第六章 解偏微分方程

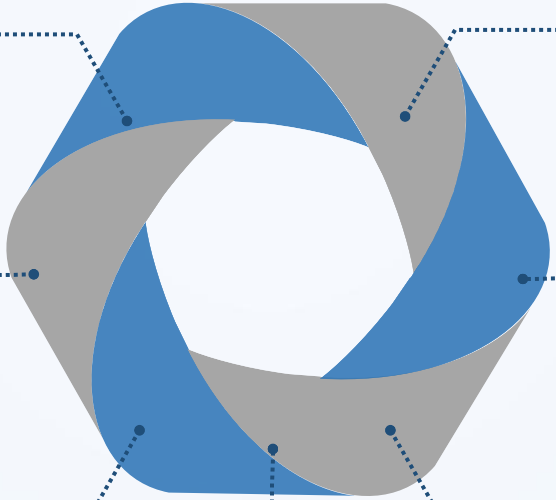
苏湘宁 邮箱：suxn@hainanu.edu.cn

解偏微分方程

- 热传导问题
- 偏微分方程的类型
- 一维细杆热传导问题
- 隐式公式和松弛法
- 特殊函数

6.1物理问题

物理量通常是时间变量与空间变量的含时，描述它们的变化常常需要**偏微分方程**。涉及多个独立变量的分布和演化的问题，通常需要用偏微分方程来描述



描述带点体系静电势分布的泊松方程

描述传热过程的热传导方程

描述物质交换的扩散方程

描述微观粒子运动的薛定谔方程

波动方程

麦克斯韦方程

流体力学方程

6.1物理问题

体积为 V的物体，t时刻在(x,y,z)位置的温度分布为u(t,x,y,z)，且内部热源在单位时间、单位体积产生的热量为Q(t,x,y,z)。

对任一边界为ds的小体元dv，根据傅里叶定律，单位时间、单位面积流入的热量为K(t，x，y，z)，其中K(t，x，y，z)为热传导系数。根据能量守恒：

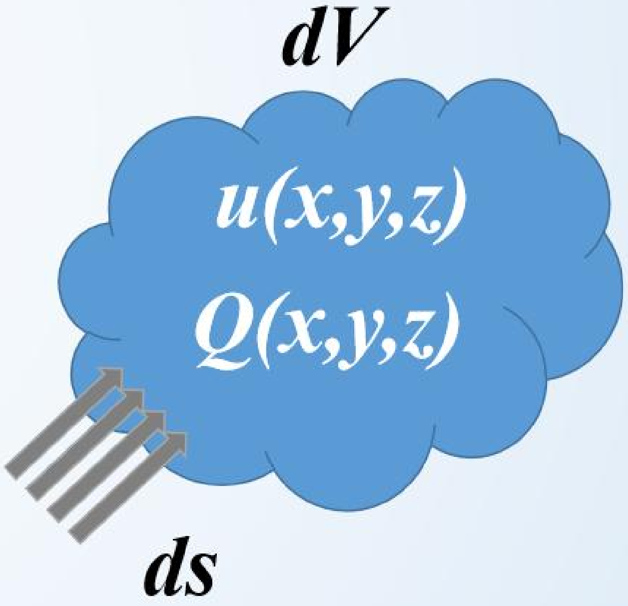
对内部有热源Q(t,x,y,z)物体：

$$\int dt \oiint_S K(t,x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int dt \iiint_V Q(t,x,y,z)dV = \int dt \iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV$$

傅立叶定律

格林公式

$$\int dt \iiint_V \nabla\cdot(K\nabla u)dV + \int dt \iiint_V Q(t,x,y,z)dV = \int dt \iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV$$



6.1物理问题：热传导问题

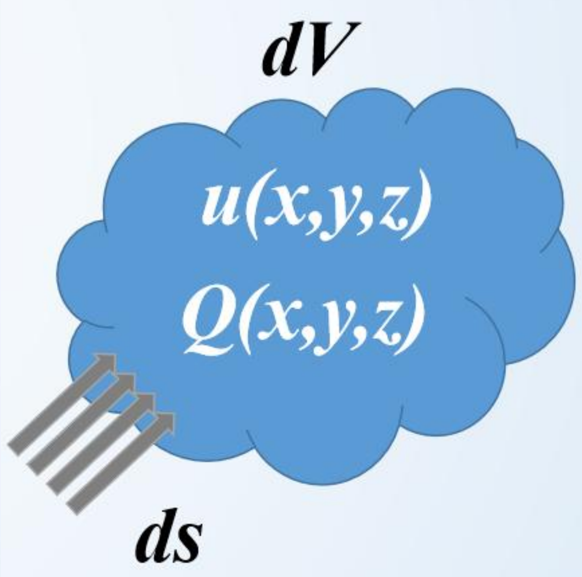
$$\int dt \iiint_V \nabla\cdot(K\nabla u)dV + \int dt \iiint_V Q(t,x,y,z)dV = \int dt \iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV$$

等式恒成立：

被积函数相等

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\Delta u + Q(t,x,y,z) \quad \lambda = \frac{K}{c\rho} \quad q(t,x,y,z) = \frac{Q(t,x,y,z)}{c\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\right) + q(t,x,y,z)$$



热传导方程

抛物线型

6.2 偏微分方程的类型

偏微分方程大多数为二阶，含有一个时间变量和三个空间变量，常用类型：

椭圆型：$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z)=S(x,y,z)$$

拉普拉斯方程

不需要初始条件

抛物线型：$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\varphi(x,y,z,t)=S(x,y,z,t)$$

热传导方程

一个初始条件，如初始温度分布

双曲型：$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\varphi(x,y,z,t)=S(x,y,z,t)$$

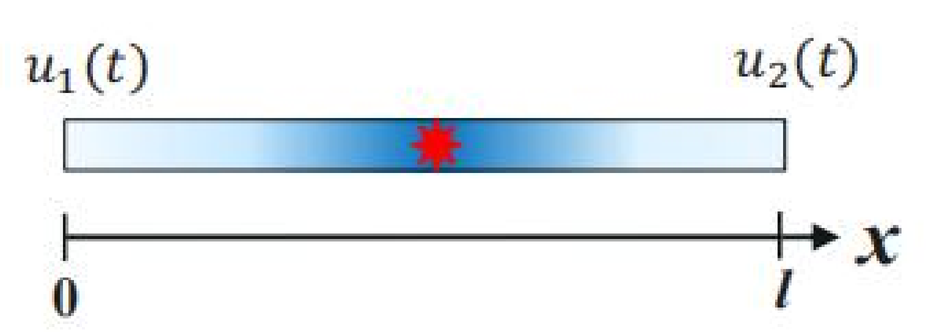
波动方程

两个初始条件，如初始位移、初始速度

需要附加边界条件与初始条件

6.2 偏微分方程的类型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + q(t,x) \\
u(0,x) = \varphi\,(x) & \text{初始条件} \\
u(t,0) = g_1(t) & \text{边界条件} \\
u(t,l) = g_2(t)
\end{cases}
$$



6.3 有限差分法：用有限差分代替微分

根据导数的差分公式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{i,k} = \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{i,k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau}$$

τ：时间步长

h：空间步长

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + q(t,x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} = \lambda \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2} + q|_{i,k}$$

