BSM 及其改进版期权定价模型

期权笔记系列之三

报告摘要:

- **BS 模型简介**

BS 模型作为期权定价领域的开山之作，属于经典且一直没有落伍的，但是在 BS 模型的一些基本假设不满足的情况下(特别是关于波动率的假设)，就需要进行修正，其中一种修正方法是基于 BS 模型的改进：PRACTITIONER BLACK-SCHOLES 模型和 GRAM-CHARLIER 模型是两种常见且有意义的改进。

- **PBS 模型**

Practitioner Black-Scholes 模型主要假设隐含波动率为行权价和剩余期限的确定函数，即引进确定性波动率函数（DVF）方法来对隐含波动率进行建模。通过实证验证，利用 PBS 的确可以获得更好的波动率曲线、曲面和期限结构的刻画。

- **GRAM-CHARLIER 模型**

G-C 模型将收益率展开到更高阶矩，将偏度和峰度引入期权的定价，尽管在某些严重价外(虚值)期权的定价上有一些偏差，但是瑕不掩瑜，偏度和峰度的引入对于更好的刻画标的资产的波动，尤其是在价格波动较大时，是很有意义的，对于期权价值的修正液比较大。

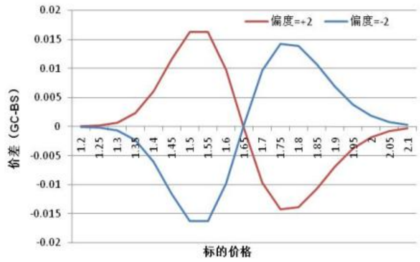
- **附录**

相对于简单的 B-S 公式的结论，其推导方法都代表了金融工程的思想。因此 B-S 公式的假设，推导和改进比简单的两个公式有意义得多。

- **核心假设风险:**

本文旨在对所研究问题的主要关注点进行分析，因此对市场及相关交易做了一些合理假设，但这样会导致建立的模型以及基于模型所得出的结论并不能完全准确地刻画现实环境。而且由于分析时采用的相关数据都是过去的时间序列，因此可能会与未来真实的情况出现偏差。

图 1 不同峰度水平下 G-C 与 B-S 模型的定价差异



分析师: 俞文冰 S0260512040002
021-60750622
ywb2@gf.com.cn

相关研究:

期权定价树状模型:期权笔记系列之二	2014-07-16
夫未战而庙算胜者,得算多也:关于期权进展官方表态的点评	2014-03-10
个股与股指期权全真模拟(仿真)交易规则纵览——期权笔记系列之一	2014-03-10

目录索引

图表索引

前言

相对于树状模型，BS模型无疑是一个巨大的改进，一直无法很好的概括它的重要性，直到在Facebook上看到这样一段话，最后我决定放弃翻译，直接贴原文与大家分享:

Each time I go through the binomial tree model to the Black–Scholes–Merton Model, it wins my highest admiration for the elegance from discreteness to continuity, the perfection from broken terms into close form and the eloquence, flexibility and ingenuity, firm and simple enough to hold the foundation of the entire edifice of modern financial theory!

一、BSM 模型的前辈

1、Bachelier 公式

关于期权定价公式，最早研究的应该是Louis Bachelier，这位前辈是法国人，他的博士论文《投机理论(The Theory of Speculation)》(1900年发表)被认为是第一篇对随机过程进行建模，并且对期权进行定价的论文，也是第一篇在金融研究领域用到高等数学的论文。他的论文导师就是大名鼎鼎的Henri Poincaré(庞加莱)。

$$C(S,T) = SN\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right) - XN\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$P(S,T) = XN\left(\frac{X-S}{\sigma\sqrt{T}}\right) - SN\left(\frac{X-S}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

这个公式就他说处的时代而言已经是非常超前的了,我们可以看到在公式里面已经出现了期权定价公式里面最重要的两个因素，股价(标的资产价格S) 以及波动率σ。更加关键的是,他在推导过程当中第一使用了一个叫做fair game的思想,就是游戏参与人先给钱,获得一种权利,这个权利给游戏参与人的好处在概率上说与他给的钱是一样的.当然这个后来演变成了大名鼎鼎的non-arbitrage condition。另外,我们看到了正态分布累积函数的身影。

总体而言，这个公式有三个伟大之处:

1) 明确了期权模型中最重要的因素;

2) 使用了fair game 的思想.;

3) 首次用随机的概念描绘市场动态。

这个公式的缺陷也很明显:

1) 它假定股价而不是收益率服从正态分布，因为在Bachelier所处的时代,他用的数据大多来自巴黎某个交易所,但是里面交易并不是很活跃,所以价格才产生了某些正态分布的表象。

2) 它没有考虑利率。

当然我们可以很方便的推导出这个模型考虑利率的版本:

$$C(S,T)=SN\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Xe^{-rt}N\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\sigma\sqrt{T}n\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$P(S,T)=Xe^{-rt}N\left(\frac{X-S}{\sigma\sqrt{T}}\right)-SN\left(\frac{X-S}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\sigma\sqrt{T}n\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

