1. 用能量积分法证明下列问题解的唯一性:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(t,0) = \lambda(t),\quad (u_x + \sigma u)(t,l) = \mu(t), 其中 \sigma>0, \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

解: $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0,\ 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(t,0)=0,\ (u_x+\sigma u)(t,l)=0, 其中 \sigma>0, \Rightarrow 只有零解 \\ u(0,x)=0. \end{cases}$

$$\int_0^l (u_t - a^2 u_{xx}) u\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^l (uu_t - a^2 u_{xx} u)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^l uu_t\,dx - a^2 \int_0^l u_{xx} u\,dx = 0$$

$$\int_0^l uu_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{u^2}{2}\,dx \qquad u_x(t,l)+\sigma u(t,l)=0$$

$$\int_0^l u_{xx} u\,dx = \int_0^l u\,du_x = uu_x\Big|_0^l - \int_0^l u_x\,du \qquad u_x(t,l) = -\sigma u(t,l)$$

$$= u(t,l)u_x(t,l) - u(t,0)u_x(t,0) - \int_0^l u_x^2\,dx$$

$$= u(t,l)u_x(t,l) - \int_0^l u_x^2\,dx$$

$$= -\sigma^2 u(t,l) - \int_0^l u_x^2\,dx$$

$$\int_0^l (u_t - a^2 u_{xx}) u\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{u^2}{2}\,dx + a^2\sigma^2 u(t,l) + a^2 \int_0^l u_x^2\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{u^2}{2}\,dx + a^2\sigma^2 u(t,l) + a^2\sigma^2 \int_0^l u^2(t,x)\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{u^2(t,x)}{2}\,dx + a^2\sigma^2 u(t,l) + a^2\sigma^2 \int_0^l u^2(t,x)\,dx$$

$$\le \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{u^2(t,x)}{2}\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{a^2\sigma^2 t}{l} u(t,l)\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^l t u^2(t,x)\,dx$$

$$E(t) \le \int_0^l \left[\frac{u^2(t,x)}{2} + \frac{a^2\sigma^2 t}{l} u(t,l) + t u^2(t,x) \right] dx \qquad u(0,x)=0,\ u(0,l)=0$$

$$E(t) = E(0) = 0$$

$$E(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t,x) \equiv 0 \Rightarrow 只有零解$$

2. 设 $u(x,t)$ 为热传导方程 $u_t - a^2 u_{xx} - cu = 0$ 在矩形 $R = \{(x,t) \mid 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ 中的解，其中 $c > 0$ 为常数，

如果 $|u(0,t)| \le M_1$，$|u(l,t)| \le M_1$，$t \in [0,T]$，$|u(x,0)| \le M_2$，$x \in [0,l]$，证明：$|u(x,t)| \le \max\{M_1 e^{ct}, M_2 e^{ct}\}$.

解：对 $\forall\, 0 \le t_1 \le T$，记 $R_{t_1} = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le t_1\}$，$\Gamma_{t_1}$ 为其抛物边界。可以断言，若 $u(x,t)$ 在 R_{t_1} 上有正最大值，则此最大值必在 Γ_{t_1} 上达到。

事实上，假设 $\exists (x_0,t_0) \in R_{t_1}$，满足 $0 < x_0 < l$，$0 < t_0 \le t_1$，且 $0 < u(x_0,t_0) = \max\limits_{R_{t_1}} u(x,t)$，则

$$\begin{cases} u_t(x_0,t_0) = 0 & (t_0 < t_1) \\ u_t(x_0,t_0) \ge 0 & (t_0 = t_1) \end{cases},\quad u(x_0,t_0) > 0,\quad u_{xx}(x_0,t_0) \le 0,$$

从而 $(u_t - a^2 u_{xx} - cu)\big|_{(x_0,t_0)} > 0$，与 u 的方程矛盾。

所以假设不成立，即 u 的正极大值只能在 Γ_{t_1} 上达到。

$\because \Gamma_{t_1} = \{t=0,\ 0 \le x \le l\} \cup \{x=0,\ 0 \le t \le t_1\} \cup \{x=l,\ 0 \le t \le t_1\}$，若 u 的正最大值在 $t=0$ 上达到，则有

$$u(x,t) \le \max_{0 \le x \le l} u(x,0) \le |u(x,0)| \le M_2 \le M_2 e^{ct}$$

若 u 的正最大值在 $x=0$ 上达到，则有

$$u(x,t) \le \max_{0 \le t \le t_1} e^{ct} u(0,t) \le e^{ct} |u(0,t)| \le M_1 e^{ct}$$

若 u 的正最大值在 $x=l$，$t=t_0$ 点达到，则有 $u_x(l,t_0) \ge 0$，由边界条件知：

$$u(x,t) \le u(l,t_0) \le e^{ct_0} u(l,t_0) \le \max_{0 \le t \le t_1} u(l,t) e^{ct} \le e^{ct} |u(l,t)| \le M_1 e^{ct}$$

从而有：

$$u(x,t) \le \max\{0,\ M_2 e^{ct}, M_1 e^{ct}\}$$

$\because M_1 \ge 0$，$M_2 \ge 0$，

$\therefore M_1 e^{ct} \ge 0$，$M_2 e^{ct} \ge 0$

$$\therefore u(x,t) \le \max\{M_1 e^{ct}, M_2 e^{ct}\}$$

$$\therefore |u(x,t)| \le \max\{M_1 e^{ct}, M_2 e^{ct}\}$$