



OLIMPÍADA DE
MATEMÁTICA DOS
INSTITUTOS FEDERAIS

OMIF 2020

**Resolução Comentada da
Prova de Primeira Fase**

**NÍVEL 1**
(3 pontos para cada acerto)**QUESTÃO 01**

Esta prova é composta por 15 questões, distribuídas igualmente em 3 níveis, que pontuam o competidor segundo as seguintes regras:

- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 1 vale 3 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 2 vale 4 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 3 vale 5 pontos;
- Cada erro em qualquer das 15 questões da prova vale 0 ponto, ou seja, o competidor não ganha e nem perde ponto com erros.

Deste modo, a nota final de cada competidor desta olimpíada é um número inteiro de 0 a 60. Contudo, seguindo esta regra, há exatamente 4 números inteiros neste intervalo que não podem ser a nota final de competidor algum. A soma destes números é:

- A) 117
B) 118
C) 119
D) 120
E) 121

RESPOSTA DA QUESTÃO 01: Alternativa D
RESOLUÇÃO

Inicialmente, note que o competidor que erra todas as questões obtém nota zero e o competidor que acerta apenas uma questão, obtém, no mínimo, nota 3. Deste modo, 1 e 2 não podem ser a nota final de competidor algum.

Analogamente, o competidor que acerta todas as questões obtém nota igual a $3 \times 5 + 4 \times 5 + 5 \times 5 = 60$ e o competidor que erra apenas uma questão, obtém, no máximo, nota $60 - 3 = 57$. Deste modo, 58 e 59 não podem ser a nota final de competidor algum.

Como o enunciado menciona que há exatamente 4 números inteiros de 0 a 60 que não podem ser a nota final de competidor algum, então a soma solicitada é $1 + 2 + 58 + 59 = 120$.

Apenas a título de curiosidade, segue uma tabela contendo exemplos de como as demais notas podem ser alcançadas por um competidor (um exemplo para cada nota).

Nota	Acertos Nível 1	Acertos Nível 2	Acertos Nível 3
0	0	0	0
3	1	0	0
4	0	1	0
5	0	0	1
6	2	0	0
7	1	1	0
8	1	0	1
9	3	0	0
10	2	1	0
11	2	0	1
12	4	0	0
13	3	1	0
14	3	0	1
15	5	0	0
16	4	1	0
17	4	0	1
18	1	0	3
19	5	1	0
20	5	0	1
21	0	4	1
22	0	3	2
23	0	2	3
24	4	3	0
25	3	4	0
26	0	4	2
27	0	3	3
28	0	2	4
29	0	1	5
30	0	5	2
31	0	4	3
32	0	3	4
33	0	2	5
34	3	0	5
35	2	1	5
36	1	2	5
37	0	3	5
38	3	1	5
39	2	2	5
40	1	3	5
41	0	4	5
42	3	2	5
43	2	3	5
44	1	4	5
45	0	5	5
46	3	3	5
47	2	4	5
48	1	5	5
49	4	3	5
50	3	4	5
51	2	5	5
52	5	3	5
53	4	4	5
54	3	5	5
55	5	5	4
56	5	4	5
57	4	5	5
60	5	5	5

**QUESTÃO 02**

O operador matemático \oplus é tal que, aplicado a qualquer número natural par, retorna a sua metade e, aplicado a qualquer número natural ímpar, retorna o seu triplo adicionado de uma unidade. Por exemplo, $\oplus(14) = 7$ e $\oplus(15) = 46$.

Se aplicarmos este operador ao número 20 e, ao seu resultado, aplicarmos este operador novamente, e assim sucessivamente, até concluir 2020 aplicações do operador, que número obteremos?

- A) 10
- B) 5
- C) 4
- D) 2
- E) 1

RESPOSTA DA QUESTÃO 02: Alternativa E**RESOLUÇÃO**

Aplicando este operador ao número 20 e continuando a aplicação aos resultados obtidos, temos:

Número de aplicações do operador	Resultado
1	$\oplus(20) = \frac{20}{2} = 10$
2	$\oplus(10) = \frac{10}{2} = 5$
3	$\oplus(5) = 3 \times 5 + 1 = 16$
4	$\oplus(16) = \frac{16}{2} = 8$
5	$\oplus(8) = \frac{8}{2} = 4$
6	$\oplus(4) = \frac{4}{2} = 2$
7	$\oplus(2) = \frac{2}{2} = 1$
8	$\oplus(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$
9	$\oplus(4) = \frac{4}{2} = 2$
10	$\oplus(2) = \frac{2}{2} = 1$

Observe que, a partir da quinta aplicação do operador, os resultados seguem um padrão: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 e assim por diante, indefinidamente.

