d^{n-h-i})^+$ 。因此对于美式期权的定价（以看涨期权为例），它的反向归纳过程为：

当 $h = 0$ 时， $C_i^n = (Su^i d^{n-i} - K)^+$ ；

当 $h = 1$ 时， $C_i^{n-1} = \max\{e^{-rT} [pC_{i+1}^n + (1-p)C_i^n], (Su^i d^{n-i} - K)^+\}$ ；

一般来说，若 $C_i^{n-h}$ 被给定，则

$$C_i^{n-h-1} = \max\{e^{-rT} [pC_{i+1}^{n-h} + (1-p)C_i^{n-h}], (Su^i d^{n-h-1-i} - K)^+\}$$

CRR模型随着划分成的区间数  $n$  的变大，区间长度的变小，会逐步收敛到BS定价公式。但是CRR模型在收敛的过程中会出现大幅波动，原因在于到期收益在行权价  $K$  处不连续，而标的资产树的节点一般包括行权价  $K$ 。

## 2、Leisen-Reimer (LR) 二叉树模型

与CRR模型相比，Leisen-Reimer模型的标的资产和期权价格的树状结构与CRR模型是相同的，都是二叉树，不同的是Leisen-Reimer模型主要是改变了模型参数  $u$ 、 $d$ 、 $p$ 。它的参数为：

$$p = g(d_2), \quad u = \frac{e^{\frac{rT}{n}} g(d_1)}{g(d_2)}, \quad d = \frac{e^{\frac{rT}{n}} - pu}{1 - p},$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

其中， $g(z)$  可以有两种计算方法分别为：

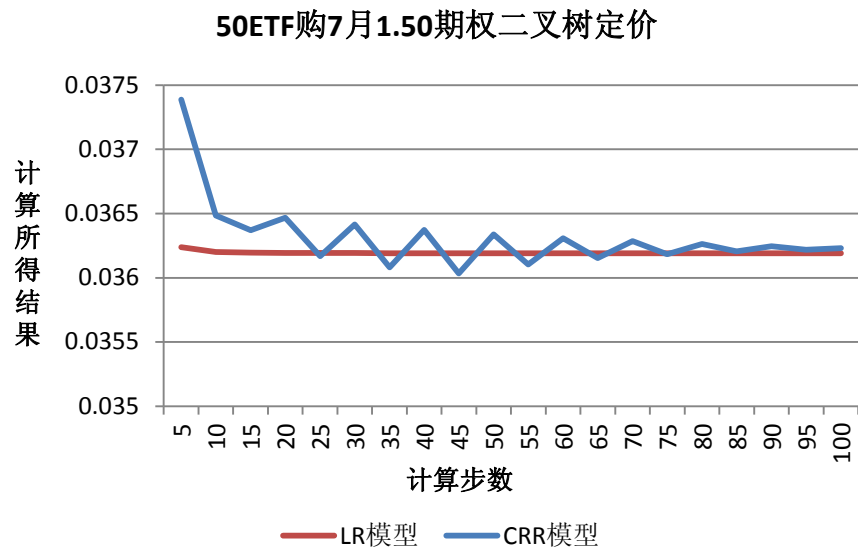
$$\text{Peizer-Pratt方法1: } g(z) = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2} \sqrt{1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{n + \frac{1}{3}}\right)^2 \left(n + \frac{1}{6}\right)\right]}$$

$$\text{Peizer-Pratt方法2: } g(z) = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2} \sqrt{1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{n + \frac{1}{3} + \frac{0.1}{n+1}}\right)^2 \left(n + \frac{1}{6}\right)\right]}$$

当  $z \leq 0$  时， $\eta = -1$ 。当  $z > 0$  时， $\eta = 1$ 。

Leisen-Reimer模型只取使得区间总数为奇数的划分来反向推导期权价值，这样确保到期标的价格不包括行权价，从而保证了Leisen-Reimer二叉树模型的收敛曲线比较光滑，从而计算出的期权价格结果更有效，而且Leisen-Reimer模型的收敛速度比传统二叉树模型收敛速度快。

图1: LR树状模型期权定价与传统二叉树模型定价对比图



数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

### 3、Edgeworth (EW) 二叉树模型

欧式CRR模型以及一些推广的二叉树模型都是以离散形式逼近欧式期权的BS公式。因此, 这些模型假设标的资产都是服从一个对数正态分布, 没有考虑峰度超过3和偏度不为0的情形。Edgeworth模型主要是借助Edgeworth展开, 在标的资产过程中加入了偏度和峰度。

首先得到到期日标的资产价格服从一个分布 $Y$ , 它可能取值  $y_j = (2j - n) / \sqrt{n}$ ,

$j = 0, 1, 2, \dots, n$ , 对应的概率为  $b_j = \frac{(1/2)^n n!}{j!(n-j)!}$ , 则利用Edgeworth展开可以得到考虑

峰度和偏度的概率分布:

$$f_j = [1 + \frac{1}{6} \xi (y_j^3 - 3y_j) + \frac{1}{24} (\kappa - 3)(y_j^4 - 6y_j^2 + 3) + \frac{1}{72} \xi^2 (y_j^5 - 10y_j^3 + 15y_j)] b_j$$

