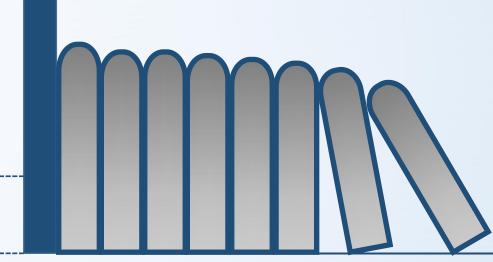


第五章 解常微分方程

苏湘宁

邮箱: suxn@hainanu.edu.cn



常微分方程

物理问题: RC回路放电

欧拉法

↑ 龙格-库塔法

単摆运动

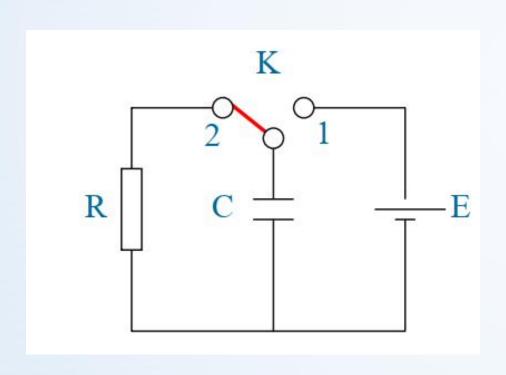
▶混沌



5.1物理问题: RC回路放电问题

物理学中很多定律、方程都是以微分方程的形式给出的。

能够解析求解的微分方程有限。



当单刀双掷开关置于"1"处时, 电容器开始充电。 当电容器充分充电后,其电 量:Q0=CE, 其中C为电容器的电容, E为直流电源的电动势。 再将开关置于"2"处,则电容器开始放电.



5.1物理问题: RC回路放电问题

电容器的电量随时间的变化由以下方程给出:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0$$
 $\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}; \tau = RC$ $\tau = RC$

电容器电量Q随时间演化的常微分方程以及初始条件,称 为初值问题

5.2 欧拉法

一般的常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

欧拉法 改进的欧拉法 Runge – Kutta法

常用算法:在已知当前时间点tn的函数值yn的条件下,求得下一时间点tn+1的函数值yn+1

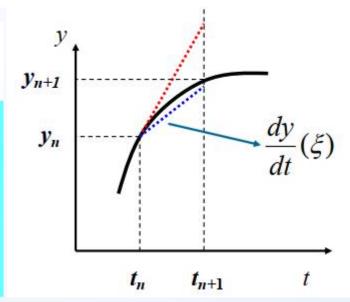


思路:向前差分代替微分,f(v,t)用前端点的值 $f(v_n,t_n)$ 代替

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(y_n, t_n) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

计算公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n) \\ n = 0, 1, 2 \cdots \end{cases}$$





5.2 欧拉法

RC回路放电问题:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n) \\ n = 0, 1, 2 \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases}
\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} \\
Q(t_0) = Q_0
\end{cases}$$

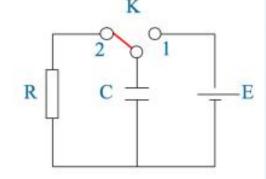
欧拉法:
$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{n+1} = Q_n - \frac{Q_n}{\tau} \Delta t \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases}$$

设
$$Q_0 = 1.0, \tau = RC = 10, \Delta t = 1$$

$$Q_1 = Q_0 - \frac{Q_0}{\tau} \Delta t = 1.0 - \frac{1.0}{10} \times 1 = 0.9$$

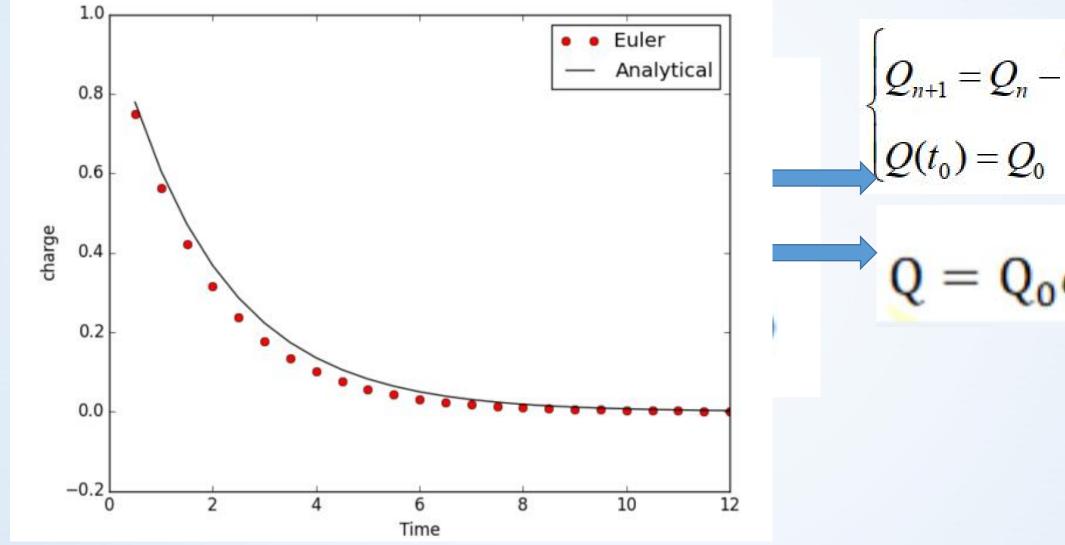
$$Q_2 = Q_1 - \frac{Q_1}{\tau} \Delta t = 0.9 - \frac{0.9}{10} \times 1 = 0.81$$

$$Q_3 = Q_2 - \frac{Q_2}{5} \Delta t = 0.81 - \frac{0.81}{10} \times 1 = 0.729$$





5.2 欧拉法: python 实现



$$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_n - \frac{Q_n}{\tau} \Delta t \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases}$$

