波动率套利中的对冲参数探讨

史庆盛 S0260513070004
广发证券金融工程
2015年8月

CONTENTS目录

01

02

03

04

01

| 什么是波动率套利 |

>

隐含波动率与实际波动率

在Black-Scholes模型框架下，

期权定价

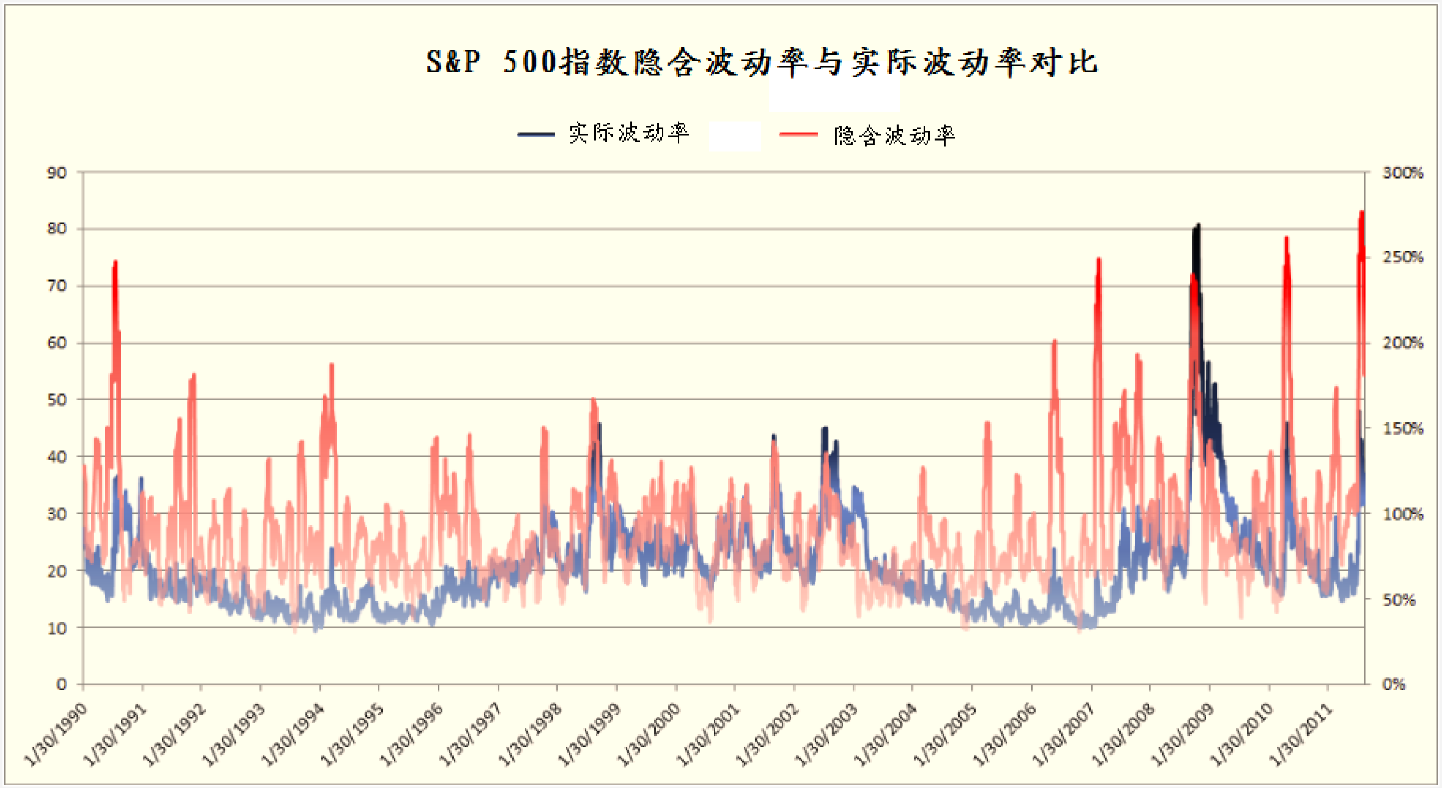
实际波动率 $\xrightarrow{\text{Black-Scholes公式}}$ 期权理论价格