其中,  $\xi$  和  $\kappa$  分别表示所要加入的偏度和峰度值。但是这样做存在一个问题, 就是

$$\sum_{j=0}^n f_j \neq 1, \text{ 所以要将 } f_j \text{ 进行标准化, 令 } P_j = f_j / \sum_{k=0}^n f_k, \text{ 这样就有 } \sum_{j=0}^n P_j = 1.$$

下面令  $X$  为  $Y$  的标准化随机变量, 即令  $x_j = (y_j - M) / \sqrt{V^2}$ , 其中

$$M = \sum_{k=0}^n P_k y_k, V^2 = \sum_{k=0}^n P_k (y_k - M)^2 \text{ 分别为在将标的资产分布Edgeworth展开下 } Y$$

的均值和方差。假设标的资产在第  $n$  步，也就是到期时的分布就可以写成

$S_j = S e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} x_j}$ ，其中  $S$  为初始时刻的标的资产价格，由于在风险中性环境下，所有投资者对风险不要求补偿，所有证券的预期收益率都是无风险利率。则有：

$$e^{rT} = \sum_{j=0}^n P_j(S_j / S) = \sum_{j=0}^n P_j e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} x_j}$$

$$\text{则有 } \mu = r - \frac{1}{T} \ln \left( \sum_{j=0}^n P_j e^{\sigma \sqrt{T} x_j} \right)。$$

下面为Edgeworth二叉树模型的构造过程：

第一步：在到期日，标的资产可能取值为  $S_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ )，则可以得到

通过唯一路径到达  $S_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 的概率为： $p_j = P_j / \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right)$ 。考虑两

个相邻的末端节点  $S_j$  和  $S_{j+1}$ ，相应的到达他们的概率为  $p_j$  和  $p_{j+1}$ 。假设  $S_j^{n-1}$  为第  $n-1$  区间对应于  $S_j$  和  $S_{j+1}$  的节点，假设到达它的概率为  $p_j^{n-1}$ ；

第二步：由于若达到  $S_j$  和  $S_{j+1}$ ，肯定已经到达了  $S_j^{n-1}$ ，则到达  $S_j^{n-1}$  的概率为

$p_j^{n-1} = p_j + p_{j+1}$ 。由条件期望的概念，可以得到在已经到达  $S_j^{n-1}$  的情况下，到达  $S_j$ 、

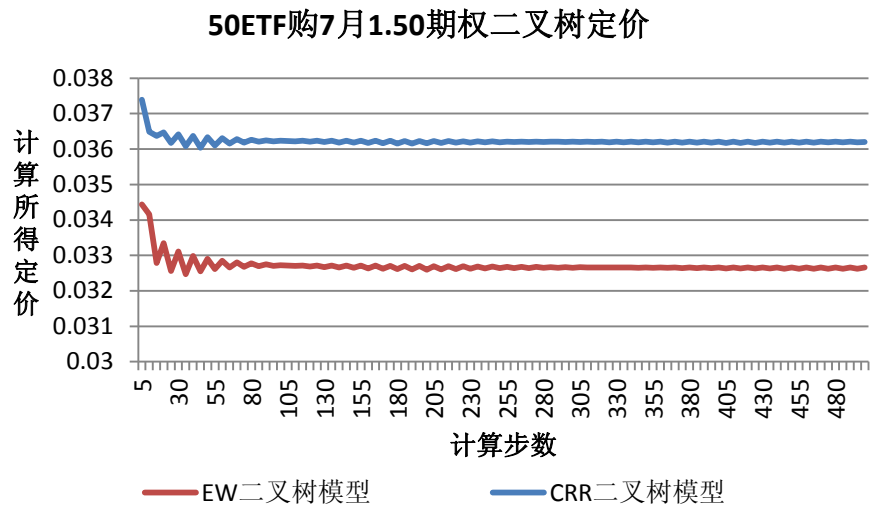
$S_{j+1}$  的条件概率分别为  $\frac{p_j}{p_j^{n-1}}$ 、 $\frac{p_{j+1}}{p_j^{n-1}}$ ，则可得到  $S_j^{n-1} = e^{-r \frac{T}{n}} \left( \frac{p_j}{p_j^{n-1}} S_j + \frac{p_{j+1}}{p_j^{n-1}} S_{j+1} \right)$ ；

第三步：依次类推则可得到整个标的资产运动过程的二叉树模型，然后则可求得对应时点的期权价格。

通过分析50ETF自2008年到2014年7月7日每日收盘价的行情序列,估计出50ETF的峰度和偏度分别为5.73、1.98，假设以这两个数值作为对未来的估计，将其作为EW模型的参数进行计算，比较它与传统二叉树模型定价结果的区别。



图2: EW树状模型与传统二叉树模型期权定价收敛性比较



数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

#### 4、Flexible (Flex) 二叉树模型

Flexible二叉树模型假设股价在每个区间上升和下降幅度分别为

$$u = \exp(\sigma\sqrt{dt} + \lambda\sigma^2 dt), \quad d = \exp(-\sigma\sqrt{dt} + \lambda\sigma^2 dt)$$

可以形象地称 $\lambda$ 为二叉树模型的倾斜系数。当 $\lambda$ 为0时, Flexible二叉树模型退化为CRR二叉树模型, 二叉树中心节点的连线是水平的; 当 $\lambda > 0$ 时, Flexible模型形成的二叉树中心节点的连线随着区间的增长是呈上升趋势的; 当 $\lambda < 0$ 时, Flexible模型形成的二叉树中心节点的连线随着区间的增长呈下降趋势。