6.3 一维细杆热传导问题:有限差分格式

$$\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{\tau}=\lambda\frac{u_{i-1,k}-2u_{i,k}+u_{i+1,k}}{h^2}+q|_{i,k}$$

$$u_{i,k+1}=u_{i,k}+\lambda\tau\frac{u_{i-1,k}-2u_{i,k}+u_{i+1,k}}{h^2}+\tau q|_{i,k}$$

$$u_{i,k+1}=\frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i+1,k}+(1-2\frac{\lambda\tau}{h^2})\ u_{i,k}+\frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i-1,k}+\tau q|_{i,k}$$

$$u_{i,0}=\varphi(ih)$$

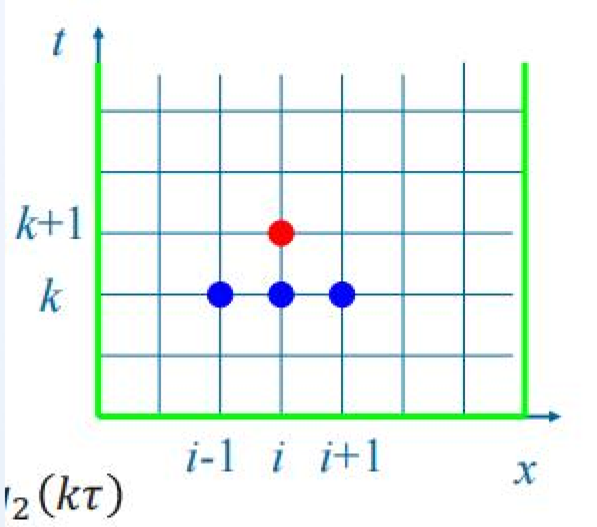
$$u_{0,k}=g_1(k\tau)$$

$$u_{N,k}=g_2(k\tau)$$

$$N=\frac{l}{h},\quad M=\frac{T}{\tau}$$

稳定条件:

$$\frac{\lambda\tau}{h^2}\le 1/2$$



6.3 一维细杆热传导问题：边界条件的类型

对于一个、两个、三个空间变量的情况分别需要两个、四个、六个边界条件，边界条件的类型：

狄利克雷边界条件（第一类边界条件）：给出了区域边界上函数值

诺伊曼边界条件（第二类边界条件）：给出了边界上的函数法向导数

混合边界条件（第三类边界条件）：给出了边界上的函数及其法向导数的线性组合

6.3 一维细杆热传导问题：边界条件的差分格式

第一类边界条件

$$\begin{cases} u(0,t)=g_1(t) \\ u(l,t)=g_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{0,k}=g_1(k\tau) \\ u_{N,k}=g_2(k\tau) \end{cases}$$

第二类边界条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=g_1(t) \\ \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=g_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{1,k}-u_{0,k}}{h}=g_1(k\tau) \\ \dfrac{u_{N,k}-u_{N-1,k}}{h}=g_2(k\tau) \end{cases}$$

第三类边界条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\lambda_1(t)u(0,t)=g_1(t) \\ \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}--\lambda_2(t)u(l,t)=g_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{1,k}-u_{0,k}}{h}-\lambda_1(k\tau)u_{0,k}=g_1(k\tau) \\ \dfrac{u_{N,k}-u_{N-1,k}}{h}-\lambda_2(k\tau)u_{N,k}=g_2(k\tau) \end{cases}$$

6.3 一维细杆热传导问题：计算流程

$$u_{i,k+1}=\frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i+1,k}+(1-2\frac{\lambda\tau}{h^2})\ u_{i,k}+\frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i-1,k}+\tau q\,|_{i,k}$$

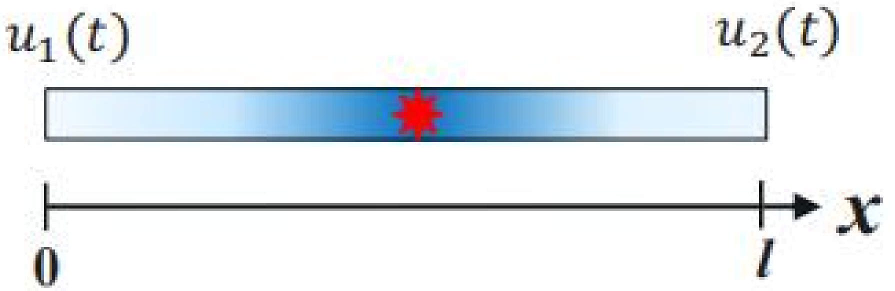
1. 设定λ, l, h, τ, NT
2. 计算位置坐标的节点数N

   $N=\frac{l}{h}$，
3. 计算初值：$u_{i,0}=\varphi(ih)$
4. 计算边界值：

   $u_{0,k}=g_1(k\tau), u_{N,k}=g_2(k\tau)$
5. 用有限差分法计算$u_{i,k+1}$
6. 画图呈现

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 5.0e^{-2.0(x-5.0)^2} \\
u(0,x) = 0.1 \cdot x(10.0 - x) \\
u(t,0) = 0.0 \\
u(t,10) = 0.0
\end{cases}
$$



$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + q(t,x) \\
u(0,x) = \varphi(x) & \text{初始条件} \\
u(t,0) = g_1(t) & \text{边界条件} \\
u(t,l) = g_2(t)
\end{cases}
$$

$$
u_{i,k+1} = \frac{\lambda\tau}{h^2} u_{i+1,k} + (1 - 2\frac{\lambda\tau}{h^2})\ u_{i,k} + \frac{\lambda\tau}{h^2} u_{i-1,k} + \tau q\,|_{i,k}
$$

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程1

1. 设定λ, l, h, τ, NT

$$\tau = 0.05; h = 0.5;$$
$$l = 10.0;\ \lambda = 1.0;$$
$$NT = 1000$$

$$\frac{\lambda\tau}{h^2} \le 1/2 \quad ?$$

$$\frac{\lambda\tau}{h^2} = 1/5 \le 1/2$$

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程1

1. 设定λ, l, h, τ, NT

```
tau = 0.05 #时间步长
h = 0.5 #空间步长
lamda = 1.0
A = 1.0*tau/h**2
l = 10.0 #杆长
NT = 1000 #时间步数
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程2,3，4

2. 计算位置坐标的节点数N

$$N = \frac{l}{h} = 20$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 5.0e^{-2.0(x-5.0)^2} \\ u(0,x) = 0.1 \cdot x(10.0 - x) \\ u(t,0) = 0.0 \\ u(t,10) = 0.0 \end{cases}$$

3. 计算初值：$u_{i,0} = \varphi(ih)$

4. 计算边值：$u_{0,k} = g_1(k\tau), u_{N,k} = g_2(k\tau)$

$$u(x,0) = 0.1x\,(10.0 - x)$$

$$u_{i,0} = 0.1 \cdot ih(10.0 - ih)$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0)$$

$$u_{0,k} = u_{N,k} = 0$$

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程1

2. 计算位置坐标的节点数N

3. 计算初值：

计算边值：

```
NX = int(l/h) #空间节点数

for k in range(NT):  #边界条件
    U[0,k] = 0.0
    U[NX,k] = 0.0

for i in range(0,NX): #初始条件
    U[i,0]=0.1*i*h*(10.0-i*h)
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程5

5 用有限差分法计算$u_{i,k+1}$

$$u_{i,k+1} = \frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i+1,k} + \left(1 - 2\frac{\lambda\tau}{h^2}\right)u_{i,k} + \frac{\lambda\tau}{h^2}u_{i-1,k} + \tau e^{-2.0(ih-5.0)^2}$$

```
for k in range(NT):
    for i in range(1,NX):
        U[i,k+1]=A*U[i+1,k]+(1-2*A)*U[i,k]+A*U[i-1,k] + \
                tau*5.0*np.exp(-2.0*(i*h-5.0)**2)
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程6

6,画图

```
fig = pl.figure(figsize=(10,3))
ax1 =fig.add_subplot(1,2,1)
ax2 =fig.add_subplot(1,2,2)

ax1.plot(x,U[:,0], 'r-', label='NT=0',linewidth=2.0)
ax1.plot(x,U[:,100], 'b-', label='NT=300',linewidth=2.0)
ax1.plot(x,U[:,600], 'g-', label='NT=600',linewidth=2.0)
ax1.plot(x,U[:,1000], 'k-', label='NT=1000',linewidth=2.0)
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程6

