计算物理期末总结

- 计算物理期末总结
  - 选择填空
  - 大题
  - 选择填空
    - Error
      - the Classes of Error
      - 误差计算
        - 误差定义，误差限。
        - The compute of truncation error
    - Python Foundation
      - 导入文件模式分类
      - matplotlib.pyplot
    - 分形图形
      - Instance
      - Properties
      - Fractional Dimension Compute（豪斯道夫维数）
    - 插值拟合
      - 插值分类
      - 拟合目标
    - 数值积分
      - 积分公式分类
      - Truncation error for simps
    - 求方程零点
      - 方法分类
      - General employment route.
    - FFT
      - 采样点频率要求：
    - 常微分方程
      - 差分方法
      - 误差分析
    - 混沌系统
      - 基本特征
      - 不动点分类
        - Introduction

        - Overall Classes
        - Local
      - 混沌吸引子特征
      - 洛伦茨方程与奇怪吸引子
- 偏微分方程
  - 分类
  - 初始条件和边界条件要求
  - 稳定条件
  - 截断误差
  - 松弛法

选择填空

1. 误差来源，绝对误差与相对误差的计算
2. python 相关基础
3. 分形图形property,维度计算
4. 数值积分：辛普森，截断误差。
5. 差值拟合：差值分类（三次样条，多项式（拉格朗日）差值;min最小二乘法作为拟合目标）
6. FFT 相关的选频概念
7. 零点求解的思路，即方法使用顺序
8. 混沌系统相关概念：不动点分类（280），混沌吸引子特征(306)，洛伦兹方程与奇怪吸引子（315）
9. 偏微分方程：分类、边界条件和初始条件要求、稳定条件要求，截断误差，松弛法。
10. 正态分布，大数定理，中心极限定理相关概念；生成随机序列方法（线性同余，反函数法，舍选法）

大题

1. 差值，拟合：重点是拉格朗日差值方法，最小二乘检验误差或者min为拟合目标。
2. 常微分方程：四阶龙格-库塔方法求解单摆运动最为复杂的情况。
3. 热传导偏微分方程。
4. 随机数，应该是 π 或者积分：只需要一些生成代码即可。

§0 选择填空

§0.0 Error

§0.0.0 the Classes of Error

1. Model error
2. Measurement error
3. **Truncation error**

连续过程离散化的误差，比如差分迭代公式。

4. Round off

计算机的浮点数截断（这个不叫truncation error真心抽象）。此外 Round off在低精度下远小于 Truncation error，一般不予考虑。

§0.0.1 误差计算

§0.0.1.0 误差定义，误差限。

- Error

$$Error = Z_{real} - Z_{measure}$$

- Absolute error

Because Z_{real} always cound not be precisely known, so we can only give a approximate range of Error:

$$|Error| \le \varepsilon$$

ε is absolute error, so we usually express Z_{real} as:

$$E_{real} = Error + Z_{measure} \in Z_{measure} \pm \varepsilon$$

- Relative error

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|Z_{real}|} \approx \frac{\varepsilon}{|Z_{measure}|}$$

- Instance

事实上，她应该只会考绝对误差到相对误差的换算：

假设我们有一个 round off 舍入的浮点数 3.1415626, 我们不知道此舍入的误差是多少，但由于round off 方法，最大误差限：

$$\epsilon = 0.00000005$$

则相对误差：

$$\epsilon_r = \frac{|\epsilon|}{|3.1415626|}$$

§0.0.1.1 **The compute of truncation error**

- 传统有限差分法误差形式（单变量，常微分）

0. Local Truncation Error

assume $u(t_i)$ is analytical solution,$y(t_i)$ is numerical solution.

we employ truncation route to secure $y(t_{i+1})$

$$LTE = y(t_{i+1}) - u(t_{i+1})$$

Viz. , LTE=analytical solution- numerical solution

1. Overall Truncation Error

Evidently if we only konw $u(t_0)$, then we secure numerical solution: $y(t_n)$

$$OTE = y(t_n) - u(t_n)$$

2. 误差的量级估计

Assume the length of step is h

$$\begin{cases} LTE = O(h^{p+1}) \\ OTE = O(h^p) \end{cases}$$

其中p为方程阶数（微分方程的个数）。

- 显式差分法误差形式

LTE一般和稳定条件阶数相同。

§0.1 Python Foundation

§0.1.0 导入文件模式分类

```
inuputfile=open("鸡你太美.txt",'w') #input #the mode to write
```

