考虑非预期基差效应的期指对冲模型构建方法研究

——标准β对冲模型的一种扩展形式

叶涛　资深分析师
电话：021-60750623
eMail：yetao@gf.com.cn
执业编号：S0260512030002

汪鑫　分析师
电话：021-60750626
eMail：gfwangxin@gf.com.cn
执业编号：S0260112030158

股票资产的β对冲与Delta对冲

1、对冲策略的本质是将资产未来收益率的分布予以收窄、降低或者最小化未来不确定性的一种手段，标准的风险对冲计算的基础是衍生品合约的定价是合理的。

2、股票资产常见的风险对冲方式有β对冲和 Delta 对冲两种，β对冲对于股票资产的使用并无限制，但仅限于使用线性衍生工具；而 Delta 对冲对于衍生工具的使用无限制，但股票资产仅限于衍生工具的标的资产。

3、如果使用线性衍生工具和与其对应的标的资产构建对冲组合，那么在这种情况下β对冲与 Delta 对冲是完全等效的，比如使用股指期货对其标的现货价格指数组合进行风险对冲就属于两者等效的情况。如果使用非线性的衍生工具和非合约标的资产来构建对冲组合，那么在这种情况下就需要β对冲和 Delta 对冲的结合使用，比如使用指数期权对一般的股票现货组合进行风险对冲就属于两者结合使用的情况。

考虑非预期基差效应的期指对冲模型

1、除了市场交易性因素之外，期货合约与远期合约在定价特征上也存在诸多不同，例如持有期间现金流的分布、多空双方保证金风险的不对等、交割方式与损益结算的差异等，因此期货合约的实际基差水平不仅包括合理基差，而且也受到非预期基差效应的影响。

2、考虑非预期基差效应的期指对冲比率是由股票现货组合的β值与期指对冲比率的修正系数共同决定的，期指对冲比率的修正系数是关于非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比与相关系数的函数，非预期的基差效应对期指对冲比率的影响仅是通过期指对冲比率的修正系数来反映的。

3、股票现货组合的β值是标准β对冲模型中所使用的期指对冲比率，仅与股票现货组合的结构有关，而与期指合约的定价无关；期指对冲比率的修正系数仅与期指合约的定价有关，而与具体的股票现货组合无关。

4、股票现货组合的结构与期指合约的定价水平是确定期指对冲比率的两个独立因素，考虑非预期基差效应的期指对冲模型将以上两个可明确离析的影响因素相结合，是在考虑期指合约定价因素的条件下更具有一般意义的期指对冲模型。若不考虑非预期的基差效应影响，那么该模型就会简化为标准的β对冲模型，或者说标准的β模型是考虑非预期基差效应的期指对冲模型简化后的一种特例。

实证检验

1、在设定的样本外检验区内波动率比的动态预测值基本都维持在20%-40%的范围内，自2011年6月以来相关系数的动态预测值基本稳定在-0.2至-0.6的范围内。

2、2010年4季度至2011年1季度，标准的β对冲模型均存在一定程度的过度对冲，使得对冲组合整体上留有净空的系统性风险敞口，幅度大致在10%-20%；2011年2季度以来，标准的β对冲模型均存在一定程度的对冲不足，使得对冲组合整体上留有净多的系统性风险敞口，幅度大致在5%-10%。

2、当使用期指下月、当季和下季合约为对冲工具时，考虑非预期基差效应的期指对冲模型相对于标准β对冲模型的优势更为明显。

3、若使用期指下月合约为对冲工具，那么参数估计期限的拉长对于期指对冲比率的修正效率由一定的正向贡献；而若使用当季和下季合约为对冲工具，那么参数估计期限的变动对于期指对冲比率的修正效率影响不大。

目录索引

一、 基于股指期货的α对冲策略 3
二、 股票资产的风险对冲 4
三、 考虑非预期基差效应的期指对冲模型 5
(一) 期现套利与风险对冲 5
(二) 合约的价格与合约的价值 7
(三) 非预期的基差效应与期指对冲比率的修正 7
(四) 期指对冲比率的修正效率 9
四、 双变量 BEKK-GARCH(1,1,1)模型 10
五、 实证检验 12
(一) 实证检验的方法说明 12
(二) 非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比 12
(三) 非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的相关系数 15
(四) 期指对冲比率的修正系数 17
(五) 期指对冲比率的修正效率 19

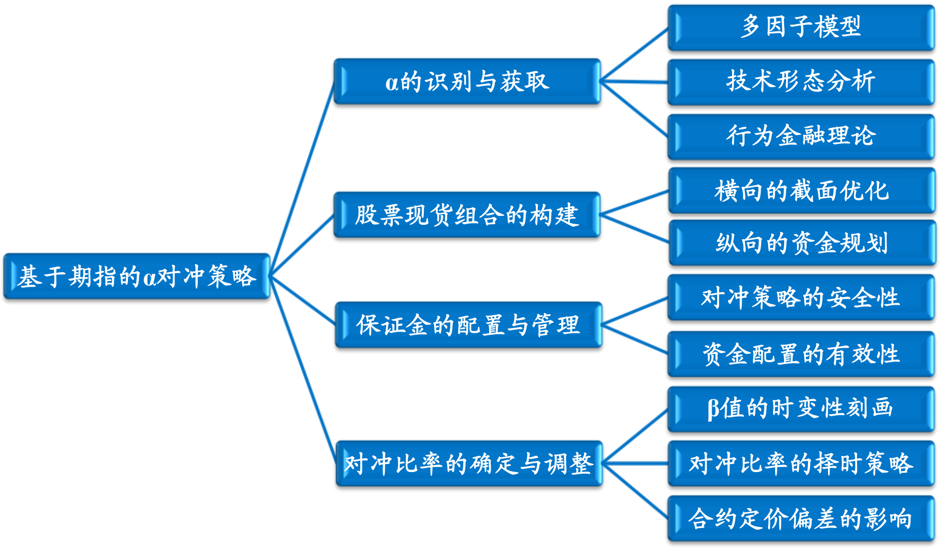
图表索引

图 1: 基于股指期货的α对冲策略 3
图 2: 波动率比的动态预测值—当月合约 13
图 3: 波动率比的动态预测值—下月合约 13
图 4: 波动率比的动态预测值—当季合约 14
图 5: 波动率比的动态预测值—下季合约 14
图 6: 相关系数的动态预测值—当月合约 15
图 7: 相关系数的动态预测值—下月合约 15
图 8: 相关系数的动态预测值—当季合约 16
图 9: 相关系数的动态预测值—下季合约 16
图 10: 期指对冲比率的修正系数—当月合约 17
图 11: 期指对冲比率的修正系数—下月合约 17
图 12: 期指对冲比率的修正系数—当季合约 18
图 13: 期指对冲比率的修正系数—下季合约 18
图 14: 期指对冲比率的修正效率—实测值 19

表 1: 股票资产的β对冲与 Delta 对冲的特征对比 4
表 2: β对冲与 Delta 对冲的适用条件对比 5

一、 基于股指期货的α对冲策略

图1：基于股指期货的α对冲策略



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

基于股指期货的卖出套保策略仅是针对一个已经存在的股票现货组合进行系统性风险的对冲，因此仅需要考虑期指持仓层面上的策略构建与调整；而基于股指期货的α对冲策略则是需要在股票现货组合与期指持仓两个层面上相互配合，需要考虑策略的同步构建与调整。

基于股指期货的α对冲策略主要会涉及到4个方面：其中与股票现货组合相关的包括2个方面，即α的识别与获取以及股票现货组合的构建；而与期指持仓相关的也包括2个方面，即对冲比率的确定与调整以及保证金的配置与管理。