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



5.2 欧拉法: 截断误差

整体截断误差与 Δ t成正比。因此,减小时间步长 Δ t可进一步提高计算 精度, 但会导致计算量的增加。

泰勒展开:
$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{dy}{dt}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t_n) + \cdots$$

欧拉公式:
$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n) = y_n + \Delta t \frac{dy}{dt}(t_n)$$

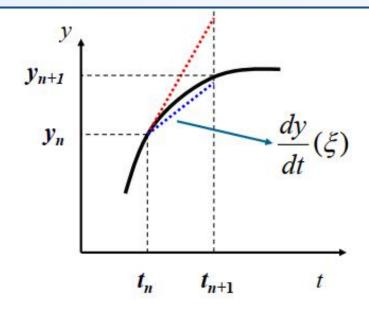
$$T_{n+1} = \frac{\Delta t^2}{2} y''(\xi) \qquad \propto \Delta t^2$$

$$\propto \Delta t^2$$

总体截断误差:
$$\propto \Delta t$$



5.2 欧拉法: 如何提高精度



$$y_{n+1} = y_n + \frac{dy}{dt}(\xi)\Delta t \quad t_n < \xi < t_{n+1}$$

欧拉法:
$$\frac{dy}{dt}(\xi) = \frac{dy}{dt}(t_n) = f(y_n, t_n)$$

欧拉法:
$$\frac{dy}{dt}(\xi) = \frac{dy}{dt}(t_n) = f(y_n, t_n)$$

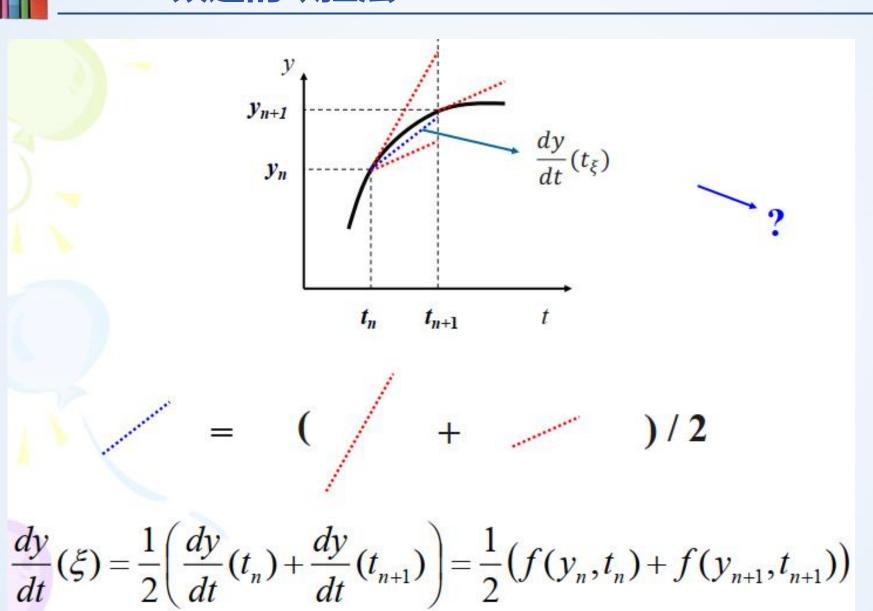
如何提高 $\frac{dy}{dt}(\xi)$ 计算精度-----高阶算法

用tn和tn+1时刻的 平均值:

改进的欧拉法



5.2 改进的欧拉法





5.2 改进的欧拉法

思路:向前差分代替微分,f(v,t)用前后端点的平均值代替

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

用欧拉法预测

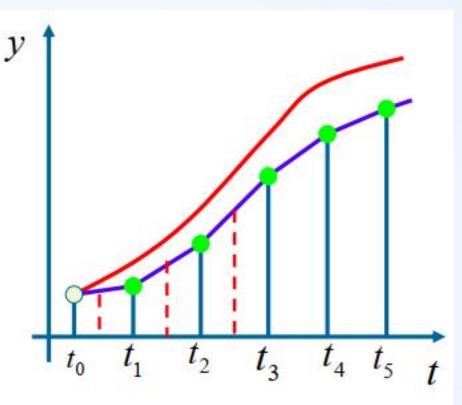
5.2 改进的欧拉法

计算步骤:

1. 用欧拉公式预测 y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n)$$

2. 用改进的欧拉公式校正 yn+1



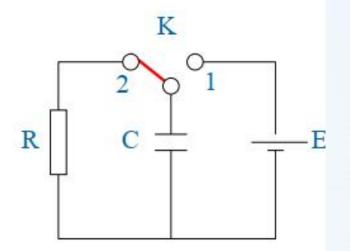
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} (f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})) \\ n = 0, 1, 2L \end{cases}$$



