

homework 4

1. 利用传播波法, 求解波动方程的古尔萨 (Goursat) 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x), \varphi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

2. 求解下列半无界弦自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 (0 < x < \infty, t > 0), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = \sin 2t. \end{cases}$$

3. 写出方程

$$u_{tt} - 81u_{xx} = 0$$

点 $(x_0, t_0) = (2, 3)$ 的依赖区间和 x 轴上区间 $[-2, 2]$ 的影响区域。

4. 求方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, f(t) < x < t, \\ u|_{x=t} = \varphi(t), \\ u|_{x=f(t)} = \psi(t) \end{cases}$$

的解, 其中 $\varphi(0) = \psi(0)$, $x = f(t)$ 为由原点出发的, 介于 $x = t$ 与 $x = -t$ 之间的光滑曲线 (即一阶连续可导), 且 $|f'(t)| \neq 1$ 对一切 t 成立。