1、从量化投资的角度看，α的识别与获取常见的方法包括偏重基本面选股的多因子模型、偏重技术面选股的形态识别方法以及捕捉市场定价无效而产生获利机会的行为金融理论。

2、股票现货组合的构建包括横向与纵向2个方面："横向"是指以调整股票现货组合风险收益特征为目标的截面优化方法，适用于一般的股票现货组合；而"纵向"是以指提高资金使用效率为目标的资金规划方法，仅适用于可以提前预见或者规划某个投资机会的进入与退出时点型的策略。

3、期指保证金的配置与管理需要兼顾对冲策略的安全性与资金配置的有效性，要求既能够有效确保不因保证金账户内的资金余额不足而导致对冲策略非预期的提前被迫终结，同时又不会不过度的占用资金以致降低资产的整体配置效率。

广发金工团队在以上3个方面均有相对比较成熟的研究成果。本文是以对冲比率的确定与调整作为主要研究内容，着重探讨了期指合约的定价偏差对期指对冲率的影响以及考虑非预期基差效应的期指对冲模型构建方法。

二、 股票资产的风险对冲

表1：股票资产的β对冲与Delta对冲的特征对比

类型 比较	β对冲	Delta对冲
数值意义	衍生品合约与股票资产的持有市值比例	股票资产与衍生品合约的持有份数比例
对冲目标	对冲组合收益率波动的最小化	对冲组合市值波动的最小化
适用的衍生品合约	线性工具（Gamma＝0）	无限制
适用的股票资产	无限制	仅限于衍生品合约的标的资产

数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

金融资产的风险是指未来收益率的不确定性，对冲策略的本质并非是提高资产未来收益率的期望水平，而是将资产未来收益率的分布予以收窄、降低或者最小化未来不确定性的一种手段。股票资产的风险包括非系统性的风险与系统性的风险：非系统性的风险只能通过分散投资来化解，分散的效率取决于组合内各资产之间的平均相关系数；系统性的风险可以通过使用衍生工具予以对冲，对冲的效率取决于两者之间的关联程度。

股票资产常见的风险对冲方式有β对冲和Delta对冲两种，表1总结了两者的特征差异。（1）β对冲中的β值表示在所构建的对冲组合中衍生品合约与股票现货持有市值的比例，而Delta对冲中的Delta值表示在所构建的对冲组合中衍生品合约与股票现货持有份数的比例，当然这个并不是两者的本质差异，持有市值的比例与持有份数的比例可以唯一的对应与换算。（2）β对冲的目标是对冲组合收益率波动的最小化，而Delta对冲的目标是对冲组合市值波动的最小化。若对冲组合市值的波动达到最小，那么必然会使得对冲组合收益率的波动也达到最小，但反之并不成立，所以从这个角度看Delta对冲的目标相对更加严格。（3）β对冲对于股票资产的使用并无限制，但仅限于使用线性衍生工具；而Delta对冲对于衍生工具的使用无限制，但股票资产仅限于衍生工具的标的资产。

表2: β对冲与Delta对冲的适用条件对比

衍生品合约 \ 股票资产	衍生品合约的标的资产	非衍生品合约的标的资产
线性工具	β对冲与Delta对冲等效	β对冲
非线性工具	Delta对冲	β对冲与Delta对冲结合

数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

如果使用线性衍生工具和与其对应的标的资产构建对冲组合，那么在这种情况下β对冲与Delta对冲是完全等效的，比如使用股指期货对其标的现货价格指数组合进行风险对冲就属于两者等效的情况。

如果使用非线性的衍生工具和非合约标的资产来构建对冲组合，那么在这种情况下就需要β对冲和Delta对冲的结合使用，比如使用指数期权对一般的股票现货组合进行风险对冲就属于两者结合使用的情况。

三、 考虑非预期基差效应的期指对冲模型

(一) 期现套利与风险对冲

我们来考虑这样一个例子。令T时刻到期的期指合约t时刻的价格为F_t^T，与其对应的现货价格指数为I_t，某一标准的现货价格指数组合P的市值为V_t^P，为了简化分析令合约乘数为1。

若以现货价格指数组合P与期指合约构建期现套利组合，那么t时刻所需的期指合约张数$N_t^{Arb}=\frac{V_t^P}{I_t}$；若以期指合约来对冲现货价格指数组合$P$的风险，那么由标准β对冲模型计算的$t$时刻所需的期指合约张数$N_t^{\beta}=\beta_t^P\frac{V_t^P}{F_t^T}=\frac{V_t^P}{F_t^T}$。

对于标的现货价格指数组合的β对冲与期现套利的两种情形极其相似，但所需的期指合约张数又不完全相同。既然是使用线性衍生工具对标的资产进行风险对冲，β对冲与Delta对冲应该是完全等效的，那么由Delta对冲计算的t时刻所需的期指合约张数

$$N_t^{\delta}=\frac{N_t^P}{\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}}=\frac{V_t^P}{I_t\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}}。$$

若要使得对于标的现货价格指数组合的β对冲与Delta对冲完全等效，即$N_t^{\beta}=N_t^{\delta}$，那么就有：

$$\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}=\frac{F_t^T}{I_t} \qquad 式(1)$$

由无风险套利定价关系，即由市值为$\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}I_t$的现货组合和市值为$F_t^T$的期货合约构建无风险套利组合，那么有：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_t^T}{\partial t}dt+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_t^T}{\partial I_t^2}dI_t^2}_{Gamma=0}=(\underbrace{0}_{不是F_t^T}-\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}I_t)\underbrace{(r_f-q)}_{对冲收益率}dt\\&\Rightarrow\frac{\partial F_t^T}{\partial t}=F_t^T(q-r_f)\end{aligned} \qquad 式(2)$$

在式（2）中需要注意的有两点：

1、线性衍生工具的Gamma值恒为零；

2、由于线性衍生工具的静态价值为零，因此对冲组合t时刻的价值为$-\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}I_t$，而并非是$F_t^T-\frac{\partial F_t^T}{\partial I_t}I_t$，这与常见的非线性衍生工具的定价偏微分方程有所差异，我们会在本章下一节来解释这个问题。

能够使得式（1）、式（2）以及期指期末强制收敛均成立的充分条件是期指合约的定价始终满足持货成本模型的要求，即$F_t^T=I_t\exp[(r_f-q)(T-t)]$。

基于以上的分析，我们就可以解释为何对于标的资产的期现套利和风险对冲所需的期指合约张数是不同的。首先，衍生品合约的定价总是假定标的资产的定价是合理的，两者之间价差的不合理仅是由于衍生品合约定价的不合理造成的。其次，期现套利计算的基础是衍生品合约定价的不合理，而标准的风险对冲计算的基础是衍生品合约的定价是合理的。

（二） 合约的价格与合约的价值

判断合约的定价是否合理必然会涉及到合约的价格与合约的价值2个概念。合约的价格反映了合约多空双方即时的供求关系，合约的静态价值反映了持有合约所能带来的未来期望收益的贴现值，合约的动态价值反映了多空双方在交易过程中信用风险的累积与转移。

除了Gamma值是否恒为零之外，线性衍生工具与非线性衍生工具还存在另外一个本质差异，非线性衍生工具任意时点的静态价值与动态价值都是存在的，而线性衍生工具任意时点的静态价值都不存在，仅可能存在动态价值。

假定t时刻的现货价格为100，所对应的某个期货合约和期权合约的定价都是合理的，分别为105和20，那么在该时刻开仓持有期权合约多头的投资者所能获得的合约价值为20，而开仓持有期货合约多头的投资者所能获得的合约价值为0。