Deste modo, a partir da quinta aplicação, sempre que o número de aplicações for um múltiplo de 3, o resultado será 2 e, em seguida, o resultado será 1.

Como 2020 é um sucessor de um múltiplo de 3, então, aplicando o operador por 2020 vezes, obtém-se o número 1.



QUESTÃO 03

A expressão numérica abaixo se refere a várias adições. Os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5 são somados diversas vezes, nesta ordem, até que se obtenha, como resultado, o número 2020. Note que, para isso, foi necessário parar a expressão no 4.

$$0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4+5+\dots$$
$$\dots+0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4=2020$$

A quantidade de sinais de adição (+) que foram utilizados na expressão numérica acima é

- A) 805
- B) 806
- C) 807
- D) 808
- E) 809

RESPOSTA DA QUESTÃO 03: Alternativa D

RESOLUÇÃO

A expressão segue um padrão com 6 sinais de adição e soma igual a 15:

$$0+1+2+3+4+5+$$

Como 2020 dividido por 15 resulta em quociente 134 e resto 10, pode-se afirmar que este padrão se repetirá completamente por 134 vezes na expressão. O resto 10 indica que, após as 134 repetições do padrão, ainda faltam 10 unidades para que a soma resulte em 2020. Dessa forma, para finalizar o primeiro membro da expressão, foi necessária uma parte incompleta do padrão ($0+1+2+3+4$), que possui 4 sinais de adição.

Portanto, a quantidade de sinais de adição (+) utilizados na expressão foi $(134 \times 6) + 4 = 808$.

**QUESTÃO 04**

Recentemente, um garoto nigeriano de 12 anos, Chika Ofili, descobriu um critério matemático de divisibilidade por 7. Ele percebeu que, para saber se um número é divisível por 7, basta multiplicar o último algarismo deste número por 5 e somar ao número que sobra ao se retirar este último dígito. Se esse resultado for divisível por 7, então o número inicial é divisível por 7 também. Se o resultado encontrado for um número “grande”, pode-se repetir o processo até que se consiga fazer esta verificação com mais facilidade.

Por exemplo, o número 658 é divisível por 7 se $5 \times 8 + 65 = 105$ também for. Repetindo o processo, 105 é divisível por 7 se $5 \times 5 + 10 = 35$ também for. Como 35 é divisível por 7, então, o número 658 é divisível por 7 também.

Considere o menor número de seis algarismos distintos do tipo AB3456 que é divisível por 7. Neste caso, o valor de $A+B$ é:

- A) 2
- B) 6
- C) 9
- D) 13
- E) 14

RESPOSTA DA QUESTÃO 04: Alternativa C
RESOLUÇÃO

Iniciando o critério de divisibilidade por 7 apresentado no enunciado, tem-se que:

- AB3456 é divisível por 7 se $5 \times 6 + AB345 = AB375$ também for.
- Repetindo o processo, AB375 é divisível por 7 se $5 \times 5 + AB37 = AB62$ também for.
- O número AB62 é divisível por 7 se $5 \times 2 + AB6 = A(B+1)6$ também for, considerando que $(B+1)$ é um algarismo.
- Finalmente, o número $A(B+1)6$ é divisível por 7 se $5 \times 6 + A(B+1) = (A+3)(B+1)$ também for, considerando que $(A+3)$ e $(B+1)$ são algarismos.

Como a questão se refere ao menor número de seis algarismos distintos do tipo AB3456 que é divisível por 7, tem-se que AB deve ser o menor possível, com A e B diferentes entre si e diferentes de 3, 4, 5 e 6.

Desse modo, para $A = 1$, tem-se que:

$$(A+3)(B+1) = 4(B+1)$$

será divisível por 7 se

$$(B+1) = 2 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

ou se

$$(B+1) = 9 \Rightarrow \boxed{B=8}.$$

Como A e B são diferentes entre si, então $B = 8$.

Logo, $A + B = 1 + 8 = 9$.

