

Классическая механика

Содержание

1	Кинематика материальной точки	2
1.1	Основные определения	2
1.2	Декартовы компоненты скорости и ускорения	2
1.3	Равномерное движение	3
1.4	Равнопеременное движение	3
1.5	Криволинейное движение	4
2	Относительность механического движения	5
3	Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца	5
3.1	Принцип относительности Галилея	5
3.2	Преобразования Галилея	5
3.3	Гипотеза неподвижного эфира	5
3.4	Преобразования Лоренца	6
4	Кинематика твёрдого тела	7
4.1	Поступательное движение	7
4.2	Вращение вокруг оси	7
4.3	Движение с одной неподвижной точкой	8
4.4	Положение тела в пространстве	8
5	Кинематика вращающихся систем отсчёта	8
6	Законы Ньютона	9
6.1	Основные определения	9
6.2	Законы Ньютона	9
7	Силы в механике	10
7.1	Гравитационные силы	10
7.2	Сила упругости	11
7.3	Сила трения	11
7.4	Электромагнитные силы	11
7.5	Релятивистское уравнение движения	12
8	Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции	12
9	Импульс системы частиц. Движение центра масс	13
9.1	Основные определения	13
9.2	Движение центра масс	13
10	Закон сохранения импульса	14
10.1	Законы сохранения и изменения импульса	14
10.2	Реактивное движение	14

11	Работа и потенциальная энергия	15
11.1	Основные определения	15
11.2	Связь силы и потенциальной энергии	15
11.3	Потенциальная энергия материальной точки в поле центральной силы . .	16
12	Кинетическая энергия	16
12.1	Основные определения	16

1 Кинематика материальной точки

1.1 Основные определения

Кинематика — это раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения. Задача кинематики — математически точно описать движение тела.

Материальная точка — это тело, размерами которого можно пренебречь. Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон. Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон (например, с колебанием маятника). Чтобы измерить любую физическую величину, нужно ввести единицу измерения.

Метр — это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ секунды.

Секунда — это продолжительность приблизительно 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия.

Ось координат — это прямая линия, на которой выбраны начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.

Радиус-вектор точки — это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной точке.

Орты декартовых координат — это единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.

Проекция вектора на ось — это разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси.

Перемещение — это разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

1.2 Декартовы компоненты скорости и ускорения

Скорость материальной точки — это отношение перемещения точки к длительности перемещения в пределе, когда эта длительность стремится к нулю (производная по времени).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(ix + jy + kz) = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}$$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение материальной точки — это производная скорости точки по времени.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(i v_x + j v_y + k v_z) = i \ddot{x} + j \ddot{y} + k \ddot{z}$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.3 Равномерное движение

$$v_x = \text{const} = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$x - x_0 = v_x t$$

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

1.4 Равнопеременное движение

$$a_x = \text{const} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$dv_x = a_x dt$$

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$$

$$v_x - v_{x_0} = a_x t$$

$$v_x(t) = v_{x_0} + a_x t$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$x - x_0 = v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

1.5 Криволинейное движение

Тангенциальное ускорение — это составляющая ускорения, параллельная вектору скорости.

Нормальное ускорение — это составляющая ускорения, перпендикулярная вектору скорости и направленная к центру кривизны траектории движения точки.

Круг кривизны кривой в точке — это круг, проходящий через данную точку кривой М и две другие точки кривой N и Р, лежащие по разные стороны от М, в пределе при $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$.

$$\tau = \frac{\mathbf{v}}{v}, |\tau| = 1, \mathbf{n} \perp \tau, |\mathbf{n}| = 1$$

$$\mathbf{a} = \tau a_\tau + \mathbf{n} a_n$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\tau v) = \tau \frac{dv}{dt} + v \frac{d\tau}{dt}$$

$$d\tau = \mathbf{n} \frac{dr}{R}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathbf{n} \frac{dr}{R dt} = \mathbf{n} \frac{v}{R}$$

$$\mathbf{a} = \tau \frac{dv}{dt} + \mathbf{n} \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Найдём радиус кривизны

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0 \text{ (Дифференцируем дважды по } x \text{)}$$

$$1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{y''}, x - x_c = \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} y' \right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''} \right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} \right)^2 (1 + y'^2) = R^2$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

2 Относительность механического движения

Относительность механического движения — это различие движения одного и того же тела относительно разных тел (систем) отсчёта.

