

2026 ICM Problem D: Managing Sports for Success

建模思路全解

2026 年 1 月 30 日

1 问题解构与符号化映射 (Problem Decomposition & Mapping)

在本节中，我们将根据题目要求，将自然语言中的问题转化为具体的数学符号，以便于后续的建模工作。我们通过对问题的分解，提取出关键要素，并将其转化为可以数学表达的形式。这里的目标是识别问题的本质，并清楚地展示每个关键因素如何转化为数学模型中的参数和决策变量。

原文	数学/经济学含义	建模处理方案
“maximize team profit and value”	双目标优化 (Dual-Objective): 1. $\max \Pi$ (利润 = 流量) 2. $\max V_{franchise}$ (估值 = 存量)	利润 Π 是当期现金流，估值 V 是品牌资本与未来预期的折现。为了处理这一问题，我们需要设计一个加权目标函数，或者通过帕累托前沿分析方法，综合考虑利润和品牌估值两个目标，进行多目标优化。
“players are hired mostly for that purpose [profit]”	价值不对等: $Val(i) \neq Perf(i)$	这里指出了球员价值与球员表现之间的差异。为了反映这种不对等关系，我们必须引入一个 商业系数 ，并通过球员的竞技表现、球迷吸引力、曝光度等因素构建球员的综合价值函数。具体地，球员的价值函数可以表示为: $V_i = f(Perf_i, Fans_i, Exposure_i)$ ，其中 $Perf_i$ 表示球员的竞技表现， $Fans_i$ 表示球员的粉丝基础， $Exposure_i$ 表示球员的媒体曝光度。
“Opportunity and risk are both high”	风险惩罚: $Obj : \max E[\Pi] - \lambda \cdot Risk(\Pi)$	本段强调了机会和风险并存的情况。在建模时，我们考虑将风险作为一个额外的惩罚项引入到目标函数中。为了量化风险，我们可以使用方差 σ^2 或者 VaR (Value at Risk) 来衡量由于伤病、战绩波动等因素带来的财务风险。风险的引入能够有效避免过于冒险的决策。
“salary caps or taxes”	硬约束 (Hard Constraint): $\sum C_i \cdot x_i \leq C_{cap}$	薪资上限是一个硬性约束条件。该约束确保球队的总薪资不会超过联盟规定的上限。因此，在构建数学模型时，必须将此条件作为一个边界条件来限制球员的薪资总额，以符合联盟的规则。

原文	数学/经济学含义	建模处理方案
“contracts... free agency, trades”	状态转移: $x_{i,t} \in \{0, 1\}$	在职业体育中，球员的合同情况可能会发生变化，尤其是在自由市场或交易期。因此，我们需要考虑球员合同的动态特性，这意味着球员在不同时间点的状态（签约/未签约）需要根据合同的年限（Duration）进行调整。
“Context matters... come through at important moments”	关键球能力: Clutch Rating $\geq \gamma$	这句话强调了球员在关键时刻的表现至关重要。为了建模这一点，我们引入了 WPA (Win Probability Added) 指标，这一指标可以帮助我们量化球员在关键时刻对比赛胜负的影响。我们的目标是确保球队阵容中有足够的球员能够在关键时刻扭转战局。

2 核心数学模型

根据上一节的映射，我们得到了模型的核心数学结构。在这里，我们将问题定义为一个**多阶段随机混合整数规划 (Multi-stage Stochastic MIP)** 问题，模型中的决策变量、目标函数和约束条件都已经得到了初步定义。

2.1 符号说明 (Nomenclatures)

我们首先定义模型中的核心参数和决策变量，确保每个符号都有清晰的含义，并在后续的公式中得到准确应用。

1. 决策变量

- x_i : 0-1 变量，表示球员 i 是否入选球队阵容 ($x_i = 1$ 表示签约, $x_i = 0$ 表示不签约)。

2. 核心参数

- C_i : 球员 i 的薪资成本 (Cost/Salary)。
- S_i : 球员 i 的竞技评分 (Skill/Performance Score)，如标准化后的 PER 值或贡献值。
- F_i : 球员 i 的商业号召力 (Fan Appeal)，量化其带来的直接商业收入（球衣、门票带动）。
- Cap : 联盟规定的工资帽上限 (Salary Cap)。
- N_{min}, N_{max} : 球队大名单的最少和最多人数。

