Классическая механика

Содержание

1	Кинематика материальной точки	
	1.1 Основные определения	
	1.2 Декартовы компоненты скорости и ускорения	2
	1.3 Равномерное движение	3
	1.4 Равнопеременное движение	3
	1.5 Криволинейное движение	3
2	Относительность механического движения	4
3	Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца	5
	3.1 Принцип относительности Галилея	5
	3.2 Преобразования Галилея	5
	3.3 Гипотеза неподвижного эфира	5
	3.4 Преобразования Лоренца	6
4	Кинематика твёрдого тела	7
	4.1 Поступательное движение	
	4.2 Вращение вокруг оси	
	4.3 Движение с одной неподвижной точкой	
	4.4 Положение тела в пространстве	7
5	Кинематика вращающихся систем отсчёта	8
6	Законы Ньютона	9
	6.1 Основные определения	9
	6.2 Законы Ньютона	9
7	Силы в механике	9
	7.1 Гравитационные силы	9
	7.2 Сила упругости	10
	7.3 Сила трения	10
	7.4 Электромагнитные силы	1
	7.5 Релятивистское уравнение движения	1
8	Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции	1

1 Кинематика материальной точки

1.1 Основные определения

Кинематика — это раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения. Задача кинематики — математически точно описать движение тела.

Материальная точка — это тело, размерами которого можно пренебречь. Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон. Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон (например, с колебанием маятника). Чтобы измерить любую физическую величину, нужно ввести единицу измерения.

Метр — это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ секунды.

Секунда — это продолжительность приблизительно 10¹⁰ колебаний электрона в атоме цезия.

Ось координат — это прямая линия, на которой выбраны начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.

Радиус-вектор точки — это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной точке.

Орты декартовых координат — это единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.

Проекция вектора на ось — это разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси.

Перемещение — это разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

1.2 Декартовы компоненты скорости и ускорения

Скорость материальной точки — это отношение перемещения точки к длительности перемещения в пределе, когда эта длительность стремится к нулю (производная по времени).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{r}$$

$$\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (i x + j y + k z) = i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z}$$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение материальной точки — это производная скорости точки по времени.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = ia_x + ja_y + ka_z$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(iv_x + jv_y + kv_z) = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\ddot{z}$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.3 Равномерное движение

$$v_{x} = const = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_{x}dt$$

$$\int_{x_{0}}^{x} dx = \int_{0}^{t} v_{x}dt$$

$$x - x_{0} = v_{x}t$$

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

1.4 Равнопеременное движение

$$a_{x} = const = \frac{dv_{x}}{dt}$$

$$dv_{x} = a_{x}dt$$

$$\int_{v_{x_{0}}}^{v_{x}} dv_{x} = \int_{0}^{t} a_{x}dt$$

$$v_{x} - v_{x_{0}} = a_{x}t$$

$$v_{x}(t) = v_{x_{0}} + a_{x}t$$

$$\int_{x_{0}}^{x} dx = \int_{0}^{t} v_{x}dt$$

$$x - x_0 = v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

1.5 Криволинейное движение

Тангенциальное ускорение — это составляющая ускорения, параллельная вектору скорости.

Нормальное ускорение — это составляющая ускорения, перпендикулярная вектору скорости и направленная к центру кривизны траектории движения точки.

Круг кривизны кривой в точке — это круг, проходящий через данную точку кривой М и две другие точки кривой N и P, лежащие по разные стороны от M, в пределе при N \rightarrow M и P \rightarrow M.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}}, |\boldsymbol{\tau}| = 1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{\tau}, |\boldsymbol{n}| = 1$$

$$a = \tau a_{\tau} + n a_{\eta}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\tau}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

$$d\mathbf{\tau} = \mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{R}$$

$$\frac{d\mathbf{\tau}}{dt} = \mathbf{n} \frac{dr}{Rdt} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{v}}{R}$$

$$a = \tau \frac{dv}{dt} + n \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Найдём радиус кривизны

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0$$
 (Дифференцируем дважды по x)

$$1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{v''}, x - x_c = \frac{1 + y'^2}{v''}y'$$

$$\left(\frac{1+{y'}^2}{y''}y'\right)^2 + \left(\frac{1+{y'}^2}{y''}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{1+{y'}^2}{y''}\right)^2(1+{y'}^2)=R^2$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

2 Относительность механического движения

Относительность механического движения — это различие движения одного и того же тела относительно разных тел (систем) отсчёта.

Поступательное движение — это движение, при котором направление осей не меняется. При поступательном движении подвижной системы отсчёта справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

$$a = a_0 + a'$$

Здесь ${\bf v}$ — абсолютная скорость тела, ${\bf v}_0$ — относительная скорость тела в подвижной системе отсчёта, ${\bf v}'$ — скорость системы.

3 Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца

3.1 Принцип относительности Галилея

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется. Иначе говоря, уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчёта к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.