Поступательное движение — это движение, при котором направление осей не меняется. При поступательном движении подвижной системы отсчёта справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

Здесь \mathbf{v} — абсолютная скорость тела, \mathbf{v}_0 — относительная скорость тела в подвижной системе отсчёта, \mathbf{v}' — скорость системы.

3 Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца

3.1 Принцип относительности Галилея

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется. Иначе говоря, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчёта к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.

3.2 Преобразования Галилея

Рассмотрим неподвижную систему отсчёта (x, y, z) и систему, движущуюся равномерно (x', y', z', v) . Тогда преобразования Галилея выглядят так:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Как следствие получим правило сложения скоростей:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

3.3 Гипотеза неподвижного эфира

Гипотеза неподвижного эфира — это предположение о том, что скорость света относительно Солнца равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а относительно Земли она определяется правилом

Галилея:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \end{cases}$$

Продольная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении её движения по орбите.

$$v_{\parallel} = |v'_x| = c \pm v$$

Поперечная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении, перпендикулярном её движению по орбите.

$$v_{\perp} = |v'_y| = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Продольная и поперечная скорости света не равны друг другу.

Интерференция света — взаимная компенсация действия света в некоторых точках пространства ("свет + свет = темнота").

В 19 веке стало известно, что уравнения электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразований Галилея. Было решено проверить правило сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн. Мейкельсон решил использовать в качестве подвижной системы отсчёта Землю в движении вокруг Солнца. Для проведения опыта использовали интерферометр Мейкельсона, состоящего из двух перпендикулярных зеркал, экрана и светоделительного зеркала.

$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

После поворота на 90°:

$$\frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}$$

Отсюда $l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4} \lambda \frac{c^2}{v^2} \approx 10$ м.

Опыт показал, что повороты прибора не меняли наблюдаемую интерференционную картину. Был сделан вывод, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна — результат опыта был таким, как будто Земля неподвижна.

3.4 Преобразования Лоренца

Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) она определяется.

Преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Оказалось, что уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна: уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Как следствие можно получить правило сложения скоростей в теории относительности:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{dx'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}$$

4 Кинематика твёрдого тела

4.1 Поступательное движение

Твёрдое тело — это система материальных точек, расстояние между любой парой которых неизменно.

Поступательное движение твёрдого тела — это движение, при котором ориентация тела в пространстве сохраняется.

$$v_i = v$$

4.2 Вращение вокруг оси

Вращение твёрдого тела вокруг оси — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

$$v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt}$$

Угол поворота тела (в радианах) — это отношение длины дуги окружности, попадающей внутрь угла, к длине этой окружности.

$$\phi = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$v \approx \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R$$

Вектор угловой скорости — это вектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и равный по модулю производной угла по времени.

4.3 Движение с одной неподвижной точкой

Теорема Эйлера — движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как движение вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через точку закрепления — мгновенной оси вращения.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

4.4 Положение тела в пространстве

Матрица поворота тела S_{ij} — это матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (неподвижной системы и системы, связанной с телом).

$$S_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Найдём преобразование координат при повороте тела

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}) = x_1 = x'_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) + x'_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2) + x'_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_3)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x'_j$$

5 Кинематика вращающихся систем отсчёта

Какие особенности приобретают физические законы, если рассматривать их в системе отсчёта, связанной с вращающимся телом? Как связаны между собой кинематические характеристики точки в неподвижной и вращающейся системах?

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 dx'_1 + \mathbf{e}'_2 dx'_2 + \mathbf{e}'_3 dx'_3 + d\mathbf{e}'_1 x'_1 + d\mathbf{e}'_2 x'_2 + d\mathbf{e}'_3 x'_3$$

Здесь первая группа слагаемых характеризует изменение положения точки относительно подвижной системы отсчёта, а вторая — изменение положение подвижной системы относительно неподвижной.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$d\mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]dt$$

$$d\mathbf{e}'_1 x'_1 + d\mathbf{e}'_2 x'_2 + d\mathbf{e}'_3 x'_3 = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$$

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 dx'_1 + \mathbf{e}'_2 dx'_2 + \mathbf{e}'_3 dx'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$$

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}']$$

$$d\mathbf{v}' = \mathbf{e}'_1 dv'_1 + \mathbf{e}'_2 dv'_2 + \mathbf{e}'_3 dv'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']dt \text{ (получено аналогично } d\mathbf{r}')$$

$$[\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}'] = dt([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']])$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']])$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_k, \text{ где } \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] \text{ (переносное), } \mathbf{a}_k = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] \text{ (кориолисово)}$$

6 Законы Ньютона

6.1 Основные определения

Сила — это мера действия других тел на данное тело.