**QUESTÃO 05**

O coordenador da Comissão de Elaboração de Provas da OMIF deseja criar uma senha para acessar a pasta que contém as questões que serão selecionadas para compor a prova da primeira fase. O coordenador definiu que a senha será composta pelos caracteres de OMIF2020, não necessariamente nesta ordem, de modo que os zeros não estejam juntos, ressaltando que a letra O é diferente do número 0 (zero). Quantas são as senhas com essa configuração?

- A) 7580
- B) 7560
- C) 7540
- D) 7520
- E) 7500

RESPOSTA DA QUESTÃO 05: Alternativa B**RESOLUÇÃO**

Para determinar a quantidade de senhas com as restrições apresentadas na questão, basta contar quantas permutações OMIF2020 possui no total e, desse valor, subtrair a quantidade de permutações em que os 0's ficam juntos:

- Permutações de OMIF2020 (permutação de 8 elementos com repetição de dois elementos iguais a 2 e dois elementos iguais a 0):

$$P_8^{2,2} = \frac{8!}{2! 2!} = 10080$$

- Permutações de OMIF2020 em que os 0's ficam juntos (neste caso, os dois zeros juntos podem ser considerados como um só elemento e, desta forma, deve-se calcular a permutação de 7 elementos com repetição de dois elementos iguais a 2):

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 2520$$

Portanto, a quantidade de senhas com a configuração mencionada na questão é:

$$10080 - 2520 = 7560$$



NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 06

Em uma sala do *campus* Betim, do Instituto Federal, estão alocados exatamente 50 alunos para resolver a prova da primeira fase da OMIF 2020. A faixa etária desses alunos varia de 14 a 20 anos. Apenas com estas informações hipotéticas, pode-se afirmar, com certeza, que, nessa sala:

- A) não existe aluno que faça aniversário em dezembro.
- B) sete alunos têm 14 anos.
- C) pelo menos um aluno tem 18 anos.
- D) pelo menos seis alunos fazem aniversário no mesmo mês.
- E) pelo menos oito alunos têm a mesma idade.

RESPOSTA DA QUESTÃO 06: Alternativa E
RESOLUÇÃO

O objetivo da questão é determinar a alternativa que afirma algo, com certeza, correto. Uma das formas de se fazer isso é realizar a análise de cada uma das alternativas de maneira individual:

- A) não existe aluno que faça aniversário em dezembro.

É possível que, dentre os 50 alunos, tenha pelo menos um que faça aniversário em dezembro. Em uma situação mais extrema, é possível que todos os 50 alunos façam aniversário em dezembro. Desta forma, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

- B) sete alunos têm 14 anos.

É perfeitamente possível que, dentre os 50 alunos, menos de sete tenham 14 anos. Desta forma, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

- C) pelo menos um aluno tem 18 anos.

É perfeitamente possível que, dentre os 50 alunos, nenhum tenha 18 anos. Assim, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

- D) pelo menos seis alunos fazem aniversário no mesmo mês.

É possível que se tenha, dentre os 50 alunos, 4 alunos fazendo aniversário em cada um dos meses de janeiro a outubro (40 alunos aniversariando nesses 10 meses), 5 alunos fazendo aniversário em novembro e 5 alunos fazendo aniversário em dezembro. Assim, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

- E) pelo menos oito alunos têm a mesma idade.

Ao tentar exibir um contraexemplo para a afirmação, pode-se pensar, inicialmente, na possibilidade de que 7 alunos tenham 14 anos, 7 alunos tenham 15 anos, 7 alunos tenham 16 anos, 7 alunos tenham 17 anos, 7 alunos tenham 18 anos, 7 alunos tenham 19 anos e 7 alunos tenham 20 anos, totalizando, até então, $7 \times 7 = 49$ alunos. O 50º aluno terá obrigatoriamente uma idade de 14 a 20 anos, garantindo que pelo menos 8 alunos tenham a mesma idade. Ao tentar exibir qualquer outro contraexemplo, percebe-se que não será possível ter menos de 8 alunos com mesma idade em todas as idades em questão. Portanto, a afirmação desta alternativa está, com certeza, correta.

**QUESTÃO 07**

Para comemorar seu aniversário, Gabriela convidou 32 pessoas para uma festinha em sua casa e resolveu preparar alguns brigadeiros para servi-las. Contudo, com tantas tarefas na arrumação da festa, ela se enganou na cozinha e preparou apenas uma receita, que é o suficiente para preparar somente 54 brigadeiros do tamanho normal, que ela está acostumada a fazer. Por isso ela pretende enrolar os brigadeiros num tamanho menor do que o normal, para conseguir fazer exatamente 4 para cada convidado (ela não vai comer). Considerando que os brigadeiros tenham forma esférica e sabendo que o volume de uma esfera de raio R pode ser calculado pela relação

$$V_{\text{esf}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3, \text{ em que porcentagem Gabriela}$$

deve reduzir o raio do brigadeiro normal, para que consiga esse feito?

