

# Классическая механика

## Содержание

1	Кинематика материальной точки . . . . .	1
1.1	Основные определения . . . . .	1
1.2	Декартовы компоненты скорости и ускорения . . . . .	1
1.3	Равномерное движение . . . . .	2
1.4	Равнопеременное движение . . . . .	2
1.5	Криволинейное движение . . . . .	3
2	Относительность механического движения . . . . .	4
3	Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца . . . . .	4
3.1	Принцип относительности Галилея . . . . .	4
3.2	Преобразования Галилея . . . . .	4
3.3	Гипотеза неподвижного эфира . . . . .	4
3.4	Преобразования Лоренца . . . . .	5
4	Кинематика твёрдого тела . . . . .	6
4.1	Поступательное движение . . . . .	6
4.2	Вращение вокруг оси . . . . .	6
4.3	Движение с одной неподвижной точкой . . . . .	7
4.4	Положение тела в пространстве . . . . .	7
5	Кинематика вращающихся систем отсчёта . . . . .	7
6	Законы Ньютона . . . . .	8
6.1	Основные определения . . . . .	8
6.2	Законы Ньютона . . . . .	8
7	Силы в механике . . . . .	9
7.1	Гравитационные силы . . . . .	9
7.2	Сила упругости . . . . .	10
7.3	Сила трения . . . . .	10
7.4	Электромагнитные силы . . . . .	10
7.5	Релятивистское уравнение движения . . . . .	11

## 1 Кинематика материальной точки

### 1.1 Основные определения

**Кинематика** — это раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения. Задача кинематики — математически точно описать движение тела.

**Материальная точка** — это тело, размерами которого можно пренебречь. Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон (например, с колебанием маятника). Чтобы измерить любую физическую величину, нужно ввести единицу измерения.

**Метр** — это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за  $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$  секунды.

**Секунда** — это продолжительность приблизительно  $10^{10}$  колебаний электрона в атоме цезия.

**Ось координат** — это прямая линия, на которой выбраны начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.

**Радиус-вектор точки** — это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной точке.

**Орты декартовых координат** — это единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.

**Проекция вектора на ось** — это разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси.

**Перемещение** — это разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

## 1.2 Декартовы компоненты скорости и ускорения

**Скорость материальной точки** — это отношение перемещения точки к длительности перемещения в пределе, когда эта длительность стремится к нулю (производная по времени).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(i x + j y + k z) = i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z}$$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

**Ускорение материальной точки** — это производная скорости точки по времени.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(i v_x + j v_y + k v_z) = i \ddot{x} + j \ddot{y} + k \ddot{z}$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

## 1.3 Равномерное движение

$$v_x = \text{const} = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$x - x_0 = v_x t$$

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

## 1.4 Равнопеременное движение

$$a_x = \text{const} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$dv_x = a_x dt$$

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$$

$$v_x - v_{x_0} = a_x t$$

$$v_x(t) = v_{x_0} + a_x t$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$x - x_0 = v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

## 1.5 Криволинейное движение

**Тангенциальное ускорение** — это составляющая ускорения, параллельная вектору скорости.

**Нормальное ускорение** — это составляющая ускорения, перпендикулярная вектору скорости и направленная к центру кривизны траектории движения точки.

**Круг кривизны кривой в точке** — это круг, проходящий через данную точку кривой М и две другие точки кривой N и Р, лежащие по разные стороны от М, в пределе при  $N \rightarrow M$  и  $P \rightarrow M$ .

$$\tau = \frac{\mathbf{v}}{v}, |\tau| = 1, \mathbf{n} \perp \tau, |\mathbf{n}| = 1$$

$$\mathbf{a} = \tau a_\tau + \mathbf{n} a_n$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\tau v) = \tau \frac{dv}{dt} + v \frac{d\tau}{dt}$$

$$d\tau = \mathbf{n} \frac{dr}{R}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathbf{n} \frac{dr}{R dt} = \mathbf{n} \frac{v}{R}$$

$$\mathbf{a} = \tau \frac{dv}{dt} + \mathbf{n} \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Найдём радиус кривизны

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0 \text{ (Дифференцируем дважды по } x \text{)}$$

$$1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{y''}, x - x_c = \frac{1 + y'^2}{y''}y'$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 (1 + y'^2) = R^2$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

## 2 Относительность механического движения

**Относительность механического движения** — это различие движения одного и того же тела относительно разных тел (систем) отсчёта.