同属线性衍生工具，远期合约与期货合约的动态价值也并不相同。假定t时刻条款完全相同的远期合约和期货合约报价均为105，有两个投资者均以该价格分别开仓持有了远期合约和期货合约的多头，远期合约与期货合约的收盘报价均为107，收盘时点距离合约到期日的累计资金成本为5%，且标的资产在合约剩余期限内都无现金分红。

收盘时点远期合约的多头持有者所能获得的合约价值为1.9，期货合约的多头持有者在当日结算前所能获得的合约价值为2，在当日结算后获得现金流为2，期指多头的持仓成本被重置为107，合约价值变为0。

（三） 非预期的基差效应与期指对冲比率的修正

持货成本模型反映的是远期合约的定价，在合约定价合理的条件下远期合约与标的资产的价差，即合理基差，仅是反映的资金成本r_f、标的资产的现金流出速度q与剩余期限$T-t$的影响，两者瞬时收益率的差应当是合理基差的变动速度$q-r_f$：

$$\begin{cases} F_t^T = I_t \exp[(r_f - q)(T-t)] \\ dF_t^T = \dfrac{\partial F_t^T}{\partial I_t} dI_t + \dfrac{\partial F_t^T}{\partial t} dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dF_t^T}{F_t^T} - \frac{dI_t}{I_t} = \underbrace{(q - r_f)}_{合理基差的变动速度} dt \qquad 式(3)$$

除了市场交易性因素之外，期货合约与远期合约在定价特征上也存在诸多不同，例如持有期间现金流的分布、多空双方保证金风险的不对等、交割方式与损益结算的差异等，因此期货合约的实际基差水平不仅包括合理基差，而且也受到非预期基差效应的影响，因此两者t日收益率的差表现为合理基差的变动速度$q-r_f$与非预期基差的变动速度ϕ_t之和：

$$r_t^F - r_t^I = \underbrace{q - r_f}_{合理基差的变动速度} + \underbrace{\phi_t}_{非预期基差的变动速度} \qquad 式(4)$$

为了解决在考虑非预期基差效应影响下期指对冲比率如何确定的问题，我们令t日

收盘时刻某个股票现货组合 P 的市值为 V_t^P，并以市场单因素模型描述该组合的 t 日收益率：

$$r_t^P = \alpha^P + \beta^P r_t^I + \varepsilon_t^P \qquad \text{式(5)}$$

在 t 日收盘时刻由股票现货组合 P 与期指空头以对冲比率 λ_{t+1}^P 构建对冲组合 H，即期指空头的持仓市值为 $\lambda_{t+1}^P \cdot V_t^P$。由于线性衍生工具任意时点的静态价值都不存在，因此该时刻对冲组合 H 的市值即为该时刻股票现货组合 P 的市值 V_t^P。

对冲组合 H 在 $t+1$ 日的市值变化 $\Delta V_{t+1}^H = V_t^P \cdot r_{t+1}^P - \lambda_{t+1}^P \cdot V_t^P \cdot r_{t+1}^F$，对应的收益率波动 $\sigma^2\left[r_{t+1}^H\right]$ 可表示为：

$$\begin{aligned}\sigma^2\left[r_{t+1}^H\right] &= (\beta^P - \lambda_{t+1}^P)^2\sigma^2\left[r_{t+1}^I\right] + (\lambda_{t+1}^P)^2\sigma^2\left[\phi_{t+1}\right] \\ &-2(\beta^P - \lambda_{t+1}^P)\lambda_{t+1}^P Cov\left[r_{t+1}^I, \phi_{t+1}\right] + \sigma^2\left[\varepsilon_{t+1}^P\right]\end{aligned} \qquad \text{式(6)}$$

由对冲组合 H 在 $t+1$ 日的收益率波动 $\sigma^2\left[r_{t+1}^H\right]$ 的最小化就能得到股票现货组合 P 在 $t+1$ 日考虑非预期基差效应的期指对冲比率 $\tilde{\lambda}_{t+1}^P$。

令 $\dfrac{\partial \sigma^2\left[r_{t+1}^H\right]}{\partial \lambda_{t+1}^P} = 0$ 且始终有 $\dfrac{\partial^2 \sigma^2\left[r_{t+1}^H\right]}{\partial (\lambda_{t+1}^P)^2} > 0$，那么就有：

$$\tilde{\lambda}_{t+1}^P = \arg\min_{\lambda_{t+1}^P}\left\{\sigma^2\left[r_{t+1}^H\right]\right\} = \beta^P(1+\eta_{t+1}) \qquad \text{式(7)}$$

定义 η_{t+1} 为 $t+1$ 日的期指对冲比率修正系数，表示在非预期基差效应的影响下每单位股票现货组合系统性风险的暴露度（每单位 β 值）所需的期指对冲比率调整值：

$$\eta_{t+1} = -\frac{(\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + \rho_{t+1}^{\phi,I}\sigma_{t+1}^{\phi|I}}{1 + (\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + 2\rho_{t+1}^{\phi,I}\sigma_{t+1}^{\phi|I}} \qquad \text{式(8)}$$

其中：$\sigma_{t+1}^{\phi|I} = \dfrac{\sigma\left[\phi_{t+1}\right]}{\sigma\left[r_{t+1}^I\right]}, \rho_{t+1}^{\phi,I} = \rho\left[r_{t+1}^I, \phi_{t+1}\right]$ 分别为 $t+1$ 日非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比与相关系数。

由式（7）、式（8）的结论可知：

1、若 $\eta_{t+1} > 0$，即 $\tilde{\lambda}_{t+1}^P > \beta^P$，那么说明标准的 β 对冲模型存在对冲不足，对冲组

合整体上留有净多的系统性风险敞口；

2、若$\eta_{t+1}<0$，即$\tilde{\lambda}_{t+1}^{P}<\beta^{P}$，那么说明标准的β对冲模型存在过度对冲，对冲组合整体上留有净空的系统性风险敞口。

若不考虑非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的相关性，即假定$\rho_{t+1}^{\phi,I}=0$，那么式（7）、式（8）可简化为：

$$\begin{cases}\eta_{t+1}=-\dfrac{(\sigma_{t+1}^{\phi|I})^{2}}{1+(\sigma_{t+1}^{\phi|I})^{2}}<0\\ \tilde{\lambda}_{t+1}^{P}=\dfrac{\beta^{P}}{1+(\sigma_{t+1}^{\phi|I})^{2}}<\beta^{P}\end{cases} \qquad 式(9)$$

如果我们不考虑非预期的基差效应影响，即假定$\phi_{t+1}=0$，或者说期指合约的定价始终满足持货成本模型的要求，那么就有期指对冲比率的修正系数$\eta_{t+1}=0$，标准的β对冲模型无需修正，即$\tilde{\lambda}_{t+1}^{P}=\beta^{P}$。

综合上述的分析可以得出以下结论：

1、考虑非预期基差效应的期指对冲比率是由股票现货组合的β值与期指对冲比率的修正系数共同决定的，非预期的基差效应对期指对冲比率的影响仅是通过期指对冲比率的修正系数来反映的，而与具体的股票现货组合无关。

2、股票现货组合的β值是标准β对冲模型中所使用的期指对冲比率，仅与股票现货组合的结构有关，而与期指合约的定价无关；期指对冲比率的修正系数仅与期指合约的定价有关，而与具体的股票现货组合无关。