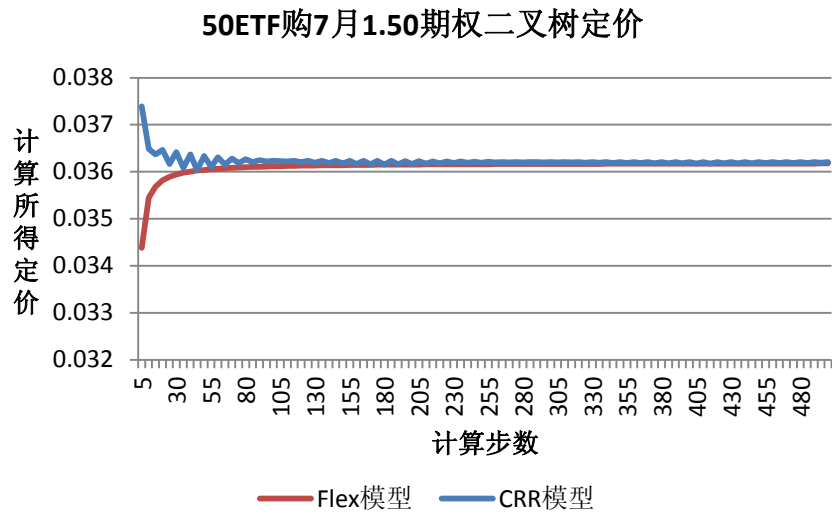
Flexible二叉树模型最大的优势就是通过选择适当的 $\lambda$ 使得求得的期权价格的收敛曲线是光滑的, 并且不会像CRR和Edgeworth模型会出现来回震荡的情况。确保收敛曲线光滑的 $\lambda$ 的选择条件为:

$$\lambda = \frac{\ln(K/S) - (2j_0 - n)\sigma\sqrt{dt}}{n\sigma^2 dt}$$

其中,  $j_0 = \frac{\ln(K/S) - n \ln d_0}{\ln(u_0 - d_0)}$ ,  $u_0$ 、 $d_0$ 为CRR模型对应的上升和下降幅度(也

就是 $\lambda = 0$ 的情形)。

图3: Flex树状模型与传统二叉树模型期权定价收敛性比较



数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

### 5、三叉树模型

三叉树模型最早是由Boyle提出的,在Boyle三叉树模型中假设标的资产价格 $S$ 在经过时间 $\Delta t$ 后,有变成 $S_u$ 、 $S$ 和 $S_d$ 的三种可能性,其中, $S_u = Su$ 为标的资产价格上升的情况, $S$ 为标的资产价格不变的情况, $S_d = Sd$ 为标的资产价格下降的情况。 $p_1$ 表示标的资产价格上升的概率, $p_2$ 表示标的资产价格不变的概率, $p_3$ 表示标的资产价格下降的概率。

在Black-Scholes模型中,标的资产价格服从对数正态分布,假设在风险中性世界中, $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$ 。则在风险中性世界中,时间 $\Delta t$ 后的标的资产价格为:

$$S_{\Delta t} = S e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma dW_{\Delta t}},$$

很容易得出

$$\frac{S_{\Delta t}}{S} \sim (e^{r\Delta t}, \sqrt{e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)})$$

而无论是二叉树模型还是三叉树模型,本质上都是为了尽量接近标的资产服从的对数正态分布,所以可以根据此得到三叉树模型参数的三个方程:

(1)由概率和为1可得到:  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ;

(2)由风险中性世界中,三叉树模型的期望与对数正态分布期望相同可得:

$$p_1 u + p_2 + p_3 d = e^{r\Delta t};$$

(3)三叉树模型的方差与对数正态分布方差相同可得:

$$p_1 u^2 + p_2 + p_3 d^2 - (p_1 u + p_2 + p_3 d)^2 = e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)。$$

Boyle假设  $ud = 1$ 、 $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ , 其中  $\lambda$  为常数。则这样就可以从中得出  $u$ 、 $d$ 、 $p_1$ 、 $p_2$  和  $p_3$  的表达式:

$$p_1 = \frac{(e^{2r\Delta t} e^{\sigma^2 \Delta t} - e^{r\Delta t}) e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - (e^{r\Delta t} - 1)}{(e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)(e^{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)},$$

$$p_3 = \frac{(e^{2r\Delta t} e^{\sigma^2 \Delta t} - e^{r\Delta t}) e^{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - (e^{r\Delta t} - 1) e^{3\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}}{(e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)(e^{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)},$$

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3。$$

前面的公式每给定一个  $\lambda$  值, 就会对应一组  $u$ 、 $d$ 、 $p_1$ 、 $p_2$  和  $p_3$ 。当  $\lambda = \sqrt{2}$  时三叉树模型的收敛效果比较好, 所以一般都取  $\lambda = \sqrt{2}$ 。

三叉树模型与二叉树模型的不同点在于, 需要划分的时间区间数满足一定的条件来保证  $p_2$  是非负的。美式期权的三叉树模型和CRR的构造思想是类似的, 在此不再赘述。

## 6、Adaptive Mesh Method (AMM) 三叉树模型

AMM (Adaptive Mesh Method) 模型是在三叉树模型基础上, 在标的资产价格在行权价附近时, 增加一些更精细的分划 (增加区间数)。这个模型主要应用于当关卡在标的资产价格附近的奇异关卡期权定价。AMM模型的参数如下