Масса тела — это мера отклика тела на действие силы.

Импульс — это произведение массы точки на её скорость.

Килограмм — масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты (определение устарело).

1 Ньютон — сила, вызывающая ускорение в 1 м/с^2 у тела массы 1 кг.

6.2 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

Второй закон Ньютона: произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на него силе. В импульсной формулировке: скорость изменения импульса

материальной точки равна действующей на неё силе.

$$\boxed{F = ma}$$

$$p = mv$$

$$\dot{p} = ma$$

$$\boxed{\dot{p} = F}$$

Второй закон Ньютона не выполняется в двух случаях: тело движется со скоростью, близкой к скорости света, либо тело очень мало и движется в малой области пространства.

Третий закон Ньютона: действия двух тел друг на друга равны по модулю и противоположно направлены.

$$\boxed{F_{12} = -F_{21}}$$

Силы взаимодействия приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то оно движется так, как если бы на него действовала одна сила, равная их векторной сумме.

7 Силы в механике

7.1 Гравитационные силы

Закон всемирного тяготения: любые две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \text{ где } G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как будто других частиц нет. Например, при притяжении материальной точки к однородному шару сила такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Масса Земли:

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G} \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Период вращения Луны:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

$$T = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}} \approx 30 \text{ суток}$$

7.2 Сила упругости

Упругое тело — это тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия силы.

Закон Гука: сила упругости пропорциональна величине деформации. Это приближённое выражение, верное при малых деформациях.

$$F_x = -kx$$

7.3 Сила трения

Сила нормального давления (реакции опоры) — это составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения. **Трение покоя** — это трение, возникающее при отсутствии движения соприкасающихся тел.

$$F_{\text{тр.п.}} = -F_{\text{внеш.}}$$

Трение скольжения — это трение, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого. Опыт показывает, что сила трения скольжения примерно равна максимальной силе трения покоя.

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N \approx F_{\text{max тр.п.}}$$

Вязкое трение (сопротивление) — это трение, препятствующее движению тела в сплошной среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения.

$$F_{\text{в.тр.}} = kv$$

7.4 Электромагнитные силы

Электрический заряд — это мера электрического взаимодействия тела.

Электрическое поле — это поле, созданное электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электрические заряды.

Напряжённость поля — это мера действия электрического поля на заряд.

$$E = \frac{F}{q}$$

Сила Кулона — это сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме.

$$F_q = qE$$

Электрический ток — это направленное движение заряженных частиц под воздействием электрического поля.

Магнитное поле — это поле, созданное электрическим током и проявляющее себя действием на движущиеся электрические заряды.

Магнитная индукция — это мера действия магнитного поля на заряд.

Электромагнитное поле — это поле, образованное электрическим и магнитным полями, направленными перпендикулярно друг другу.

Сила Лоренца — это сила, с которой электромагнитное поле действует на движущийся точечный заряд.

$$F_L = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

7.5 Релятивистское уравнение движения

Обобщим второй закон Ньютона на случай движения тел с большими скоростями. Для этого введём сопровождающую систему отсчёта, в которой выполняется второй закон Ньютона, далее перейдём к неподвижной системе отсчёта с осями координат, параллельными осям сопровождающей системы (используем преобразования Лоренца), а затем поворачиваем неподвижную систему отсчёта.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

8 Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции

Инерциальная система отсчёта — это такая система, в которой любое тело, бесконечно удалённое от других тел, не испытывает ускорения. Систему отсчёта, связанную с Землёй, обычно можно считать инерциальной. Неинерциальными являются системы отсчёта, движущиеся с большим ускорением относительно Земли.

Сила инерции — добавочная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчёта. Сила инерции отлична от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчёта, и не подчиняется третьему закону Ньютона.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + m\mathbf{a}' - m\mathbf{a}'$$

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$$

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\Pi + \mathbf{a}_\text{К}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = \mathbf{F}_\Pi + \mathbf{F}_\text{К} = -m\mathbf{a}_0 + m\omega^2\mathbf{r} - 2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']$$

Второе слагаемое в этой сумме называется **центробежной силой**, а третье — **Кориолисовой силой**.

