Aufgabe 2

(2b)

Sei $P, N \in \mathbb{N}$ mit $P < N$.
Fall 1: **Sei** N **teilbar durch** $p + 1$**.** Also,

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : N = (p + 1) * n. \tag{1}$$

Alice fngt an und zieht k Streichhlzer, mit $k \in 1, 2, \ldots, P$. Bob kann dann durch ziehen von $P+1-k$ Streichhlzer das $(P+1)$-te Streichholz ziehen. (Denn $P+1-k \in 1, 2, \ldots, P$.) Im weiteren Verlauf kann Bob bei seinem i-ten ziehen bis inklusive $(P+1) * i$-tes Streichholz ziehen. Wegen (1) wird er mit seinem n-ten Zug gewinnen. (Da die Spieler jeweils mindestens ein Streichholz ziehen mssen, ist es nicht mglich dass Alice vorher gewonnen hat.) Es folgt also dass Bob im Fall 1 immer gewinnen wird.

Fall 2: Sei N **nicht teilbar durch** $P + 1$**.** Also,

$$\exists n \in \mathbf{N}_0 und q \in 1, 2, \ldots, P : N = (P + 1) * n + q. \tag{2}$$

Alice zieht im ersten Zug q Streichhlzer, mit q aus (2). Wenn Bob im i-ten Zug k Streichhlzer zieht, dann muss Alice $(P + 1 - k)$ Streichhlzer ziehen. Alice zieht also im $(i + 1)$-ten bis auf inklusive des $q + (P + 1) * i$-ten Streichholzes und wird nach (2) mit ihrem $(n + 1)$-ten Zug gewinnen. Es folgt also, dass Alice im Fall 2 immer gewinnen wird.

(2a)

Benutze die Ergebnisse aus b mit $N = 100$, $P = 10$. 100 ist nicht durch $P + 1 = 11$ teilbar und

$$100 = 11 * 9 + 1. \tag{3}$$

Alice muss ziehen wie in b beschrieben und wird mit ihrem 10-ten Zug gewinnen.

(2c)

Gegeben dass beide Spieler optimal ziehen, ist notwendige und hinreichende Bedingung zum Gewinnen, im letzten Zug alle bis auf das letzte Streichholz zu hiehen, also bis inklusive des $(N - 1)$-ten. Gelingt einem dies, so muss der Gegener das N-te Streicholz ziehen und verliert. Gelingt einem dies nicht im gesamten Spiel, so wird es dem Gegner gelingen und man ist gezwungen das N-te Streicholz zu ziehen und verliert. Die Problemstellung ist also die gleiche wie in b mit $N \to \tilde{N} = N - 1$. Bob wird also gewinnen wenn $(N - 1)$ durch $P + 1$ teilbar ist. Sonst gewinnt Alice.