计算隐含波动率

期权市场价格 $\xrightarrow{\text{Black-Scholes公式}}$ 隐含波动率

隐含波动率与实际波动率

绝大部分情况下，隐含波动率大于实际波动率



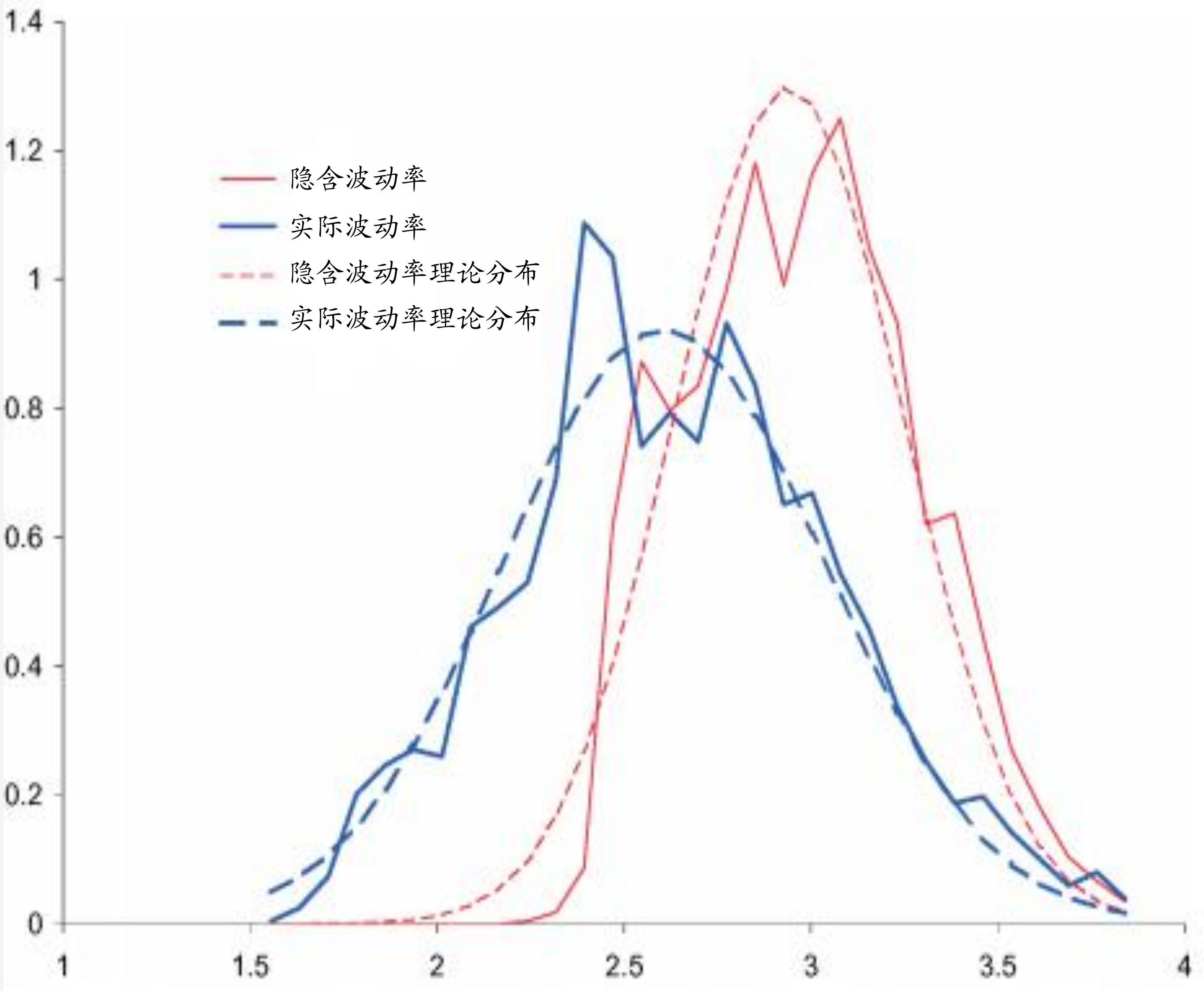
隐含波动率与实际波动率

- 均值：

  隐含波动率>实际波动率

- 方差

  实际波动率>隐含波动率



隐含波动率与实际波动率

当实际波动率与隐含波动率不相等时，是否有套利机会？

实际波动率 ≠ 隐含波动率

期权理论价格　　期权实际价格

套利空间！

隐含波动率与实际波动率

波动率套利的本质是统计套利，就像在捡压路机前的小金币。当市场出现大动荡时，市场的实际波动率往往会超过隐含波动率，此时该策略则会出现损失。

波动率方向交易与波动率套利区别

波动率方向交易

利润来自隐含波动率变化导致的期权价格变化

波动率套利

利润来自隐含波动率和实际波动率不同导致的价差

01

02

03

