1. feladatsor: Sorozatok rekurzív megadása, a teljes indukció és az indirekt bizonyítás

Elméleti háttér: Rekurzív és explicit megadás. Bázisértékek vagy kezdőértékek, bázistartomány. Indukciós hipotézis, indukciós lépés. Állítás tagadása, ellentmondás, indirekt bizonyítás.

1. Adjunk rekurzív definíciót $n!$-ra! (Soha ne felejtkezzen el a kezdőértékek megadásáról!)

2. Egy vállalat új dolgozójának 200 000Ft kezdőfizetést ajánl. Minden következő évben megemeli a fizetést 4%-kal és még 5 000Ft-tal. Adjunk rekurzív képletet a dolgozó keresetére az n-edik évben!

3. Írjunk fel rekurzív összefüggést egy n-elemű halmaz részhalmazainak s_n számára!

4. Adott a síkon n darab egyenes. Adjunk rekurzív képletet a keletkező síkrészek maximális számára!

5. Egy $2 \times n$-es négyzetrácsot szeretnénk lefedni 2×1-es (egyforma) dominóval. Adjunk rekurzív definíciót a különböző lefedések számára!

6. Zsáklaki Zsákos Bilbó 111. születésnapja alkalmából nagy ünnepélyt rendez. Az est fénypontja Gandalf varázslatos tűzijátéka. Trufa és Pippin egyszerre fellő egy-egy csillag alakú tűzijátékot (ez legyen az első lépés). Ezután minden lépésben mindegyik csillag annyi részre osztódik, ahányadik lépésnél tartunk. Adjon rekurzív definíciót az n-edik lépésben látható csillagok darabszámára.

7. Thomasnak egy nap egy halakkal megrakott teherszállítmányt kell elhúznia a kikötőből a rendező pályaudvarra. Útközben a Vásott Vagonok mókát eszeltek ki: időnként visszarántották Thomast, ilyenkor mindig visszagurultak 50m-t. Ekkor megálltak, és újra kellett indulni. Ezt először 2km megtétele után tették, majd mindig hagyták Thomast annyit gurulni, amennyit addig (a kiindulási helytől összesen) megtettek. Adjon rekurziót az n-edik megállításig megtett útra!

8. Süsü minden nap vadkörtét (más nevén vackort) ebédel, sokszor a Királyfi társaságában. A Királyfi egy nap a következőt találja ki: az első nap reggelire leszednek négy körtét Süsünek, egyet a Királyfinak. Ezután a Királyfinak továbbra is mindennap egy körtét szednek, Süsünek viszont vagy kettővel többet, vagy kettővel kevesebbet, mint az előző napon, attól függően, hogy páros vagy páratlan nap van (az első naptól számítva). Adjon rekurziót az n-edik napon leszedett vadkörték darabszámára!

9. Igazolja teljes indukcióval az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $n! \geqslant 3^n$, ha $n \geqslant 7$;

(b) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, ha $n \geqslant 2$;

(c) $(2n)! < (n!)^2 \cdot 4^{n-1}$, ha $n \geqslant 5$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, ha $n \geqslant 2$.

10. Igazolja teljes indukcióval az alábbi oszthatóságra vonatkozó állításokat:

(a) $(2n)!$ osztható 2^n-nel;

(b) $n^3 + 5n$ osztható 6-tal;

(c) $3^{2n} + 4^{n+1}$ osztható 5-tel.

11. Bizonyítsa be, hogy n db egyenes a síkot legfeljebb $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ részre osztja.

12. Bizonyítsa be, hogy az $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ rekurzív módon megadott sorozat explicit alakja: $a_n = 2^n + (-1)^n$.

13. Tekintsük az $a_0 = 0$ és $a_1 = 1$ kezdeti értékekkel megadott Fibonacci-sorozatot! Igazoljuk az alábbiakat:

(a) $a_{n+2} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$;

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

14. Mi a hiba az alábbi indukciós bizonyításokban?

- Legyen $a \neq 0$ valós szám. Ekkor bármely nem-negatív egész n esetén $a^n = 1$.

  Bizonyítás. Mivel $a^0 = 1$, ezért az állítás $n = 0$ esetén igaz.

  Tegyük fel, hogy valamely k egész számra igaz, hogy minden olyan m egész esetén, amelyre $0 \leqslant m \leqslant k$ teljesül, $a^m = 1$. Ekkor

  $$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1. \qquad \square$$

- Bármely pozitív egész n szám esetén igaz a következő: Ha két pozitív egész szám maximuma n, akkor a két szám egyenlő.

  Bizonyítás. Ha két pozitív egész szám maximuma 1, akkor a két egész szám csak 1 lehet, így egyenlők.

  Tegyük fel, hogy valamely k-ra igaz az állítás, azaz ha két egész szám maximuma k, akkor a két szám egyenlő. Legyen x és y két olyan pozitív egész szám, amelyek maximuma $k + 1$. Ebben az esetben $x - 1$ és $y - 1$ maximuma k. Az indukciós feltevés szerint ekkor $x - 1 = y - 1$, azaz $x = y$. $\square$

15. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\sqrt{7}$,

(b) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$,

(c) $\lg 2$

irracionális.

(d) Mit állíthatunk $\sqrt{n}$-ről, illetve $\lg n$-ről az n pozitív egész szám függvényében?

16. Bizonyítsa be, hogy $\cos 15°$ irracionális!

17. (a) Bizonyítsa be, hogy egy kocka éleire nem lehet ráírni az 1, …, 12 számokat úgy, hogy az egy csúcsba futó három élen levő három szám összege mindig ugyanannyi legyen!

(b) Fogalmazza meg a fenti állítást egy szabályos oktaéder esetére! Működik-e a fenti bizonyítás ebben az esetben? (Igaz-e ez az állítás?)

18. Bizonyítsa be, hogy a koordináta-rendszerbe nem lehet úgy elhelyezni egy szabályos háromszöget, hogy mindhárom csúcsának mindkét koordinátája egész szám legyen.

Igaz-e a hasonló állítás, ha térbeli koordináta-rendszerről van szó?