The core point is the modes:

- 'r': read
- 'w': write
- 'a': append
- 'b': bin
- '+': read/write

§0.1.1 matplotlib.pyplot

没什么，单纯我记不住这个库名字。

§0.2 分形图形

§0.2.0 Instance

0. julia 集
1. 混沌吸引子轨道

§0.2.1 Properties

0. **Self-similarity**
1. Fractional Dimension

...

§0.2.2 Fractional Dimension Compute（豪斯道夫维数）

每个维度长增加两倍，体积增加量为 2^{dim}；例如Sierpinski, 维度长增加两倍，体积增加三倍，其维度为：

$$dim = log_2 3$$

§0.3 插值拟合

§0.3.0 插值分类

0. 多项式拟合插值 主要是拉格朗日插值（可以设置完全符合已知点）。缺点多个点拟合需要高阶多项式，会有过拟合现象。若分段使用拉格朗日插值又会有拟合函数不光滑（非完全拟合甚至不连续）的缺陷。
1. 分段样条插值 采用构造过某个点（包括导数也可过定点）的低阶多项式。例如三次样插值值可以做到一阶导数光滑，二阶导数连续。

§0.3.1 拟合目标

可以使用最小二乘法，选择合适的参数，使LTE的平方和最小：

$$\min \sum_i LTE^2$$

§0.4 数值积分

§0.4.0 积分公式分类

0. 矩形公式
1. 梯形公式
2. **辛普森1/3公式**

辛普森1/3公式适用于将积分区间分成偶数个小区间（一次计算两个子区间）。假设我们需要计算函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，可以将该区间分成 n 个等长小区间，其中 n 是偶数。

公式如下：

```
x = np.linspace(a, b, n+1) # 点数要是奇数
y = f(x)
V = 0
for i in range(1, n, 2):
    V += (1/3) * (y[i-1] + 4*y[i] + y[i+1]) * h
```

其中，$h = \frac{b-a}{n}$ 是每个小区间的长度。这种形式有点呆，但他考。注意循环范围（1,n,2），但是我们有n+1个端点。

§0.4.1 Truncation error for simps

我不知道这有啥好考的，不会让算解析解吧。。。这里的p应该取1，Viz., $LTE = O(h^2), OTE = O(h)$

§0.5 求方程零点

§0.5.0 方法分类

1. 二分法

优点是异号端点区间一定可以找到一个零点的大致位置

缺点是收敛慢

2. 牛顿切线法
3. 弦割法

这俩优点是收敛快，缺点是可能收飞。

§0.5.1 General employment route.

先用二分法找到零点大致区间，然后用牛顿或弦割收敛。

§0.6 FFT

§0.6.0 采样点频率要求:

- 采样频率：原信号离散化程度，即一秒钟取多少个点。
- 采样定理：**实际保证采样频率为信号最高频率(要经验判断)的2.56～4倍**；当然按它的定理要求 **2** 倍，但是鬼知道原信号频率是多少。

§0.7 常微分方程

公共变量为t，我们可以发现，这套方法等于在对时间求积分。

§0.7.0 差分方法

假设u(t)是未知解析表达式，f(t)是已知的u(t)的一阶导函数，y(t)是数值解的表达式,h为时间步长。

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t))$$

0. 欧拉法

后续差分方法均为改进平均斜率。

- primal

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h * f(t_i, y(t_i))$$

- enhanced

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))]$$

可以发现，鬼知道 , $y(t_{i+1})$ 是多少，所以这个值是用primal算的。

1. **Fourth order Runge-Kutta method**

$$yt_{i+1} = y(t_i) + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

其中，所用斜率为：

$$\begin{cases} k_0 = f(t_i, y(t_i)) \\ k_1 = f(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i) + k_0\frac{h}{2}) \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i) + k_1\frac{h}{2}) \\ k_3 = f(t_i + h, y(t_i) + k_2 h) \end{cases}$$