6,画图

```
ax1.set_ylabel(r'U', fontsize=20)
ax1.set_xlabel(r'X', fontsize=20)
ax1.set_xlim(0,10)
ax1.set_ylim(0,18)
ax1.legend(loc='upper right')
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程6

6,画图

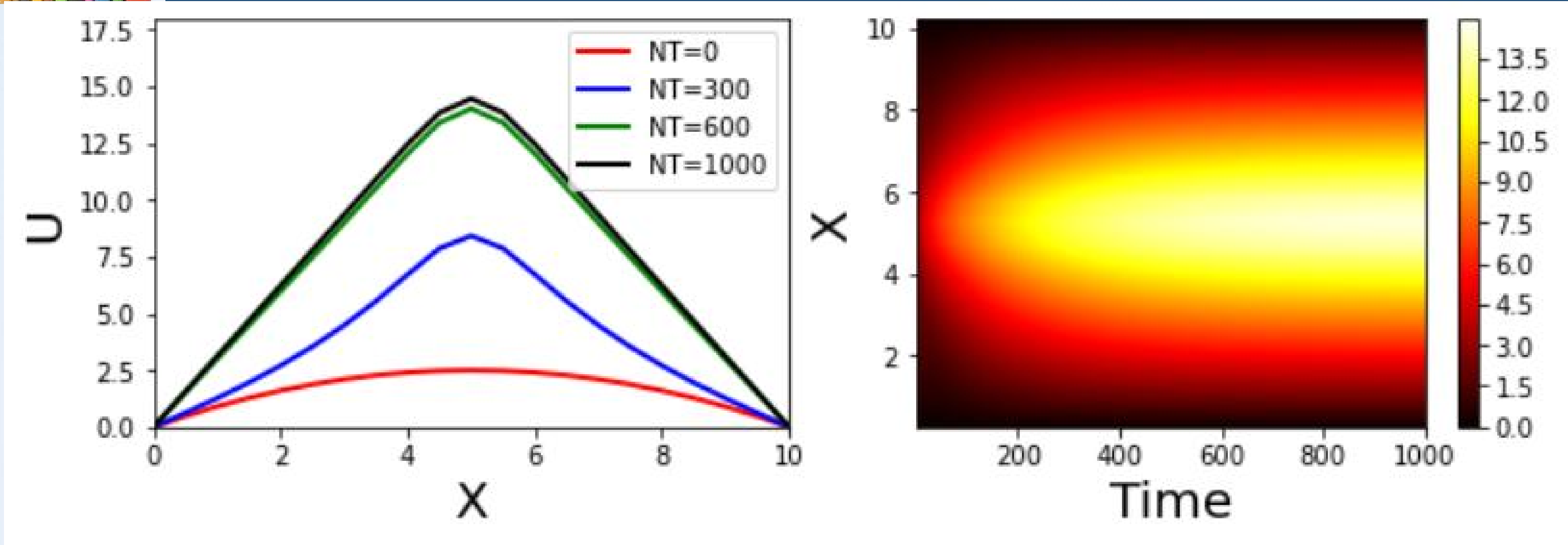
```
extent = [0,NT+1,0,(NX+1)*h]
levels = np.arange(0.0,15.0,0.01)
cs =
ax2.contourf(U,levels,origin='lower',extent=extent,cmap=pl.c
m.hot)
cbar = fig.colorbar(cs)
ax2.set_ylabel(r'X', fontsize=20)
ax2.set_xlabel(r'Time', fontsize=20)
pl.show()
```

6.3 一维细杆热传导问题：计算过程6

报错警告！！