标的资产价格上升、下降的概率分别为:

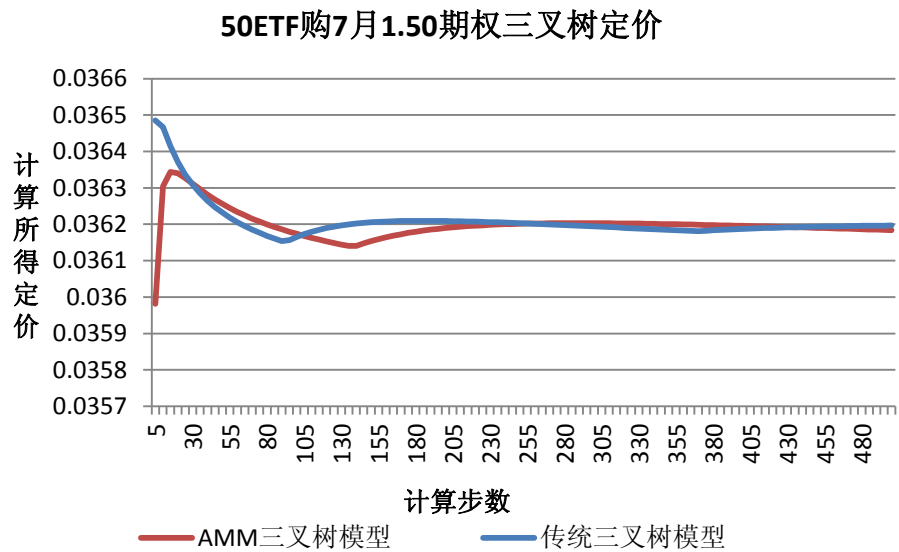
$$p_u = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2 T / n}{(\sigma \sqrt{3T / n})^2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T / n)^2}{(\sigma \sqrt{3T / n})^2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2}) T / n}{\sigma \sqrt{3T / n}} \right),$$

$$p_d = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2 T / n}{(\sigma \sqrt{3T / n})^2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T / n)^2}{(\sigma \sqrt{3T / n})^2} - \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2}) T / n}{\sigma \sqrt{3T / n}} \right),$$

$$p_{\text{不变}} = 1 - p_u - p_d。$$

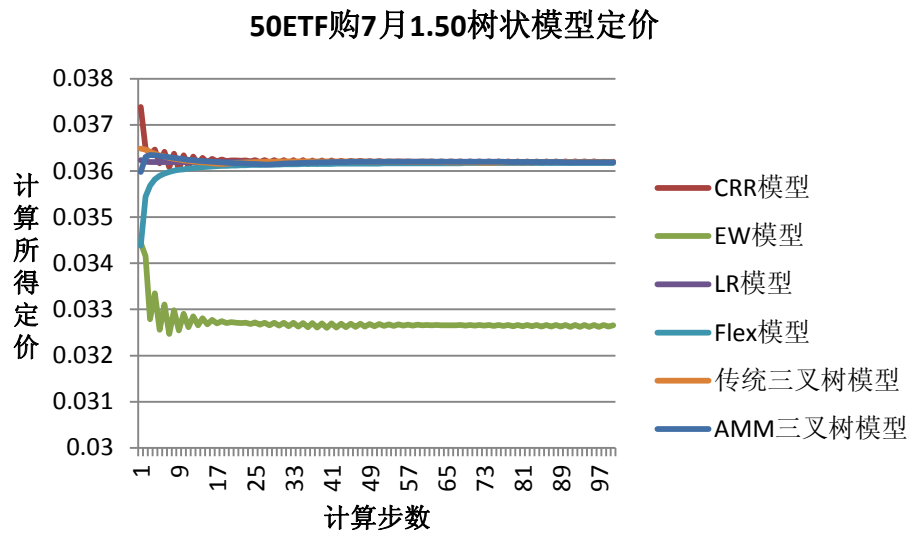
AMM的计算方法为：先利用上述参数计算出粗划分情况下各个节点的期权价格，然后在在行权价附近加入更细分分化，重新计算细分节点下的期权价格。相比于一般的二叉树模型，AMM模型的收敛、近似效果更好。

图4：AMM二叉树模型与传统二叉树模型期权定价收敛性比较



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图5：一般期权定价树状模型收敛性汇总比较图



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

从图5可以看出，随着计算步数越来越多，以上六种树状模型都会收敛于BS期权定价公式的结果。其中，CRR二叉树模型和EW二叉树模型的收敛性特征是一致的，相比较其他方法，两者都表现出较大的波动性。AMM模型、三叉树模型和LR模型是三种比较好的树状模型，当区间步数很小时，就已经很接近收敛的价格，其中LR模型的计算速度最快。Flex二叉树模型的收敛曲线比较光滑。

## 二、隐含波动率树状模型

### 1、隐含波动率二叉树模型

下面主要介绍Derman和Kani提出的隐含波动率二叉树模型。BS期权定价模型对标的资产价格运动过程的假设为  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$ ，其中  $\mu$ 、 $\sigma$  都为常数。由于在市场上存在“波动率微笑”和“波动率期限结构”，所以上面假设最自然的一个拓展就是将  $\sigma$  拓宽为  $S$  和  $t$  的函数  $\sigma(S, t)$ ，那么此时标的资产价格的运动过程变为：  