2、Sprenkle公式，Boness公式和Samuelson公式

Bachelier公式推出之后六十多年都没有什么突破性的进展。直到Sprenkle Formula (1961),Boness Formula (1964) 提出的期权定价模型:

$$C(S,T)=e^{\rho T}SN(d_1)-(1-A)XN(d_2)$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{e^{\rho T}S}{X}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2T\right]$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

$$C(S,T)=SN(d_1)-Xe^{-\rho T}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

这个公式已经非常非常接近最后的Black-Scholes-Merton formula了。

首先出现了折现,这体现了衍生产品在时间上的价值。

其次，在效用函数的框架下解决期权定价的问题。

第三，与第一代模型不同的是，这些经济学家注意到了一个明显的事实，股价并不服从正态分布，而是收益率服从正态分布，而股价是服从对数正态分布。

这个模型最主要的意义和不足其实是相辅相成的，因为他们是经济学家,因此在某种程度上说,他们想解决的问题便是两个人的效用怎么样与不确定性一起进入到价格公式里面。公式中的A代表的是风险厌恶程度的一个指标, ρ(rho) 是股票的平均增长率。但是一旦引入了风险厌恶度和股票增长率的概念，这个定价在实际中就很难做了，金融学中的一价原理都无法满足了。

当代伟大的经济学家Samuelson Formula (1965) 提出的期权定价公式是:

$$C(S,T)=Se^{-(\rho-\alpha)T}N(d_1)-Xe^{-\alpha T}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

大体上跟前面两位的模型差不多,但是他引入了一个思想就是期权作为衍生品

本身应该隐含着跟标的资产不同的风险,因此这里有一个α指的就是期权的增长率。Samuelson在期权领域做的另一件有意义的事情就是他发现并且重新刊登了Bachelier的文章而且将期权公式的鼻祖的名号归结于他。

二、Black Scholes Merton 模型的假设和介绍

之前的铺垫都是为了引出本文的核心：Black Scholes Merton模型。

1、BSM 模型的假设

只讲模型而不提假设，就是耍流氓，首先回忆一下BS模型的假设:

（1）标的资产（Underlying asset）价格变化遵循几何Brown运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

这里 μ —期望回报率（expected return rate），

σ —波动率（volatility），

dW_t —标准布朗运动（standard　Brownian motion）

并且 μ 和 σ 都是常数;

（2）无风险利率是常数;

（3）标的资产不支付股息;

（4）不支付交易费（transaction cost）和税收（tax）;

（5）市场是完全的，无套利的(也就是说市场上的套利空间都会被抹去的，最终的定价反应的是没有套利空间的情形)。

当然这些假设在之后的各种修正和应用中都是会被一条一条拿出来雕琢的。

2、BSM 公式的一种推导

BSM公式的推导对于理解这个公式的内涵,乃至其它衍生品定价都是有帮助的。我们在正文中列举了一种常用的推导方式，其它两种方式请参见附录。

$V(S,t)$ 表示欧式看涨期权的价值。构造投资组合 $\Pi = V - \Delta S$ ，Δ 是标的资产的份额，选取适当的 Δ 使得在时段 $(t, t+dt)$ 内，Π 是无风险的。

设在时刻 t 形成投资组合 Π，并在时刻 $(t, t+dt)$ 内，不改变份额 Δ，那么由于 Π 是无风险的，因此在时刻 $t+dt$，投资组合的回报是

$$\frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = rdt$$

即:

$dV_t - \Delta dS_t = r\Pi_t dt = r(V_t - \Delta S_t)dt$ （1.1）

由 Ito 引理可得: $dV_t = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S})dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t$。

将它带人（1.1）则可得:

$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \mu S)dt + (\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S)dW_t = r(V - \Delta S)dt$ （1.2）

由于等式（1.2）右端是无风险的，因此等式左端随机项 dW_t 的系数必为 0，则有

$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$，把它带入（1.2）并消去 dt 得到:

$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$ （1.3）

这就是刻画期权价格变化过程的 Black-Sholes 方程。

因此为了确定在合约有效期 $[0, T]$ 内期权的价值，就是要在区域

$\Sigma : \{0 \le S < \infty, 0 \le t < T\}$ 上求解 PDE 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0(\Sigma) \\ V|_{t=T} = (S-K)^+ \end{cases}$$

通过求解该 PDE 问题则可得出 BS 公式。

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

由看涨期权和看跌期权的平价公式可得，与该看涨期权有相同交割价和相同到期日的看跌期权的定价公式为:

$$P(S,t) = C(S,t) + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

$$= Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d - \sigma\sqrt{T-t})) - S(1 - N(d))$$

