homework12

1. 求解半圆上的 Laplace 方程:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad r<1, \quad 0<\theta<\pi, \\ u|_{r=1}=\sin^3\theta, \\ u|_{\theta=0}=u|_{\theta=\pi}=0 \end{cases}$$

2. 记 (r,θ) 为极坐标, 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=1 \quad 1<r<2 \\ u|_{r=1}=1+\cos^2\theta \\ u|_{r=2}=\sin^2\theta \end{cases}$$

3. 求解下列方程

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}, 1<r<2\right) \\ u|_{\theta=0,\frac{\pi}{2}}=0 \\ u|_{r=1}=0, u|_{r=2}=\sin 2\theta \end{cases}$$