5.2 改进的欧拉法:应用

RC回路放电问题:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases}$$



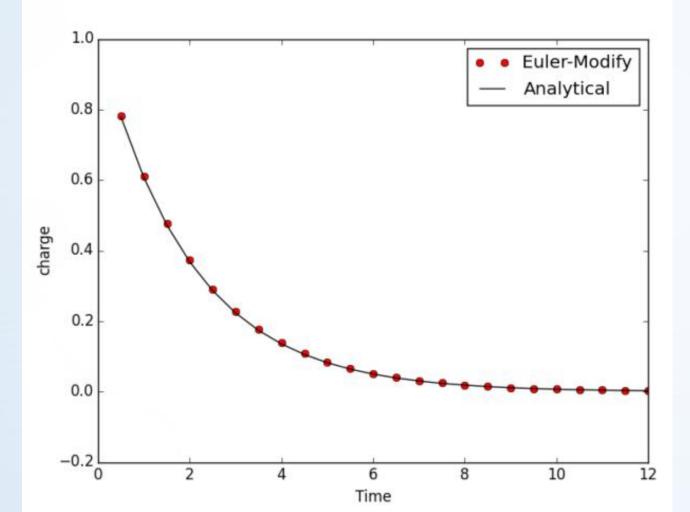
预测:
$$Q_{n+1} = Q_n - \frac{Q_n}{\tau} \Delta t$$
校正:
$$Q_{n+1} = Q_n - \frac{1}{2} \left(\frac{Q_n}{\tau} + \frac{Q_{n+1}}{\tau} \right) \Delta t$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$



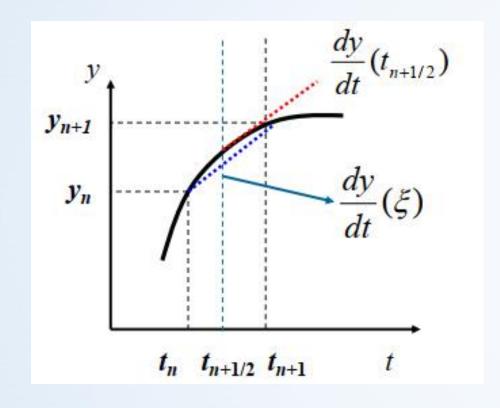
5.2 改进的欧拉法:应用

```
for i in range(n):
    t = t + dt
    q1 = q - q*dt/rc
    a = a - 0.5*(a1*dt/rc + a*dt/rc)
```



改进的欧拉算法给出的结果与 解析结果更为吻合, 表现出更 高的精度。

当然,这种精度的提高是以计算效率的降低为代价的。欧拉算法中,只需要计算一次f(y,t),而改进的欧拉算法则需要计算两次f(y,t),因此计算效率相比于欧拉算法降低了。



二阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)

$$\frac{dy}{dt}(\xi) = \frac{dy}{dt}(t_{n+1/2}) = f(y_{n+1/2}, t_{n+1/2})$$



二阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)

思路:向前差分代替微分,f(v,t)用中点的值代替

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(y_{n+1/2}, t_{n+1/2}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

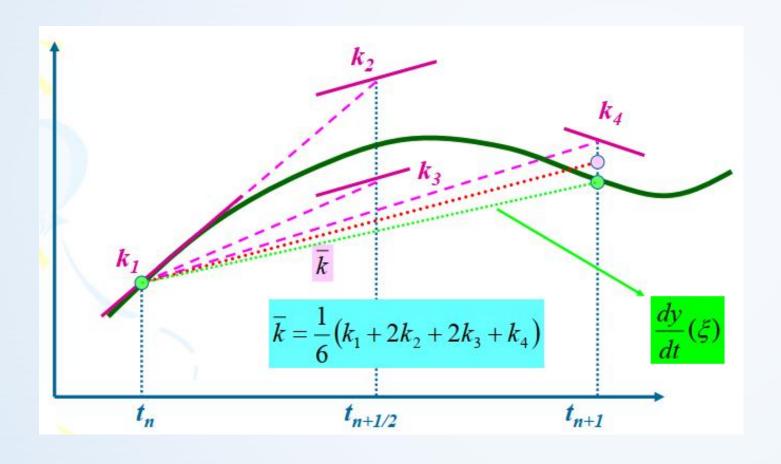
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{n+1/2}, t_{n+1/2}) \\ n = 0, 1, 2 \cdots \end{cases} y_{n+1/2} = y_n + \frac{\Delta t}{2} f(y_n, t_n)$$

$$\text{用欧拉法预测}$$

总体截断误差: $\propto \Delta t^2$



四阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)



为了提高精度,可以多取几点的斜率值作加权平均当作平均斜率kave,这就是龙格一库塔法的基本思想

四阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{cases} k_1 = f(y_n, t_n) \\ k_2 = f(y_n + k_1 \Delta t / 2., t_{n+1/2}) \\ k_3 = f(y_n + k_2 \Delta t / 2., t_{n+1/2}) \\ k_4 = f(y_n + k_3 \Delta t, t_{n+1}) \end{cases}$$

总体截断误差: $\propto \Delta t^4$

k₁是f(y,t)在左端点的值, k2是由欧拉法计算出的中点处的f(y,t)值, k3是基于k2计算出的中点处的f(y,t)值, 而k4是基于k3计算出的f(y,t)在右端点的取值