- A) 25%
- B) 42%
- C) 50%
- D) 58%
- E) 75%

RESPOSTA DA QUESTÃO 07: Alternativa A**RESOLUÇÃO**

Seja R o raio do brigadeiro de tamanho normal. Pelo enunciado, o volume da receita de brigadeiros de Gabriela é:

$$V = 54 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Agora, seja r o raio do brigadeiro menor, que Gabriela deverá preparar para que consiga fazer os $32 \times 4 = 128$ brigadeiros. Como o volume da receita é o mesmo, tem-se que:

$$128 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 54 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = \frac{54}{128} = \frac{27}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{r^3}{R^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 0,75 \cdot R}$$

Como o raio do brigadeiro menor é 75% do raio do brigadeiro normal, então houve uma redução de 25% no raio do brigadeiro normal.



QUESTÃO 08

O *número de ouro*, representado pela letra φ , é um número irracional, muito estudado por alguns matemáticos e considerado, por algumas pessoas, como o número que aparece nas coisas mais belas da natureza. Também chamado de razão áurea ou de proporção divina, seu valor pode ser encontrado calculando-se a raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. O valor de φ^6 , em função de φ , é:

- A) $\varphi + 2$
- B) $4\varphi + 2$
- C) $6\varphi + 6$
- D) $8\varphi + 5$
- E) $12\varphi + 23$

RESPOSTA DA QUESTÃO 08: Alternativa D**RESOLUÇÃO**

Como φ é raiz positiva da equação quadrática fornecida, então:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

Elevando os dois membros da segunda igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$\begin{aligned}(\varphi^2)^2 &= (\varphi + 1)^2 \\ \varphi^4 &= \varphi^2 + 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 &= (\varphi + 1) + 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 &= 3\varphi + 2\end{aligned}$$

Multiplicando os dois membros desta última igualdade por φ^2 , obtém-se:

$$\begin{aligned}\varphi^4 \cdot \varphi^2 &= (3\varphi + 2) \cdot \varphi^2 \\ \varphi^6 &= (3\varphi + 2) \cdot (\varphi + 1) \\ \varphi^6 &= 3\varphi^2 + 3\varphi + 2\varphi + 2 \\ \varphi^6 &= 3(\varphi + 1) + 5\varphi + 2 \\ \varphi^6 &= 8\varphi + 5\end{aligned}$$

QUESTÃO 09

Em uma caixa, foram colocados 8 cartões de mesmo tamanho, peso e aspecto, cada um com uma letra ou número escrito, de modo que era possível escrever OMIF2020, se fossem colocados um cartão ao lado do outro, observando que a letra O é diferente do número 0 (zero). De uma única vez, quatro desses cartões são sorteados ao acaso. Desta forma, a probabilidade de serem sorteados os cartões com as letras da palavra OMIF, em qualquer ordem, é:

- A) $\frac{1}{70}$
- B) $\frac{1}{420}$
- C) $\frac{1}{1024}$
- D) $\frac{1}{1680}$
- E) $\frac{1}{4096}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 09: Alternativa A**RESOLUÇÃO**

A retirada dos 4 cartões da caixa pode ser feita de

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 70$$

maneiras diferentes, todas com igual probabilidade de acontecer. E as letras da palavra OMIF aparecem em apenas uma dessas possibilidades. Logo, a probabilidade solicitada é:

$$P = \frac{1}{70}$$



QUESTÃO 10

Um professor de matemática pensa em quatro números (a, b, c, d) e pergunta a sua aluna Pâmela qual é a média aritmética simples desses quatro números. Para isso, ele fornece apenas duas informações para ela:

$$(1) 2a + 3b + 5c + 8d = 41$$

$$(2) 7a + 6b + 4c + d = 31$$

Sobre a suficiência destas informações para que Pâmela possa responder a pergunta sobre a média, podemos concluir que:

- A) A informação 1, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 2, sozinha, não é o suficiente.
- B) A informação 2, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 1, sozinha, não é o suficiente.
- C) As duas informações, juntas, são suficientes para responder a pergunta, mas nenhuma delas sozinha é o suficiente.
- D) Tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder a pergunta.
- E) A pergunta não pode ser respondida só com as duas informações fornecidas.