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S, t) dW_t$$
。隐含波动率二叉树模型考虑了波动率曲面。

将期权剩余期限  $T$  进行  $n$  等分，每份为  $\Delta t = \frac{T}{n}$ ， $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = T$ 。假

设无风险利率为  $r$ ，第  $m$  个时间段的标的资产价格  $S_{m,i}$  ( $1 \leq i \leq m+1$ ) 和

Arrow-Debreu价格  $\lambda_{m,i}$  ( $1 \leq i \leq m+1$ ) 已经得到， $S_{m,i}$  的风险中性远期价格为

$F_{m,i} = S_{m,i} e^{r\Delta t}$ 。那么在第  $m+1$  个时间段有  $2m+3$  个未知参数需要确定，包括  $m+2$

个标的资产价格  $S_{m+1,i}$  和  $m+1$  个变化概率  $p_{m,i}$ 。若  $m+2$  为奇数，则取  $S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1}$  取  
 现时的标的资产价格  $S$ ；若  $m+2$  为偶数，则取  $S_{m+1, \frac{m+2}{2}} \times S_{m+1, \frac{m+2}{2} + 1} = S$ ，然后从第  
 $m+1$  个时间段标的资产价格的中央位置开始进行迭代求解。

Arrow-Debreu 价格在初始时刻  $t_1$  的值为 1，在第  $m+1$  个时间段定义为：

$$\lambda_{m+1,i} = \begin{cases} p_{m,m+1} \lambda_{m,m+1} e^{-r\Delta t} & i = m+2 \\ (p_{m,i-1} \lambda_{m,i-1} + (1-p_{m,i}) \lambda_{m,i}) e^{-r\Delta t} & 2 \leq i \leq m+1 \\ (1-p_{m,1}) \lambda_{m,1} e^{-r\Delta t} & i = 1 \end{cases}$$

由于隐含波动率二叉树模型是在风险中性环境下定价，则有

$$F_{m,i} = p_{m,i} S_{m+1,i+1} + (1-p_{m,i}) S_{m+1,i} \quad (1.1)$$

$C(S_{m,i}, t_{m+1})$  和  $P(S_{m,i}, t_{m+1})$  分别表示行权价为  $S_{m,i}$ ，到期日为  $t_{m+1}$  的看涨期权和看  
 跌期权在  $t_m$  时的传统二叉树价格。则有

$$C(S_{m,i}, t_{m+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{m+1} \{ \lambda_{m,j} p_j + \lambda_{m,j+1} (1-p_{m,j+1}) \} \max(S_{m+1,j+1} - S_{m,i}) \quad (1.2)$$

其中， $p_{m,m+2} = 0$ 。

由式 (1.1)，将 (1.2) 变形为：

$$e^{r\Delta t} C(S_{m,i}, t_{m+1}) = \lambda_{m,i} p_{m,i} (S_{m+1,i+1} - S_{m,i}) + \sum_{j=i+1}^{m+1} \lambda_{m,j} (F_{m,j} - S_{m,i})$$

由式 (1.1)、式 (1.2) 可以得出：

$$S_{m+1,i+1} = \frac{S_{m+1,i} [e^{r\Delta t} C(S_{m,i}, t_{m+1}) - \sum_{j=i+1}^{m+1} \lambda_{m,j} (F_{m,j} - S_{m,i})] - \lambda_{m,i} S_{m,i} (F_{m,i} - S_{m,i})}{[e^{r\Delta t} C(S_{m,i}, t_{m+1}) - \sum_{j=i+1}^{m+1} \lambda_{m,j} (F_{m,j} - S_{m,i})] - \lambda_{m,i} (F_{m,i} - S_{m,i})} ;$$

$$p_{m,i} = \frac{F_{m,i} - S_{m+1,i}}{S_{m+1,i+1} - S_{m+1,i}}$$

如果  $m+2$  为奇数，则从  $S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1} = S$  开始就可以推出所有大于等于

$S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1}$  的标的资产价格, 即:  $S_{m+1, i}$  ( $\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq m+2$ ), 剩余的小于

$S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1}$  的标的资产价格可以用看跌期权的价格来求解, 方法与前面过程同理。

如果  $m+2$  为偶数, 则采用CRR模型中央标的资产的条件:

$S_{m+1, \frac{m+2}{2}} \times S_{m+1, \frac{m+2}{2}+1} = S$ , 令  $S_{m, \frac{m+2}{2}} = S$ , 可以得出  $S_{m+1, \frac{m+2}{2}+1}$ , 即

$$S_{m+1, \frac{m+2}{2}+1} = \frac{S[e^{r\Delta t} C(S, t_{m+1}) + \lambda_{m,i} S - \sum_{j=i+1}^{m+1} \lambda_{m,j} (F_j - S_{m,i})]}{\lambda_{m,i} F_i - e^{r\Delta t} C(S, t_{m+1}) + \sum_{j=i+1}^{m+1} \lambda_{m,j} (F_j - S_{m,i})}, \quad i = \frac{m+2}{2}$$

则这样类推下去就可以求出所有大于等于  $S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1}$  的标的资产价格。剩余的小于

$S_{m+1, \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor + 1}$  的点可以用看跌期权的价格来求解, 方法与前面过程同理。