第一、二步:导入模块,初始化,将计时器置零(t=0.0),并给出初始电量(q=0)。建立了三个空列表,分别存储数值求解得到的电量、解析求解得到的电量以及时间信息.

```
import numpy as np
import pyplab as pl
rc = 2.0
dt = 0.5
n = 5000
t = 0.0
q = 1.0
qt=[]
qt analytic=[]
time = []
```



第三步: 用龙格库塔方法和分析方法求解

```
for i in range(n):
  t = t + dt
  k1 = -q/rc
  k2 = -(q+k1*0.5*dt)/rc
  k3 = -(q+k2*0.5*dt)/rc
  k4 = -(q+k3*dt)/rc
  q = q + dt/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
```



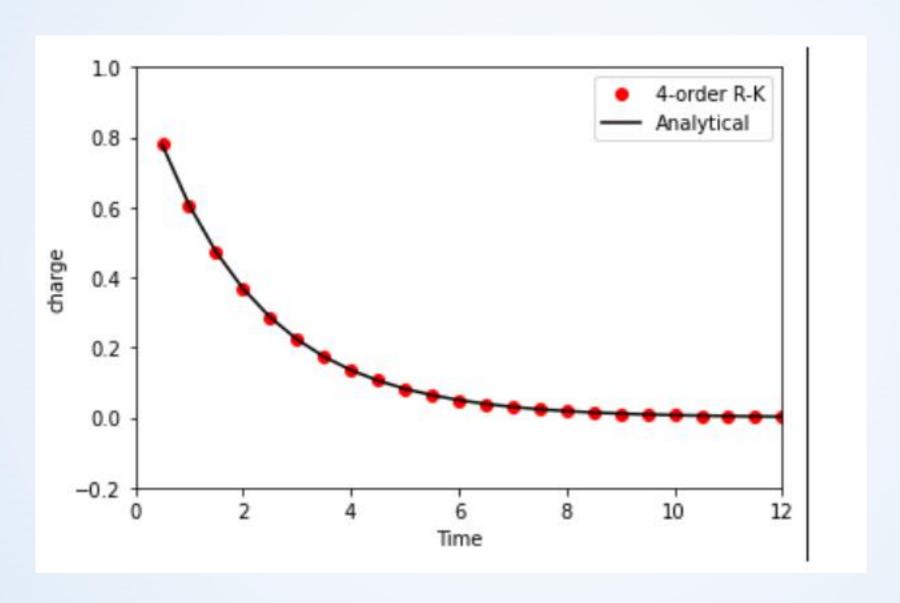
第三步: 用龙格库塔方法和分析方法求解

```
q_analytic = np.exp(-t/rc)
qt.append(q)
qt_analytic.append(q_analytic)
time.append(t)
```



```
pl.plot(time,qt,'ro',label='4-order R-K')
pl.plot(time,qt analytic,'k-',label='Analytical')
pl.xlabel('Time')
pl.ylabel('charge')
pl.xlim(0,12)
pl.ylim(-0.2,1.0)
pl.legend(loc='upper right')
pl.show()
```







5.3 龙格-库塔法:变步长

龙格-库塔法都是定步长的,单从每一步看,步长越小,截断误差就越小;但随着步长的减小,不但引起计算量的增大,而且可能导致舍入误差的严重积累,因此同积分的数值计算一样,微分方程的数值解法也要注意合理选择步长。

以标准的四阶龙格-库塔公式为例:从节点 t_i 出发,先以某个步长h 求出一个近似值,记 y_{i+1} (h),由于标准四阶公式的局部截断误差为 $O(h^5)$,故有

$$y(t_{i+1}) - y_{i+1}^{(h)} \approx ch^5$$

这里系数c与 $y^{(5)}(t)$ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 内的值有关。



5.3 龙格-库塔法:变步长

将步长折半,即取h/2 为步长,从 t_i 跨两步到 t_{i+1} ,再求得一个近似 $y_{i+1}^{(h/2)}$,每跨一步的局部截断误差是 $c(h/2)^5$ 因此有

$$y(t_{i+1})-y_{i+1}^{(h/2)}\approx 2c (h/2)^{-5}$$

步长折半以后,误差大约减少为原来的1/16,即有

$$\frac{y(t_{i+1}) - y_{i+1}^{(h/2)}}{y(t_{i+1}) - y_{i+1}^{(h)}} \approx \frac{1}{16}$$

可得估计式

$$y(t_{i+1}) - y_{i+1}(h/2) \approx (y_{i+1}(h/2) - y_{i+1}(h)) /15$$



5.3 龙格-库塔法:变步长

通过检查步长折半前后两次计算结果的偏差

$$\Delta = | y_{i+1}^{(h/2)-} y_{i+1}^{(h)} |$$

来判断所选取的步长是否合适。具体可分以下两种情况:

- (1)对于给定的精度 ε ,如果 $\triangle > \varepsilon$,就反复将步长折半计算,直至 $\triangle < \varepsilon$ 为止,这时取步长折半后的"新值" $y_{i+1}^{(h/2)}$ 作为结果。
- (2)如果△<ε,就反复将步长加倍,直至△>ε为止,这时取步 长加倍前的 "旧值"作为结果。