3、股票现货组合的结构与期指合约的定价水平是确定期指对冲比率的两个独立因素，考虑非预期基差效应的期指对冲模型将以上两个可明确离析的影响因素相结合，是在考虑期指合约定价因素的条件下更具有一般意义的期指对冲模型。若不考虑非预期的基差效应影响，那么该模型就会简化为标准的β对冲模型，或者说标准的β模型是考虑非预期基差效应的期指对冲模型简化后的一种特例。

（四） 期指对冲比率的修正效率

在考虑非预期的基差效应影响下，如果仍使用标准的β对冲模型，那么对冲组合收益率的波动可表述为：

$$\sigma^{2}\left[r_{t+1}^{H}\middle|\lambda_{t+1}^{P}=\beta^{P}\right]=\underbrace{\sigma^{2}\left[\varepsilon_{t+1}^{P}\right]}_{与对冲无关}+(\beta^{P}\sigma_{t+1}^{\phi|I})^{2}\sigma^{2}\left[r_{t+1}^{I}\right] \qquad 式(10)$$

而考虑非预期基差效应的期指对冲模型所对应的对冲组合收益率的波动可表述为：

$$\sigma^2\left[r_{t+1}^H \middle| \lambda_{t+1}^P = \tilde{\lambda}_t^P\right]$$

$$= \underbrace{\sigma^2\left[\varepsilon_{t+1}^P\right]}_{\text{与对冲无关}} + (\beta^P \cdot \sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 \frac{1-(\rho_{t+1}^{\phi,I})^2}{(1-\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + 2(1+\rho_{t+1}^{\phi,I})\sigma\left[\phi_{t+1}\right]} \sigma^2\left[r_{t+1}^I\right] \quad \text{式(11)}$$

式（10）、式（11）也说明了股票现货组合的非系统性风险$\sigma^2\left[\varepsilon_{t+1}^P\right]$是无法通过衍生工具的对冲予以消除的，因此无论使用哪一种期指对冲模型，股票现货组合的非系统性风险始终会残留。

我们令式（10）、式（11）做差来比较两种期指对冲模型的效果：

$$\sigma^2\left[r_{t+1}^H \middle| \lambda_{t+1}^P = \tilde{\lambda}_{t+1}^P\right] - \sigma^2\left[r_{t+1}^H \middle| \lambda_{t+1}^P = \beta^P\right]$$

$$= -(\beta^P)^2 \frac{\left[(\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + \rho_{t+1}^{\phi,I} \cdot \sigma_{t+1}^{\phi|I}\right]^2}{(1-\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + 2(1+\rho_{t+1}^{\phi,I})\sigma\left[\phi_{t+1}\right]} \sigma^2\left[r_{t+1}^I\right] < 0 \quad \text{式(12)}$$

由式（12）可知：理论上考虑非预期基差效应的期指对冲模型总是能获得相对更低的对冲组合收益率的波动，即在对冲效果上总是优于标准的β对冲模型。

由式（12）的结果我们也能够定义$t+1$日的期指对冲比率的修正效率θ_{t+1}，也就是考虑非预期基差效应的期指对冲模型相对于标准的β对冲模型在每单位股票现货组合系统性风险暴露度（每单位β值）上所能产生的对冲组合收益率波动的降幅：

$$\theta_{t+1} = \frac{(\sigma_{t+1}^{\phi|I} + \rho_{t+1}^{\phi,I})^2}{(1-\sigma_{t+1}^{\phi|I})^2 + 2(1+\rho_{t+1}^{\phi,I})\sigma\left[\phi_{t+1}\right]} > 0 \quad \text{式(13)}$$

由式（13）可知，期指对冲比率的修正效率与期指对冲比率的修正系数有类似的性质，两者均是关于非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比与相关系数的函数，均仅与期指合约的定价有关，而与具体的股票现货组合无关。

四、 双变量BEKK-GARCH(1,1,1)模型

在本文第三章中我们阐述了考虑非预期基差效应的期指对冲模型的构建方法与修正效率的衡量方式，其中都涉及到非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比与相关系数两个重要参数，本章我们将阐述如何使用双变量GARCH模型来获得以上两个重要参数的动态预测，即$\hat{\sigma}_{T+1|T}^{\phi|I}, \hat{\rho}_{T+1|T}^{\phi,I}$。

GARCH类模型能够捕捉金融资产收益率序列波动的积聚性与持续性特征，又能有助于解释收益率分布的厚尾特征。单变量GARCH模型只能用于刻画单资产延时间轴方向上收益率波动的积聚性和持续性，而多变量GARCH模型不仅能够刻画多资产风险的纵向传递，更重要的是能够测度各资产之间风险传递或者波动溢出效应的强度和协同持续，因此就能用来估计多个资产时变的波动率与相关系数，进而就能得到我们所需的期指对冲比率修正系数的动态预测值。

单变量GARCH模型与多变量GARCH模型在均值方程的构造形式上并无本质区别，两者的主要差异在于条件协方差方程的结构形式、递推关系与所用的参数化方法。条件协方差矩阵的合理参数化需要兼顾模型结构的简洁性和适宜性，以双变量GARCH模型为例，不同的参数化方法所对应的条件协方差方程的参数个数并不相同：

1、标准VEC模型需要估计21个参数；

2、对角VEC模型需要估计9个参数；

3、标准BEKK模型需要估计11个参数；

4、对角BEKK模型需要估计7个参数。

双变量BEKK-GARCH(1,1,1)模型的优势在于容易满足条件协方差矩阵的正定性要求，该模型的条件协方差方程，即t日的条件协方差矩阵$H_{t|t-1}$可表述为：

$$H_{t|t-1} = C \cdot C' + A \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} \cdot \vec{\varepsilon}'_{t-1} \cdot A' + B \cdot H_{t-1|t-2} \cdot B' \qquad \text{式(14)}$$

其中：$H_{t|t-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{t|t-1}^{I,I} & \sigma_{t|t-1}^{I,\phi} \\ \sigma_{t|t-1}^{I,\phi} & \sigma_{t|t-1}^{\phi,\phi} \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon}_{t-1} = \left(\varepsilon_{t-1}^{I}, \varepsilon_{t-1}^{\phi}\right)'$分别为现货价格指数收益率与非预期基差变动速度$t$日的条件协方差矩阵与$t-1$日（已实现）的残差向量，参数矩阵$A, B, C$均为二维方阵且$C$为下三角矩阵，条件协方差方程所需估计的参数总计为11个。

A, B中的对角元素$\{a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}\}$反映了各资产收益率的方差与协方差序列的自相关性，表征单资产风险的纵向传递效应；非对角元素$\{a_{12}, a_{21}, b_{12}, b_{21}\}$反映了各资产收益率的方差与协方差序列的相互影响，表征风险传递或者波动溢出效应；该模型能够被唯一识别的充分条件是$c_{11}, c_{22}, a_{11}, b_{11}$同时为正。

若给定估计样本$\left\{\left(r_1^{I}, \phi_1\right), \left(r_2^{I}, \phi_2\right), \cdots, \left(r_T^{I}, \phi_T\right)\right\}$，那么双变量BEKK模型基于正态分布假设的对数似然函数：

$$L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\left|H_{t|t-1}\right| + \vec{\varepsilon}_t' H_{t|t-1}^{-1} \vec{\varepsilon}_t\right] \qquad \text{式(15)}$$

该模型所需的11个参数的估计值均可由极大似然估计得到，那么由T日的条件协方差矩阵$H_{T|T-1}$和（已实现的）残差向量$\vec{\varepsilon}_T$的一步向前预测就能得到$T+1$日的条件协方差矩阵$H_{T+1|T} = \begin{pmatrix} \sigma_{T+1|T}^{I,I} & \sigma_{T+1|T}^{I,\phi} \\ \sigma_{T+1|T}^{I,\phi} & \sigma_{T+1|T}^{\phi,\phi} \end{pmatrix}$，进而就能得到$T+1$日非预期基差的变动速度与现货