然后在每一步同时求解出相应的变化概率  $p_{m,i}$ , 则可以得出每一个节点处标的

资产的局部波动率为  $\sigma_{m,i} = \sqrt{p_{m,i}(1-p_{m,i})} \ln \frac{S_{m+1,i+1}}{S_{m+1,i}}$ 。

隐含波动率最二叉树模型最大的好处是体现出了标的资产波动率会随时间和标的资产价格变化, 包含了波动率微笑的信息, 最大的缺点是利用它算出来的变化概率会出现  $p_{m,j} < 0$  和  $p_{m,j} > 1$  的情况。当  $p_{m,j} > 1$  时, 意味着  $S_{m+1,i+1} < F_{m,i}$ ; 当

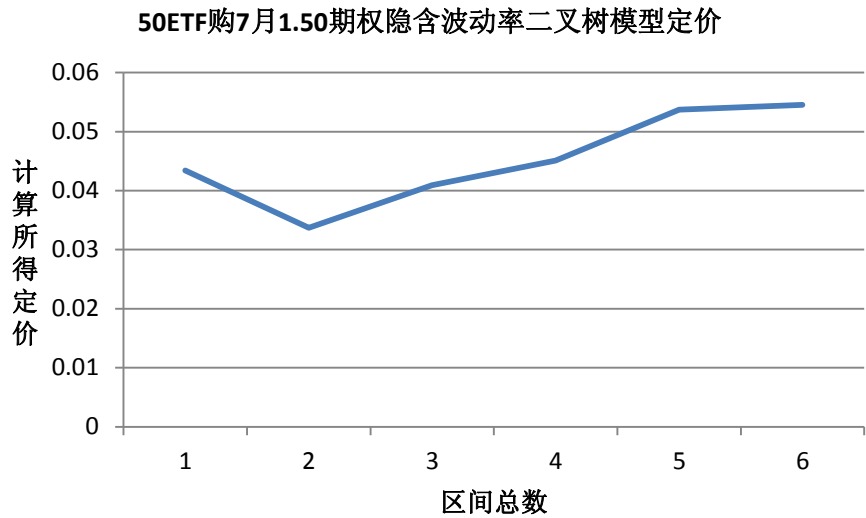
$p_{m,j} < 0$  时, 意味着  $S_{m+1,i} > F_{m,i}$ 。这两种情况就有了无风险套利的空间。因此, 当

我们在建立树状模型的时候要注意每个节点处的标的资产价格必须满足

$S_{m+1,i} < F_{m,i} < S_{m+1,i+1}$ 。如果某节点处的标的资产价格出现了上面两种情况, 就需要

剔除此时产生的标的资产价格, 按照CRR模型的关系  $S_{m,i}^2 = S_{m+1,i} S_{m+1,i+1}$  来重新选择标的资产价格。

图6: 隐含波动率二叉树模型期权定价



数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

表 2: 隐含波动率二叉树模型 6 个区间步所得的局部隐含波动率树

step1	step2	step3	step4	step5	step6
0.29644	0.29644	0.29644	0.29644	0.29644	0.29644
	0.15435	0.08859	0.08859	0.08859	0.08859
		0.15771	0.01927	0.14806	0.01927
			0.13409	0.13029	0.21657
				0.11464	0.18704
					0.07819

数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

## 2、隐含波动率三叉树模型

隐含波动率三叉树模型可以更细致地描述波动率曲面。隐含波动率三叉树模型的标的资产价格树每个节点的值是由传统的三叉树模型来给定的。不同的是，隐含波动率三叉树模型引入了看涨和看跌期权的传统三叉树价格、标的资产远期价格、Arrow-Debreu价格等用于求解变化概率。

将期权剩余期限  $T$  进行  $n$  等分，每份为  $\Delta t = \frac{T}{n}$ ， $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = T$ 。假

设无风险利率为  $r$ ，第  $m$  和  $m + 1$  个时间段的标的资产价格  $S_{m,i}$  ( $1 \leq i \leq 2m + 1$ )

和Arrow-Debreu价格  $\lambda_{m,i}$  ( $1 \leq i \leq 2m + 1$ ) 已经得到， $S_{m,i}$  的风险中性远期价格为

$F_{m,i} = S_{m,i} e^{r\Delta t}$ 。那么在有  $4m + 2$  个未知参数需要确定，包括  $2m + 1$  个上升概率和  $2m + 1$  个下跌概率。



Arrow-Debreu价格在初始时刻 $t_1$ 的值为1，在第 $m$ 个时间段定义为：

$$\lambda_{m+1,i} = \begin{cases} p_{m,2m-1}\lambda_{m,2m-1}e^{-r\Delta t} & i = 2m + 1 \\ [p_{m,i-2}\lambda_{m,i-2} + (1 - p_{m,i-1} - q_{m,i-1})\lambda_{m,i-1}]e^{-r\Delta t} & i = 2m \\ [q_{m,i}\lambda_{m,i} + (1 - p_{m,i-1} - q_{m,i-1})\lambda_{m,i-1} + p_{m,i-2}\lambda_{m,i-2}]e^{-r\Delta t} & 2 < i < 2m \\ [q_{m,2}\lambda_{m,2} + (1 - p_{m,1} - q_{m,1})\lambda_{m,1}]e^{-r\Delta t} & i = 2 \\ q_{m,1}\lambda_{m,1}e^{-r\Delta t} & i = 1 \end{cases}$$