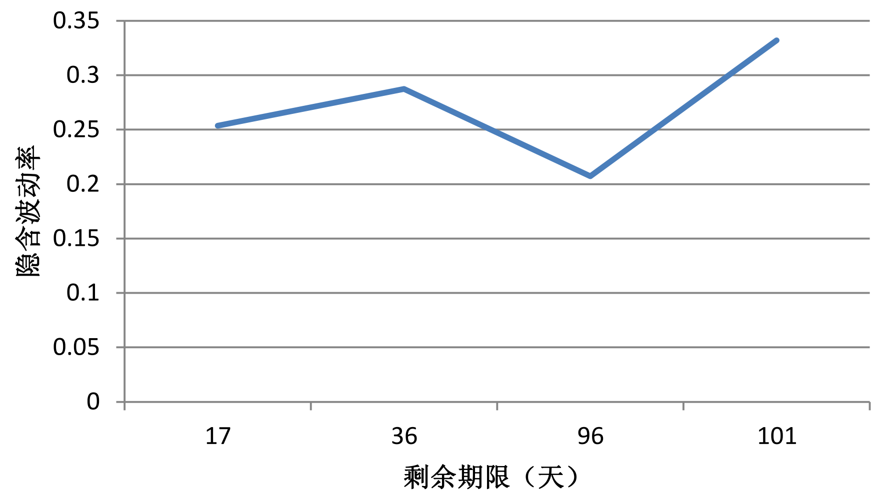
$$= Ke^{-r(T-t)}N(\sigma\sqrt{T-t} - d) - SN(-d)$$

从这个模型的推导可以看出，标的资产和期权在无摩擦的环境下连续调仓对冲可以得到无风险组合，因此在未来的波动率已知并且无摩擦的环境下，如果可以连续调仓的话，那么期权价格的高估或者低估都是可以通过这种方法进行套利的。当然现实中不会无摩擦，也不是连续调仓，未来波动率也不可知，但是如果期权价格与正常定价偏离达到一定程度，即考虑了这些不利因素以后，依然偏离较大，那么套利空间就出现了。

3、BSM 模型的局限性及其改进

BSM模型的假定中很重要的一条是标的资产价格服从对数正态分布，但是实际情况如何呢？如果正在运行的上交所行权价为1.65的50ETF期权仿真交易(2014年8月5日)进行测算，通过期权价格反解其波动率，即隐含波动率，我们会发现隐含波动率明显不是一个常数:

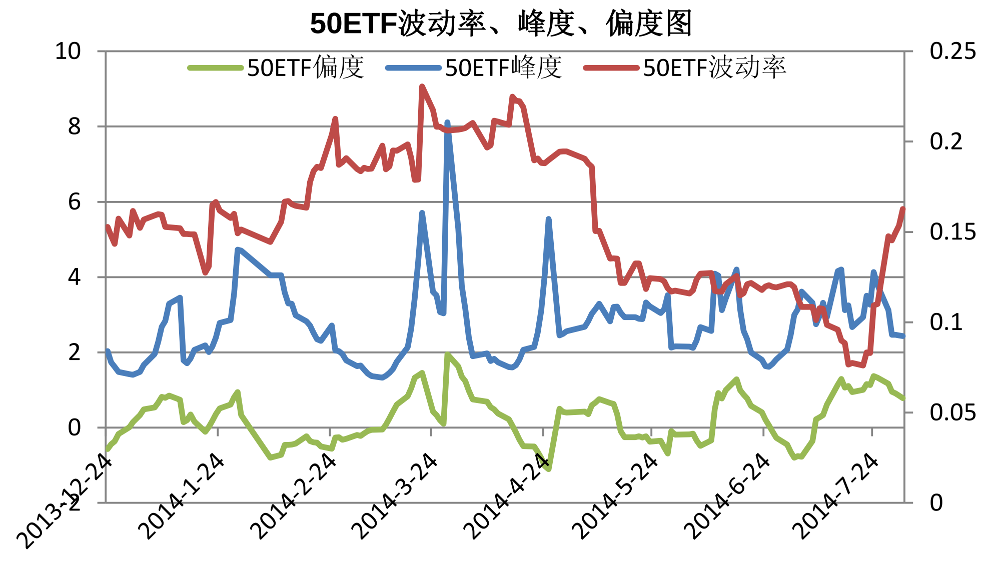
图1：隐含波动率与剩余期限



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

另外我们也观察了50ETF分布的偏度和峰度，发现这两个值在很多情况下并不为0，因此也与正态假设不服。

图2：50ETF波动率、偏度、峰度图



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

在现实情况不满足BSM模型假定的情况下，有两种改进方法，一种是在为模型输入参数的时候考虑到这些违反假设的情况，给一个更大或者更小的输入值。另一种就是建立修正模型。

对隐含波动率的修正模型基本分为两种研究思路：一种是直接对隐含波动率建立模型；另一种思路是基于标的资产服从几何Brown运动的假设进行改进，对标的资产回报的过程建立模型。

Practitioner Black-Scholes模型（简称PBS模型）是假设隐含波动率为行权价和剩余期限的确定函数，通过确定目标误差函数来拟合模型参数，从而得到隐含波动率模型。