```
import numpy as np
import pylab as pl

U = np.zeros([NX+1,NT+1])  #温度
t = np.arange(0,NT,1)  #时间
x = np.arange(0,(NX+1)*h,h) #坐标
```

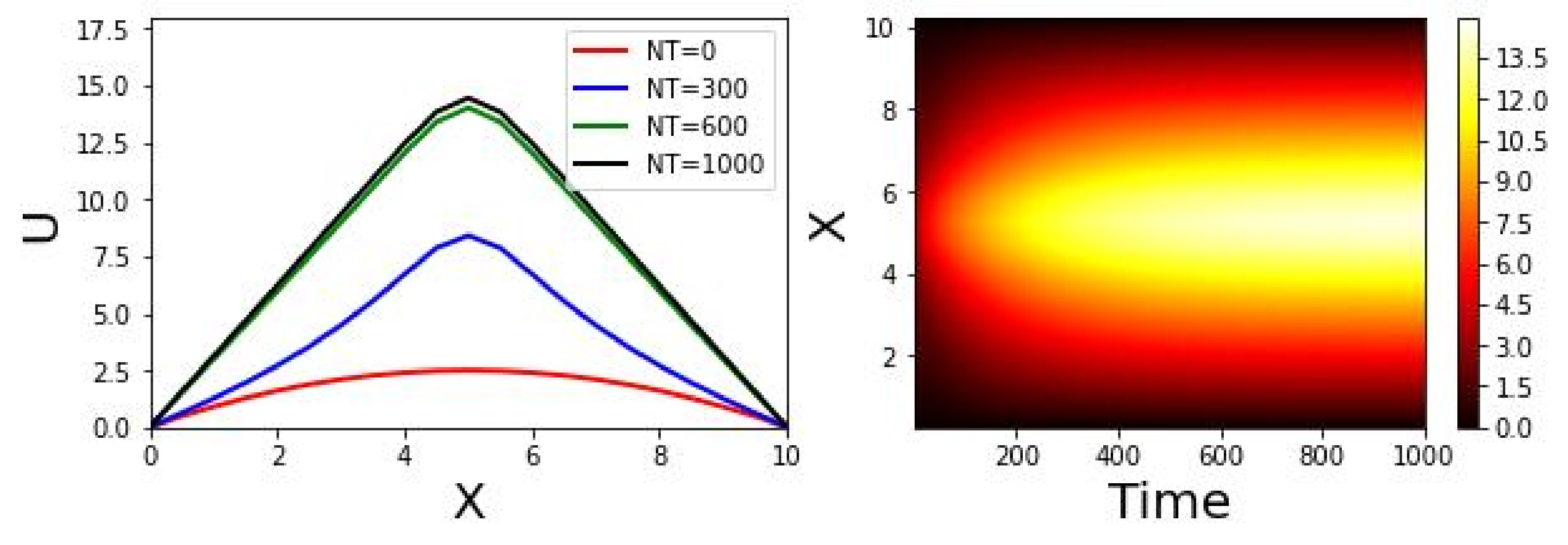
6.3 一维细杆热传导问题：结果



左图：在时间步数为0，300，600，1000 时，细杆上的温度分布曲线;

(右)细杆温度分布随时间的演化。右图中颜色由暗到亮对应温度从0到15.

6.3 一维细杆热传导问题：结果

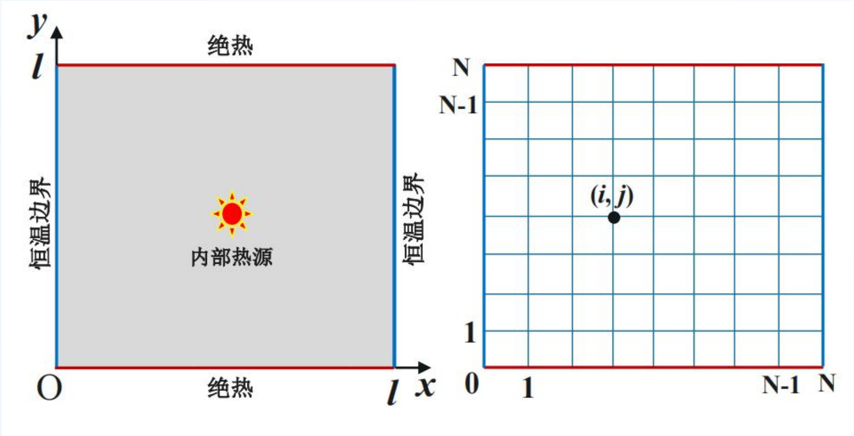


t=0 时，细杆的温度按初始条件u(x)=0.1x(10.0-x) 分布(左图，红线)。随着时间的演化，细杆温度逐渐升高。由于细杆的内部热源在中间部分产生的热量更高，因此中间部分的温度比两端上升更快。在第600时间步以后(绿线)，细杆的温度逐渐趋于稳定，达到动态平衡。其中热源产生的热量全部由细杆两端流出。

6.3 一维细杆热传导问题：二维情况

以上一维细杆热传导问题求解方法可以很容易地扩展到二维情形，相应的热传导方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) + q(t,x,y)$$



图(左)含内部热源的二维平板热传导问题示意图；
(右)对二维平板进 行网格化。

6.3 一维细杆热传导问题：二维情况

建立差分格式：

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\Big|_{i,k} = \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\Big|_{i,j,k} = \frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\Big|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{h^2}$$

$$\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\tau} = \lambda \frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{h^2} + \lambda \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{h^2} + q|_{i,j,k}$$

6.3 一维细杆热传导问题：二维情况

整理得递推公式：

$$u_{i,j,k+1} = \left(1 - \frac{4\tau\lambda}{h^2}\right) u_{i,j,k} + \frac{\tau\lambda}{h^2}\left(u_{i-1,j,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i+1,j,k} + u_{i,j+1,k}\right) + \left. q\right|_{i,j,k}$$

$$\frac{\lambda\tau}{h^2} \le \frac{1}{4}$$

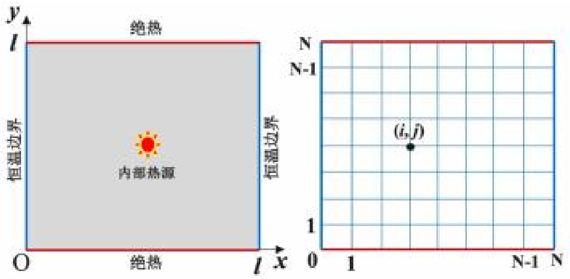
初始条件：

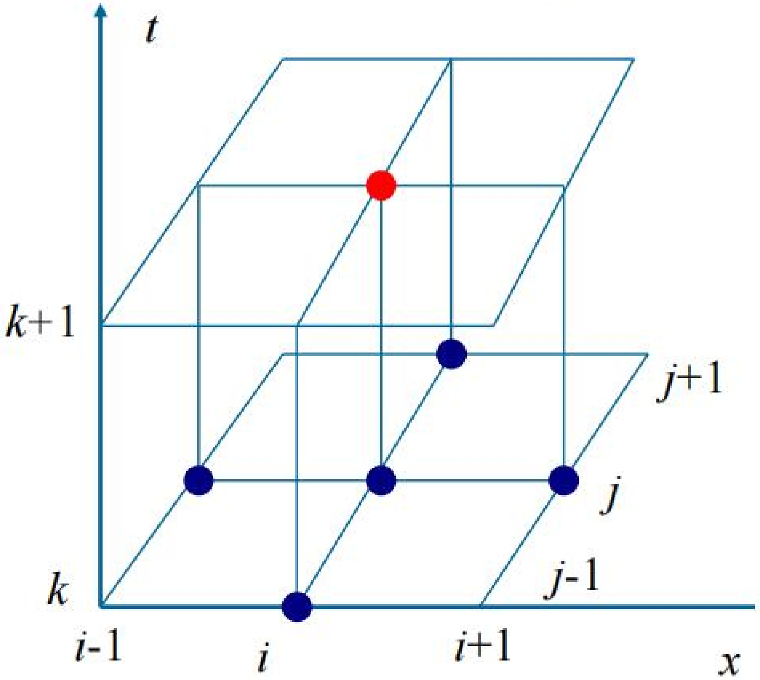
$$u_{i,j,0} = 0$$

边界条件：

$$u_{0,j,k} = 0;\ u_{N,j,k} = 0$$

$$u_{i,0,k} = u_{i,1,k};\ u_{i,N,k} = u_{i,N-1,k}$$





在离散化的时间和空间网格上，k+1时刻的(i,j) 点（红色）的温度值完全由k时刻的(i,j),(i-1,j),(i+1,j),(i,j-1),(i,j+1)五个点处（蓝色）的温度值确定。

6.3 一维细杆热传导问题：二维情况

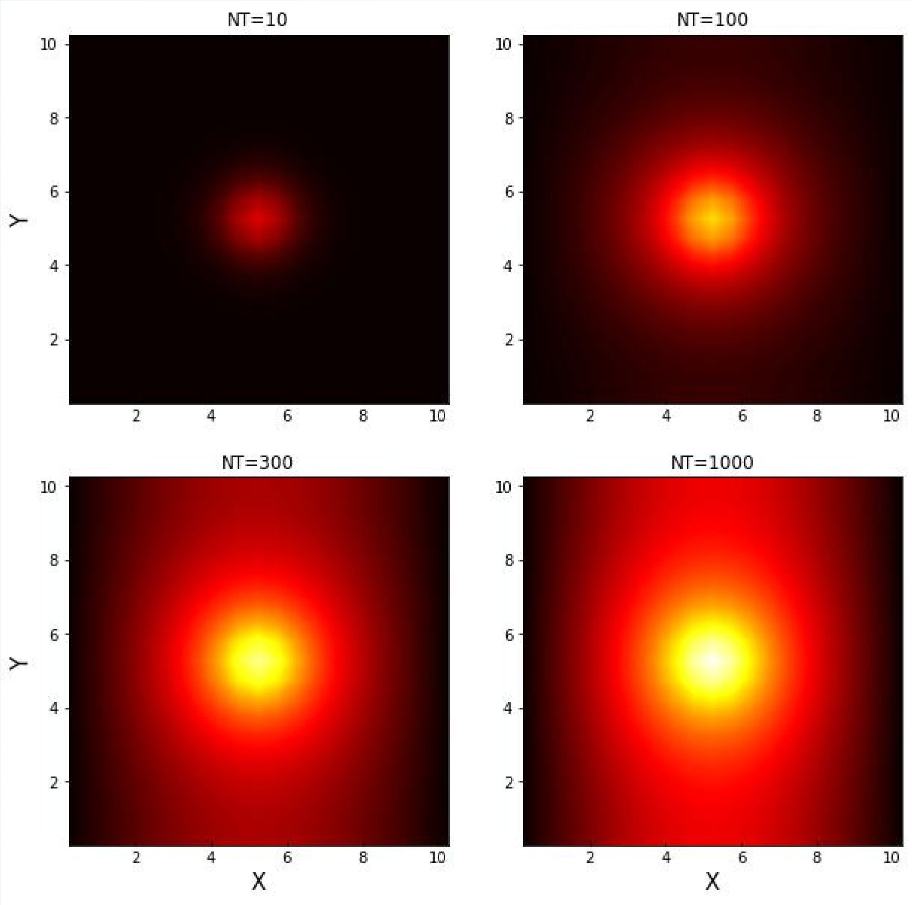


图2二维平板在第10, 100, 300, 1000时间步时的温度分布图。

由于二维平板的内部热源放热，平板中心处的温度迅速升高，并伴随者热量向周边传递，导致周边温度也逐渐升高。特别是，由于上下边界是绝 热的，温度升高较快。相反地，由于左右边界温度始终为零，且低于中心部分的 温度，热量从左右边界向外传递。在第300时间步以后，热量传递基本达到动态 平衡，温度分布基本维持不变。

6.4 隐式公式和松弛法

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

如果热传导方程右边对空间的二阶导数取 t+△t 时刻的值进行计算，则得到隐式差分公式

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} \approx a^2 \frac{u(x+\Delta x,t+\Delta t)-2u(x,t+\Delta t)+u(x-\Delta x,t+\Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2}$$

等式右边是矩阵运算，

$$\frac{a^2}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} & \cdots \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} & \cdots \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} & \cdots \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

6.4 隐式公式和松弛法

引入算符L，记

$$Lu_{i,j+1}=\frac{a^2}{(\Delta x)^2}(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})$$

则得到隐式公式为

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}=Lu_{i,j+1}$$

对显式公式也引入同样的算符，即令

$$Lu_{i,j}=\frac{a^2}{(\Delta x)^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

则显式公式写成

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}=Lu_{i,j}$$

6.4 隐式公式和松弛法

将显式与隐式相加，得平均公式

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}=\frac{1}{2}Lu_{i,j}+\frac{1}{2}Lu_{i,j+1}$$

将各项写出来就是

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}=\frac{a^2}{2(\Delta x)^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}+u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})$$

公式常写成下列形式

$$u_{i,j+1}=\frac{1+\frac{1}{2}L\Delta t}{1-\frac{1}{2}L\Delta t}u_{i,j}$$

这个公式也叫Crank-Nicolson公式，是六点对称的格式.这个公式对任何步长都是恒稳定的。

6.4 隐式公式和松弛法

迭代法是直接用显式差分公式进行计算。

如果在差分公式中，随时将上一步 算得的各点的新值替代旧值，并且每次计算新值也替换成新值与旧值的“组合”，则得到下列松弛法的计算公式，其中$0<\omega<2$。当$\omega<1$ 称为“低松弛”,$\omega>1$称为“超松弛”。

6.4 隐式公式和松弛法

对于泊松方程