3.2 Преобразования Галилея

Рассмотрим неподвижную систему отсчёта (x, y, z) и систему, движущуюся равномерно (x', y', z', v). Тогда преобразования Галилея выглядят так:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Как следствие получим правило сложения скоростей:

$$\begin{cases} V_{x} = V'_{x} + V \\ V_{y} = V'_{y} \\ V_{z} = V'_{z} \end{cases}$$

3.3 Гипотеза неподвижного эфира

Гипотеза неподвижного эфира — это предположение о том, что скорость света относительно Солнца равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а относительно Земли она определяется правилом Галилея:

$$\begin{cases} v_X^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_X = v_X' + v \\ v_Y = v_Y' \end{cases}$$

Продольная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении её движения по орбите.

$$V_{\parallel} = |V_X'| = c \pm v$$

Поперечная скорость света — это скорость света относительно Земли в направлении, перпендикулярном её движению по орбите.

$$v_\perp = |v_v'| = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Продольная и поперечная скорости света не равны друг другу.

Интерференция света — взаимная компенсация действия света в некоторых точках пространства ("свет + свет = темнота").

В 19 веке стало известно, что уравнения электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразований Галилея. Было решено проверить правило сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн. Мейкельсон решил использовать в качестве подвижной системы отсчёта Землю в движении вокруг Солнца. Для проведения опыта использовали интерферометр Мейкельсона, состоящего из двух перпендикулярных зеркал, экрана и светоделительного зеркала.

$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

После поворота на 90°:

$$\frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}$$

Отсюда
$$l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4} \lambda \frac{c^2}{v^2} \approx 10$$
 м.

Опыт показал, что повороты прибора не меняли наблюдаемую интерференционную картину. Был сделан вывод, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна — результат опыта был таким, как будто Земля неподвижна.

3.4 Преобразования Лоренца

Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) она определяется.

Преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Оказалось, что уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна: уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Как следствие можно получить правило сложения скоростей в теории относительности:

$$v_{x} = \frac{dx}{dt}, v_{x}' = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{dx'v}{c^{2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

$$v_{x} = \frac{v_{x}' + v}{1 + \frac{v_{x}'v}{c^{2}}}$$

4 Кинематика твёрдого тела

4.1 Поступательное движение

Твёрдое тело — это система материальных точек, расстояние между любой парой которых неизменно.

Поступательное движение твёрдого тела — это движение, при котором ориентация тела в пространстве сохраняется.

$$v_i = v$$

4.2 Вращение вокруг оси

Вращение твёрдого тела вокруг оси — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

$$v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt}$$

Угол поворота тела (в радианах) — это отношение длины дуги окружности, попадающей внутрь угла, к длине этой окружности.

$$\phi = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$v \approx \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R$$

Вектор угловой скорости — это вектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и равный по модулю производной угла по времени.

4.3 Движение с одной неподвижной точкой

Теорема Эйлера — движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как движение вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через точку закрепления — мгновенной оси вращения.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}]$$

4.4 Положение тела в пространстве

Матрица поворота тела S_{ij} — это матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (неподвижной системы и системы, связанной с телом).

$$S_{ii} = (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_i})$$

Найдём преобразование координат при повороте тела

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_{1}x_{1} + \mathbf{e}_{2}x_{2} + \mathbf{e}_{3}x_{3}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_{1}'x_{1}' + \mathbf{e}_{2}'x_{2}' + \mathbf{e}_{3}'x_{3}'$$

$$(\mathbf{e}_{1}, \mathbf{r}) = x_{1} = x_{1}'(\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{1}') + x_{2}'(\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{2}') + x_{3}'(\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{3}')$$

$$x_{i} = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}x_{j}'$$

5 Кинематика вращающихся систем отсчёта

Какие особенности приобретают физические законы, если рассматривать их в системе отсчёта, связанной с вращающимся телом? Как связаны между собой кинематические характеристики точки в неподвижной и вращающейся системах?

$$r = r_0 + r'$$

$$dr = dr_0 + dr'$$

$$r' = e'_1 x'_1 + e'_2 x'_2 + e'_3 x'_3$$

$$dr' = e'_1 dx'_1 + e'_2 dx'_2 + e'_3 dx'_3 + de'_1 x'_1 + de'_2 x'_2 + de'_3 x'_3$$

Здесь первая группа слагаемых характеризует изменение положения точки относительно подвижной системы отсчёта, а вторая — изменение положение подвижной системы относительно неподвижной.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$
 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
 $d\mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]dt$
 $d\mathbf{e}'_1 \mathbf{x}'_1 + d\mathbf{e}'_2 \mathbf{x}'_2 + d\mathbf{e}'_3 \mathbf{x}'_3 = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$
 $d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 d\mathbf{x}'_1 + \mathbf{e}'_2 d\mathbf{x}'_2 + \mathbf{e}'_3 d\mathbf{x}'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']dt$
 $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$$
 $d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$
 $d\mathbf{v}' = \mathbf{e}'_1 d\mathbf{v}'_1 + \mathbf{e}'_2 d\mathbf{v}'_2 + \mathbf{e}'_3 d\mathbf{v}'_3 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']dt$ (получено аналогично $d\mathbf{r}'$)
$$[\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}'] = dt([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']])$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]$$
 (переносное), $\mathbf{a}_{\kappa} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']$ (кориолисово)

6 Законы Ньютона

6.1 Основные определения

Сила — это мера действия других тел на данное тело.