Gram-Charlier Models模型是对标的资产的回报过程进行Gram-Charlier展开到第四阶，得到了期权定价公式的带峰度（Kurtosis）和偏度（Skewness）调整后的BS公式。

二、Practitioner Black-Scholes 模型

1、PBS 模型描述

Practitioner Black-Scholes模型主要假设隐含波动率为行权价和剩余期限的确定函数，即引进确定性波动率函数（DVF）方法来对隐含波动率进行建模。DVF通常有以下四种形式:

$$\sigma_{iv} = a_0$$

$$\sigma_{iv} = a_0 + a_1 K + a_2 K^2$$

$$\sigma_{iv} = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 T + a_5 KT$$

$$\sigma_{iv} = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 KT$$

Practitioner Black-Scholes模型的步骤通常有以下四步:

（1）通过波动率的形状选取以上四种形式的一种来建立DVF模型;

（2）通过选取期权的报价，从BS公式中反解出相对应的隐含波动率;

（3）选取一个目标误差函数，运用最普通的最小二乘方法，对DVF进行线性回归，从而得出隐含波动率的估计;

（4）将隐含波动率的估计值带入BS公式来计算期权价格。

根据相关的研究，在选取适当的目标误差函数的情况下，PBS模型可以得到一个很好的估计(Christoffersenand Jacobs (2004))。

最常用的目标误差函数有三种:

（1）$\$MSE(a_\$) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i - C^{BS}(\sigma_{iv}^i(a_\$)))^2$，它的问题在于权重很大分配给了还有很长时间到期的期权和深度价内期权;

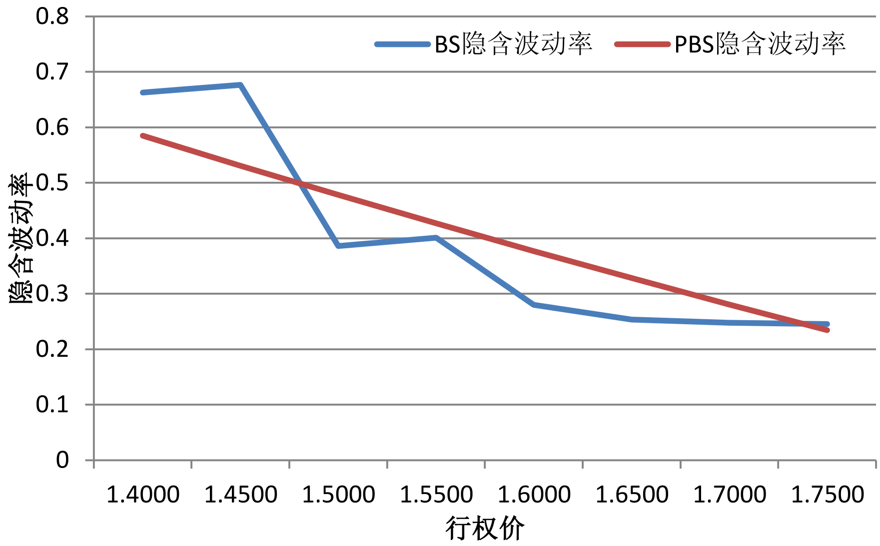
（2）$\%MSE(a_\%) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i - C^{BS}(\sigma_{iv}^i(a_\%))/C_i)^2$，优点是解决了（1）的问题，但是随之而来的问题是权重很大分配给了快到期期权和价外期权，会导致结果不稳定。

（3）$IVMSE(a_{IV}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{iv}^i - \sigma_{iv}^i(a_\%))^2$，它的问题在于存在异方差的问题，而且最后得出的估计量有偏估计。

2、模型实证

针对上交所50ETF期权仿真交易的数据(同样是2014年8月5日)，我们用PBS模型拟合了隐含波动率，在8月合约上得到的效果如图:

图3: BS与PBS隐含波动率



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

直观理解，我们可以近似的认为PBS是用收益率曲线的方法近似了隐含波动率的表达形式，更便于刻画和利用隐含波动率的特征。用PBS拟合的隐含波动率曲线或者曲面更清晰，便于进一步观测规律和建模。

三、Gram-Charlier 模型

1、Gram-Charlier 模型介绍

该模型是通过Gram-Charlier展开到四阶来对标的资产变化量对数的条件分布密度函数进行建模，假设在标的资产过程中波动率和无风险利率是常数，而且所划分的每个时间段的标的资产对数变化量是独立同分布的。这样就得到了Gram-Charlier的定价公式，它多加了偏度和峰度对定价的影响。

2、Gram-Charlier 模型（看涨期权定价）推导

令 $R_{t+1} = \log \frac{S_{t+1}}{S_t}$ 为一个时间段的标的资产变化率的对数，$R_{t+1}^T = \sum_{j=1}^{T} R_{t+j}$，则

$S_{t+T} = S_t e^{R_{t+1}^T}$，则有 S_{t+T} 的条件分布依赖于 R_{t+1}^T 的分布。假设 R_{t+1} 有母函数累计量：

$$\psi(t) = E(e^{tR_{t+1}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!} t^j$$

