Классическая механика

Содержание

1 Кинематика материальной точки

1.1 Основные определения

Кинематика — это раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения. Задача кинематики — математически точно описать движение тела.
Материальная точка — это тело, размерами которого можно пренебречь. Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон. Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон (например, с колебанием маятника). Чтобы измерить любую физическую величину, нужно ввести единицу измерения.
Метр — это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\dfrac{1}{3 \cdot 10^8}$ секунды.
Секунда — это продолжительность приблизительно 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия.

Ось координат — это прямая линия, на которой выбраны начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.
Радиус-вектор точки — это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной точке.
Орты декартовых координат — это единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.
Проекция вектора на ось — это разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси.
Перемещение — это разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

1.2 Декартовы компоненты скорости и ускорения

Скорость материальной точки — это отношение перемещения точки к длительности перемещения в пределе, когда эта длительность стремится к нулю (производная по времени).

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dot{r}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} v_x + \boldsymbol{j} v_y + \boldsymbol{k} v_z$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z) = \boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y} + \boldsymbol{k}\dot{z}$$

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение материальной точки — это производная скорости точки по времени.

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} a_x + \boldsymbol{j} a_y + \boldsymbol{k} a_z$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{i} v_x + \boldsymbol{j} v_y + \boldsymbol{k} v_z) = \boldsymbol{i}\ddot{x} + \boldsymbol{j}\ddot{y} + \boldsymbol{k}\ddot{z}$$

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.3 Равномерное движение

$$v_x = const = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x dt$$

$$x - x_0 = v_x t$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_x t}$$

1.4 Равнопеременное движение

$a_x = const = \dfrac{dv_x}{dt}$

$dv_x = a_x dt$

$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$

$v_x - v_{x_0} = a_x t$

$\boxed{v_x(t) = v_{x_0} + a_x t}$

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x dt$

$x - x_0 = v_{x_0} t + \dfrac{a_x t^2}{2}$

$\boxed{x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \dfrac{a_x t^2}{2}}$

1.5 Криволинейное движение

Тангенциальное ускорение — это составляющая ускорения, параллельная вектору скорости.
Нормальное ускорение — это составляющая ускорения, перпендикулярная вектору скорости и направленная к центру кривизны траектории движения точки.
Круг кривизны кривой в точке — это круг, проходящий через данную точку кривой M и две другие точки кривой N и P, лежащие по разные стороны от M, в пределе при N → M и P → M.

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v}, |\boldsymbol{\tau}| = 1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{\tau}, |\boldsymbol{n}| = 1$

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\tau} a_\tau + \boldsymbol{n} a_n$

$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau} v) = \boldsymbol{\tau}\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$

$d\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}\dfrac{dr}{R}$

$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \boldsymbol{n}\dfrac{dr}{Rdt} = \boldsymbol{n}\dfrac{v}{R}$

$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\tau}\dfrac{dv}{dt} + \boldsymbol{n}\dfrac{v^2}{R}}$

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

Найдём радиус кривизны

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0$ (Дифференцируем дважды по x)

$$1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{y''}, x - x_c = \frac{1 + y'^2}{y''}y'$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 (1 + y'^2) = R^2$$

$$\boxed{R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}}$$

2 Относительность механического движения

Относительность механического движения — это различие движения одного и того же тела относительно разных тел (систем) отсчёта.
Поступательное движение — это движение, при котором направление осей не меняется.
При поступательном движении подвижной системы отсчёта справедливы следующие формулы:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — абсолютная скорость тела, $\boldsymbol{v}_0$ — относительная скорость тела в подвижной системе отсчёта, $\boldsymbol{v}'$ — скорость системы.

3 Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца

3.1 Принцип относительности Галилея

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется. Иначе говоря, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчёта к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.

3.2 Преобразования Галилея

Рассмотрим неподвижную систему отсчёта (x, y, z) и систему, движущуюся равномерно (x′, y′, z′, v). Тогда преобразования Галилея выглядят так:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Как следствие получим правило сложения скоростей:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

3.3 Гипотеза неподвижного эфира

Гипотеза неподвижного эфира — это предположение о том, что скорость света относительно Солнца равна с = $3 \cdot 10^8$ м/с, а относительно Земли она определяется правилом Галилея:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \end{cases}$$

Продольная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении её движения по орбите.

$$v_{\parallel} = |v'_x| = c \pm v$$

Поперечная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении, перпендикулярном её движению по орбите.

$$v_{\perp} = |v'_y| = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Продольная и поперечная скорости света не равны друг другу.
Интерференция света — взаимная компенсация действия света в некоторых точках пространства ("свет + свет = темнота").