2.2 机制定义与数学原理

我们需要将体育竞技的抽象概念转化为精确的数学表达，并重点阐述竞技表现与财务回报之间的非线性关系。

2.2.1 A. 竞技表现函数：协同效应与边际递减 (The Team Performance Function)

在职业体育中，球队的整体实力绝非球员个人能力的简单加和。存在着一种被称为“球权稀缺性”的资源约束——场上只有一个球，比赛时间也是有限的。为了数学化描述这一现象，我们构建了包含线性累积项和非线性惩罚项的竞技表现函数 T_{perf} 。

$$T_{perf} = \underbrace{\sum_{i=1}^N (S_i \cdot x_i)}_{\text{线性基础能力}} - \underbrace{\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^N S_i \cdot x_i \right)^2}_{\text{协同损耗/拥挤效应}} \quad (1)$$

1. 线性基础能力 (Linear Baseline Capability):

公式的第一项 $\sum S_i x_i$ 代表了理想状态下的能力叠加。其中 S_i 是基于球员历史数据（如 PER, Win Shares 或 WAR）标准化的个人竞技评分。这一项假设每位球员都能在不受干扰的情况下发挥其全部潜能。

2. 二次惩罚项与拥挤效应 (Quadratic Penalty & Crowding Effect):

现实中，当过多的球星聚集在同一支球队时，往往会出现“1+1<2”的现象。这是由**边际效用递减规律** (Law of Diminishing Marginal Returns) 决定的。

- **资源冲突**：球权使用率 (Usage Rate) 是零和博弈。当多名需要球权的球星同时在场，他们的效率往往会下降。
- **数学形式选择**：我们选择二次项 $(\sum S_i)^2$ 作为惩罚函数，而非指数或其他形式，是因为二次函数能够平滑地模拟随着总能力值上升，内部摩擦成本呈几何级数增长的趋势。
- **系数 λ 的物理意义**： λ 代表“协同摩擦系数”或“球权冲突敏感度”。一支战术体系成熟、教练水平高、角色分配明确的球队，其 λ 值较小（即能够容纳更多球星）；反之， λ 值较大。在模型求解中， λ 通常设定为一个极小的正数（如 10^{-4} ），以确保只有在球队总分极高时，惩罚项才会显著生效。

2.2.2 B. 财务收入函数：双轨驱动机制 (The Dual-Track Revenue Function)

职业体育联盟（尤其是像 WNBA 这样处于快速增长期的联盟）的本质是娱乐产业。其收入来源呈现明显的“双轨制”特征。我们将总收入 R_{total} 建模为竞技驱动与球星驱动的混合函数：

$$R_{total} = R_{win}(T_{perf}) + R_{star}(\mathbf{x}) = \underbrace{\alpha \cdot \ln(1 + T_{perf})}_{\text{竞技驱动：市场饱和效应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (F_i \cdot x_i)}_{\text{球星驱动：流量叠加效应}} \quad (2)$$

1. 竞技驱动收入 (Performance-Driven Revenue):

这部分收入来源于比赛胜利带来的门票溢价、季后赛奖金、媒体关注度提升以及转播权分红。

- **对数函数的引入 (ln)**：我们没有使用线性函数，而是采用了自然对数函数 $\ln(1 + T_{perf})$ 。这是基于**市场饱和理论** (Market Saturation Theory)。
- **解释**：当一支球队从“烂队”变成“季后赛球队”时，收入增长是爆发式的（边际收益极高）；但当球队已经是一支“冠军级球队”时，再增加几场常规赛胜利，对总收入的提升十分有限（球馆容量有限，本地市场球迷基数已开发殆尽）。
- **系数 α** ：代表“市场规模系数” (Market Size Factor)。在纽约或洛杉矶这样的大球市， α 值较大，意味着同样的竞技进步能转化出更多的金钱回报。