其中 κ_j 为 R_{t+1} 的累计量。假设 R_{t+j}，$j = 1, 2, \ldots$ 为相互独立的随机变量，则有 R_{t+1}^T

的累计量为 R_{t+j}， $j=1,2,\ldots$ 的累计量总和。由于假设标的资产回报的均值和方差都是常数，所以 R_{t+j}， $j=1,2,\ldots$ 是独立同分布的，具有相同的累积量。

假设 R_{t+1} 的二阶、三阶、四阶累计量为 κ_2、κ_3、κ_4，则 R_{t+1}^T 的二阶、三阶和四阶累计量为 $T\kappa_2$，$T\kappa_3$，$T\kappa_4$。假设在风险中性测度下，R_{t+1}^T 的均值为 μ_T，方差为 σ_T。令 $\omega_T=(R_{t+1}^T-\mu_T)/\sigma_T$，则有 ω_T 的密度函数的 4 阶 Gram-Charlier 展开为：

$$f(\omega_T)=\varphi(\omega_T)-\frac{c_{1T}}{3!}\varphi^{(3)}(\omega_T)+\frac{c_{2T}}{4!}\varphi^{(4)}(\omega_T)$$

其中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 为标准正态分布的密度函数。$\varphi^{(k)}(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的 k 阶导数。

由附录 3 可以得出 $c_{1T}=\frac{T\kappa_3}{\sqrt[3/2]{T\kappa_2}}=\frac{\kappa_3}{\kappa_2\sqrt{T}}$（偏度），$c_{2T}=\frac{T\kappa_4}{(T\kappa_2)^2}=\frac{\kappa_4}{T\kappa_2}$（峰度）

则在风险中性测度下利用上面所得到的 ω_T 的密度函数来求期权定价。以看涨期权的价格为例，则看涨期权的定价公式为：

$$C_{GC}=e^{-r(T-t)}E[(S_{t+T}-K)^+\mid S_t=S]$$

$$=e^{-r(T-t)}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-\mu_T}{\sigma_T}}^{\infty}(Se^{\mu_T+\sigma_T\omega_T}-K)f(\omega_T)d\omega_T$$

令 $\omega^*=\dfrac{\log\frac{K}{S}-\mu_T}{\sigma_T}$，则

$$C_{GC}=e^{-r(T-t)}\int_{\omega^*}^{\infty}(Se^{\mu_T+\sigma_T\omega_T}-K)(\varphi(\omega_T)-\frac{c_{1T}}{3!}\varphi^{(3)}(\omega_T)+\frac{c_{2T}}{4!}\varphi^{(4)}(\omega_T))d\omega_T$$

$$=e^{-r(T-t)}(\int_{\omega^*}^{\infty}(Se^{\mu_T+\sigma_T\omega_T}-K)\varphi(\omega_T)d\omega_T-\frac{c_{1T}}{3!}\int_{\omega^*}^{\infty}(Se^{\mu_T+\sigma_T\omega_T}-K)\varphi^{(3)}(\omega_T)d\omega_T$$

$$+\frac{c_{2T}}{4!}\int_{\omega^*}^{\infty}(Se^{\mu_T+\sigma_T\omega_T}-K)\varphi^{(4)}(\omega_T)d\omega_T)$$

$$=e^{-r(T-t)}(I_1-\frac{c_{1T}}{3!}I_2+\frac{c_{2T}}{4!}I_3)$$

其中 $e^{-r(T-t)}I_1$ 为 BS 公式，对后两项运用分部积分，转换为 BS 公式的积分形式，则有

$$C_{GC}=(1+\frac{c_{1T}}{3!}+\frac{c_{2T}}{4!})BS$$

$$+\frac{c_{1T}}{3!}[e^{-r(T-t)}\sigma_T K\varphi(\omega^*)(\omega^*+\sigma_T)+e^{-r(T-t)}\sigma_T^3 KN(-\omega^*)]$$

$$+\frac{c_{2T}}{4!}[e^{-r(T-t)}\sigma_T K\varphi(\omega^*)((\omega^*)^2-1+\omega^*+\sigma_T^2)+e^{-r(T-t)}\sigma_T^4 KN(-\omega^*)]$$

假设$\mu_T=r(T-t)-\sigma_T$，令$d=\dfrac{\ln\frac{S}{K}+r(T-t)+\frac{\sigma_T^2}{2}}{\sigma_T}$，则$\omega^*=\sigma_T-d$。将含$\sigma_T^3$、$\sigma_T^4$的项去掉，则有

$$C_{GC}=SN(d)-Ke^{-r(T-t)}N(d-\sigma_T)$$

$$+S\varphi(d)\sigma_T[\frac{c_{1T}}{3!}(2\sigma_T-d)-\frac{c_{2T}}{4!}(1-d^2+3d\sigma_T-3\sigma_T^2)]$$