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: Alternativa C
RESOLUÇÃO

Para que Pâmela possa responder a pergunta sobre a média aritmética simples dos quatro números, é necessário que ela consiga calcular o valor da soma $a + b + c + d$, já que

$$MA = \frac{a + b + c + d}{4}$$

Considerando apenas a informação 1, ou seja, que $2a + 3b + 5c + 8d = 41$, pode-se ter, por exemplo,

$$\left. \begin{array}{l} a = 19 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow MA = \frac{19 + 1 + 0 + 0}{4} = 5$$

ou também

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow MA = \frac{0 + 3 + 0 + 4}{4} = 1,75$$

Note que as médias obtidas são distintas e, portanto, a informação 1, sozinha, não é suficiente para responder a pergunta sobre a média. O mesmo raciocínio se aplica à informação 2, que, sozinha, também não é suficiente para responder a pergunta.

No entanto, considerando as duas informações em conjunto e somando as equações que elas apresentam membro a membro, obtém-se que a média aritmética simples é, necessariamente, igual a 2, uma vez que:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2a + 3b + 5c + 8d = 41 \\ 7a + 6b + 4c + d = 31 \end{array} \right. &+ \\ 9a + 9b + 9c + 9d = 72 &\Rightarrow a + b + c + d = 8 \\ &\Downarrow \\ \frac{a + b + c + d}{4} &= 2 \end{aligned}$$

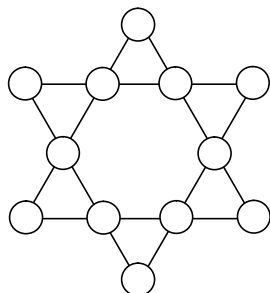
Logo, as duas informações, juntas, são suficientes para responder a pergunta, mas nenhuma delas sozinha é o suficiente.



NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 11

A figura abaixo mostra uma estrela de 6 pontas com 12 círculos situados nas intersecções das retas que a formam. Note que, em cada segmento do desenho da estrela, há 4 círculos.



É possível escrever todos os números naturais de 1 a 12 nestes círculos de modo que as somas dos números nos 4 círculos de cada segmento sejam todas iguais. Qual é o valor dessas somas?

- A) 12
- B) 13
- C) 24
- D) 26
- E) 39

RESPOSTA DA QUESTÃO 11: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Primeiramente, observe que a soma de todos os números naturais de 1 a 12 é

$$S = \frac{(1+12) \cdot 12}{2} = 78$$

Agora, note que:

- Na estrela em questão, há seis segmentos com 4 círculos cada.
- Cada círculo faz parte de exatamente dois segmentos.

Assim, sendo T a soma solicitada (soma dos números nos 4 círculos de cada segmento), $6T$ equivale ao dobro da soma de todos os números de 1 a 12, ou seja:

$$6T = 2 \cdot 78 \Rightarrow \boxed{T = 26}$$



QUESTÃO 12

Em Três Corações/MG, foram construídas duas avenidas paralelas, descritas pelas equações $f(x) = x$ e $g(x) = x - 4$. Para interligar as duas avenidas, foi construída uma rua coplanar descrita pela curva $h(x) = x^2 - x - 3$. Os pontos de acesso (intersecções) da rua com as avenidas formam os vértices de um triângulo, em cuja área se planeja fazer uma praça. Qual é a área dessa praça?

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 9
- E) 10

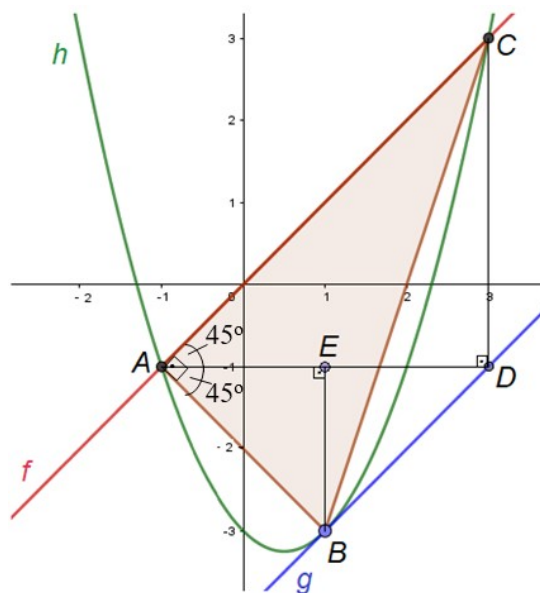
RESPOSTA DA QUESTÃO 12: Alternativa C
RESOLUÇÃO

