① 方法一：恒等变型成好的形式

目标：$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ 0 & a_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$ 上下三角

$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 一行只有少数非零项

方法 ①初等变换 $\xrightarrow{r_n - kr_m}$

②数乘：$k\begin{vmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{vmatrix}$

③拆分：$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1, & d_2 & \cdots & d_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i1}-d_1 + a_{i2} & \cdots \end{vmatrix}$

④转置 $|A|=|A^T|$

⑤交换行列

② 方法二：扩增，即 $|A| \to \begin{vmatrix} 1 & \cdots \\ & A \end{vmatrix}$

什么时候用：有一个列 $a_1 \cdots\cdots a_n$

A中的若干行的元素可以表示成 $\lambda a_1 \cdots \lambda a_n$

③ 递推方法：什么时候用？比较方便地展开出 D_{n-1} 时.

④ 重要结论 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & x_n^2 \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod (x_i - x_j)$

$n \geq i > j \geq 1$

（一个观点：有名字的就重要。）

(Vandermonde determinant)

② 例题：

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ n & \cdots & & & n \end{vmatrix}$

两行间相同的元素很多，相减即可

$\begin{vmatrix} A & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{matrix} \\ a_{n1} \cdots a_{n,n-1} & \beta \end{vmatrix} = 0$ 求 $\begin{vmatrix} A & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{matrix} \\ a_{n1} \cdots a_{n,n-1} & \alpha \end{vmatrix}$

（性质变换）

2.例

$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & & \\ \vdots & & & \\ a_na_1 & & & 1+a_n^2 \end{vmatrix}_{n\times n}$

3.例：

$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots x & -1 \\ & & & 0 & x \end{vmatrix}$