由于隐含波动率二叉树模型是在风险中性环境下定价，则有

$$F_{m,i} = p_{m,i+2}S_{m+1,i+2} + (1 - p_{m,i+1} - q_{m,i+1})S_{m+1,i+1} + q_{m,i}S_{m+1,i} \quad (2.1)$$

$C(S_{m+1,i+1}, t_{m+1})$ 和 $P(S_{m+1,i+1}, t_{m+1})$ 分别表示行权价为 $S_{m+1,i+1}$ ，到期日为 $t_{m+1}$ 的看涨期权和看跌期权在 $t_m$ 的价格。则有：

$$\begin{aligned} C(S_{m+1,i+1}, t_{m+1}) &= \\ e^{-r\Delta t} \sum_j \{ &\lambda_{m,j-2}p_{m,j-2} + \lambda_{m,j-1}(1 - p_{m,j-1} - q_{m,j-1}) + \lambda_{m,j}q_{m,j} \} \max(S_{m+1,j} - S_{m+1,i+1}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

由式(2.1)，将(2.2)变形为：

$$e^{r\Delta t} C(S_{m+1,i+1}, t_{m+1}) = \lambda_{m,i} p_{m,i} (S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i+1}) + \sum_{j=i+1}^{2m+1} \lambda_{m,j} (F_{m,j} - S_{m+1,i+1})$$

由式(2.1)、式(2.2)可以得出第 $m+1$ 个时间段的中央节点以上所有节点的相关概率：

$$p_{m,i} = \frac{e^{r\Delta t} C(S_{m+1,i+1}, t_{m+1}) - \sum_{j=i+1}^{2m+1} \lambda_{m,j} (F_{m,j} - S_{m+1,i+1})}{\lambda_{m,i} (S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i+1})} ;$$

$$q_{m,i} = \frac{F_{m,i} - p_{m,i} (S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i+1}) - S_{m+1,i+1}}{S_{m+1,i} - S_{m+1,i+1}} .$$

第 $m+1$ 个时间段的中央节点以下所有节点的相关概率可以由看跌期权类似得出：

$$q_{m,i} = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{m+1,i+1}, t_{m+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{m,j} (S_{m+1,i+1} - F_{m,j})}{\lambda_{m,i} (S_{m+1,i+1} - S_{m+1,i})} ;$$

$$p_{m,i} = \frac{F_{m,i} + q_{m,i}(S_{m+1,i+1} - S_{m+1,i}) - S_{m+1,i+1}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i+1}}$$

针对隐含波动率二叉树模型算出来的变化概率会出现概率为负的情况，可以通过重新设定概率的方法来避免：

若  $S_{m+1,i+1} < F_{m,i} < S_{m+1,i+2}$  时，

$$p_{m,i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{F_{m,i} - S_{m+1,i+1}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i+1}} + \frac{F_{m,i} - S_{m+1,i}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i}} \right], \quad q_{m,i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S_{m+1,i+2} - F_{m,i}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i}} \right]$$

若  $S_{m+1,i} < F_{m,i} < S_{m+1,i+1}$  时，

$$p_{m,i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{F_{m,i} - S_{m+1,i}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i}} \right], \quad q_{m,i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S_{m+1,i+2} - F_{m,i}}{S_{m+1,i+2} - S_{m+1,i}} + \frac{S_{m+1,i+1} - F_{m,i}}{S_{m+1,i+1} - S_{m+1,i}} \right]$$

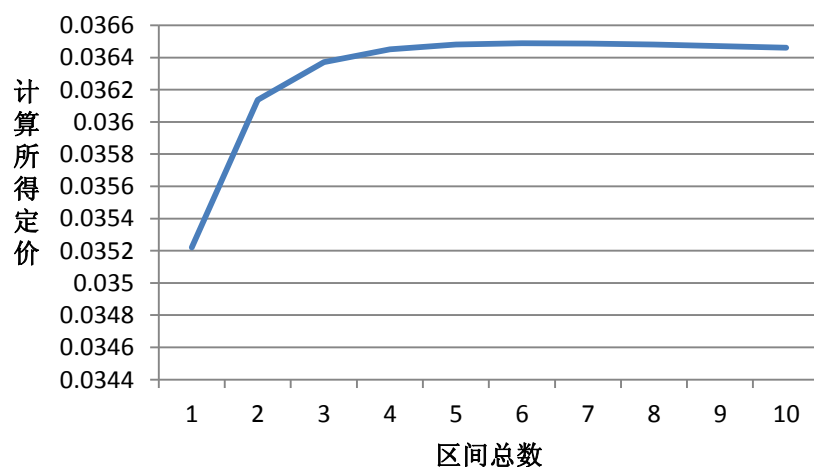
求出在每一步相应的变化概率  $p_{m,i}$ 、 $q_{m,i}$ ，则可以得出每一个节点处标的资产的局部波动率为：

$$\sigma_{m,i} = \{ [p_{m,i}(S_{m+1,i+2} - F_{m,i})^2 + (1 - p_{m,i} - q_{m,i})(S_{m+1,i+1} - F_{m,i})^2 + q_{m,i}(S_{m+1,i} - F_{m,i})^2] / (F_{m,i}^2 \Delta t) \}^{\frac{1}{2}}$$

$$F_{m,i} = p_{m,i}S_{m+1,i+2} + (1 - p_{m,i} - q_{m,i})S_{m+1,i+1} + q_{m,i}S_{m+1,i}$$