04

02

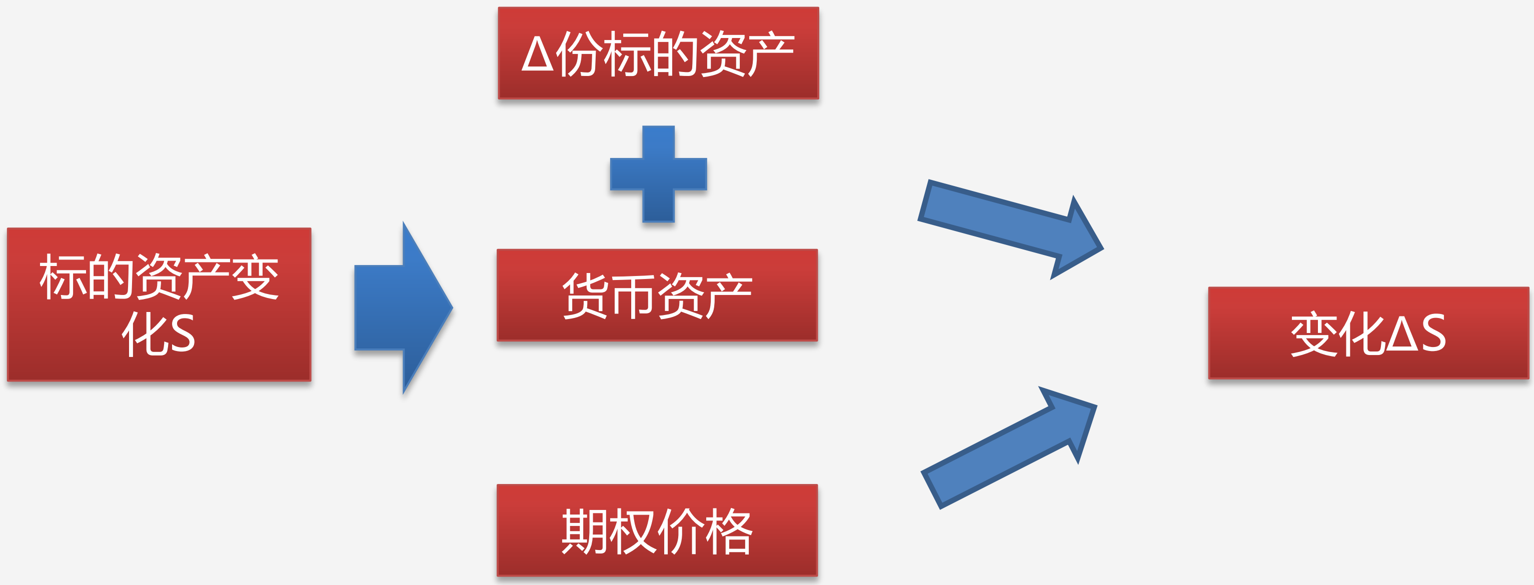
| B-S框架下的波动率套利 |

>

套利思路

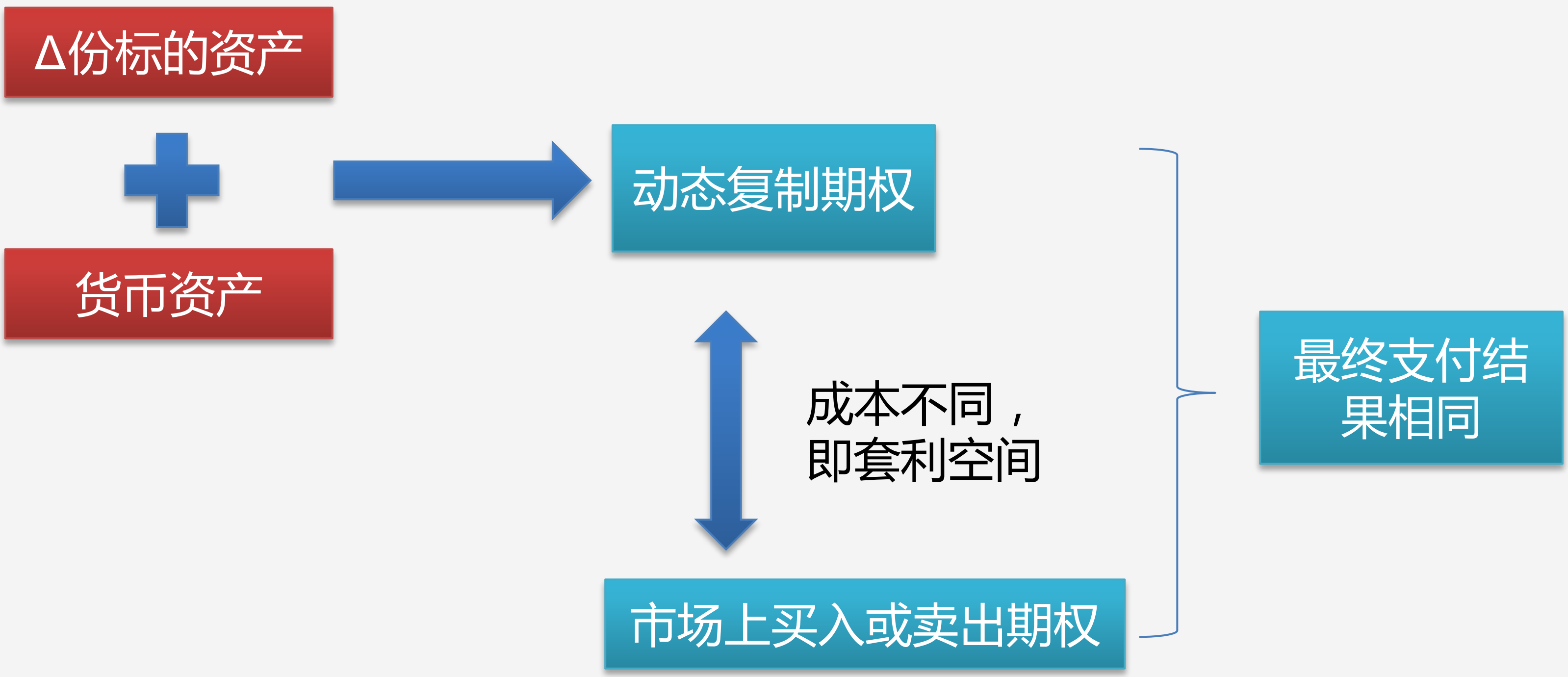
如何套利？——动态复制期权！

Black-Scholes框架下，Δ表示标的资产价格变化对于期权价格变化的影响。



套利思路

如何套利？——动态复制期权！

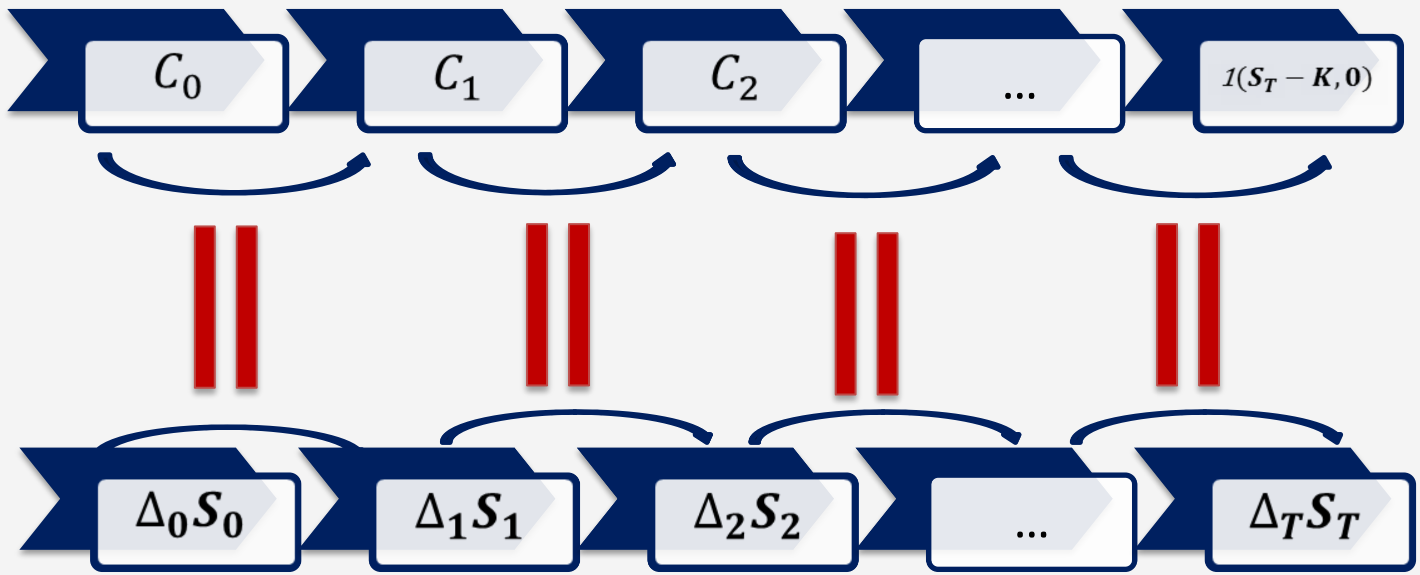


套利思路

- 组合一：一份来自期权市场的看涨期权
- 组合二：通过Delta头寸的现货来复制期权
- 对冲目标：到期时，两个组合有相同损益

期权头寸价值变动

现货组合价值变动



通过不断调整Delta头寸，使每一步两个组合的价值变动相等

套利思路

？如何计算对冲所需要的标的资产量，即Δ？

B-S定价公式