价格指数收益率的波动率比$\hat{\sigma}^{\phi|I}_{T+1|T}=\sqrt{\dfrac{\sigma^{\phi,\phi}_{T+1|T}}{\sigma^{I,I}_{T+1|T}}}$与相关系数$\hat{\rho}^{\phi,I}_{T+1|T}=\dfrac{\sigma^{I,\phi}_{T+1|T}}{\sqrt{\sigma^{I,I}_{T+1|T}\cdot\sigma^{\phi,\phi}_{T+1|T}}}$。

五、实证检验

（一）实证检验的方法说明

1、数据对象

数据对象包括沪深300价格指数的日收益率序列以及沪深300指数期货当月、下月、当季和下季合约的日收益率序列。

2、计算内容

计算内容包括非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比与相关系数的动态预测值、期指对冲比率的修正系数与期指对冲比率的修正效率。

3、预测模型与预测方法

预测模型设定为双变量BEKK-GARCH(1,1,1)模型，并采用按日滚动外推预测。

4、参数估计期限

参数估计期限设定为10种不同的时间窗口，分别取30、40、50至120个交易日。

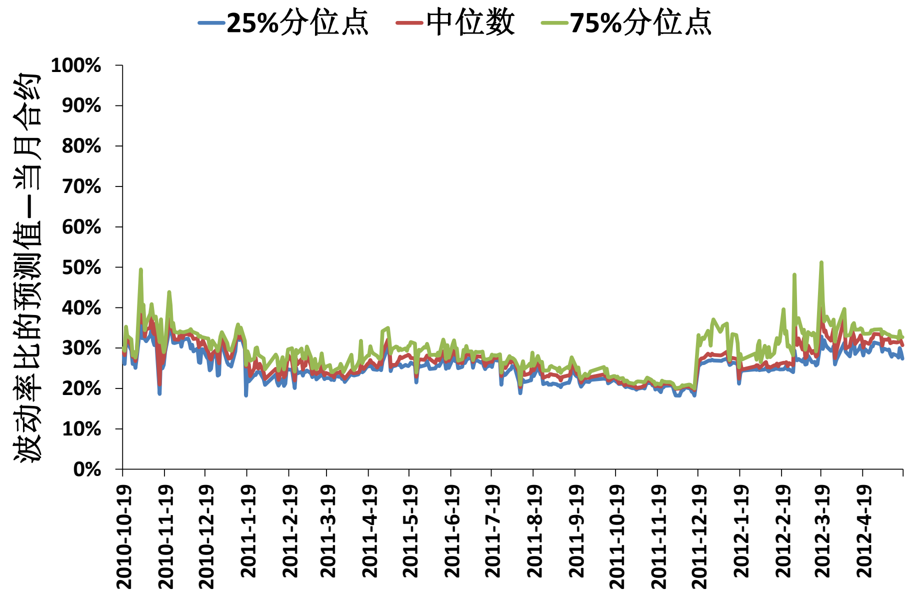
5、样本外的检验区间

样本外的检验区间设定为2010-10-19至2012-5-18，总计386个交易日。

（二）非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的波动率比

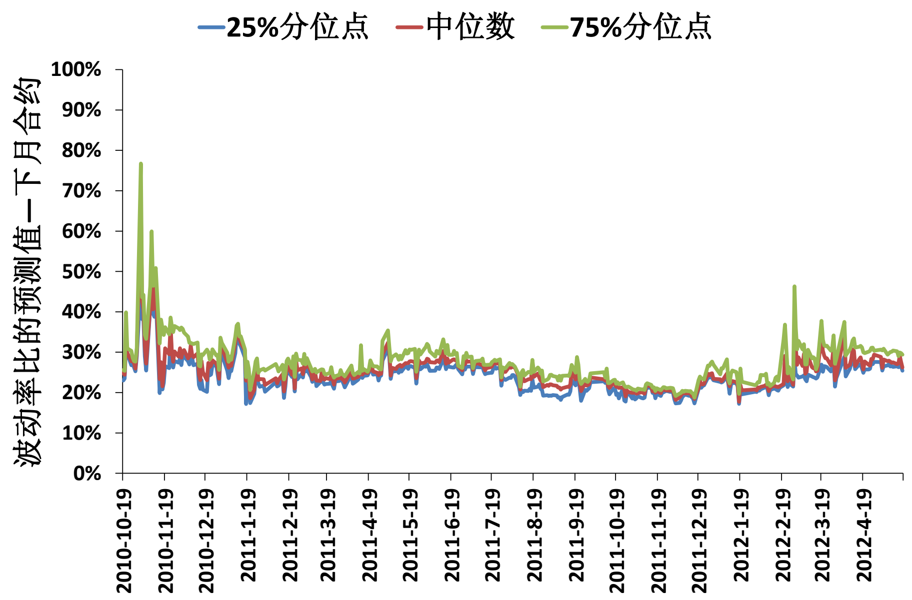
由于我们选取了10种不同的参数估计期限，因此在每个样本外的时间截面上都可以得到10个不同的波动率比的动态预测值。为了显示不同参数估计期限所对应的动态预测值的平均水平和差异程度，我们将每个时间截面上动态预测值的25%分位点、中位数与75%分位点构成的时间序列，并按4种不同剩余期限的期指合约分别进行计算。

图2：波动率比的动态预测值—当月合约



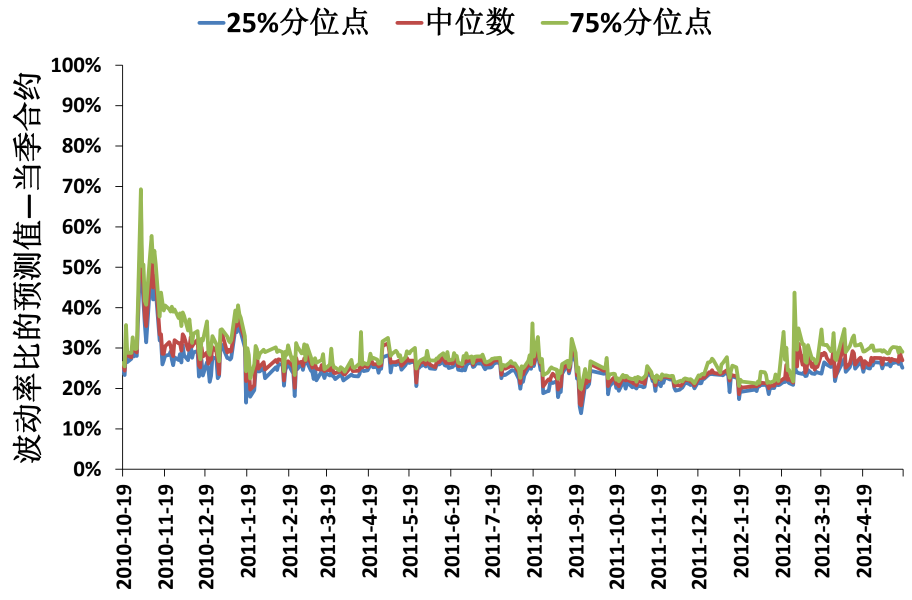
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图3：波动率比的动态预测值—下月合约