2. 球星驱动收入 (Star-Power Driven Revenue):

这部分收入独立于比赛胜负，直接来源于球员的个人品牌 (Personal Brand Equity)，如球衣销量、个人赞助的球队分成、以及纯粹因喜爱某球星而购买季票的粉丝群体。

- **线性叠加假设**：与竞技表现不同，商业价值通常具有较好的可加性。不同球星的粉丝群体 (Fanbase) 往往是异质的。例如，签下一名老将巨星和一名当红新星，他们的球衣销量通常是叠加而非冲突的。因此，我们采用线性求和 $\sum F_i x_i$ 来描述这一过程。
- **F_i 的构成**： F_i 是通过社交媒体粉丝数 (Social Media Following)、过往球衣销售记录以及全明星票选得票数综合加权计算得出的商业号召力指数。

综合效用分析：通过上述公式 (1) 和 (2)，模型捕捉到了管理者的核心困境——有时为了最大化 R_{total} ，老板可能不得不签下一名 F_i 极高但 S_i 较低（甚至因球权冲突导致 λ 项增大）的球员。这精确地响应了赛题中关于“Winning vs Making Money”的讨论。

3 约束条件与模型修正 (Constraints & Refinements)

在这一部分，我们将实际问题中的约束条件转化为数学模型，确保解的可行性，并且考虑题目中给出的各种限制条件。

3.1 财务与运营约束 (Financial & Operational)

薪资硬帽 (Salary Cap): 球队的薪资总额必须小于或等于联盟规定的上限，这一条件是硬性约束，必须严格遵守。

$$\sum_{i=1}^N C_i \cdot x_i \leq Cap_{league} \quad (3)$$

动态预算平衡 (Dynamic Budget Balance): 除了薪资外，球队还需要考虑球馆费用和媒体宣发成本。票务收入是票价 P 和球队表现 T_{perf} 的函数。

$$\sum C_i x_i + \underbrace{C_{venue}(Games) + C_{media}(Exposure)}_{\text{运营成本}} \leq \underbrace{P \cdot D(P, T_{perf})}_{\text{票务收入}} + R_{broadcast} \quad (4)$$

3.2 阵容与竞技特性 (Roster & Performance)

阵容人数 (Roster Size): 球队的阵容人数需要在联盟规定的范围内，确保球队有足够的球员参加比赛。

$$N_{min} \leq \sum_{i=1}^N x_i \leq N_{max} \quad (5)$$

关键球能力 (Clutch Ability): 为了确保球队能够在关键时刻取得胜利，我们需要在阵容中保证有一定数量的球员在关键时刻能够发挥作用。

$$\sum_{i=1}^N (ClutchRating_i \cdot x_i) \geq \gamma \cdot LeagueAvg \quad (6)$$

位置与技能覆盖: 球队的阵容必须涵盖所有必要的比赛位置，如后卫、中锋等，确保阵容的完整性。

$$\sum_{i \in Pos_k} x_i \geq Min_k, \quad \forall k \in \{G, F, C\} \quad (7)$$

3.3 动态风险管理 (Dynamic Risk Management)

伤病概率模型 (Injury Probability Translation): 伤病风险随着球员负荷的增加而增加。为了量化这一风险，我们通过以下公式将伤病概率转化为金融风险。

$$P(\text{Injury}_{i,t}) = P_{base,i} \cdot e^{\beta \cdot Load_{i,t}} \quad (8)$$

风险价值约束 (VaR Constraint): 高风险球员的薪资总额不得超过一定比例，这样可以限制球队因伤病带来的潜在财务损失。

$$\sum_{i \in HighRisk} C_i \cdot x_i \leq \eta \cdot Cap \quad (9)$$

3.4 外部环境与市场响应 (External Market Response)