$$u_{xx} + u_{yy} = S(x, y)$$

松弛法公式：

$$u(i,j)=(1-\omega)u(i,j)+\frac{\omega}{4}[u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)-h^2S_{i,j}]$$

其中，$S_{i,j}=S(ih,jh)$

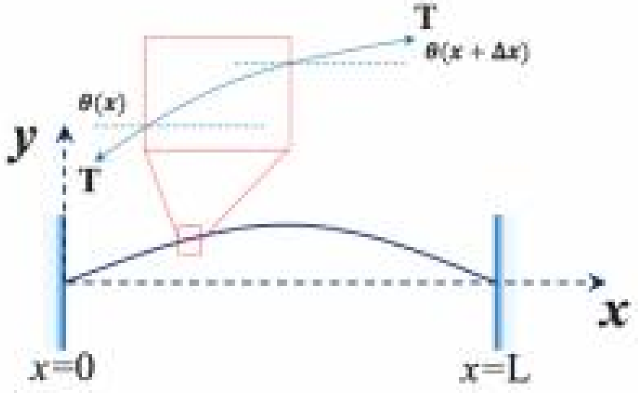
注意：用这两个公式都要先知道所有网点的值才能启动计算，而实际知道的只 是边界条件即边界各点的值，内部各点的值并不知道。为此对所有边界点的函 数值取平均，以它作为所有内部网点计算的启动值。因为数学上可以证明，区域 的最大值与最小值一定在边界上。这一点从物理上很容易理解，假定研究的是 一个温度场，因为内部没有热源(有源就是泊松方程)，在平衡时，热量必然要 从边界流入，也要从边界流出，那么温度最高与最低的点一定在边界上。所以取 边界的平均值启动计算是合理的。

练习：一维波动方程

弦线的横振动方程

$$\underline{\rho(x)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\underline{T}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\underline{P(x,t)}$$

线密度　　张力　　外力



$$F_y=T\sin\theta(x+\Delta x)-T\sin\theta(x)\approx T\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}$$

对均匀弦线，无外力的自由振动情况：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

其中 $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 为波速

练习：一维波动方程

问题转化为求如下定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 0 < x < l; 0 < t < T \\
y(x,0) = \varphi(x) \\
\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \\
y(0,t) = g_1(t) \\
y(l,t) = g_2(t)
\end{cases}
$$

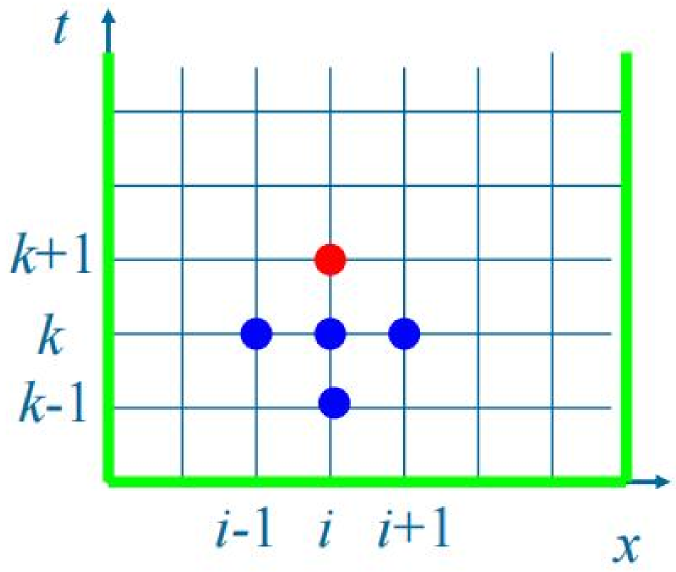
初始条件：$y(x,0) = \varphi(x)$，$\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$

边界条件：$y(0,t) = g_1(t)$，$y(l,t) = g_2(t)$

练习：一维波动方程

思路：用差分代替微分

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



建立差分格式：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,k} - 2y_{i,k} + y_{i-1,k}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{y_{i,k+1} - 2y_{i,k} + y_{i,k-1}}{\tau^2}$$

差分格式： $y_{i,k+1} = 2(1-(\frac{\tau v}{h})^2)y_{i,k} + (\frac{\tau v}{h})^2(y_{i+1,k} + y_{i-1,k}) - y_{i,k-1}$

收敛条件：$\frac{\tau v}{h} \le 1$

练习：一维波动方程

初始条件差分格式：

$$y(x,0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

向前差分：

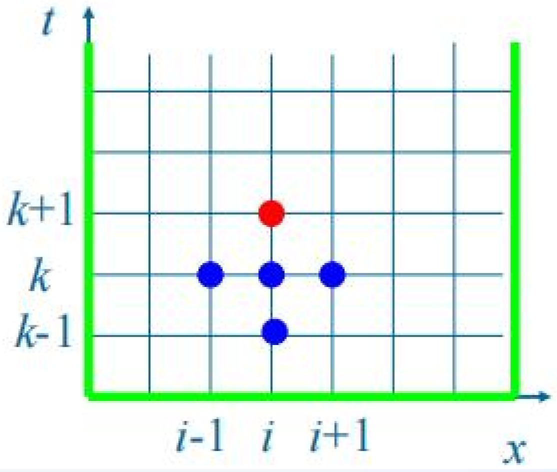
$$\frac{\partial y_{i,0}}{\partial t} = \frac{y_{i,1} - y_{i,0}}{\tau} \quad i = 0,1,\cdots,N$$

初始条件向前差分格式 $y_{i,1} = y_{i,0} + \tau\psi(ih)$

练习：一维波动方程

一维波动方程定解问题的差分格式

$$
\begin{cases}
y_{i,k+1} = 2\left(1-\left(\dfrac{\tau v}{h}\right)^2\right) y_{i,k} + \left(\dfrac{\tau v}{h}\right)^2 \left(y_{i+1,k} + y_{i-1,k}\right) - y_{i,k-1} \\
\quad i = 1,2,\cdots,N-1; \quad k = 1,2,\cdots,M-1 \\
y_{i,0} = \phi(ih) \quad i = 0,1,\cdots,N \\
y_{i,1} = \phi(ih) + \tau\psi(ih) \quad i = 0,1,\cdots,N \\
y_{0,k} = g_1(k\tau) \quad k = 0,1,\cdots,M \\
y_{N,k} = g_2(k\tau) \quad k = 0,1,\cdots,M
\end{cases}
$$



练习：一维波动方程

计算步骤：

1.给定v,l,h,τ,T

2. 计算$N=l/h, M=T/\tau$

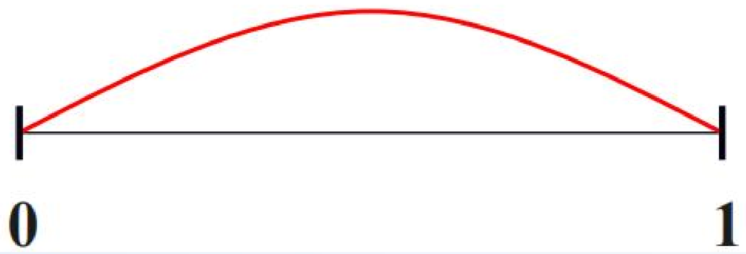
3. 计算初值和边值

4. 用差分格式计算$y_{i,k+1}$

练习：一维波动方程

具体问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \\
y(x,0) = \sin \pi x \quad \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \le x \le 1 \\
y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad 0 < t
\end{cases}
$$



练习：一维波动方程

取 $\frac{v\tau}{h}=1$　　$h=0.2$　　$\tau=h/v=0.2$

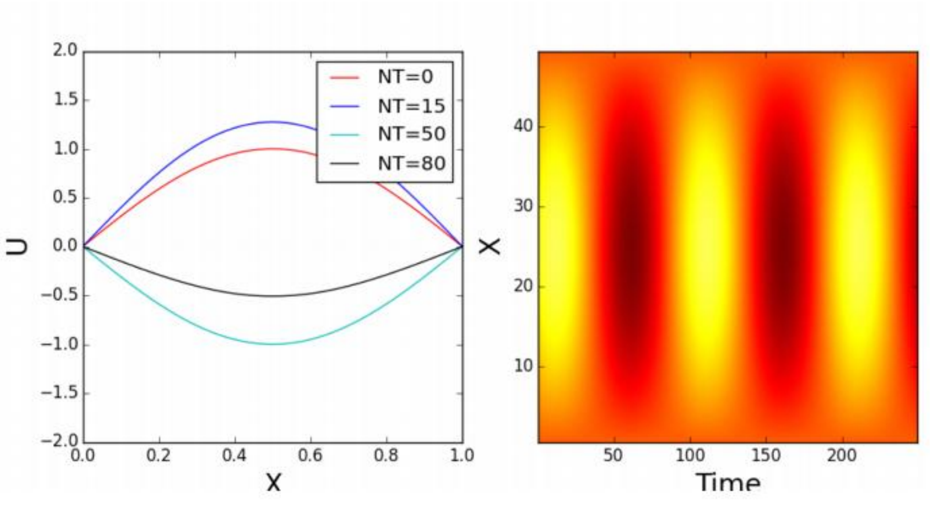
取 $M=100$　$N=1/h=5$

建立差分格式：

$$
\begin{cases}
y_{i,k+1}=y_{i+1,k}+y_{i-1,k}-y_{i,k-1}\\
y_{i,0}=\sin ih\pi\\
y_{i,1}=\sin ih\pi\\
y_{0,k}=y_{1,k}=0
\end{cases}
$$

运行结果：

初始条件为$(x,0)=\sin(\pi x)$



6.5 特殊函数

在偏微分方程求解中会产生一些特殊函数，此外在其他一些计算过程中也会产生一些特殊函数。

如：

1. 艾里函数
2. 贝塞尔函数
3. 汉克尔函数
4. 勒让德函数

6.5 特殊函数：艾里函数

艾里函数(airy function),英国英格兰天文学家、数学家乔治·比德尔·艾里命名的特殊函数，他在1838年研究光学的时候遇到了这个函数。Ai(x)的记法是Harold Jeffreys引进的。是以下微分方程的解：

$$y'' = xy$$

这个方程称为艾里方程或斯托克斯方程。解该方程可得两个解

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\mathrm{d}t$$

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{t^3}{3}+xt} + \sin(\frac{t^3}{3} + xt)\right]\mathrm{d}t$$

Ai(x)称为（第一）艾里函数，Bi(x)称为第二艾里函数。

6.5 特殊函数：艾里函数

Scipy.special中艾里函数：