图7：隐含波动率二叉树模型期权定价

### 50ETF购7月1.50期权隐含波动率二叉树模型定价



数据来源：广发证券发展研究中心

表 3: 隐含波动率二叉树模型 10 个区间步所得的局部隐含波动率树

step1	step2	step3	step4	step5	step6	step7	step8	step9	step10
0.29644	0.29707	0.29902	0.30221	0.30640	0.31111	0.31578	0.31985	0.32299	0.32510
	0.29643	0.29691	0.29785	0.29924	0.30106	0.30323	0.30560	0.30800	0.31024
	0.29622	0.29635	0.29678	0.29752	0.29856	0.29991	0.30152	0.30334	0.30525
		0.29614	0.29634	0.29677	0.29743	0.29833	0.29947	0.30082	0.30234
		0.29601	0.29609	0.29634	0.29677	0.29738	0.29820	0.29920	0.30039
			0.29593	0.29606	0.29633	0.29676	0.29735	0.29810	0.29902
			0.29581	0.29586	0.29603	0.29633	0.29676	0.29732	0.29804
				0.29572	0.29582	0.29602	0.29633	0.29675	0.29731
				0.29562	0.29566	0.29578	0.29600	0.29632	0.29675
					0.29553	0.29560	0.29575	0.29599	0.29632
					0.29543	0.29546	0.29556	0.29573	0.29598
						0.29534	0.29540	0.29552	0.29571
						0.29524	0.29526	0.29534	0.29549
							0.29515	0.29520	0.29530
							0.29505	0.29507	0.29514
								0.29496	0.29501
								0.29487	0.29489
									0.29478
									0.29468

数据来源: Wind资讯、广发证券发展研究中心

由于隐含波动率二叉树模型和隐含波动率二叉树模型都考虑了波动率微笑, 所以这两个模型最大的特点是体现了波动率曲面, 从而使得使用这两个模型定出的价格跟前面的有所不同。

## 风险提示

本文旨在对所研究问题的主要关注点进行分析, 因此对市场及相关交易做了一些合理假设, 但这样会导致建立的模型以及基于模型所得出的结论并不能完全准确地刻画现实环境。而且由于分析时采用的相关数据都是过去的时间序列, 因此可能会与未来真实的情况出现偏差。

## 广发金融工程研究小组

- 罗军：首席分析师，华南理工大学理学硕士，2010年进入广发证券发展研究中心。
- 俞文冰：首席分析师，CFA，上海财经大学统计学硕士，2012年进入广发证券发展研究中心。
- 安宁宁：资深分析师，暨南大学数量经济学硕士，2011年进入广发证券发展研究中心。
- 蓝昭钦：分析师，中山大学理学硕士，2010年进入广发证券发展研究中心。
- 史庆盛：分析师，华南理工大学金融工程硕士，2011年进入广发证券发展研究中心。
- 马普凡：分析师，英国拉夫堡大学金融数学专业，2014年进入广发证券发展研究中心。
- 张超：研究助理，中山大学理学硕士，2012年进入广发证券发展研究中心。

## 广发证券—行业投资评级说明

- 买入：预期未来12个月内，股价表现强于大盘10%以上。
- 持有：预期未来12个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-10%~+10%。
- 卖出：预期未来12个月内，股价表现弱于大盘10%以上。

## 广发证券—公司投资评级说明

- 买入：预期未来12个月内，股价表现强于大盘15%以上。
- 谨慎增持：预期未来12个月内，股价表现强于大盘5%-15%。
- 持有：预期未来12个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-5%~+5%。
- 卖出：预期未来12个月内，股价表现弱于大盘5%以上。

## 联系我们

	广州市	深圳市	北京市	上海市
地址	广州市天河北路183号 大都会广场5楼	深圳市福田区金田路4018号 安联大厦15楼A座 03-04	北京市西城区月坛北街2号 月坛大厦18层	上海市浦东新区富城路99号 震旦大厦18楼
邮政编码	510075	518026	100045	200120
客服邮箱	gfyf@gf.com.cn			
服务热线	020-87555888-8612			

## 免责声明

广发证券股份有限公司具备证券投资咨询业务资格。本报告只发送给广发证券重点客户，不对外公开发布。

本报告所载资料的来源及观点的出处皆被广发证券股份有限公司认为可靠，但广发证券不对其准确性或完整性做出任何保证。报告内容仅供参考，报告中的信息或所表达观点不构成所涉证券买卖的出价或询价。广发证券不对因使用本报告的内容而引致的损失承担任何责任，除非法律法规有明确规定。客户不应以本报告取代其独立判断或仅根据本报告做出决策。

广发证券可发出其它与本报告所载信息不一致及有不同结论的报告。本报告反映研究人员的不同观点、见解及分析方法，并不代表广发证券或其附属机构的立场。报告所载资料、意见及推测仅反映研究人员于发出本报告当日的判断，可随时更改且不予通告。

本报告旨在发送给广发证券的特定客户及其它专业人士。未经广发证券事先书面许可，任何机构或个人不得以任何形式翻版、复制、刊登、转载和引用，否则由此造成的一切不良后果及法律责任由私自翻版、复制、刊登、转载和引用者承担。