3、Gram-Charlier模型下的近似隐含波动率公式

将BS公式看作是隐含波动率δ的函数，并将它在σ_T附近线性展开，则有下面等式:

$$SN(d(\delta))-Ke^{-r(T-t)}N(d(\delta)-\delta)$$

$$\cong SN(d(\sigma_T))-Ke^{-r(T-t)}N(d(\sigma_T)-\sigma_T)+S\varphi(d)(\delta-\sigma_T)$$

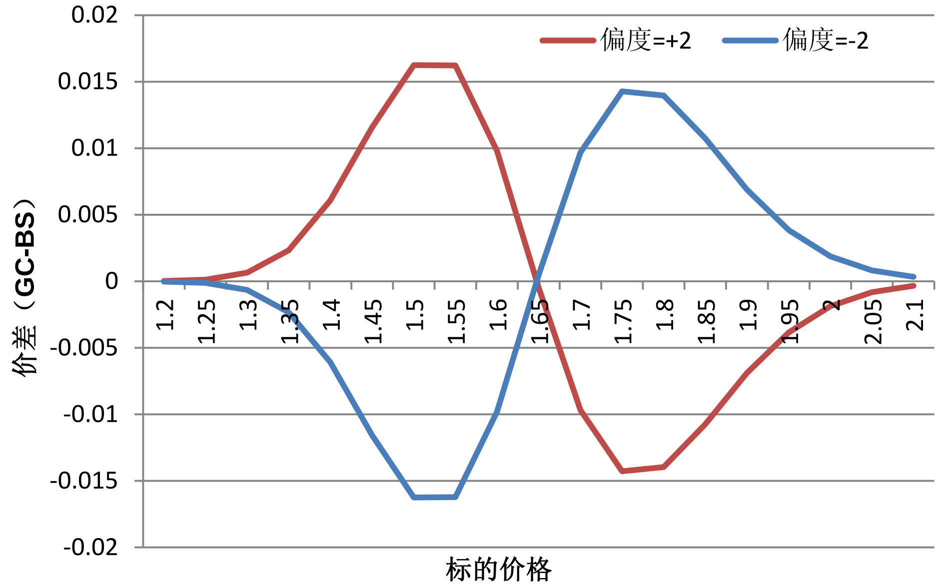
让后面的等式与C_{GC}相等建立等式，并去掉σ_T的两次以上的项，则可得到:

$$\delta(d)=\sigma_T[1-\frac{c_{1T}}{3!}d-\frac{c_{2T}}{4!}(1-d^2)]$$

4、模型的实证

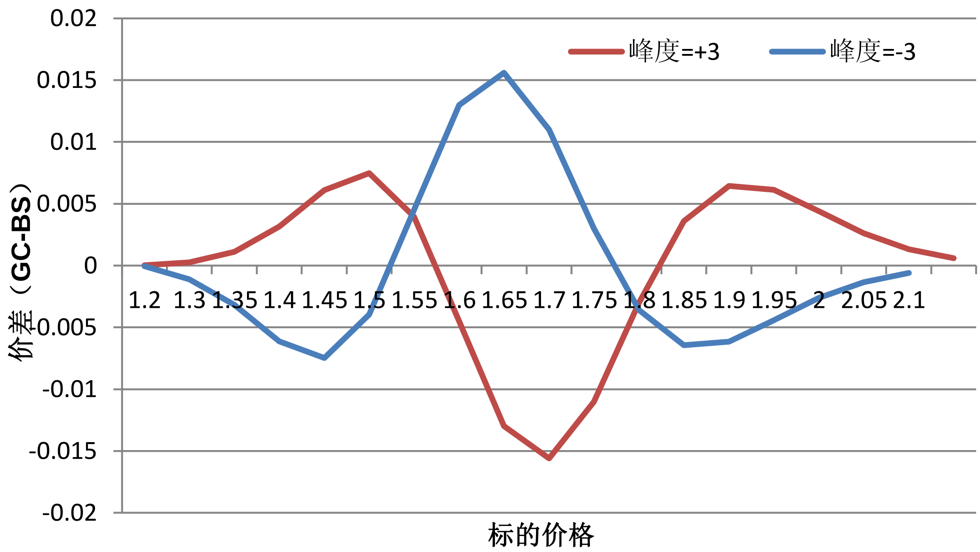
我们模拟测算了1412行权价为1.65的50ETF期权合约，在剩余期限在大约5个月时，在不同的偏度和峰度假定下，期权定价出现的价格差异最高可以达到0.015以上。

图4：不同偏度水平下G-C与B-S模型的定价差异



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图5：不同峰度水平下G-C与B-S模型的定价差异



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

现实情况中，在行情大幅度波动时，峰度和偏度的偏差是较容易出现偏差的，而个股期权的高阶矩又比指数更容易出现异常。从市场格局的演变的角度来讲，第一步必然是消灭平价套利和价差套利的机会，其后会逐渐演变到波动率的预测与交易，而后是更高阶和维度的交易。