```
special.airy()
```

输入的值可以是一个数：

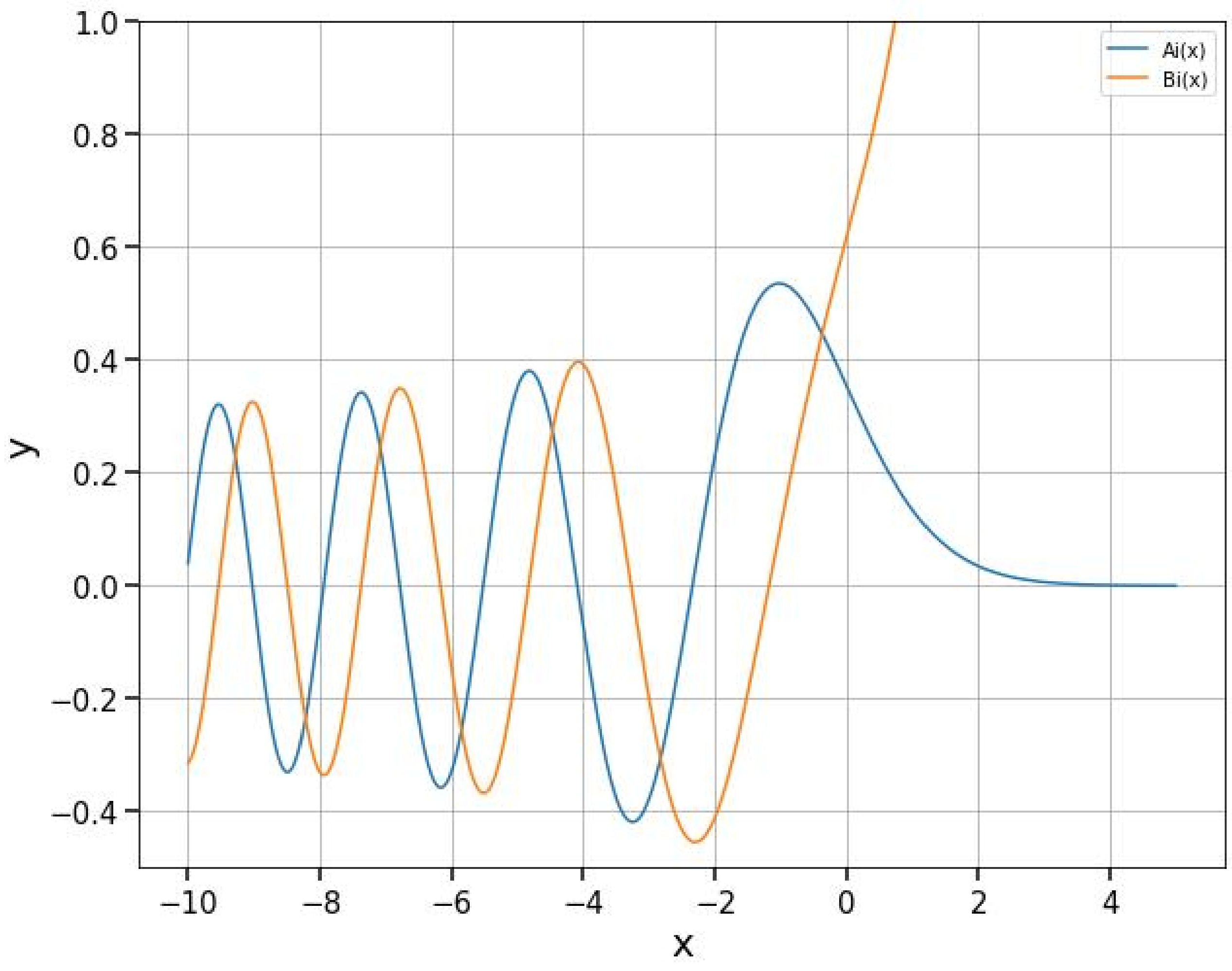
```
In [35]: print(sc.airy(1))
(0.1352924163128147, -0.15914744129679328, 1.2074235949528715, 0.9324359333927756)
```

返回的是数组，其中分别是Ai(1)，Aip(1)，Bi(1)，Bip(1)的值，Aip、Bip为Ai、Bi的导数。

6.5 特殊函数：艾里函数

输入的值可以是一个数组：