这种通过步长折半或加倍的计算的方法就叫变步长方法。

表面上看,为了选择步长,每一步的计算量似乎增加了,但从总体上考虑往往是合算的。

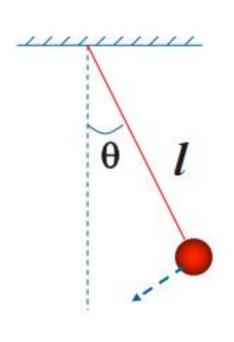
MSOR PHYSICS PHYSICS LIM SOME NAME OF THE PHYSICS PROPERTY OF THE P

5.4 单摆运动:求解二阶常微分方程

高阶的常微分方程可以化成一阶的常微分方程组,例如谐波振 荡器的二阶的常微分方程

例: 单摆

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$



解析解:
$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi_0)$$



5.4 单摆运动:求解二阶常微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$



$$\frac{d^{2}\theta}{dt^{2}} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = f(\theta, \omega, t) = -\frac{g}{l}\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = g(\theta, \omega, t) = \omega \end{cases}$$

四阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) \cdot \Delta t$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(l1 + 2l2 + 2l3 + l4) \cdot \Delta t$$

5.4 单摆运动:求解二阶常微分方程

四阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)

$$\begin{cases} k1 = -\frac{g}{l}\theta_n \\ l1 = \omega_n \end{cases}$$

$$k2 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1/2} = -\frac{g}{l}(\theta_n + l1 \cdot \Delta t / 2.)$$

$$l2 = \omega_{n+1/2} = \omega_n + k1 \cdot \Delta t / 2.$$

$$k3 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1/2} = -\frac{g}{l}(\theta_n + l2 \cdot \Delta t / 2.)$$

$$l3 = \omega_{n+1/2} = \omega_n + k2 \cdot \Delta t / 2.$$

$$k4 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1} = -\frac{g}{l}(\theta_n + l3 \cdot \Delta t)$$

$$l4 = \omega_{n+1} = \omega_n + k3 \cdot \Delta t$$



第一、二步:导入模块,初始化,给出了重力加速度常数和摆长的数值、设定时间步长、设置了初始角度和角速度

```
import pylab as pl
g = 9.8
x = 9.8
dt = 0.04
theta=0.1
omiga=0.
n = 4000
ThetaT0 = []
OmigaT0 = []
Time0 = []
```



第三步: 用龙格库塔方法和分析方法求解

```
t = 0.0
for i in range(n):
  xk1=-(g/xI)*theta
  xl1=omiga
  xk2=-(g/xI)*(theta+dt/2.*xI1)
  xl2=omiga+dt/2.*xk1
  xk3=-(g/xI)*(theta+dt/2.*xI2)
  x13=omiga+dt/2.*xk2
  xk4=-(g/xI)*(theta+dt*xI3)
  xl4=omiga+dt*xk3
```



第三步: 用龙格库塔方法和分析方法求解

```
omiga=omiga+dt/6.*(xk1+2*xk2+2*xk3+xk4)
theta=theta+dt/6.*(xl1+2*xl2+2*xl3+xl4)
t=t+dt
ThetaT0.append(theta)
OmigaT0.append(omiga)
Time0.append(t)
```

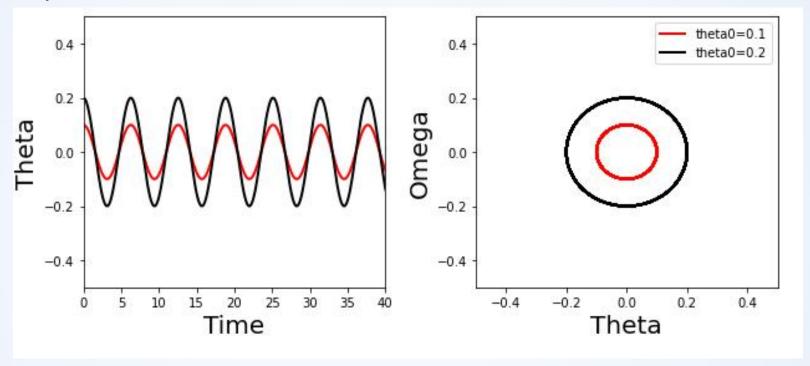


```
fig = pl.figure(figsize=(10,4))
ax1 =fig.add_subplot(1,2,1)
ax2 =fig.add_subplot(1,2,2)
ax1.plot(Time0, ThetaT0, 'r-',label='theta0=0.1',linewidth=2.0)
ax2.plot(ThetaT0, OmigaT0, 'r-', label='theta0=0.1',linewidth=2.0)
pl.subplots_adjust(hspace=0.35,wspace=0.3)
```



```
ax1.set ylabel('Theta', fontsize=20)
ax1.set xlabel('Time', fontsize=20)
ax1.set xlim(0,40)
ax1.set ylim(-0.5,0.5)
ax2.set xlabel('Theta', fontsize=20)
ax2.set_ylabel('Omega', fontsize=20)
ax2.set xlim(-0.5,0.5)
ax2.set ylim(-0.5,0.5)
pl.legend(loc='upper right')
#pl.show()
```





- ◆ 在小摆角无阻尼情况下,数值计算给出单摆的运动呈简谐振动;
- ◆ 其振幅依赖于初始条件,初始摆角越大,振幅越大,但振动频率不变。与解析计算结果相符。
- ◆ 单摆在相平面中的轨迹呈闭环形状,展现出周期性运动规律。

MORLD PHYSICS IIIIIIIII PHYSICS IIIIIIIII PHYSICS IIIIIII PHYSICS IIIIII PHYSICS IIIIII PHYSICS IIIIII PHYSICS IIIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS IIIII PHYSICS IIII PHYSICS IIIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS IIII PHYSICS II

