Toolbox 夹逼定律的本质：

Example：证明 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$

之前的做法：由于 $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1>\frac{k}{2n^2}$

$\therefore \sim > \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{4}$

但是右边我们夹不出来.（这个要用分子有理化）.

☆想法：用这个不等式真的夹不出右边吗？

当 $\sqrt{1+x}-1$ $(x\to 0)$ 时，$\frac{1}{2}x$ 只要大一点点（比如 $+x^2$

就会超过 $\sqrt{1+x}-1$

（这个我们可以证明）$\Leftarrow x^2+\frac{1}{2}x+1>\sqrt{1+x}$　　$(x^2+\frac{1}{2}x)^2 + 2x^2 + \cdots > \cdots$ ✓

所以我们可以找到一系列

比 x 小很多很多的量，记为 $o(x)$

使得：　$x-o(x)<\sqrt{1+x}-1<x+o(x)$

那我们可以干脆断言：$f(x)\sim g(x)$ 则 $f(x)=g(x)+o(g(x))$

回到题目 $\lim\sum\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1$　$\lim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2}+\ o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

这里需要再证一下可加性：即 $o(f(x))+o(g(x))$
$=o(f(x)+g(x))$.

即证

$\lim_{x\to\infty}\frac{h_1(x)+h_2(x)}{f(x)+g(x)}=0$