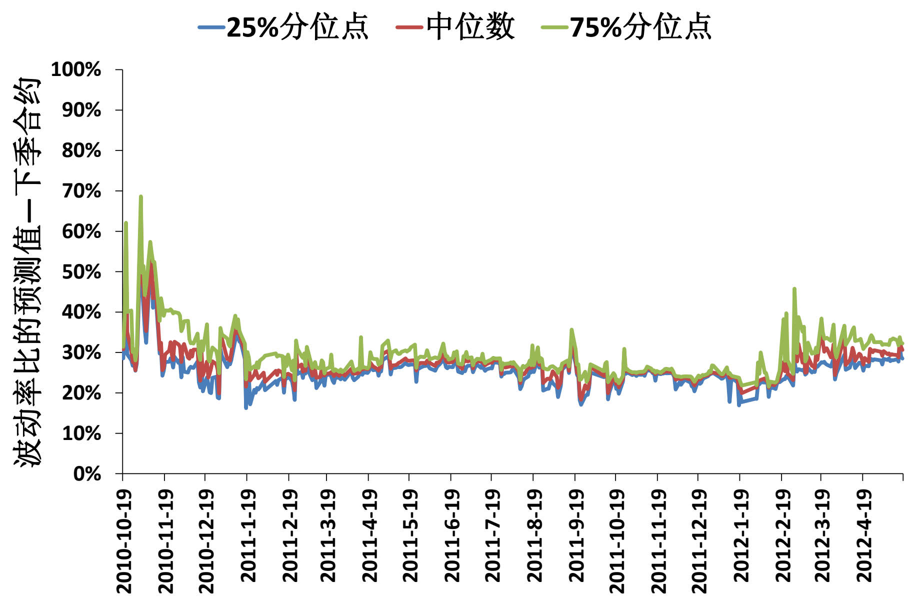
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图4：波动率比的动态预测值—当季合约



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图5：波动率比的动态预测值—下季合约



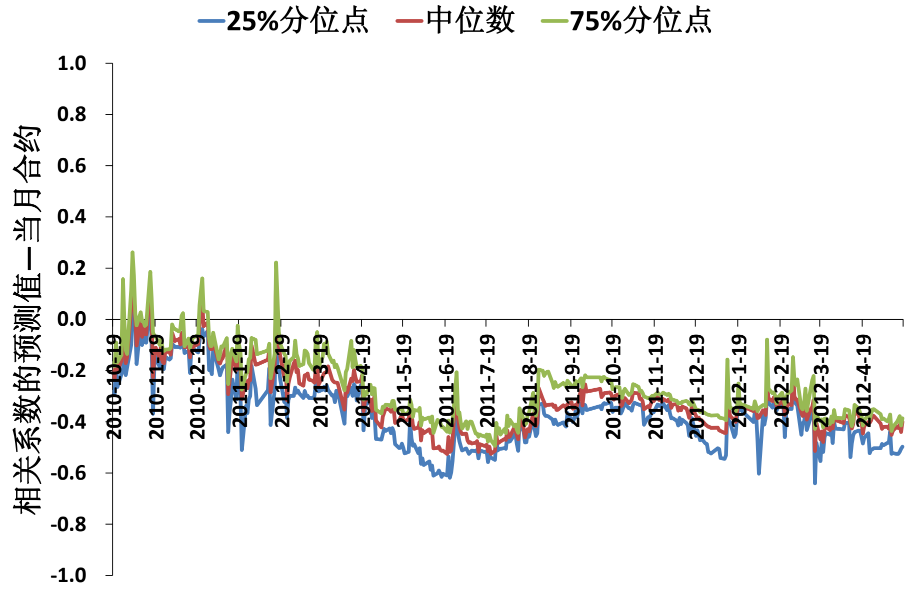
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

由图2至图5的结果可以看出，在设定的样本外检验区间内波动率比的动态预测值基本都维持在20%-40%的范围内。

（三） 非预期基差的变动速度与现货价格指数收益率的相关系数

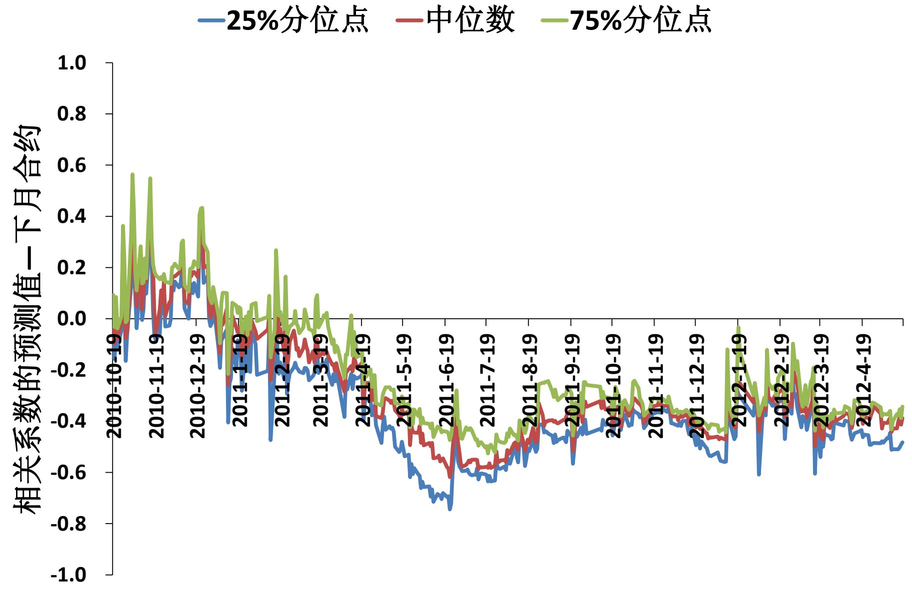
与波动率比的动态预测方法完全相同，我们也是将每个样本外时间截面上相关系数动态预测值的25%分位点、中位数与75%分位点构成的时间序列，并按4种不同剩余期限的期指合约分别进行计算。

图6：相关系数的动态预测值—当月合约



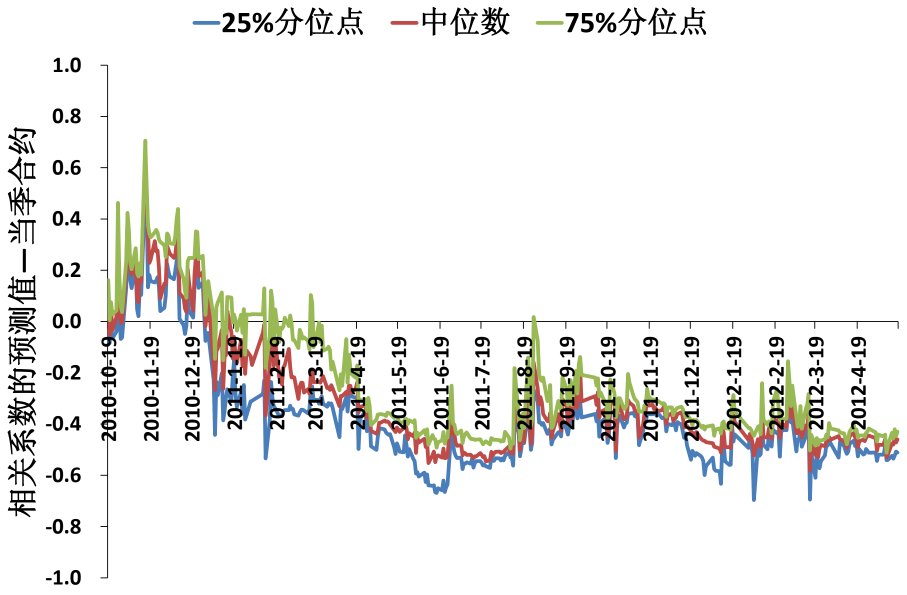
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图7：相关系数的动态预测值—下月合约