课后练习

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

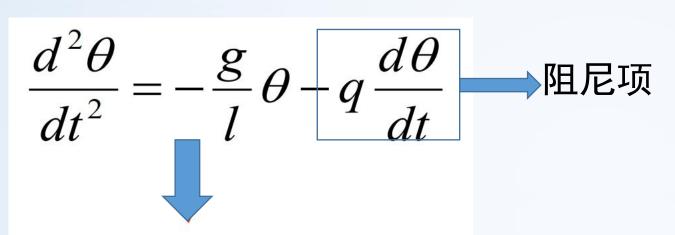
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

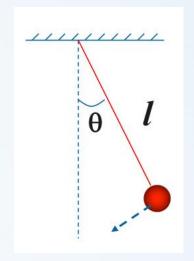
- 1. 当 σ =10; b=8/3; r=25时,画出z-x平面中的轨迹;
- 2. 当 σ =10; b=8/3时,改变r值,计算z-x平面中的轨迹;

编写程序(Python);

给出计算结果(图形),并对结果加以分析讨论。

3.5.1 有阻尼的单摆运动





$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta - q\omega \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$

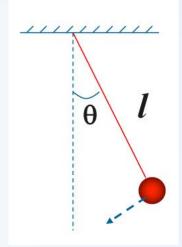
四阶龙格-库塔法:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) \cdot \Delta t$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(l1 + 2l2 + 2l3 + l4) \cdot \Delta t$$

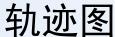
3.5.1 有阻尼的单摆运动

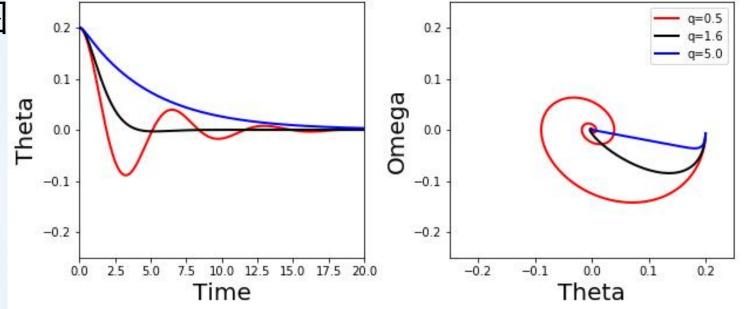
$$\begin{cases} k1 = -\frac{g}{l}\theta_{n} - q\omega_{n} \\ l1 = \omega_{n} \\ k2 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1/2} - q\omega_{n+1/2} = -\frac{g}{l}(\theta_{n} + l1 \cdot \Delta t/2.) - q(\omega_{n} + k1 \cdot \Delta t/2) \\ l2 = \omega_{n+1/2} = \omega_{n} + k1 \cdot \Delta t/2. \\ k3 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1/2} - q\omega_{n+1/2} = -\frac{g}{l}(\theta_{n} + l2 \cdot \Delta t/2.) - q(\omega_{n} + k2 \cdot \Delta t/2) \\ l3 = \omega_{n+1/2} = \omega_{n} + k2 \cdot \Delta t/2. \\ k4 = -\frac{g}{l}\theta_{n+1} - q\omega_{n+1} = -\frac{g}{l}(\theta_{n} + l3 \cdot \Delta t) - q(\omega_{n} + k3 \cdot \Delta t) \\ l4 = \omega_{n+1} = \omega_{n} + k3 \cdot \Delta t \end{cases}$$





3.5.1 有阻尼的单摆运动





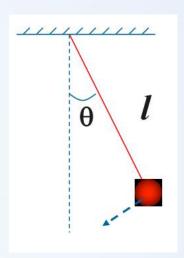
相空间轨迹图

- 在阻尼系数较小时(0.5,红线),单摆仍做简谐振动,但振幅随时间越来越小。大约2个振动周期后,振幅变为零,停止振动,对应的运动模式为欠阻尼振动。
- 在阻尼系数较大时,单摆缓慢地弛豫到平衡位置,并停止运动,对应的运动模式为过 阻尼振动。
- 在阳尼系数约为1.6时,单摆很快地恢复到平衡位置,对应的运动模式为临界阻尼振动。
- 由于阻尼的存在,单摆在相空间中的轨迹最后都收敛到一个不动点,即平衡位置。



3.5.2 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F\sin(Wt)$$
 F 为外力强度 w为外力频率



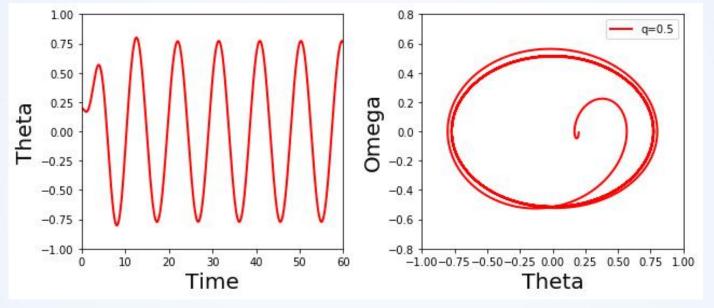
计算 k1,k2,k3,k4 的过程增加F·sin(Wt)项:

```
xk1=-(g/xl)*theta-q*omiga+F*np.sin(W*t)
xl1=omiga
xk2=-(g/xl)*(theta+dt/2.*xl1)-q*(omiga+dt/2.*xk1)+F*np.sin(W*(t+dt/2))
xl2=omiga+dt/2.*xk1
xk3=-(g/xl)*(theta+dt/2.*xl2)-q*(omiga+dt/2.*xk2)+F*np.sin(W*(t+dt/2))
xl3=omiga+dt/2.*xk2
xk4=-(g/xl)*(theta+dt*xl3)-q*(omiga+dt*xk3)+F*np.sin(W*(t+dt))
xl4=omiga+dt*xk3
```