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1), \qquad d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

其中仅σ为未知量。

套利思路

?

σ到底应该取实际波动率与隐含波动率？

用实际波动率计算Delta

t_0日投资组合情况

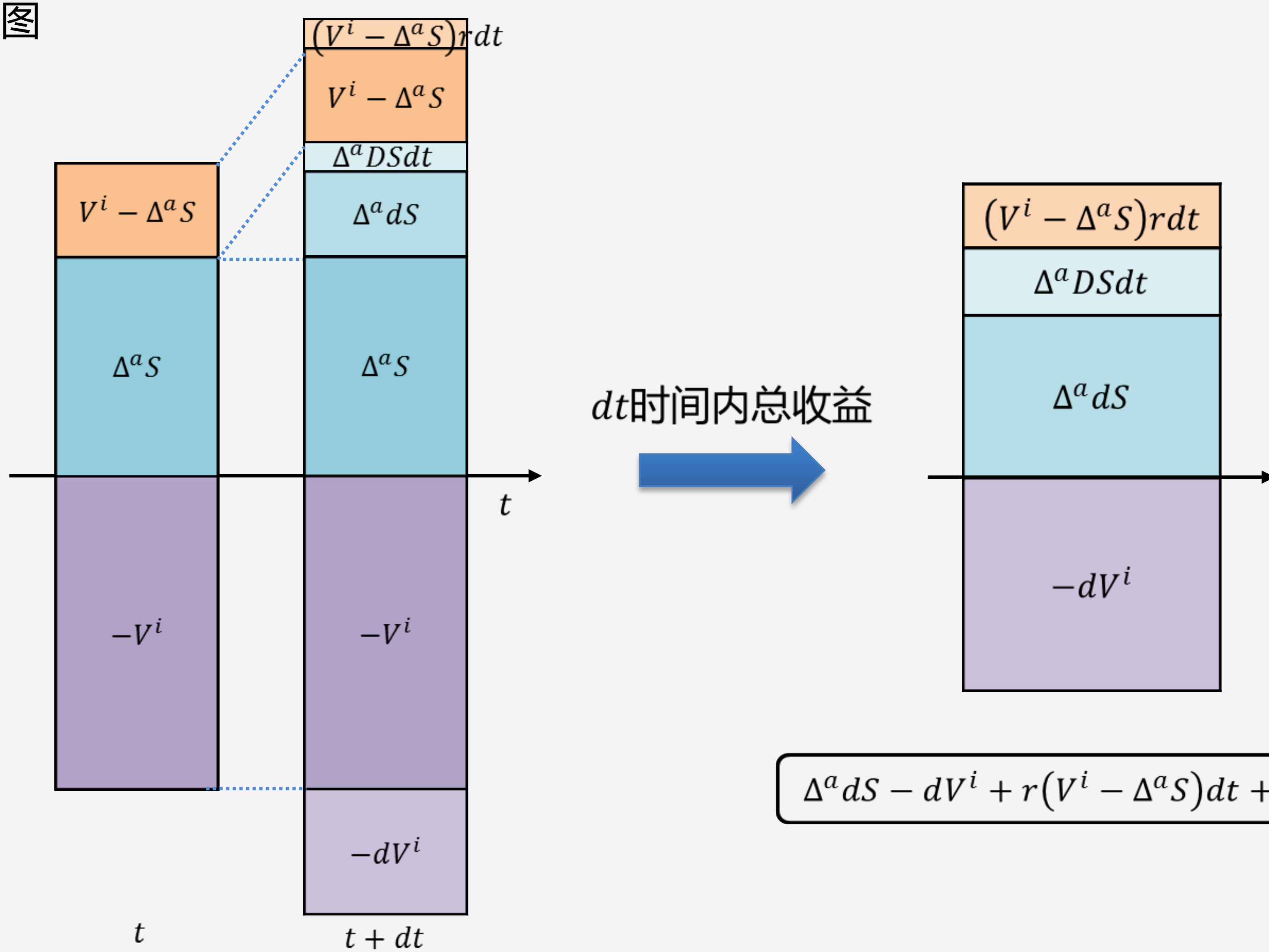
持有头寸	价值
期权	$-V^i$
股票	$\Delta^a S$
现金	$V^i - \Delta^a S$
总价值	0

$t_0 + dt$日投资组合情况

持有头寸	价值
期权	$-V^i - dV^i$
股票	$\Delta^a S + \Delta^a dS$
现金	$(V^i - \Delta^a S)(1 + rdt) + \Delta^a DSdt$
总价值	$\Delta^a dS - dV^i + r\left(V^i - \Delta^a S\right)dt + \Delta^a DSdt$