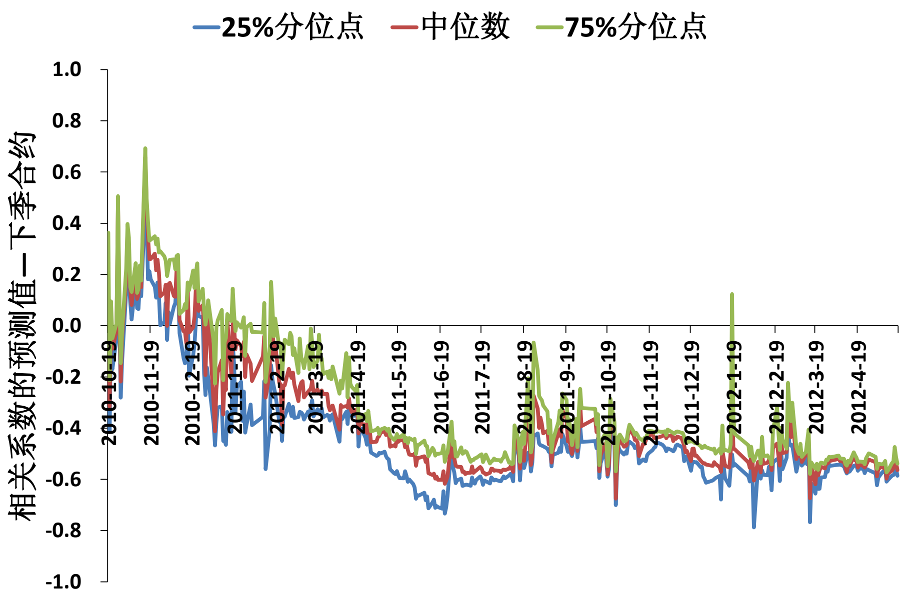
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图8：相关系数的动态预测值—当季合约



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图9：相关系数的动态预测值—下季合约



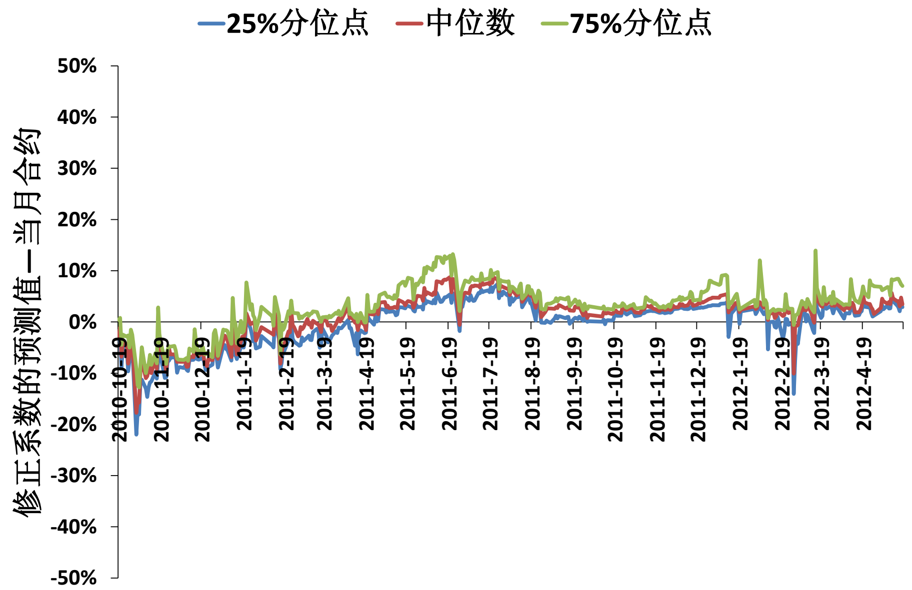
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

由图6至图9的结果可以看出，自2011年6月以来相关系数的动态预测值基本稳定在-0.2至-0.6的范围内。

（四） 期指对冲比率的修正系数

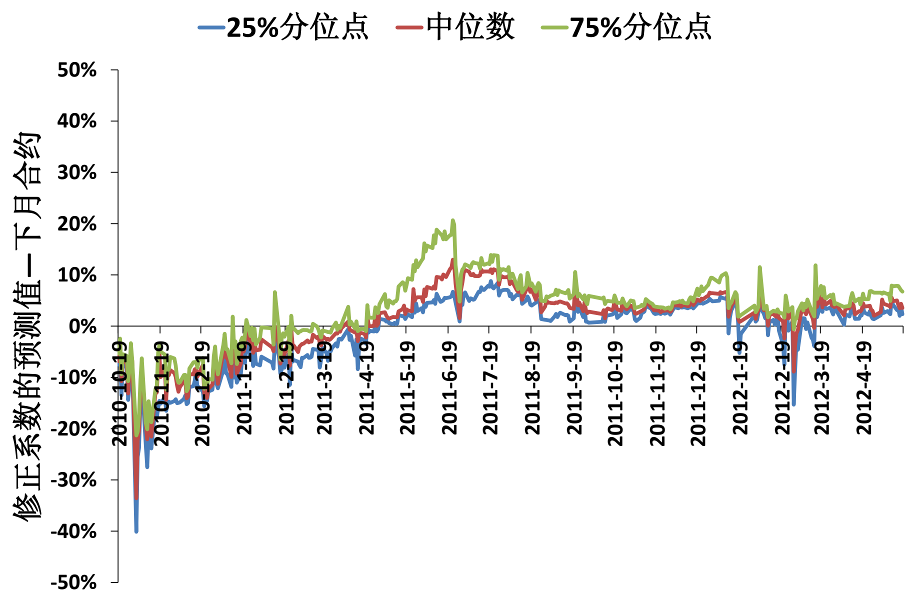
将已得到的波动率比与相关系数的动态预测值代入式（8）就能够在每个样本外的时间截面上得到10个不同的期指对冲比率的修正系数，我们同样将每个样本外时间截面上期指对冲比率修正系数的25%分位点、中位数与75%分位点构成的时间序列，并按4种不同剩余期限的期指合约分别进行计算。

图10：期指对冲比率的修正系数—当月合约



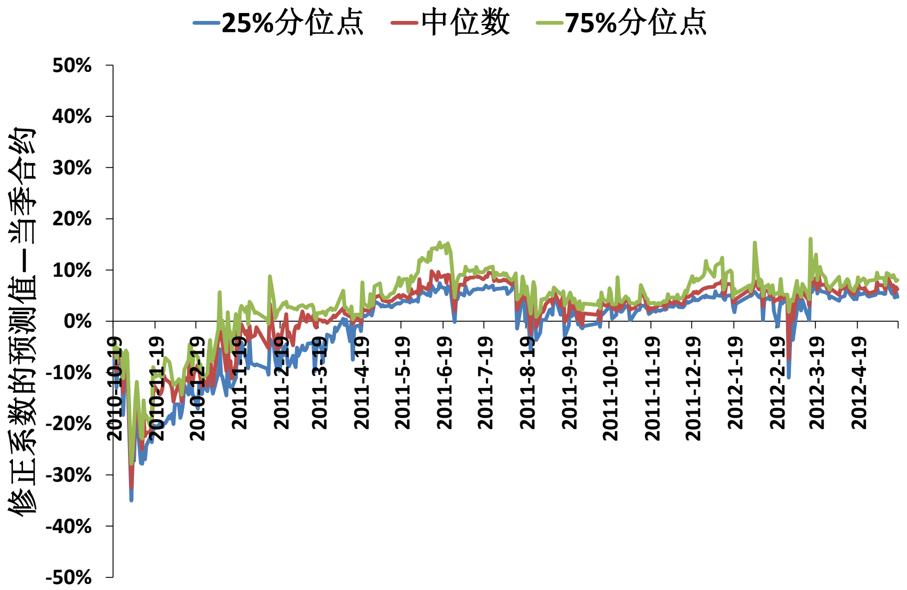
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图11：期指对冲比率的修正系数—下月合约