3.5.2 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动)

轨迹图

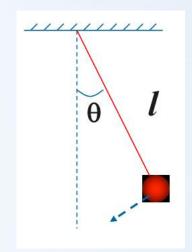


相空间轨迹图

- ◆在周期性外力驱动下,单摆的运动趋向于周期性简谐振动;
- ◆振动周期与驱动外力周期相等,而振幅依赖于多个因素,包括周期外力的强度、频率、阻尼系数以及单摆的固有频率等;
- ◆在相平面中,单摆的运动轨迹收敛到极限环,显示出典型的周期运动 特征。

3.5.3 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动,且允许大角度摆动)

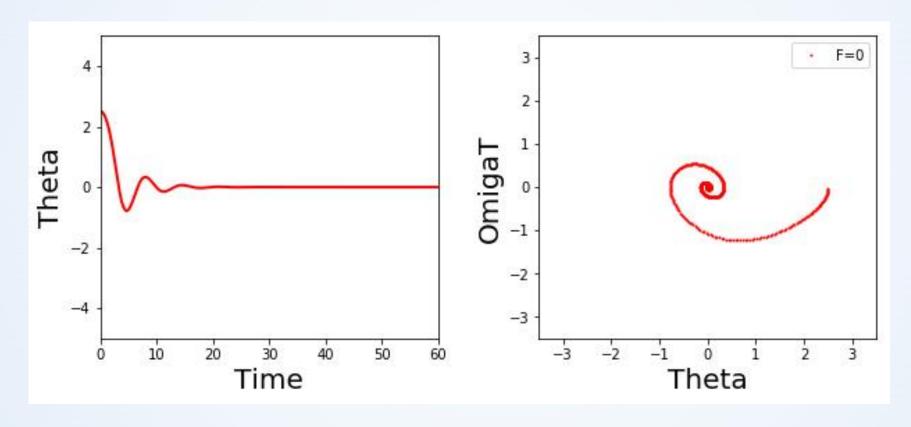
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F\sin(Wt)$$



为典型的非线性常微分方程,求解析解存在困难!

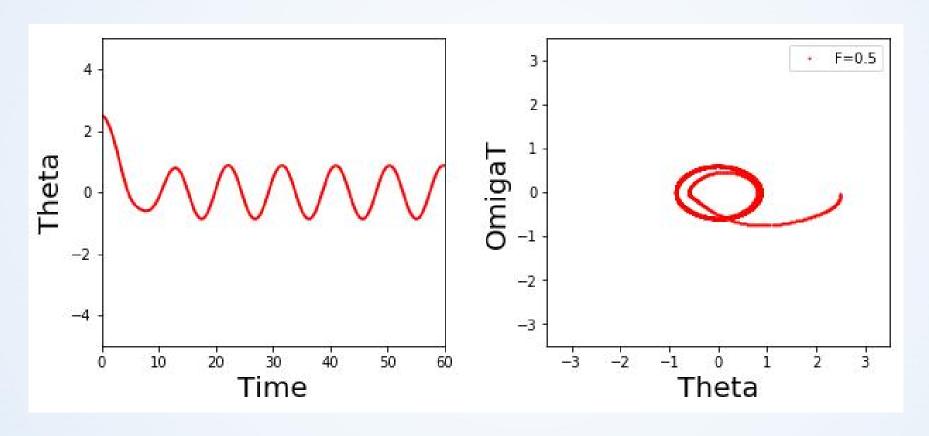
代码中的 θ 用 $sin(\theta)$ 代替

3.5.3 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动,且允许大角度摆动)



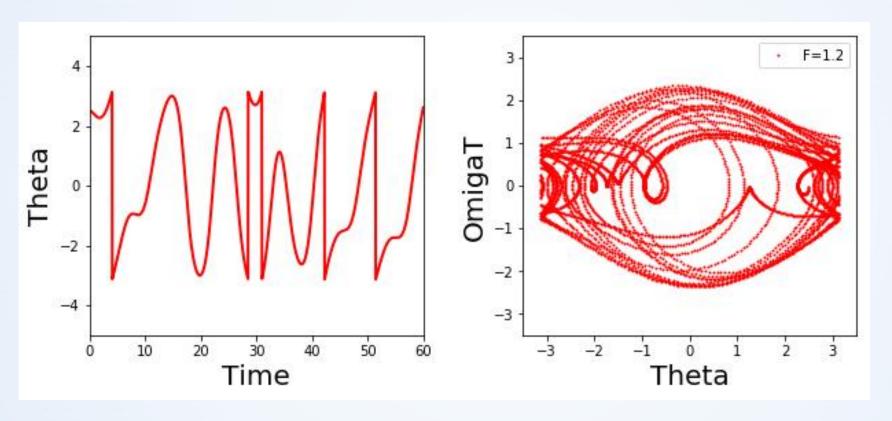
当外力强度为零时,表现为欠阻尼运动。

3.5.3 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动,且允许大角度摆动)