用实际波动率计算Delta的获利分析

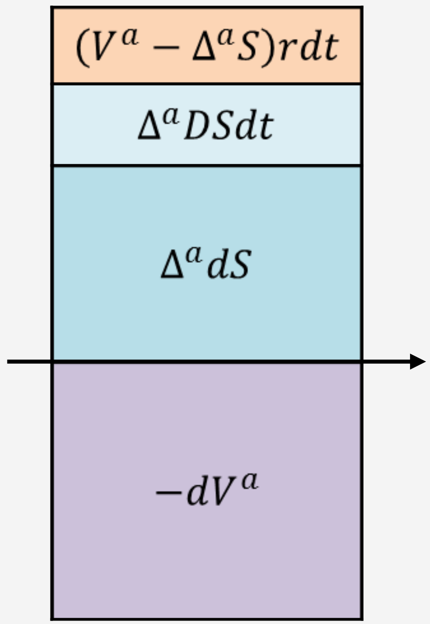
收益率示意图



$$\boxed{\Delta^a dS - dV^i + r(V^i - \Delta^a S)dt + \Delta^a DSdt}$$

用实际波动率计算Delta的获利分析

而隐含波动率和实际波动率相等时，期权定价正确，按照无套利原理，做Delta对冲的收益应为0，即：



$$\boxed{\Delta^a dS - dV^a + r(V^a - \Delta^a S)dt + \Delta^a DSdt=0}$$

用实际波动率计算Delta的获利分析

两式相减，得到：

$$\boxed{dV^a - dV^i + r(V^i - V^a)dt = e^{rt}d\left(e^{-rt}(V^a - V^i)\right)}$$

折现后，从t_0到T积分，得到总收益：

$$\boxed{\int_{t_0}^{T} e^{-r(t-t_0)}e^{rt}d\left(e^{-rt}(V^a - V^i)\right) = \left(1 - e^{-r(T-t_0)}\right)(V^i - V^a)}$$

蒙特卡洛模拟（用实际波动率计算Delta）

广发证券 GF SECURITIES

股价服从几何布朗运动：　$dS = \mu S dt + \sigma S dX$

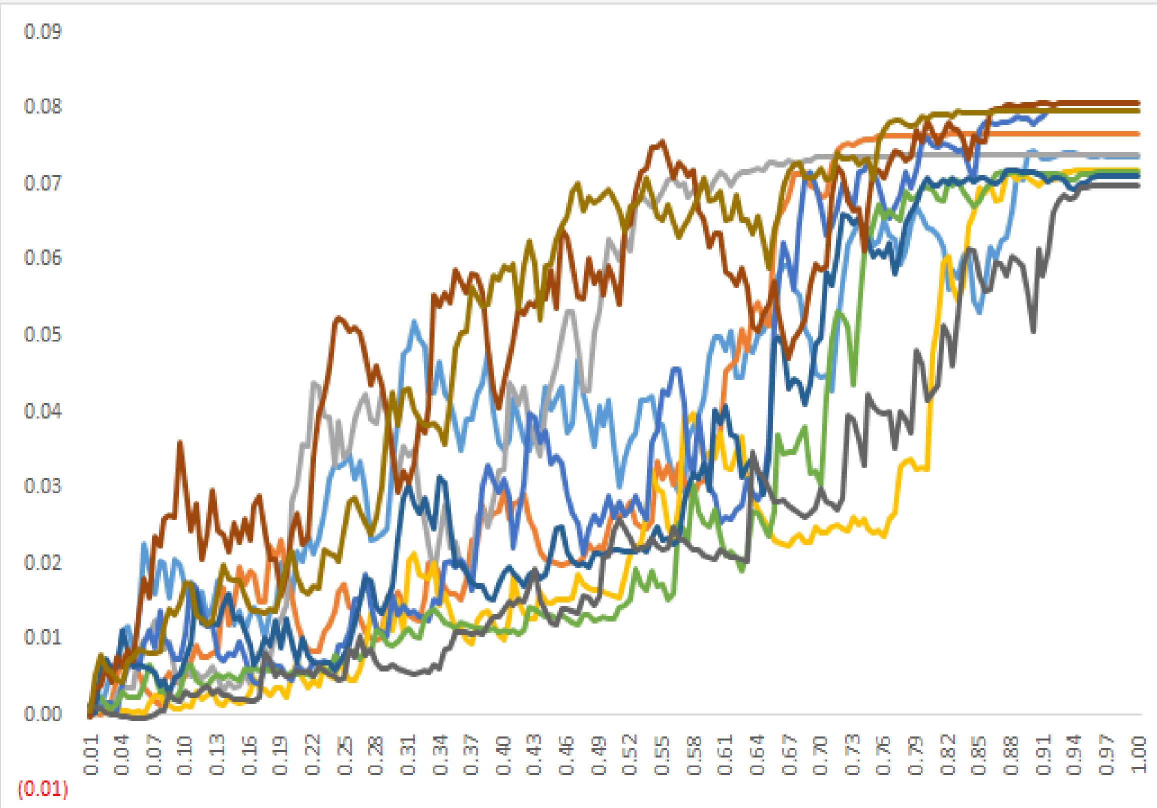
参数设置

参数类型	数值
隐含波动率 $\tilde{\sigma}$	0.2
实际波动率 σ	0.4
股价增长率 μ	0
模拟路径	10
步长 dt	0.005
利率 r	0.04
交易成本	0

期权价值被低估 → 买期权 + 卖空标的资产

蒙特卡洛模拟（用实际波动率计算Delta）

利用实际波动率对冲的蒙特卡洛模拟收益



结果均收敛于0.078左右

符合理论值与推导相符

但净值存在较大波动

净值存在较大波动的原因

总头寸

$$\Delta^{\alpha} dS - dV^{i} + r(V^{i} - \Delta^{\alpha} S)dt + \Delta^{\alpha} DSdt$$

对dV^{i}使用伊藤引理展开

$$-\left(\theta^{i} dt + \Delta^{i} dS + \frac{1}{2}\sigma^{2} S^{2}\Gamma^{i} d\right)t + \Delta^{a} dS + r\left(V^{i} - \Delta^{a} S\right)dt + \Delta^{a} DSdt$$