```
x=np.linspace(-10,5,1000)
```



6.5 特殊函数：艾里函数

在光学领域，傍轴近似下光束传播遵循方程：

$$i\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{z}\frac{a\partial^2\phi}{\partial x^2}=0$$

其中$k=\frac{2\pi n}{\lambda}$，为波数。

令$\xi=\frac{x}{x_0},\eta=\frac{z}{kx_0^2}$，则上式变为无量纲的形式

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}=0$$

其中，φ为电场包络。

6.5 特殊函数：艾里函数

若

$$\varphi(\xi=0,\eta)=Ai(\eta)$$

根据艾里函数的定义，则φ和η之间存在关系$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}=\eta\varphi$，将其带入无量纲表达式，可得到

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta\varphi=0$$

最后解得

$$\varphi(\xi,\eta)=Ai(\eta-(\frac{\xi}{2}^2))\exp[i(\frac{\eta\xi}{2}-\frac{\xi^3}{12})]$$

对其取模，即可画出艾里光束在x,z方向的能量分布。

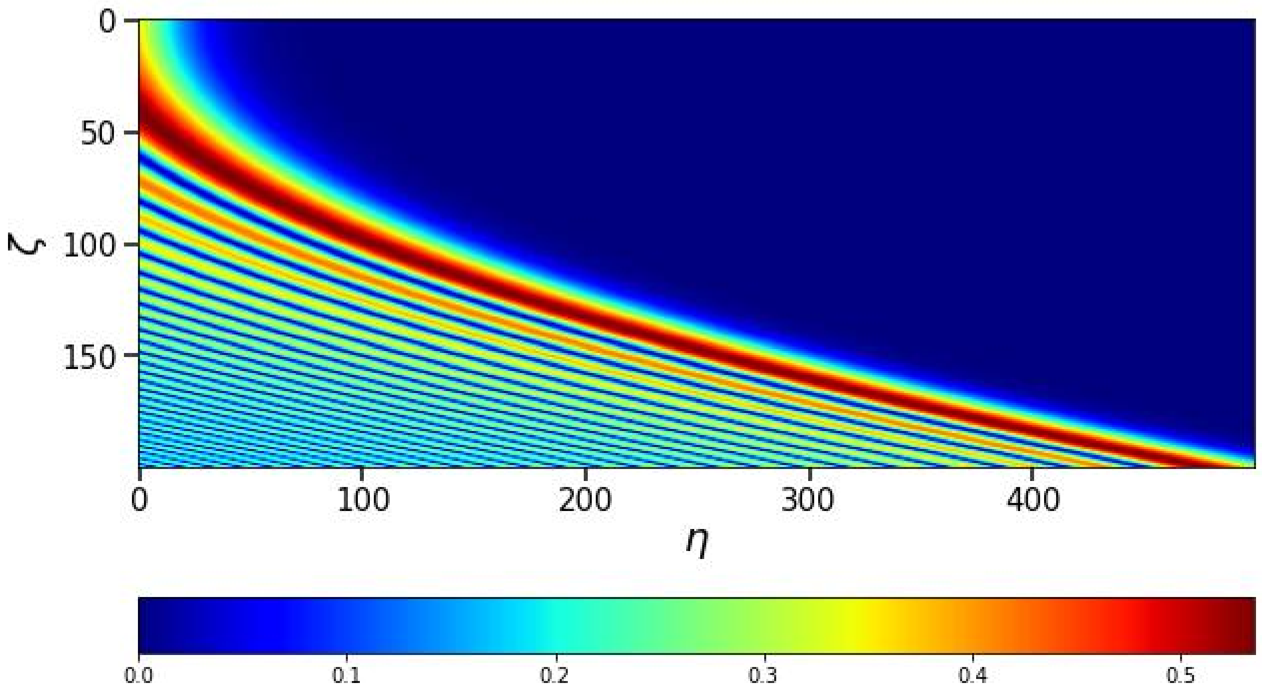
6.5 特殊函数：艾里函数

代码实现：

```
import scipy.special as sc
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xi,eta=np.indices([200,500])/20
Ai,Aip,Bi,Bip=sc.airy(eta-(xi/2)**2)

fig = plt.figure(figsize=(10,8))

cs=plt.imshow(np.abs(Ai),cmap='jet')
cbar = fig.colorbar(cs,orientation='horizontal')

plt.ylabel('$\zeta$', fontsize=20)
plt.xlabel('$\eta$', fontsize=20)
plt.tick_params(labelsize=15,width=1.5,length=7)
plt.tick_params(labelsize=15,which='minor',width=1,length=4)

plt.show()
```

6.5 特殊函数：艾里函数

水平方向为传播方向，Airy光束能量峰值的位置，并不是一条直线，换言之，Airy光束竟然不沿直线传播.



6.5 特殊函数：贝塞尔函数

衍射现象在生活中很常见，只是光的波长太短，我们难以看见光波的衍射。我们知道光可以看成一种电磁波，具有波动性。光一般情况下沿直线传播，**在通过狭缝时会因为边界条件改变使得光场重新分布**。光在通过圆孔之后会产生一种特殊的圆孔衍射的光斑，又称艾里斑。艾里斑的光强分布是和一阶贝塞尔函数相关的。

衍射光强有相应的数学模型：

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right)^2 = I_0 \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

这里的 J_1就是第一类贝塞尔函数。

6.5 特殊函数：贝塞尔函数

一阶贝塞尔函数是一种特殊函数，函数表达式为，

$$J_v(z)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}$$

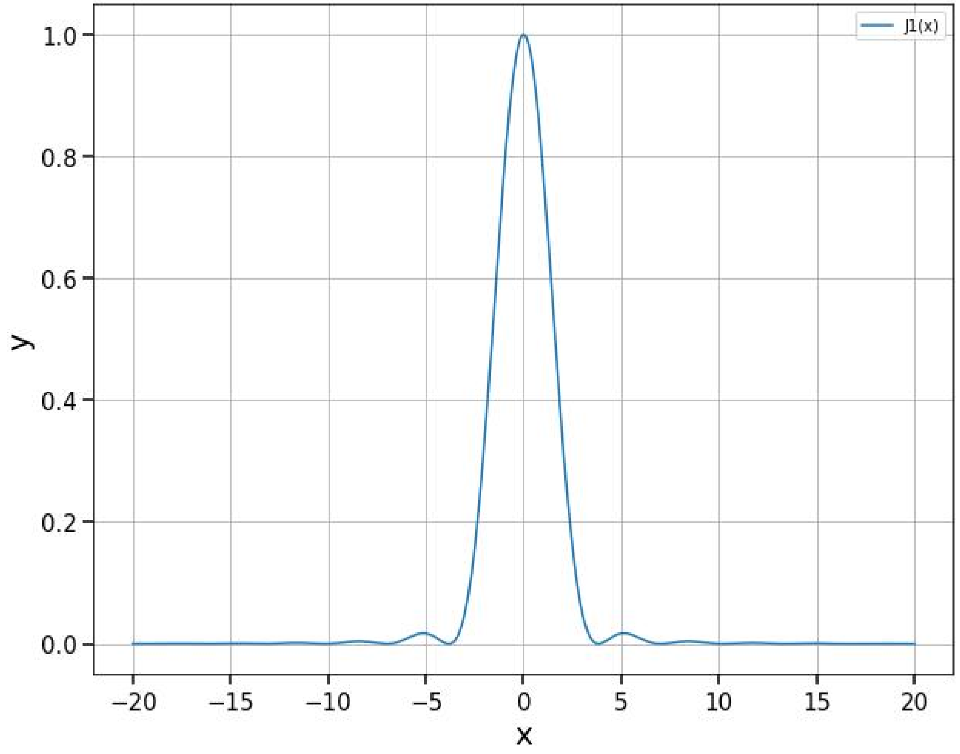
Scipy提供的贝塞尔函数为:

```
special.jv(v,z)
```

6.5 特殊函数：贝塞尔函数

艾里斑光强分布：光强基本都集中在中心处，周围迅速变暗。

```
import scipy.special as sc
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

I0=1
x=np.linspace(-20,20,1000)
y=sc.jv(1,x)
I=I0*(2*y/x)**2
fig = plt.figure(figsize=(10,8))
plt.plot(x,I,label='J1(x)')

plt.legend()
plt.grid()
plt.ylabel('I', fontsize=20)
plt.xlabel('x', fontsize=20)
plt.tick_params(labelsize=15,width=1.5,length=7)
plt.tick_params(labelsize=15,which='minor',width=1,length=4)

plt.show()
```



6.5 特殊函数：贝塞尔函数

事实上，贝塞尔函数是下列方程（贝塞尔方程）的解：

$$x^2 y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - v^2)y = 0$$

该方程的通解为：

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x)$$

称为第二类贝塞尔函数（或称诺依曼函数）

SciPy提供的函数为：

```
special.yv(v,z)
```

6.5 特殊函数：汉克尔函数

汉克尔函数又称第三类贝塞尔函数，其表达式为：

$$H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z)$$
$$H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - iY_v(z)$$

SciPy提供的函数分别为:

```
special.hankel1(v,z)

special.hankel2(v,z)
```

6.5 特殊函数：勒让德函数

勒让德函数定义为：

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$$

勒让德方程（Legendre equation）：

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0 \quad n \in \mathbb{N}^+$$

而SciPy上的连带勒让德函数定义为:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$$

也就是前面多了一个 $(-1)^m$ ，这里需要注意。

勒让德函数代码实现

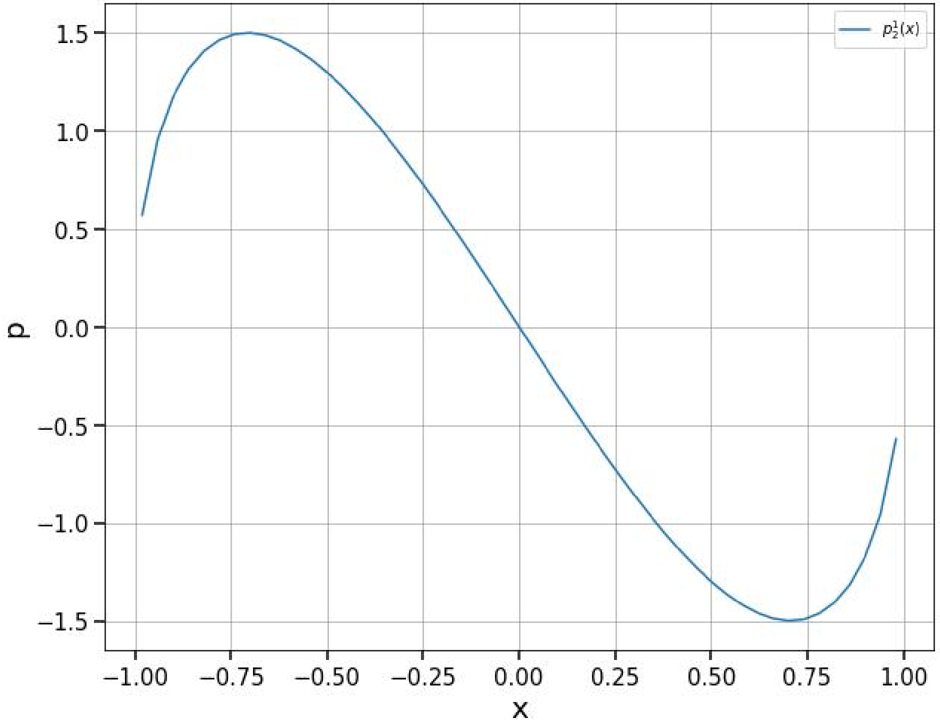
SciPy中连带勒让德函数的用法：

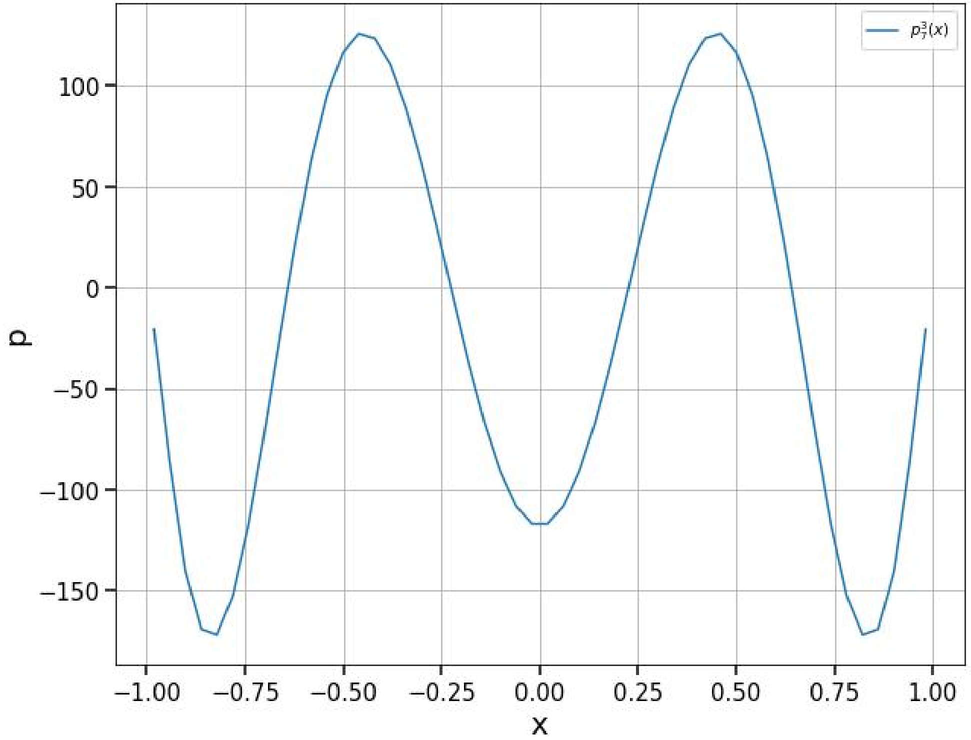
```
special.lpmv(m,l,x)
```

m、l、x的意义与上式相同，m为求导的阶数，l为勒让德多项式的阶数，x为自变量。

6.5 特殊函数：勒让德函数

勒让德函数代码实现:m=3(1),l=7(2)





勤动手，多思考！

苏湘宁　　邮箱：suxn@hainanu.edu.cn