附录一：BSM公式的推导

BSM公式的推导本身可能比最后的结果更有意义，各种推导方式都代表了一种

金融工程的思想。

1、鞅(Martingale)方法

标的资产满足几何布朗运动 $\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma dW_t^P$，$P$ 为实际测度。做测度变换，将实际测度变到风险中性测度，即做：$W_t^Q=W_t^P+\eta t$，$\eta=\frac{\mu-r}{\sigma}$，

$dQ=e^{-\frac{1}{2}\eta^2 t-\eta W_t^P}dP$。则在风险中性测度下，标的资产的运动过程为：

$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma dW_t^Q$。

由于BS公式假设市场是完全的，也就是说期权是可以由股票和无风险债券完全对冲的，则在风险中性测度下有：

$$dV_t=\Delta_t dS_t+r(V_t-\Delta_t S_t)dt=\Delta_t(rS_t dt+\sigma S_t dW_t^Q)+r(V_t-\Delta_t S_t)dt$$

$$=rV_t dt+\Delta_t\sigma S_t dW_t^Q$$

令 $\tilde{V}_t=e^{-rt}V_t$，则有

$$d\tilde{V}_t=e^{-rt}dV_t-re^{-rt}V_t dt=e^{-rt}(rV_t dt+\Delta_t\sigma S_t dW_t^Q)-re^{-rt}V_t dt$$

$$=e^{-rt}\Delta_t\sigma S_t dW_t^Q$$

$\tilde{V}_t$ 的扩散过程是没有漂移项的，所以 $\tilde{V}_t$ 在风险中性测度 Q 下是鞅。

由鞅的性质可得：$\tilde{V}_t=E^Q[\tilde{V}_T\mid F_t]$，即

$V_t=E^Q[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+\mid S_t=S]$（A1.1）

则在风险中性测度下对该期权求积分：

$$V(S,t)=e^{-r(T-t)}\int_{\frac{\ln\frac{K}{S}-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty}(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}x}-K)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

则可得BS公式。

2、二叉树方法（Cox-Ross-Rubinstein Binomial Model）

$V(S,t-\Delta t)$为期权在$t-\Delta t$的价值，相应的标的资产的价格为S。假设在期权的持有期间，标的资产在下一时刻t可能以概率p上升到Su，或者以概率$1-p$下降到Sd（无套利的充分必要条件是$u>e^{rT}>d$，$0<p<1$）。下面用Δ对冲方法来构造离散的风险中性测度。在$t-\Delta t$时，构造投资组合$V_{t-\Delta t}-\Delta S$。如果在t时刻，股价上升到Su，则此时的期权价格对应为$V(Su,t)$，则此时投资组合的价值为$V(Su,t)-\Delta Su$；反之，若股价下降到Sd，则此时的期权价格对应为$V(Sd,t)$，则此时投资组合的价值为$V(Sd,t)-\Delta Sd$。我们要找到合适的Δ使得我们在$t-\Delta t$构造的组合为无风险组合，则有

$$V(Su,t)-\Delta Su=V(Sd,t)-\Delta Sd$$

即$\Delta=\dfrac{V(Su,t)-V(Sd,t)}{S(u-d)}$。由我们构造的组合是无风险组合，所以

$$V(Su,t)-\Delta Su=e^{r\Delta t}(V(S,t-\Delta t)-\Delta S),$$

将Δ的表达式带入其中，则有

$$V(S,t-\Delta t)=e^{-r\Delta t}[pV(Su,t)+(1-p)V(Sd,t)] \quad \text{（A2.1）}$$

其中，$p=\dfrac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$。

由（A2.1）可得:

$$0=-V(S,t-\Delta t)+e^{-r\Delta t}[pV(Su,t)+(1-p)V(Sd,t)]$$

$$=-V(S,t)+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$+e^{-r\Delta t}V(S,t)+\frac{\partial V}{\partial S}Se^{-r\Delta t}[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2e^{-r\Delta t}[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)^2]$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}S^3e^{-r\Delta t}[p(u-1)^3+(1-p)(d-1)^3]+O(\Delta t^2)$$

。

而且有

$$e^{-r\Delta t}[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)]=r\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$e^{-r\Delta t}[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)^2]=\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$e^{-r\Delta t}[p(u-1)^3+(1-p)(d-1)^3]=O(\Delta t^3)$$

则可推出：$0=-V(S,t-\Delta t)+e^{-r\Delta t}[pV(Su,t)+(1-p)V(Sd,t)]$

$$=[-rV(S,t)+\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}]\Delta t+O(\Delta t^2)$$

即：$-rV(S,t)+\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=O(\Delta t)$

当 $\Delta t\to 0$ 时我们得到期权价格变化满足的Black-Sholes方程。

附录二、累计量（Cumulant）

X 为一个随机变量，令

$$\varphi(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)dx$$

其中 $F(x)$、$f(x)$ 分别为随机变量 X 的分布函数和概率密度函数。对被积函数中的 e^{tx} 进行Taylor展开，即

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{j=0}^{n}\frac{(tx)^j}{j!}+O((tx)^{r+1})]dF(x)=1+\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{t^j}{j!}+O(t^{r+1})$$