时间步长是：1,1/2,1/2,1，权重是1,2,2,1。有点对称，但不多。

§0.7.1 误差分析

- primal 欧拉法: p=1
- enhanced 欧拉法: p=2
- Fourth order Runge kutta method: p=4
- **变步长Runge kutta method**： 其实就是选择满足精度要求 ε 的最大步长。看它的样子是用LTE。

§0.8 混沌系统

§0.8.0 基本特征

1. 对初始条件敏感
2. 奇异吸引子
3. 在不同标度下有分形结构：倍周期分岔

§0.8.1 不动点分类

§0.8.1.0 Introduction

又称奇点，指 $\frac{dy}{dt} = 0$ 和 $\frac{dx}{dt} = 0$ 的时候,相点不动（这不是废话吗）。

微扰 $\delta x, \delta y \ldots$ 的解一般是 $e^{\lambda, t}$ **的线性叠加**,记作 $e^{\mu + i\sigma}$，显然：

1. $\sigma = 0$ 微扰单调扩大或减小
2. $\mu = 0$ 运动 $C i \sin\theta$ 震荡
3. 一般情况，啥都有。

§0.8.1.1 Overall Classes

$\mu = 0$ 即震荡的情况是微扰是稳定的（其实显然微扰减小更好），叫 **椭圆不动点** ；其余都是 **双曲不动点**

§0.8.1.2 Local

这明明是针对特定方程才成立，而且书上大概写错了。她考的话很神经。

$\Delta = \gamma^2 - 4c$ ，微扰解有两项 $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

0. $\Delta \geq 0$ 这显然 λ 为实数，微扰单纯大小变化。

- 稳定**结点**，根都大于0
- 不稳定节点，根都小于0
- **鞍点** ,一大一小。她说有一个“方向稳定”，其实应该是特征方向，不是空间自由度。

1. $\Delta < 0$ 两个解为 $\lambda_{1,2} = -\gamma/2 \pm i\sqrt{-\Delta}/2$，但不动点还是关注实部，即:

- 稳定**焦点** $-\gamma < 0$
- 不稳定**焦点** $-\gamma > 0$

- **中心点**：$-\gamma = 0$

§0.8.2 **混沌吸引子特征**

只有耗散系统中的混沌才会产生奇异吸引子。

- 稳定性：抗初值干扰能力（指的是局限的相空间区域）。
- 对初值敏感（bushi）：指的是轨道不稳定。
- 低维性：相空间自由度低，但轨道无限嵌套，自相似性。
- 非周期性：轨道不相交

§0.8.3 **洛伦茨方程与奇怪吸引子**

判断条件：$r > r_c \approx 24.74$,C_1,C_2 成为了鞍-焦点，系统出现了复杂的分岔序列

§0.9 偏微分方程

§0.9.0 分类

0. 椭圆型 $-\nabla^2\varphi = S$
1. 抛物型 $[\partial_t - \lambda\nabla^2]\varphi = S$
2. 双曲型 $[\partial_t^2 - \lambda\nabla^2]\varphi = S$

§0.9.1 初始条件和边界条件要求

- 边界条件

和具体什么方法无关，都需要。和空间自由度有关，一个dim两个边界条件。

分类就是1,2,3类边界条件，注意导数他叫**法向导数**。

- 初始条件

抛物要一个，双曲要两个。

§0.9.1 稳定条件

- 拉普拉斯

0. 显式

$$r = \frac{h_y^2}{h_x^2}\lambda \in (0, 1)$$

1. 隐式

恒稳定。

- 热传导

$$r = \frac{\tau}{h^2}\lambda \in (0, \frac{1}{2})$$

- 弦振动

$$r = \frac{\tau^2}{h^2}\lambda \in (0, 1)$$

§0.9.2 截断误差

和r中步长的阶数相同，LET，注意不同于常规常微分判断。

§0.9.3 松弛法