Os pontos de intersecção entre a rua e as avenidas podem ser determinados a partir dos seguintes sistemas:

- $$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - x - 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = x^2 - x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -1 \rightarrow \boxed{(-1, -1)} \\ \text{ou} \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 \rightarrow \boxed{(3, 3)} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x^2 - x - 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x - 4 = x^2 - x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3 \rightarrow \boxed{(1, -3)}$$

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA:**Primeira maneira**

A figura a seguir apresenta os gráficos de f , g e h no plano cartesiano. Nela, $A = (-1, -1)$ e $C = (3, 3)$ são os pontos de intersecção entre f e h , e $B = (1, -3)$ é o ponto de intersecção entre g e h .



Além disso, $D = (3, -1)$ e $E = (1, -1)$ são pontos escolhidos do plano de modo que \overline{AD} seja paralelo ao eixo x e \overline{BE} e \overline{DC} sejam paralelos ao eixo y .

Perceba que o triângulo ABE é retângulo e isósceles de lados de comprimento 2 e, por isso, o ângulo \widehat{BAE} mede 45° . Observe também que o triângulo ACD é retângulo e isósceles de lados de comprimento 4. Logo, o ângulo \widehat{CAD} também mede 45° , garantindo, assim, o perpendicularismo entre \overline{AB} e \overline{AC} .

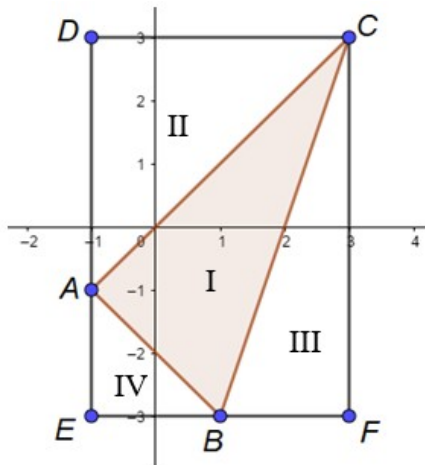
Agora, note que \overline{AB} mede $2\sqrt{2}$, pois equivale à diagonal de um quadrado de lado de comprimento 2, e \overline{AC} mede $4\sqrt{2}$, pois equivale à diagonal de um quadrado de lado de comprimento 4.

Como o triângulo ABC é retângulo, a área da praça pode ser calculada pelo semiproducto dos seus catetos, ou seja:

$$S = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8$$

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA:
Segunda maneira

Sejam $A = (-1, -1)$, $B = (1, -3)$ e $C = (3, 3)$ os pontos de intersecção da rua com as avenidas e $CDEF$ um retângulo com lados paralelos aos eixos x ou y e circunscrito ao triângulo ABC , conforme mostra a figura.



Para determinar a área desejada, deve-se calcular a área do triângulo ABC , indicado por I na figura. Para isso, pode-se calcular a área do retângulo $CDEF$ e dela subtrair as áreas dos triângulos retângulos indicados por II, III e IV (triângulos ACD , BCF e ABE , respectivamente). Tem-se que:

$$Área_{CDEF} = EF \cdot CF = 4 \cdot 6 = 24$$

$$Área_{II} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$Área_{III} = \frac{BF \cdot CF}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

$$Área_{IV} = \frac{BE \cdot AE}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

Logo, a área do triângulo I, em cuja área se planeja fazer uma praça, é $24 - 8 - 6 - 2 = 8$.