В 19 веке стало известно, что уравнения электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразований Галилея. Было решено проверить правило сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн. Мейкельсон решил использовать в качестве подвижной системы отсчёта Землю в движении вокруг Солнца. Для проведения опыта использовали интерферометр Мейкельсона, состоящего из двух перпендикулярных зеркал, экрана и светоделительного зеркала.

$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

После поворота на 90°:

$$\frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}$$

Отсюда $l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4}\lambda\frac{c^2}{v^2} \approx 10$ м.
Опыт показал, что повороты прибора не меняли наблюдаемую интерференционную картину. Был сделан вывод, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна — результат опыта был таким, как будто Земля неподвижна.

3.4 Преобразования Лоренца

Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) она определяется.
Преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \dfrac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Оказалось, что уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно преобразований Лоренца.
Принцип относительности Эйнштейна: уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Как следствие можно получить правило сложения скоростей в теории относительности:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{dx'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}}$$

4 Кинематика твёрдого тела

4.1 Поступательное движение

Твёрдое тело — это система материальных точек, расстояние между любой парой которых неизменно.
Поступательное движение твёрдого тела — это движение, при котором ориентация тела в пространстве сохраняется.

$$v_i = v$$

4.2 Вращение вокруг оси

Вращение твёрдого тела вокруг оси — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

$$v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt}$$

Угол поворота тела (в радианах) — это отношение длины дуги окружности, попадающей внутрь угла, к длине этой окружности.

$$\phi = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$v \approx \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R$$

Вектор угловой скорости — это вектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и равный по модулю производной угла по времени.

4.3 Движение с одной неподвижной точкой

Теорема Эйлера — движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как движение вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через точку закрепления — мгновенной оси вращения.

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}]$$

4.4 Положение тела в пространстве

Матрица поворота тела S_{ij} — это матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (неподвижной системы и системы, связанной с телом).

$$S_{ij} = (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})$$

Найдём преобразование координат при повороте тела

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2 + \boldsymbol{e}_3 x_3$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}'_1 x'_1 + \boldsymbol{e}'_2 x'_2 + \boldsymbol{e}'_3 x'_3$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{r}) = x_1 = x'_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_1) + x'_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2) + x'_3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_3)$$

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij} x'_j}$$

5 Кинематика вращающихся систем отсчёта

Какие особенности приобретают физические законы, если рассматривать их в системе отсчёта, связанной с вращающимся телом? Как связаны между собой кинематические характеристики точки в неподвижной и вращающейся системах?

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$

$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}_0 + d\boldsymbol{r}'$

$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_1'x_1' + \boldsymbol{e}_2'x_2' + \boldsymbol{e}_3'x_3'$

$d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_1'dx_1' + \boldsymbol{e}_2'dx_2' + \boldsymbol{e}_3'dx_3' + d\boldsymbol{e}_1'x_1' + d\boldsymbol{e}_2'x_2' + d\boldsymbol{e}_3'x_3'$

Здесь первая группа слагаемых характеризует изменение положения точки относительно подвижной системы отсчёта, а вторая — изменение положение подвижной системы относительно неподвижной.

$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}]$

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

$d\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}]dt$

$d\boldsymbol{e}_1'x_1' + d\boldsymbol{e}_2'x_2' + d\boldsymbol{e}_3'x_3' = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']dt$

$d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_1'dx_1' + \boldsymbol{e}_2'dx_2' + \boldsymbol{e}_3'dx_3' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']dt$

$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}_0 + d\boldsymbol{r}'$

$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']}$

$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v}_0 + d\boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{r}']$

$d\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{e}_1'dv_1' + \boldsymbol{e}_2'dv_2' + \boldsymbol{e}_3'dv_3' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}']dt$ (получено аналогично $d\boldsymbol{r}'$)

$[\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{r}'] = dt([\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']])$

$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']])}$

$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_\text{п} + \boldsymbol{a}_\text{к}}$, где $\boldsymbol{a}_\text{п} = \boldsymbol{a}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']]$ (переносное), $\boldsymbol{a}_\text{к} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}']$ (кориолисово)

6 Законы Ньютона

6.1 Основные определения

Сила — это мера действия других тел на данное тело.
Масса тела — это мера отклика тела на действие силы.
Импульс — это произведение массы точки на её скорость.
Килограмм — масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты (определение устарело).
1 Ньютон — сила, вызывающая ускорение в 1 м/с^2 у тела массы 1 кг.

6.2 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.
Второй закон Ньютона: произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на него силе. В импульсной формулировке: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}}$$

Второй закон Ньютона не выполняется в двух случаях: тело движется со скоростью, близкой к скорости света, либо тело очень мало и движется в малой области пространства.
Третий закон Ньютона: действия двух тел друг на друга равны по модулю и противоположно направлены.

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}}$$

Силы взаимодействия приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.
Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то оно движется так, как если бы на него действовала одна сила, равная их векторной сумме.

7 Силы в механике