**Поступательное движение** — это движение, при котором направление осей не меняется. При поступательном движении подвижной системы отсчёта справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — абсолютная скорость тела,  $\mathbf{v}_0$  — относительная скорость тела в подвижной системе отсчёта,  $\mathbf{v}'$  — скорость системы.

## 3 Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца

### 3.1 Принцип относительности Галилея

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется. Иначе говоря, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчёта к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.

### 3.2 Преобразования Галилея

Рассмотрим неподвижную систему отсчёта  $(x, y, z)$  и систему, движущуюся равномерно  $(x', y', z', v)$ . Тогда преобразования Галилея выглядят так:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Как следствие получим правило сложения скоростей:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

### 3.3 Гипотеза неподвижного эфира

**Гипотеза неподвижного эфира** — это предположение о том, что скорость света относительно Солнца равна  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, а относительно Земли она определяется правилом Галилея:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \end{cases}$$

**Продольная скорость света** — это скорость света относительно Земли в направлении её движения по орбите.

$$v_{||} = |v'_x| = c \pm v$$

**Поперечная скорость света** — это скорость света относительно Земли в направлении, перпендикулярном её движению по орбите.

$$v_{\perp} = |v'_y| = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Продольная и поперечная скорости света не равны друг другу.

**Интерференция света** — взаимная компенсация действия света в некоторых точках пространства ("свет + свет = темнота").

В 19 веке стало известно, что уравнения электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразований Галилея. Было решено проверить правило сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн. Мейкельсон решил использовать в качестве подвижной системы отсчёта Землю в движении вокруг Солнца. Для проведения опыта использовали интерферометр Мейкельсона, состоящего из двух перпендикулярных зеркал, экрана и светоделительного зеркала.

$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

После поворота на  $90^\circ$ :

$$\frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{T}{2}$$

Отсюда  $l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4} \lambda \frac{c^2}{v^2} \approx 10 \text{ м.}$

Опыт показал, что повороты прибора не меняли наблюдаемую интерференционную картину. Был сделан вывод, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна — результат опыта был таким, как будто Земля неподвижна.

### 3.4 Преобразования Лоренца

**Принцип постоянства скорости света:** скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) она определяется.

Преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Оказалось, что уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно преобразований Лоренца.

**Принцип относительности Эйнштейна:** уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Как следствие можно получить правило сложения скоростей в теории относительности:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{dx'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}$$

## 4 Кинематика твёрдого тела

### 4.1 Поступательное движение

**Твёрдое тело** — это система материальных точек, расстояние между любой парой которых неизменно.

**Поступательное движение твёрдого тела** — это движение, при котором ориентация тела в пространстве сохраняется.

$$v_i = v$$

## 4.2 Вращение вокруг оси

**Вращение твёрдого тела вокруг оси** — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

$$v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt}$$

**Угол поворота тела** (в радианах) — это отношение длины дуги окружности, попадающей внутрь угла, к длине этой окружности.

$$\phi = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

$$v \approx \frac{dS}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = \omega R$$

**Вектор угловой скорости** — это вектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и равный по модулю производной угла по времени.

## 4.3 Движение с одной неподвижной точкой

**Теорема Эйлера** — движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как движение вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через точку закрепления — мгновенной оси вращения.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

## 4.4 Положение тела в пространстве

**Матрица поворота тела**  $S_{ij}$  — это матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (неподвижной системы и системы, связанной с телом).

$$S_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Найдём преобразование координат при повороте тела

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}) = x_1 = x'_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) + x'_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2) + x'_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_3)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x'_j$$

## 5 Кинематика вращающихся систем отсчёта

Какие особенности приобретают физические законы, если рассматривать их в системе отсчёта, связанной с вращающимся телом? Как связаны между собой кинематические характеристики точки в неподвижной и вращающейся системах?