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA:
Terceira maneira

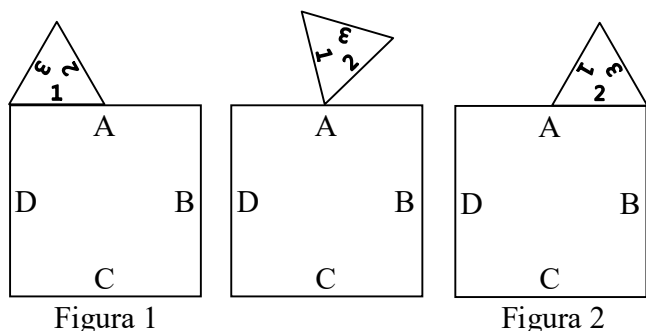
A área da praça pode ser calculada via determinante, utilizando os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, -3)$ e $C = (3, 3)$, como segue abaixo:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-16| = 8$$

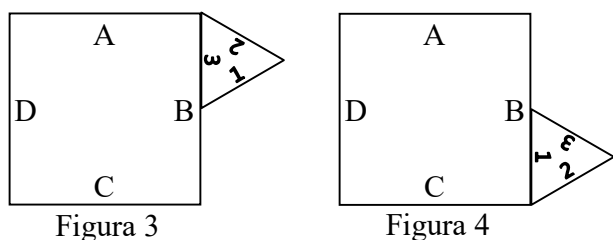


QUESTÃO 13

As figuras abaixo mostram um triângulo equilátero de lado L girando ao redor de um quadrado fixo de lado $2L$. Os lados do triângulo estão nomeados de 1, 2 e 3, e os lados do quadrado estão nomeados de A, B, C e D. A Figura 1 representa a posição inicial do triângulo e a Figura 2 representa a nova posição do triângulo equilátero após finalizar o 1º giro.



Após o 2º giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 3 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 3. E após o 3º giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 1 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 4.



Se o triângulo equilátero continuar girando ao redor do quadrado fixo, os lados que estarão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado na Figura 2020 são, respectivamente:

- A) 1 e A
- B) 1 e B
- C) 1 e C
- D) 2 e B
- E) 2 e C

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: Alternativa B
RESOLUÇÃO

Observe que os lados que estão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado formam um padrão que se inicia na Figura 1 e finaliza na Figura 24, conforme o esquema abaixo:

Figura 1 → 1 e A	Figura 15 → 3 e D
Figura 2 → 2 e A	Figura 16 → 1 e D
Figura 3 → 3 e B	Figura 17 → 2 e A
Figura 4 → 1 e B	Figura 18 → 3 e A
Figura 5 → 2 e C	Figura 19 → 1 e B
Figura 6 → 3 e C	Figura 20 → 2 e B
Figura 7 → 1 e D	Figura 21 → 3 e C
Figura 8 → 2 e D	Figura 22 → 1 e C
Figura 9 → 3 e A	Figura 23 → 2 e D
Figura 10 → 1 e A	Figura 24 → 3 e D
Figura 11 → 2 e B	Figura 25 → 1 e A
Figura 12 → 3 e B	Figura 26 → 2 e A
Figura 13 → 1 e C	⋮
Figura 14 → 2 e C	

Note que as figuras numeradas com múltiplos de 24, terão lados 3 e D em contato, já que a Figura 25 é equivalente à Figura 1.

Como 2016 é múltiplo de 24, continuando a sequência, temos que:

Figura 2016 → 3 e D
Figura 2017 → 1 e A
Figura 2018 → 2 e A
Figura 2019 → 3 e B
Figura 2020 → 1 e B

Assim, os lados que estarão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado na Figura 2020 são 1 e B.

OBSERVAÇÃO: Os lados que estão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado formam um padrão que se inicia na Figura 1 e finaliza na Figura 24, número este que também pode ser identificado pelo mínimo múltiplo comum entre 3 (referente aos lados 1, 2 e 3 no triângulo) e 8 (referente aos lados A, A, B, B, C, C, D e D no quadrado).



QUESTÃO 14

A distribuição dos professores de Ciências Exatas de um Instituto Federal, segundo sua área de atuação e sua idade, está de acordo com o seguinte quadro:

	Matemática	Física	Química	Total
Até 40 anos	3	3	1	7
Mais de 40 anos	4	2	2	8
Total	7	5	3	15

Estes professores pretendem formar um grupo de estudos sobre o ensino de Ciências Exatas no Ensino Médio. Durante a organização do grupo, foram definidas três atividades principais, as quais deveriam, cada uma, ter um professor coordenador diferente. De quantas maneiras distintas podem-se escolher estes coordenadores, se o primeiro deve ter mais de 40 anos, o segundo deve ser professor de matemática e o terceiro não pode ser um professor de química?