На тела, движущиеся в северном полушарии, действует Кориолиса, направленная вправо относительно движения. Например, плоскость колебаний маятника Фуко медленно поворачивается за счёт силы Кориолиса. Этот опыт доказывает вращение Земли.

Невесомость — это исчезновение веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.

Перегрузка — это возрастание веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.

Центрифуга — это устройство, использующее центробежную силу инерции.

9 Импульс системы частиц. Движение центра масс

9.1 Основные определения

Импульс системы частиц — это сумма импульсов отдельных частиц системы.

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

Центр масс системы частиц — это точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \text{ где } m = \sum_i m_i$$

Для однородных и симметричных тел центр масс совпадает с геометрическим центром. В качестве примера рассмотрим систему из двух одинаковых точек.

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{2m} (\mathbf{r}_1 m + \mathbf{r}_2 m) = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

9.2 Движение центра масс

Импульс тела зависит от скорости центра масс

$$\begin{cases} \mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{a}_c = \dot{\mathbf{v}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{a}_i \end{cases}$$

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_c$$

Внутренние силы — это силы взаимодействия между телами данной системы.

\mathbf{f}_{ij} — сила, действующая на i со стороны j

Внешние силы — это силы, действующие на тела системы, со стороны тел, не входящих в данную систему.

\mathbf{F}_i — сила, действующая на i

Просуммируем все силы

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i$$

По третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, то есть сумма внутренних сил для любой пары частиц равна нулю. Следовательно, сумма всех внутренних сил системы равна нулю

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_c$$

$$m \mathbf{a}_c = \mathbf{F}_{\text{внеш}}$$

Центр масс движется так, как если бы в нём находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

10 Закон сохранения импульса

10.1 Законы сохранения и изменения импульса

Закон сохранения импульса: если сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется.

Закон изменения импульса: изменение импульса равно сумме внешних сил, действующих на систему.

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_c = \mathbf{F}_{\text{внеш}}$$

Закон сохранения импульса: если существует ось, проекция внешних сил на которую равна нулю, то импульс системы относительно этой оси сохраняется.

10.2 Реактивное движение

Введём следующие обозначения: \mathbf{v} — скорость ракеты относительно Земли, \mathbf{u} — скорость газов относительно Земли, \mathbf{c} — скорость газов относительно ракеты, μ — удельный расход топлива, m — масса ракеты с топливом, dm — масса сгорающего топлива.

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c} \\ m \mathbf{v} = (m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{u} dm \end{cases}$$

$$m d\mathbf{v} = -\mathbf{c} dm$$

$$m \mathbf{a} = -\mathbf{c} \frac{dm}{dt} = -\mathbf{c} \mu$$

$$\mathbf{F} = -\mu \mathbf{c}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \mathbf{c}$$

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{m}$$

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = \ln \frac{m_0}{m}}$$

11 Работа и потенциальная энергия

11.1 Основные определения

Элементарная работа — это скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы.

$$dA = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$$

1 Джоуль — это работа, которую совершает сила в 1 Ньютон при перемещении точки приложения на 1 метр в направлении силы.

Работа — это сумма элементарных работ.

$$A = \int dA$$

Потенциальная сила — это сила, работа которой равна нулю при перемещении точки приложения по любому замкнутому контуру. Потенциальными являются, например, сила тяжести, сила упругости, сила Кулона. Непотенциальной является сила трения.

Элементарная потенциальная энергия — это элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком минус.

$$d\Pi = -dA$$

Потенциальная энергия — это сумма элементарных потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi$$

11.2 Связь силы и потенциальной энергии

$$d\Pi = -dA = -(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$$

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$$

Потенциальная энергия системы частиц — это сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы.

11.3 Потенциальная энергия материальной точки в поле центральной силы

Центральная сила — это сила, направленная в сторону одной точки, называемой силовым центром.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -dA = -(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \frac{F}{r} r d\mathbf{r}$$

$$r d\mathbf{r} = x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

$$d\Pi = F dr$$

$$\Pi = GMm \int_{r_0}^r = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

12 Кинетическая энергия

12.1 Основные определения

Кинетическая энергия материальной точки — это величина, определяемая формулой:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Закон изменения кинетической энергии: приращение кинетической энергии материальной точки равно работе действующей на неё силы.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = dA = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} d\mathbf{v} = d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = dK$$

$dK = dA$