Масса тела — это мера отклика тела на действие силы.

Импульс — это произведение массы точки на её скорость.

Килограмм — масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты (определение устарело).

1 Ньютон — сила, вызывающая ускорение в 1 м/с² у тела массы 1 кг.

6.2 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

Второй закон Ньютона: произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на него силе. В импульсной формулировке: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

F = m**a**

p = mv

 $\dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}$

p = **F**

Второй закон Ньютона не выполняется в двух случаях: тело движется со скоростью, близкой к скорости света, либо тело очень мало и движется в малой области пространства.

Третий закон Ньютона: действия двух тел друг на друга равны по модулю и противоположно направлены.

Силы взаимодействия приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то оно движется так, как если бы на него действовала одна сила, равная их векторной сумме.

7 Силы в механике

7.1 Гравитационные силы

Закон всемирного тяготения: любые две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния меж-

ду ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$
, где $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{c}^2}$

Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как будто других частиц нет. Например, при притяжении материальной точки к однородному шару сила такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Масса Земли:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G} \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{K}\Gamma$$

Период вращения Луны:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

$$T = 2\pi \frac{r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}} \approx 30$$
 суток

7.2 Сила упругости

Упругое тело — это тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения дей-

Закон Гука: сила упругости пропорциональна величине деформации. Это приближённое выражение, верное при малых деформациях.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}$$

7.3 Сила трения

Сила нормального давления (реакции опоры) — это составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения. **Трение покоя** — это трение, возникающее при отсутствии движения соприкасающихся тел.

$$\mathbf{F}_{\text{TD.\Pi.}} = -\mathbf{F}_{\text{внеш.}}$$

Трение скольжения — это трение, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого. Опыт показывает, что сила трения скольжения примерно равна максимальной силе трения покоя.

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N \approx F_{max \text{ тр.п.}}$$

Вязкое трение (сопротивление) — это трение, препятствующее движению тела в сплошной среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения.

$$F_{B.Tp.} = kv$$

7.4 Электромагнитные силы

Электрический заряд — это метра электрического взаимодействия тела.

Электрическое поле — это поле, созданное электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электрические заряды.

Напряжённость поля — это мера действия электрического поля на заряд.

$$E = \frac{F}{a}$$

Сила Кулона — это сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме.

$$F_a = qE$$

Электрический ток — это направленное движение заряженных частиц под воздействием электрического поля.

Магнитное поле — это поле, созданное электрическим током и проявляющее себя действием на движущиеся электрические заряды.

Магнитная индукция — это мера действия магнитного поля на заряд.

Электромагнитное поле — это поле, образованное электрическим и магнитным полями, направленными перпендикулярно друг другу.

Сила Лоренца — это сила, с которое электромагнитное поле действует движущийся точечный заряд.

$$F_L = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

7.5 Релятивистское уравнение движения

Обобщим второй закон Ньютона на случай движения тел с большими скоростями. Для этого введём сопровождающую систему отсчёта, в которой выполняется второй закон Ньютона, далее перейдём к неподвижной системе отсчёта с осями координат, параллельными осям сопровождающей системы (используем преобразования Лоренца), а затем поворачиваем неподвижную систему отсчёта.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{C^2}}}$$

8 Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции

Инерциальная система отсчёта — это такая система, в которой любое тело, бесконечно удалённое от других тел, не испытывает ускорения. Систему отсчёта, связанную с Землёй, обычно можно считать инерциальной. Неинерциальными являются системы отсчёта, движущиеся с большим ускорением относительно Земли.

Сила инерции — добавочная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчёта. Сила инерции отлична от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчёта, и не подчиняется третьему закону Ньютона.

F = m**a**

F = ma + ma' - ma'

 $m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$

$$|\mathbf{F}_{\mathsf{NH}} = -m(\mathbf{a} - \mathbf{a}')|$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{\Pi} + \boldsymbol{a}_{K}$$

$$\mathbf{F}_{\text{NH}} = \mathbf{F}_{\text{T}} + \mathbf{F}_{\text{K}} = -m\mathbf{a}_{0} + m\omega^{2}\mathbf{r} - 2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']$$

Второе слагаемое в этой сумме называется **центробежной силой**, а третье — **Кориолисовой силой**.

На тела, движущиеся в северном полушарии, действует Кориолиса, направленная вправо относительно движения. Например, плоскость колебаний маятника Фуко медленно поворачивается за счёт силы Кориолиса. Этот опыт доказывает вращение Земли.

Невесомость — это исчезновение веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.

Перегрузка — это возрастание веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.

Центрифуга — это устройство, использующее центробежную силу инерции.