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 dx'_1 + \mathbf{e}'_2 dx'_2 + \mathbf{e}'_3 dx'_3 + d\mathbf{e}'_1 x'_1 + d\mathbf{e}'_2 x'_2 + d\mathbf{e}'_3 x'_3$$

Здесь первая группа слагаемых характеризует изменение положения точки относительно подвижной системы отсчёта, а вторая — изменение положение подвижной системы относительно неподвижной.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$d\mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]dt$$

$$d\mathbf{e}'_1 x'_1 + d\mathbf{e}'_2 x'_2 + d\mathbf{e}'_3 x'_3 = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$$

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 dx'_1 + \mathbf{e}'_2 dx'_2 + \mathbf{e}'_3 dx'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$$

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}']$$

$$d\mathbf{v}' = \mathbf{e}'_1 dv'_1 + \mathbf{e}'_2 dv'_2 + \mathbf{e}'_3 dv'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']dt \text{ (получено аналогично } d\mathbf{r}') \text{}$$

$$[\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}'] = dt([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']])$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_k, \text{ где } \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] \text{ (переносное), } \mathbf{a}_k = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] \text{ (кориолисово)}$$

## 6 Законы Ньютона

### 6.1 Основные определения

**Сила** — это мера действия других тел на данное тело.

**Масса тела** — это мера отклика тела на действие силы.

**Импульс** — это произведение массы точки на её скорость.

**Килограмм** — масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты (определение устарело).

**1 Ньютон** — сила, вызывающая ускорение в  $1 \text{ м/с}^2$  у тела массы 1 кг.



## 6.2 Законы Ньютона

**Первый закон Ньютона:** всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

**Второй закон Ньютона:** произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на него силе. В импульсной формулировке: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

$$\boxed{F = ma}$$

$$p = mv$$

$$\dot{p} = ma$$

$$\boxed{\dot{p} = F}$$

Второй закон Ньютона не выполняется в двух случаях: тело движется со скоростью, близкой к скорости света, либо тело очень мало и движется в малой области пространства.

**Третий закон Ньютона:** действия двух тел друг на друга равны по модулю и противоположно направлены.

$$\boxed{F_{12} = -F_{21}}$$

Силы взаимодействия приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то оно движется так, как если бы на него действовала одна сила, равная их векторной сумме.

## 7 Силы в механике

### 7.1 Гравитационные силы

**Закон всемирного тяготения:** любые две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \text{ где } G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

**Принцип суперпозиции:** каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как будто других частиц нет. Например, при притяжении материальной точки к однородному шару сила такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

**Масса Земли:**

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G} \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

### Период вращения Луны:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

$$T = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}} \approx 30 \text{ суток}$$

## 7.2 Сила упругости

**Упругое тело** — это тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия силы.

**Закон Гука:** сила упругости пропорциональна величине деформации. Это приближённое выражение, верное при малых деформациях.

$$F_x = -kx$$

## 7.3 Сила трения

**Сила нормального давления (реакции опоры)** — это составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения. **Трение покоя** — это трение, возникающее при отсутствии движения соприкасающихся тел.

$$F_{\text{тр.п.}} = -F_{\text{внеш.}}$$

**Трение скольжения** — это трение, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого. Опыт показывает, что сила трения скольжения примерно равна максимальной силе трения покоя.

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N \approx F_{\text{max тр.п.}}$$

**Вязкое трение (сопротивление)** — это трение, препятствующее движению тела в сплошной среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения.

$$F_{\text{в.тр.}} = kv$$

## 7.4 Электромагнитные силы

**Электрический заряд** — это мера электрического взаимодействия тела.

**Электрическое поле** — это поле, созданное электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электрические заряды.

**Напряжённость поля** — это мера действия электрического поля на заряд.

$$E = \frac{F}{q}$$

**Сила Кулона** — это сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме.

$$F_q = qE$$

**Электрический ток** — это направленное движение заряженных частиц под воздействием электрического поля.

**Магнитное поле** — это поле, созданное электрическим током и проявляющее себя действием на движущиеся электрические заряды.

**Магнитная индукция** — это мера действия магнитного поля на заряд.

**Электромагнитное поле** — это поле, образованное электрическим и магнитным полями, направленными перпендикулярно друг другу.

**Сила Лоренца** — это сила, с которой электромагнитное поле действует движущийся точечный заряд.

$$F_L = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

## 7.5 Релятивистское уравнение движения

Обобщим второй закон Ньютона на случай движения тел с большими скоростями. Для этого введём сопровождающую систему отсчёта, в которой выполняется второй закон Ньютона, далее перейдём к неподвижной системе отсчёта с осями координат, параллельными осям сопровождающей системы (используем преобразования Лоренца), а затем поворачиваем неподвижную систему отсчёта.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 8 Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции