对于比较正常的极限，比如 $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$，我们希望 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

同样，希望 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))$ （$\lim\limits_{x\to x_0} u(x_0)=y_0$）<换元法>

$=\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$ 但是这两个式子是不一定成立的

比如 $u(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(u(x)) = 0$

$f(x)=x$ $\quad \lim\limits_{y\to 1} f(y) = 1$

所以我们引入一个新概念：函数的连续性.

Defination $\forall \varepsilon>0, \exists \delta, \forall x \in \mathring{N}_\delta(x_0), |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

本质上就是 1. 在 $x_0$ 处极限存在 2. 有定义 3. 极限 = 定义

初等函数的连续性：

只需要证明
- ① $+ - \times \div$ 是否连续
- ② 反函数的连续性
- ③ $x, \sin x, e^x$ 的连续性
- ④ 复合函数的连续性

一致连续 > 逐点连续

Example：证明 $e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续：

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}|e^{x-x_0}-1| < \varepsilon$$

取 $\delta = \left\{\ln\left(\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}+1\right), \ln\left(1-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}\right)\right\}_{max}$

这个时候 $\delta(x_0, \varepsilon)$. 那能否找到一个统一的 $\delta(\varepsilon)$ 不依赖 $x_0$？

当 $x_0\to\infty$ $\delta\to 0$（$\delta$ 可以无限接近 0，说明 $e^x$ 不是一致连续的）

有一个比一致连续更强的连续 $|f(x)-f(x_0)|<k|x-x_0|^\alpha$

这显然是一致连续的，后面我们再说明这些定义的用处

闭区间上的连续函数
- ① 有界性
- ② 可以取极值