1. 求解下面定解问题　　　　其中 $h$ 为常数，$0<h<\frac{\pi a}{l}$.

$$\begin{cases} u_{tt}+2hu_t=a^2u_{xx},\ t>0,\ 0<x<l \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$$

解：令 $u(t,x)=X(x)T(t)$

代入 $u_{tt}+2hu_t=a^2u_{xx}$ 得：$X(x)T''(t)+2hX(x)T'(t)-a^2T(t)X''(x)=0 \Rightarrow \frac{T''(t)+2hT'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$

代入边界条件得 $X(0)=X(l)=0$

(i) $\lambda<0$，$X(x)=ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow X'(x)=a\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x}-b\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

由 $X(0)=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$

由 $X(l)=0 \Rightarrow ae^{\sqrt{-\lambda}l}+be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \Rightarrow b=0$

故 $a=b=0$　舍去

(ii) $\lambda=0$，$X(x)=ax+b$，$X'(x)=a$

由边界条件知 $b=0$，$a=0$，舍去

(iii) $\lambda>0$，$X(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow X'(x)=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$$\begin{cases} 代入\ X(0)=0 \Rightarrow a=0 \\ 代入\ X(l)=0 \Rightarrow a\cos\sqrt{\lambda}l+b\sin\sqrt{\lambda}l=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{l},\ n\geq 1 \end{cases}$$

特征函数 $X_n(x)=b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x=b_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

且对 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\ n\geq 1$，$\Rightarrow T''(t)+2hT'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}T''(t)+\frac{2h}{a^2}T'(t)+\lambda T(t)=0$

令 $C_1(t)=\frac{1}{a^2}$，$C_2(t)=\frac{2h}{a^2}$，$C_3(t)=0$

代入 $p(t)=e^{\int\frac{C_2(t)}{C_1(t)}dt}$ 得 $p(t)=e^{2ht}$

代入 $q(t)=\frac{C_3(t)}{C_1(t)}p(t)$ 得 $q(t)=0$

代入 $\rho(t)=\frac{1}{C_1(t)}p(t)$ 得 $\rho(t)=a^2e^{2ht} \Rightarrow (e^{2ht}T'(t))'+(\lambda a^2e^{2ht})T(t)=0$

由特征方程知 $T_n(t)=e^{-ht}(C_1\cos\sqrt{\lambda a^2-h^2}\,t+C_2\sin\sqrt{\lambda_n a^2-h^2}\,t)$

综上，$u(t,x)=X(x)T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}(C_1\cos\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}\,t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

$u(0,x)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_1\sin(\frac{n\pi}{l}x) \Rightarrow C_1=\frac{\varphi(x)}{\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{l}x)}$

$u_t(0,x)=\psi(x)=\frac{n\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}C_1\cos(\frac{n\pi}{l}x) \Rightarrow C_1=\frac{\psi(x)\,l}{n\pi\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{l}x)}$

$\Rightarrow u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}(C_1\cos\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}\,t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$，$n=1,2,\cdots$

2、求解

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin\frac{x}{2} \quad (0<x<\pi,\ t>0) \\ u|_{x=0}=1,\ u_x|_{x=\pi}=\pi \\ t=0:\ u=\pi x+\sin\frac{x}{2}+1,\ u_t=0 \end{cases}$$

解：设 $v(t,x)=A(t)x+B(t)$

代入非齐次边界条件 $v|_{x=0}=B(t)=1$

$v_x|_{x=l}=A(t)=\pi$

得 $v(t,x)=\pi x+1$

再令 $u(t,x)=w(t,x)+\pi x+1=w(t,x)+\pi x+1$

则 $w(t,x)$ 是定解问题 $\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=\sin\frac{x}{2} \quad (0<x<\pi,\ t>0) \\ w|_{x=0}=0,\ w_x|_{x=\pi}=0 \\ t=0:\ w=\sin\frac{x}{2},\ w_t=0 \end{cases}$ 的解

利用叠加原理，考虑

(I) $\begin{cases} w^{(1)}_{tt}-w^{(1)}_{xx}=0 \\ w^{(1)}(x,0)=\sin\frac{x}{2},\ w^{(1)}_t(x,0)=0 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} w^{(2)}_{tt}-w^{(2)}_{xx}=\sin\frac{x}{2} \\ w^{(2)}(x,0)=0,\ w^{(2)}_t(x,0)=0 \end{cases}$

对(I)，利用达朗贝尔公式，得

$$w^{(1)}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{x-t}{2}+\sin\frac{x+t}{2}\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}0\,d\xi=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x-t}{2}+\sin\frac{x+t}{2}\right)$$

对(II)，利用齐次化原理，考虑方程

$$\begin{cases} P_{tt}-P_{xx}=0 \\ t=\tau,\ P(x,\tau)=0,\ P_t(x,\tau)=\sin\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\sin\frac{\xi}{2}\,d\xi=\cos\frac{x-(t-\tau)}{2}-\cos\frac{x+(t-\tau)}{2}$$

$$w^{(2)}(x,t)=\int_0^t\left[\cos\frac{x-(t-\tau)}{2}-\cos\frac{x+(t-\tau)}{2}\right]d\tau=4\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x-t}{2}-2\sin\frac{x+t}{2}$$

$$w(x,t)=w^{(1)}(x,t)+w^{(2)}(x,t)=4\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{x-t}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{x+t}{2}$$

$$\begin{aligned} u(t,x)&=w(x,t)+\pi x+1 \\ &=4\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\left(\sin\frac{x-t}{2}+\sin\frac{x+t}{2}\right)+\pi x+1 \end{aligned}$$