代入股价模型： $dS = \mu S dt + \sigma S dX$

以及B-S方程：$\theta^{i} + (r - D)S\Delta^{i} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{2} S^{2}\Gamma^{i} = rV^{i}$

$$\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{2} - \sigma^{2})S^{2}\Gamma^{i} dt + (\Delta^{a} - \Delta^{i})((\mu - r + D)Sdt + \sigma S\boxed{dX})$$

每一步头寸变化均与dX相关

净值存在较大波动

用隐含波动率计算Delta

t_0日投资组合情况

持有头寸	价值
期权	$-V^i$
股票	$\Delta^i S$
现金	$V^i - \Delta^i S$
总价值	0

$t_0 + dt$日投资组合情况

持有头寸	价值
期权	$-V^i - dV^i$
股票	$\Delta^i S + \Delta^i dS$
现金	$(V^i - \Delta^i S)(1 + rdt) + \Delta^i DSdt$
总价值	$\Delta^i dS - dV^i + r(V^i - \Delta^i S)dt + \Delta^i DSdt$

蒙特卡洛模拟（用隐含波动率计算Delta）

采用经典几何布朗运动

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

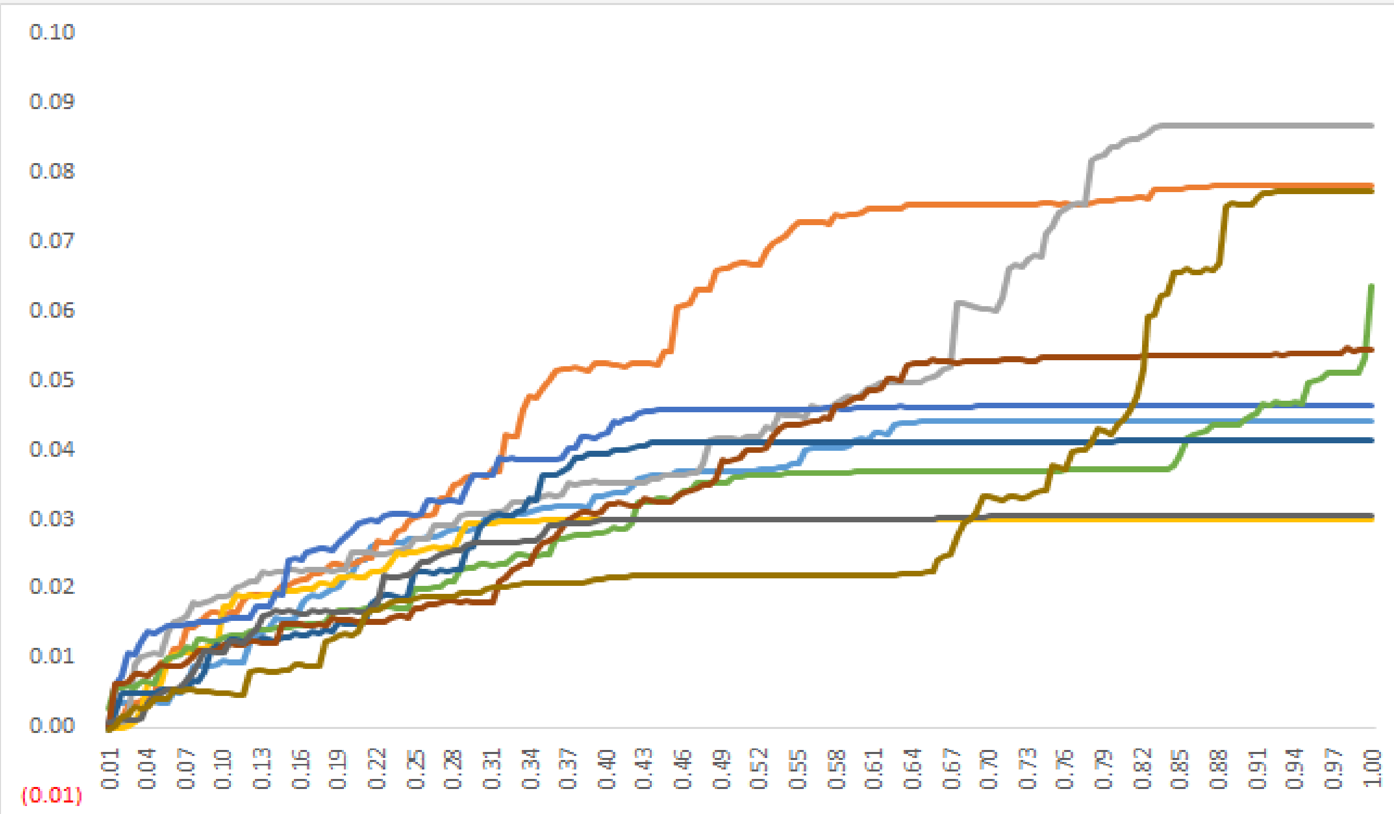
进行蒙特卡洛模拟

参数设置：

参数类型	数值
隐含波动率 $\tilde{\sigma}$	0.2
实际波动率 σ	0.4
股价增长 μ	0
模拟路径	10
步长 dt	0.005
利率 r	0.04
交易成本	0

蒙特卡洛模拟（用隐含波动率计算Delta）

利用隐含波动率对冲的蒙特卡洛模拟收益



- 净值处于平稳上升趋势
- 无大幅度震动
- 并不收敛于某个固定值

用隐含波动率计算Delta的获利分析

dt时间内获利：

$$\Delta^i dS - dV^i + r(V^i - \Delta^i S)dt + \Delta^i DSdt$$

对dV^i使用伊藤引理展开

$$-\left(\theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma^i dt\right) + \Delta^i dS + r(V^i - \Delta^i S)dt + \Delta^i DSdt$$

代入 $dS = \mu S dt + \sigma S dX$

$$\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2 - \sigma^2) S^2 \Gamma^i dt$$

折现后积分得到总获利

$$\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2 - \sigma^2) \int_{t_0}^{T} e^{-r(t-t_0)} \boxed{S^2} \Gamma^i dt$$