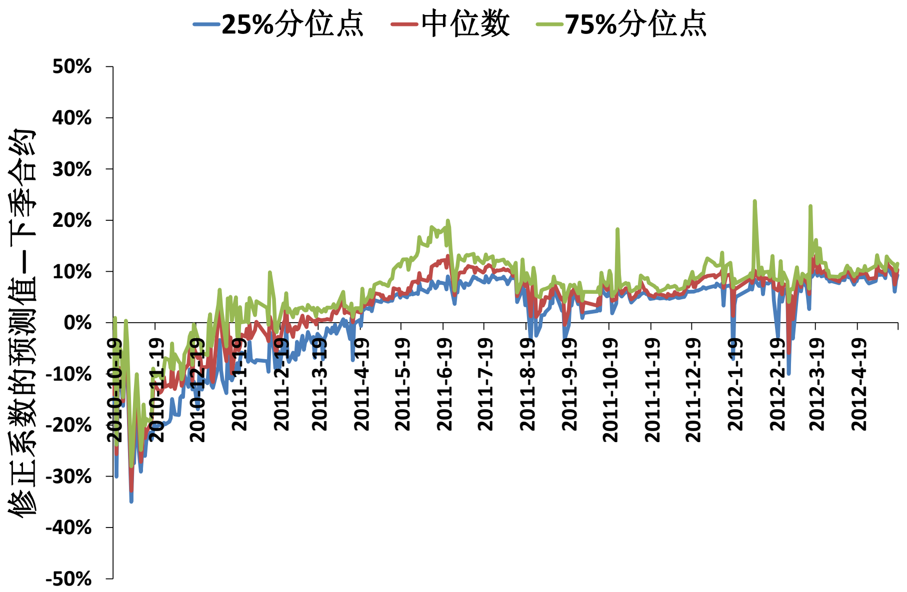
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图12：期指对冲比率的修正系数—当季合约



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图13：期指对冲比率的修正系数—下季合约



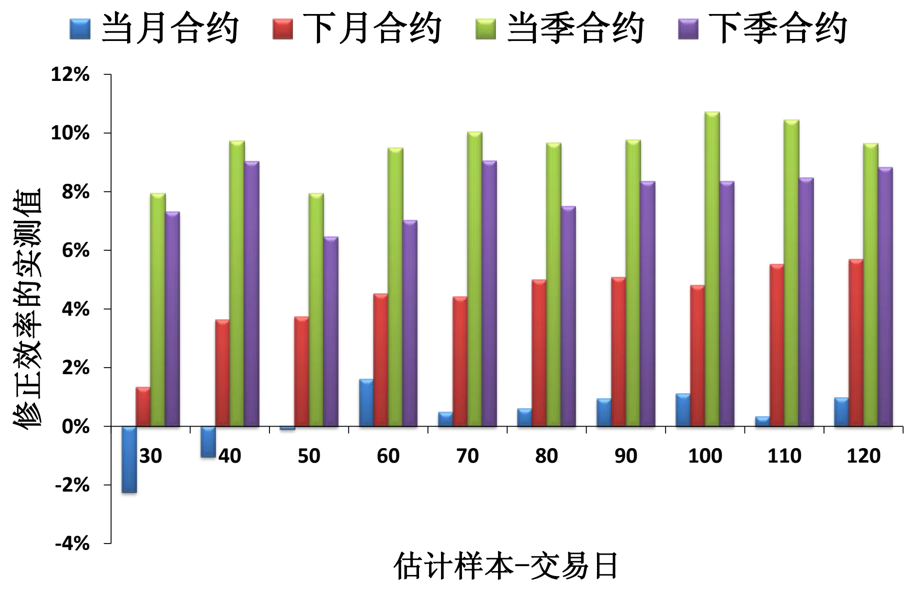
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

由图10至图13的结果可以看出：2010年4季度至2011年1季度，标准的β对冲模型均存在一定程度的过度对冲，使得对冲组合整体上留有净空的系统性风险敞口，幅度大致在10%-20%；2011年2季度以来，标准的β对冲模型均存在一定程度的对冲不足，使得对冲组合整体上留有净多的系统性风险敞口，幅度大致在5%-10%。

（五） 期指对冲比率的修正效率

将已得到的波动率比与相关系数的动态预测值代入式（13）也能够在每个样本外的时间截面上得到10个不同的期指对冲比率的修正效率，但是为了更加真实的反映实际效果，我们按不同的参数估计期限计算样本外检验区间内实际的期指对冲比率修正效率。

图14：期指对冲比率的修正效率—实测值



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图14显示了4种不同剩余期限的期指合约在取不同参数估计期限时所对应的期指对冲比率修正效率的实测值，由计算的结果可以得出以下结论：

1、由式（13）可知，期指对冲比率的修正效率在理论上一定是正的，但是图14的结果显示期指当月合约在参数估计期限在50个交易日以内时样本外检验区间内修正效率的实测值出现负值，那么说明GARCH模型对波动率比与相关系数的动态预测与实际状况有一定的差距。

2、当使用期指下月、当季和下季合约为对冲工具时，考虑非预期基差效应的期指对冲模型相对于标准β对冲模型的优势更为明显。

3、若使用期指下月合约为对冲工具，那么参数估计期限的拉长对于期指对冲比率的修正效率由一定的正向贡献；而若使用当季和下季合约为对冲工具，那么参数估计期限的变动对于期指对冲比率的修正效率影响不大。

广发金融工程研究小组

罗军，首席分析师，华南理工大学理学硕士，2010 年进入广发证券发展研究中心。

俞文冰，首席分析师，CFA，上海财经大学统计学硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。

叶涛，资深分析师，CFA ，上海交通大学管理科学与工程硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。

安宁宁，资深分析师，暨南大学数量经济学硕士，2011 年进入广发证券发展研究中心。

胡海涛，分析师， 华南理工大学理学硕士， 2010 年进入广发证券发展研究中心。

夏潇阳， 分析师， 上海交通大学金融工程硕士， 2012 年进入广发证券发展研究中心。

汪鑫， 分析师， 中国科学技术大学金融工程硕士， 2012 年进入广发证券发展研究中心。

李明，分析师，伦敦城市大学卡斯商学院计量金融硕士，2010 年进入广发证券发展研究中心。

蓝昭钦，分析师， 中山大学理学硕士， 2010 年进入广发证券发展研究中心。

史庆盛，研究助理， 华南理工大学金融工程硕士， 2011 年进入广发证券发展研究中心。

张超， 研究助理， 中山大学理学硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。

相关研究报告

时变贝塔动态估计模型的预测效果检验：——基于均值回复过程的状态空间估计模型	叶涛	2012-06-21

	广州市	深圳市	北京市	上海市
地址	广州市天河北路 183 号大都会广场 5 楼	深圳市福田区民田路 178 号华融大厦 9 楼	北京市西城区月坛北街 2 号月坛大厦 18 层	上海市浦东南路 528 号上海证券大厦北塔 17 楼
邮政编码	510075	518026	100045	200120
客服邮箱	gfyf@gf.com.cn			
服务热线	020-87555888-8612			