其中 v_j 为 X 的第 j 阶的原点矩。

用如下形式的含有 κ_1、κ_2、$\dots\kappa_n$、$\dots$的变量为 t 的多项式，与 $\varphi(t)$ 恒等，来定义累计量:

$$e^{\kappa_1 t+\frac{\kappa_2}{2!}t^2+\dots+\frac{\kappa_n}{n!}t^n+\dots}$$

$$=\varphi(t)=1+\sum_{j=0}^{n}v_j\frac{t^j}{j!}+O(t^{r+1})$$
，

则 κ_1、κ_2、$\dots\kappa_n$、$\dots$为相应的累计量。

累计量的性质有:

（1）$\log\varphi(t)=\log[1+\sum_{j=0}^{\infty}v_j\frac{t^j}{j!}]=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\kappa_j}{j!}t^j$

（2）$\frac{d^n\log\varphi(t)}{dt^n}=\kappa_n$

（3）m 个随机变量 X_1，X_2，…，X_m，若各自的 n 阶累计量 $\kappa_n(1)$，$\kappa_n(2)$，…，$\kappa_n(m)$ 存在，则 $\eta=X_1+\ldots+X_m$ 的累计量为 $\kappa_n=\kappa_n(1)+\kappa_n(2)+\ldots+\kappa_n(m)$。

（4）线性变换 $\eta=aX+b$,则 $\kappa_{1\eta}=a\kappa_{1X}+b$，$\kappa_{n\eta}=a^n\kappa_{nX}$ （$n\geq 2$）。

令 $z=\sum_{j=1}^{\infty}v_j\frac{t^j}{j!}$，$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots..$，

则可以得出

$\kappa_1=v_1$，$\kappa_2=v_2-v_1^2$，$\kappa_3=v_3-3v_1v_2^2+2v_1^3$，

$\kappa_4=v_4-4v_3v_1-3v_2^2+12v_1^2v_2-6v_1^4$，……

用 μ_n 来表示 n 阶中心矩来表示累计量，则有:

$\kappa_2=\mu_2=\sigma^2$，$\kappa_3=\mu_3$，$\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$，……

附录三、Gram-Charlier 展开级数

统计理论中，Gram-Charlier证明，随机变量密度函数可以用正态分布函数和它的导数以级数形式来表示，即:

$$f(x)=\varphi(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{j!}\frac{d^j\varphi}{dx^j}$$

其中 $c_j=(-1)^j\int_{-\infty}^{+\infty}H_j(x)f(x)dx$，它的前四项为:

$c_1=c_2=0$，$c_3=-\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}$，$c_4=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\kappa_4}{\sigma^4}=\frac{\kappa_3}{\kappa_2^2}$。

$H_j(x)$ 为 j 阶Hermit多项式，它的前四项为:

$H_0(x)=1$，$H_1(x)=-x$，$H_2(x)=x^2-1$，$H_3(x)=-x^3+3x$。

$\varphi(x)$ 为标准化后的标准正态分布函数。

风险提示

本文旨在对所研究问题的主要关注点进行分析，因此对市场及相关交易做了一些合理假设，但这样会导致建立的模型以及基于模型所得出的结论并不能完全准确地刻画现实环境。而且由于分析时采用的相关数据都是过去的时间序列，因此可能会与未来真实的情况出现偏差。

广发金融工程研究小组

罗　军：　首席分析师，华南理工大学理学硕士，2010 年进入广发证券发展研究中心。
俞文冰：　首席分析师，CFA，上海财经大学统计学硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。
安宁宁：　资深分析师，暨南大学数量经济学硕士，2011 年进入广发证券发展研究中心。
史庆盛：　分析师，华南理工大学金融工程硕士， 2011 年进入广发证券发展研究中心。
马普凡：　分析师，英国拉夫堡大学金融数学专业，2014 年进入广发证券发展研究中心。
张　超：　分析师，中山大学理学硕士， 2012 年进入广发证券发展研究中心。

广发证券—行业投资评级说明

买入：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 10%以上。
持有：　预期未来 12 个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-10%～+10%。
卖出：　预期未来 12 个月内，股价表现弱于大盘 10%以上。

广发证券—公司投资评级说明

买入：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 15%以上。
谨慎增持：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 5%-15%。
持有：　预期未来 12 个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-5%～+5%。
卖出：　预期未来 12 个月内，股价表现弱于大盘 5%以上。

联系我们

	广州市	深圳市	北京市	上海市
地址	广州市天河北路 183 号大都会广场 5 楼	深圳市福田区金田路 4018 号安联大厦 15 楼 A 座 03-04	北京市西城区月坛北街 2 号月坛大厦 18 层	上海市浦东新区富城路 99 号震旦大厦 18 楼
邮政编码	510075	518026	100045	200120
客服邮箱	gfyf@gf.com.cn			
服务热线	020-87555888-8612			

免责声明