总获利依赖于股票价格路径

比较两种方法的优劣

利用实际波动率计算Delta		利用隐含波动率计算Delta
难以准确估计	计算波动率的准确性	方便准确估计
持有头寸期间可能亏损	收益率的回撤情况	持有头寸期间不会亏损
利润固定	最终利润的稳定性	利润有随机性

01

02

03

04

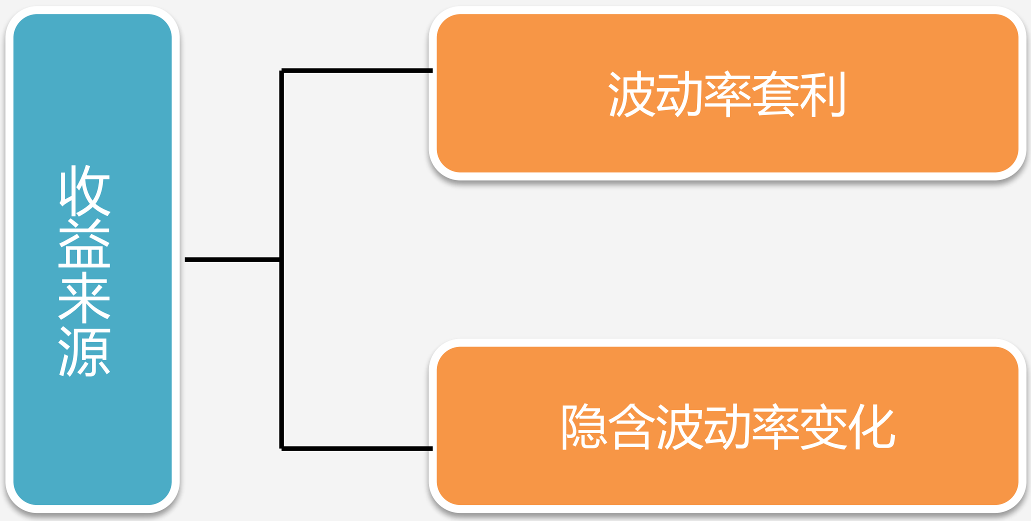
03

| 波动率变化时的套利收益 |

>

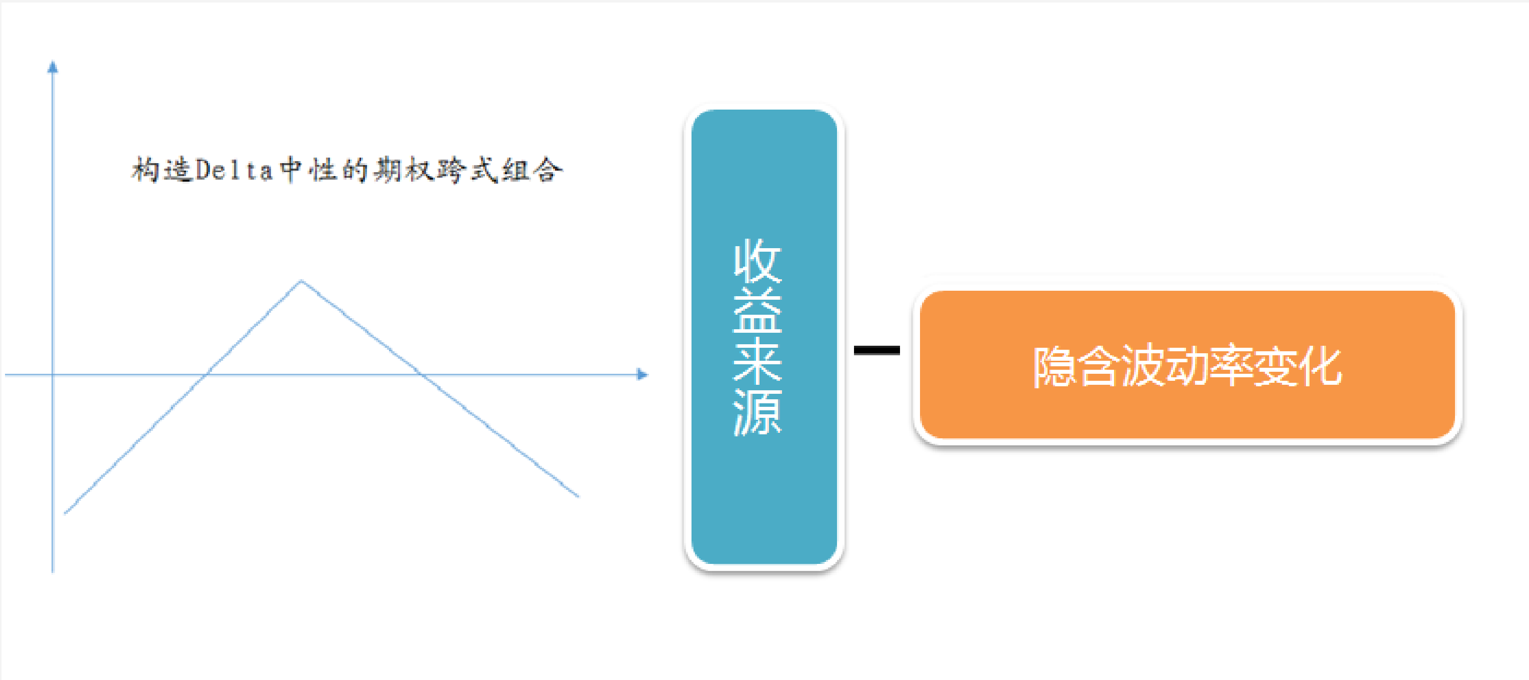
利用标的资产对冲的收益来源

持有期权并用标的资产对冲后的收益既来自于波动率套利，也来自于隐含波动率的变化。



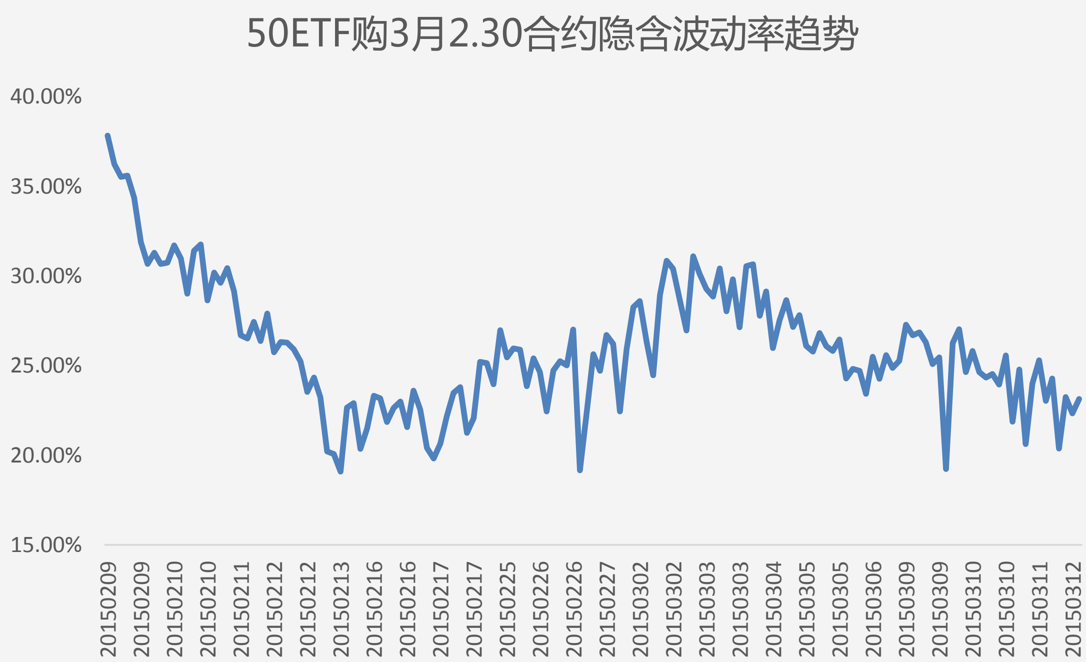
卖空跨式组合的收益来源

而构造Delta中性的期权跨式组合的利润来源则仅来自隐含波动率的变化



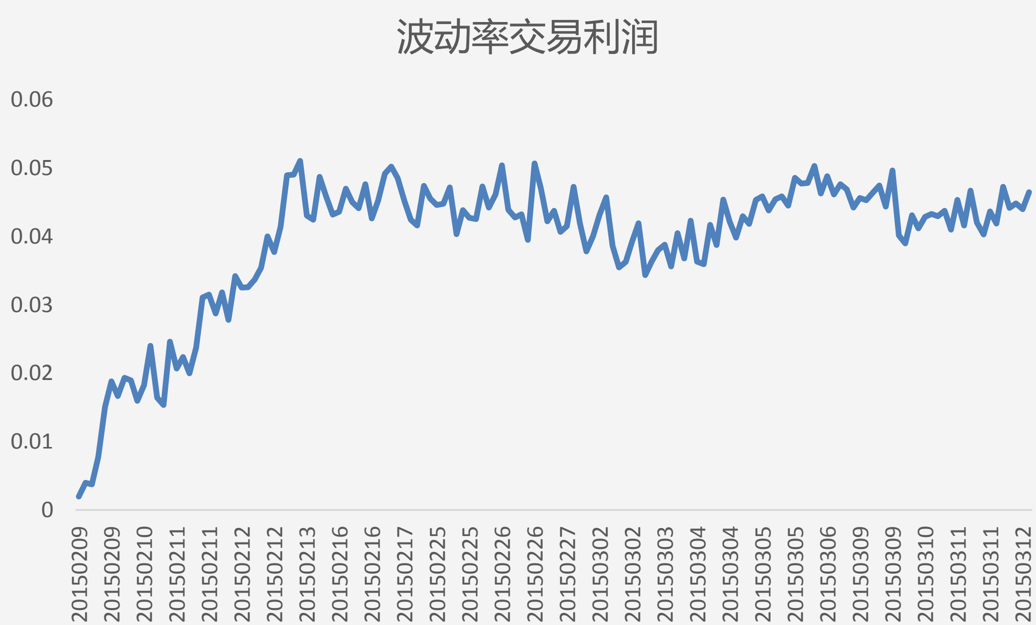
50ETF期权上的波动率套利

50ETF上市初期，隐含波动率较高，而市场处于盘整状态，隐含波动率大于实际波动率。同时我们预期隐含波动率会下行。因此做空看涨期权同时买入50ETF对冲



50ETF期权上的波动率套利

卖出看涨期权，同时买入50ETF对冲的组合利润很大程度受到隐含波动率的变化的影响



项目	数值
对冲频率	30分钟
ETF交易成本	0.002
期权交易成本	0.002

01

02

03

04

04

| 总结 |

>

总结

•历史上期权的隐含波动率往往高于市场的实际波动率，从而具有统计套利的空间。

•Black-Scholes模型的框架下，当波动率均为常数时，采用实际波动率计算Delta进行波动率套利获得利润固定，但持有头寸期间可能亏损，同时实际波动率难以获得。

•相反采用隐含波动率计算Delta则获得的利润依赖于股票运动的路径，但是持有头寸不会发生亏损，同时隐含波动率较容易计算。

总结

•在实际运用中，当隐含波动率较高时，卖出期权同时买入标的资产进行Delta对冲不但可以获得隐含波动率下行带来的收益，还可以获得波动率套利带来的收益。卖空期权跨式组合仅能通过隐含波动率下行获利。

Thanks！

谢谢

地址: 广州市天河北路183号大都会广场 P.C.510075 电话: 020-87555888 传真: 020-87553600 WWW.GF.COM.CN