扩军保护博弈 (Expansion Protection): 当联盟扩军时, 我们需要提交一个保护名单, 未被保护的球员可能会被新球队选走。通过 **Minimax** 策略, 我们可以最小化潜在损失。

$$\min_{S_{protect}} \left(\max_{j \in S_{roster} \setminus S_{protect}} \text{Value}(j) \right), \quad |S_{protect}| \leq K \quad (10)$$

票务需求模型 (Ticket Pricing Logic): 票价与需求之间通常具有反比关系, 但球队表现的提升会使得球迷对票务的需求增加。通过这一模型, 我们可以在场馆容量限制内优化票价。

$$D(P) = D_{base} \cdot P^{-\epsilon} \cdot (1 + \delta \cdot T_{perf}) \quad (11)$$

优化目标是在场馆容量 $Capacity$ 内最大化 $P \cdot D(P)$ 。

4 问题解析与建模思路

我们将根据问题背景和给定条件, 将其分解为四个核心问题, 并详细探讨每个问题的建模思路。我们通过定义关键参数、决策变量、目标函数和约束条件, 逐步构建数学模型, 进而为实际决策提供支持。

4.1 问题一: 设计动态决策模型以最大化球队的利润和价值

首先, 我们要设计一个动态决策模型, 帮助球队老板和总经理根据球队的表现和经济条件变化调整决策。目标是最大化球队的利润和价值, 同时确保球队的结构和表现能够与经济状况和市场需求保持一致。

4.1.1 思路与方法

在这个问题中, 我们面临的主要挑战是如何在动态的环境下平衡球队的竞技表现和商业利润。首先, 定义目标函数为球队的总利润和品牌估值的加权和。我们需要引入多阶段决策过程, 即在不同的时间节点根据球队表现和经济变化调整策略。

目标函数包括两个部分: **竞技收入**和 **球星驱动收入**。竞技收入与球队的胜率、市场表现等直接相关, 而球星驱动收入则取决于球员的商业号召力, 例如球员的人气和粉丝基础。我们通过设计加权目标函数, 结合盈利目标与品牌价值目标, 确保模型能够在长期内优化球队的整体表现。

$$\text{Maximize } Z = w_1 \cdot \Pi + w_2 \cdot V_{franchise}$$

其中, Π 为球队的利润, $V_{franchise}$ 为球队的品牌估值, w_1 和 w_2 为相应的权重系数。

4.1.2 模型构建

为了构建这一模型, 我们使用了多阶段随机混合整数规划 (MIP), 在每个阶段根据不同的参数 (如球员状态、经济条件) 调整决策。通过定义决策变量 x_i 来表示是否签约球员 i , 并结合模型中的财务约束 (如工资帽), 我们可以灵活调整球员阵容, 并在每个阶段不断优化目标函数。

$$\sum_{i=1}^N C_i \cdot x_i \leq C_{cap}$$
$$N_{min} \leq \sum_{i=1}^N x_i \leq N_{max}$$

其中, C_i 为球员 i 的薪资成本, C_{cap} 为球队的薪资上限, N_{min} 和 N_{max} 分别为球队的最小和最大阵容人数。

最终, 我们的目标是找到一个平衡点, 使得利润和球队估值最大化。

4.2 问题二：制定球员收购策略

球员收购策略是球队在新赛季中保持竞争力的关键。我们需要在多种选择中做出最佳决策，包括通过选秀、自由市场、交易或转会费等方式进行球员收购。

4.2.1 思路与方法

首先，我们考虑到球员的价值并不仅仅由其竞技表现来决定，还包括商业吸引力、健康状况、球员与球队的契合度等因素。球员的商业价值不仅影响票务收入，还与球队的品牌形象密切相关。因此，我们需要将球员的竞技表现、商业价值和健康因素综合考虑，设计一个多维度的球员评价体系。

此外，我们还要考虑球队的预算约束。球员的签约费用（薪资）必须在联盟规定的工资帽（Salary Cap）之内，因此需要在资源有限的情况下，优化阵容组合，以实现既有竞争力又具备良好财务健康的目标。