- A) 672
B) 534
C) 504
D) 480
E) 380

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: Alternativa B
RESOLUÇÃO

Para resolver este problema, deve-se dividi-lo em três casos, já que a escolha do primeiro coordenador influencia na quantidade de possibilidades de escolha dos outros dois. Pelo enunciado, sabe-se que o primeiro coordenador deve ter mais de 40 anos (pode ser professor de matemática, física ou química), que o segundo deve ser professor de matemática (independentemente da idade) e que o terceiro não pode ser um professor de química (independentemente da idade).

1º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de matemática com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 4 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além

disso, como o segundo coordenador também deve ser professor de matemática, restam $7 - 1 = 6$ opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15 - 2 - 3 = 10$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os três professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 1º caso tem-se:

$$\frac{4}{\text{Matemática} \atop +40 \text{ anos}} \times \frac{6}{\text{Matemática}} \times \frac{10}{\text{Não} \atop \text{Química}} = 240 \text{ opções de escolha}$$

2º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de Física com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 2 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além disso, como o segundo coordenador deve ser professor de matemática, existem 7 opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15 - 2 - 3 = 10$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os três professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 2º caso tem-se:

$$\frac{2}{\text{Física} \atop +40 \text{ anos}} \times \frac{7}{\text{Matemática}} \times \frac{10}{\text{Não} \atop \text{Química}} = 140 \text{ opções de escolha}$$

3º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de Química com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 2 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além disso, como o segundo coordenador deve ser professor de matemática, existem 7 opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15 - 2 - 2 = 11$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os outros dois professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 3º caso tem-se:

$$\frac{2}{\text{Química} \atop +40 \text{ anos}} \times \frac{7}{\text{Matemática}} \times \frac{11}{\text{Não} \atop \text{Química}} = 154 \text{ opções de escolha}$$

Somando as opções de escolha de cada caso, conclui-se que o total de maneiras distintas com que se pode escolher estes coordenadores é:

$$240 + 140 + 154 = 534$$



QUESTÃO 15

Um octógono não regular tem todos os seus ângulos internos de mesma medida e 7 dos seus lados medem, nessa ordem, $2\sqrt{2}$, 7, $3\sqrt{2}$, 3, $6\sqrt{2}$, 2 e $4\sqrt{2}$. Qual é o comprimento do oitavo lado?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: Alternativa E
RESOLUÇÃO

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de n lados é dada por:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

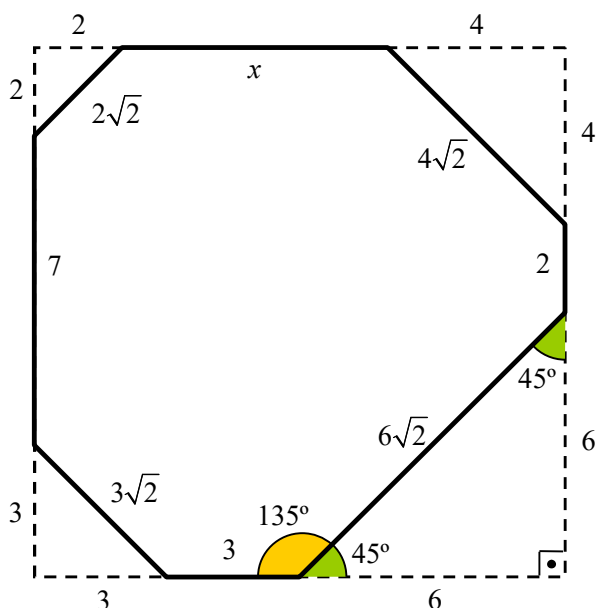
Assim, para um octógono, essa soma é:

$$S = (8 - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$$

Como, neste octógono, todos os ângulos internos têm a mesma medida, então cada ângulo mede:

$$a = \frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$$

Um octógono que possui todos os ângulos internos com medidas iguais a 135° pode ser pensado como tendo sido formado a partir de um retângulo com a retirada de suas “quinas” em ângulos de 45° , como ilustrado abaixo:



Nesta figura, note que as “quinas” retiradas são triângulos retângulos isósceles (já que possuem dois ângulos de medidas iguais a 45°), cujos catetos podem ser calculados usando-se o teorema de Pitágoras ou, simplesmente, dividindo-se a medida de cada hipotenusa por $\sqrt{2}$.

Observe, por fim, que o retângulo da figura é um quadrado de lado 12. Assim, o comprimento do oitavo lado é x , tal que

$$2 + x + 4 = 12$$

$$\boxed{x = 6}$$