4.2.2 模型构建

球员的综合价值 V_i 可以通过竞技表现、商业吸引力和健康状况等多个指标加权求和得到：

$$V_i = w_1 \cdot \text{Perf}_i + w_2 \cdot \text{Fans}_i + w_3 \cdot \text{Exposure}_i$$

其中， w_1, w_2, w_3 分别为竞技表现、商业吸引力和健康状况的权重系数， Perf_i 为球员的竞技表现， Fans_i 为球员的粉丝基础， Exposure_i 为球员的媒体曝光度。

最终，我们通过 0-1 整数线性规划（ILP）模型进行求解，优化阵容选择，确保每个位置（如控卫、前锋、中锋）都有足够的人员储备，同时满足财务和运营上的约束。

4.3 问题三：考虑联盟扩展和其他商业决策的影响

联盟扩展和其他商业决策（如票务定价、场馆管理、媒体合作）对球队的战略和盈利能力有着深远影响。因此，我们需要设计模型来评估这些外部因素的变化对球队的影响，并根据这些变化调整战略。

4.3.1 思路与方法

联盟扩展通常会导致新的竞争者进入市场，这可能会影响现有球队的市场份额、粉丝群体以及赛事安排等方面。此外，球队需要在其他商业决策上做出优化，包括票务定价、场馆管理、媒体合作等，以提高收入和降低运营成本。

针对扩展带来的不确定性，我们需要设计动态模型来模拟扩展前后的市场环境变化，评估新球队的加入对现有球队战略的影响，并对现有资源进行重新分配。

4.3.2 模型构建

对于扩展的应对策略，我们通过模拟不同的扩展场景，评估球队在新环境下的市场份额变化和财务表现。我们在模型中引入了外部环境的变化，调整球队的市场策略和资源配置。

$$\Delta \text{Market Share} = \text{Function of}(T_{\text{perf}}, \text{NewTeams}, \text{MarketSize})$$

通过动态优化，球队可以在扩展带来的新机会和新风险之间找到最佳的平衡点。

4.4 问题四：应对球员伤病、老化以及时间变化的影响

球员的伤病、老化以及随时间的表现变化是球队管理中不可忽视的重要因素。这些因素不仅影响球队的即时表现，也影响球队的长期规划和财务健康。因此，我们需要考虑如何应对球员在长时间内可能出现的伤病、老化等问题。

4.4.1 思路与方法

在模型中，我们需要模拟球员的健康状况、老化速度和竞技状态随时间的变化。球员的伤病概率和表现衰退是随着时间不断变化的，我们可以通过引入健康因子 ρ_i 和老化因子来模拟球员的健康和竞技状态的变化。

同时，球队需要在球队管理中预留一定的风险缓冲空间，以应对关键球员的伤病或老化带来的不确定性。我们通过引入“风险价值”（VaR）模型，量化因伤病和老化造成的潜在财务损失，并在球队的资源配置中进行相应的优化。

4.4.2 模型构建

通过建立球员伤病和老化模型，我们能够预测球员在未来赛季的健康状态及其对球队表现的影响。基于这些预测，我们可以调整球队的阵容配置，选择合适的球员进行补强或替换。

伤病概率模型：

$$P(\text{Injury}_{i,t}) = P_{base,i} \cdot e^{\beta \cdot \text{Load}_{i,t}}$$

其中， $P_{base,i}$ 为球员 i 的基本伤病概率， $\text{Load}_{i,t}$ 为球员在时间 t 的负荷。

老化模型：球员的竞技表现会随着时间逐渐下降，建模为：

$$S_i(t) = S_i(0) \cdot (1 - \alpha \cdot t)$$

其中， $S_i(0)$ 是球员初始的竞技评分， α 为老化因子， t 为时间。

通过这些模型，球队可以进行伤病和老化的风险控制，调整阵容并最小化潜在的损失。