在外力比较弱时,表现为周期性受迫振动

3.5.3 单摆运动(阻尼+周期性外力驱动,且允许大角度摆动)



在外力强度为1.2 时,表现为非周期不规则运动,进入混沌运动区域。



3.5 混沌: 相图

单摆的角位移 θ 、角速度 $\dot{\theta}$ 与时间t的关系构成了一个三维空间。在 θ - $\dot{\theta}$ 平面上研究单摆的运动是相图研究法(法国数学家庞加莱 (Poincaré)) θ - $\dot{\theta}$ 平面叫作相平面。相平面上的一个点表示了系统在某一时刻状态(摆角与角速度)称为相点,而相点的连续变化形成的轨迹叫相轨线,它描述了系统的运动过程。

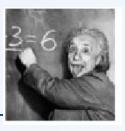
如果通过考查微分方程的系数及其本身的结构画出了相图中的 轨线,然后通过研究系统的相轨线了解了系统的动力学特性, 那么不解微分方程也可能了解系统的运动情况。通过相图分析 系统的运动是一种几何分析方法,所以也叫**几何动力学**。



3.5.4混沌



相对论



打破了牛顿的绝对时空观





混沌



混沌并不意味着无序,混沌中蕴含着有序,有序的过程中也可能出现混沌,混沌隐含着这样一个悖论,即一个局部的随机与整体模式中的稳定。



量子力学



揭示了微观粒子运动的随机和不确定性



3.5.4混沌



蝴蝶效应

1961年,气象学家Edward Lorenz建立了一个简化的气象模型,这个模型一共用了12个参数,用来表征基本的气象特征,诸如气压、温度等等。

从运行中段的某一时刻作为初始点来运行。 Lorenz发现,运行结果和之前的大相径庭,仅仅在一开始的很短时间内重复了上一次的结果,但是很快就偏离了,并且偏离得毫无规律,就好像这个结果是来自一个完全不同的程序。



对初始条件的极端敏感



3.5.4混沌



蝴蝶效应

在1973年,在第139届美国高等科学学会(American Association for the Advanced Science)会议上,他做了一个报告。会议的主持人给了这个报告一个很有诗意的名字,叫做"巴西某个蝴蝶闪动一下翅膀会引发德克萨斯的一场飓风吗?"。

蝴蝶的翅膀其实与德克萨斯的风暴没有任何直接的因果关系。这个类比真正的含义是说,如果我们想精确地预测两周后的一场风暴,我们现在所需要获知的的信息,必须要细致到每一个微小的变化,哪怕是像一个蝴蝶的翅膀这么细致。



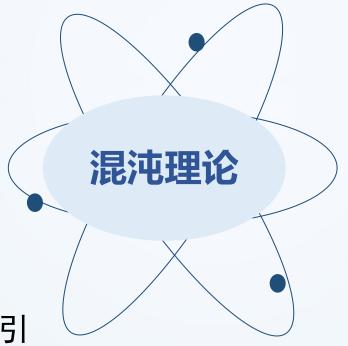


3.5.4混沌理论

混沌是非线性系统普遍存在的现象。对于混沌的研究理论已被用于处理包括湍流、复杂化学反应、股票市场、心律不齐、甚至生态系统等,取得了重要进展。



对初始条件 的敏感性





分形

系统在不同标度下具有自相似性质,分形具有两个普通特征:第一,它们自始至终都是不规则的;第二,在不同的尺度上,不规则程度却是一个常量。

奇异吸引子

使系统偏离收敛性吸引 子的区域而导向不同的 性态



第一、二步: 导入模块, 初始化, 给出了重力加速度常数和摆长的数值、设定时间步长、设置了初始角度和角速度

```
import numpy as np
import pylab as pl
t = 0.0
g = 9.8
x = 9.8
q = 0.5
F=1.2
W=2.0/3.0
dt = 0.04
theta=0.0
omiga=0.
```

n = 5000



第三步: 用龙格库塔方法求解

```
ThetaT0 = []
OmigaT0 = []
Time0 = []
for i in range(n):
  xk1=-(g/xI)*np.sin(theta)-q*omiga+F*np.sin(W*t)
  xl1=omiga
  xk2=-(g/xI)*np.sin(theta+dt/2.*xI1)-q*(omiga+dt/2.*xk1)+F*np.sin(W*t)
  x12=omiga+dt/2.*xk1
  xk3=-(g/xI)*np.sin(theta+dt/2.*xI2)-q*(omiga+dt/2.*xk2)+F*np.sin(W*t)
  xl3=omiga+dt/2.*xk2
  xk4=-(g/xI)*np.sin(theta+dt*xI3)-q*(omiga+dt*xk3)+F*np.sin(W*t)
  xl4=omiga+dt*xk3
```



第三步: 用龙格库塔方法求解

```
omiga=omiga+dt/6.*(xk1+2*xk2+2*xk3+xk4)
theta=theta+dt/6.*(xl1+2*xl2+2*xl3+xl4)
if(theta > 3.1415927):
  theta=theta-3.1415927*2.
if(theta < -3.1415927):
  theta=theta+3.1415927*2.
t=t+dt
ThetaT0.append(theta)
OmigaT0.append(omiga)
Time0.append(t)
```



hspace=0.35, wspace=0.3

第四步: 可视化

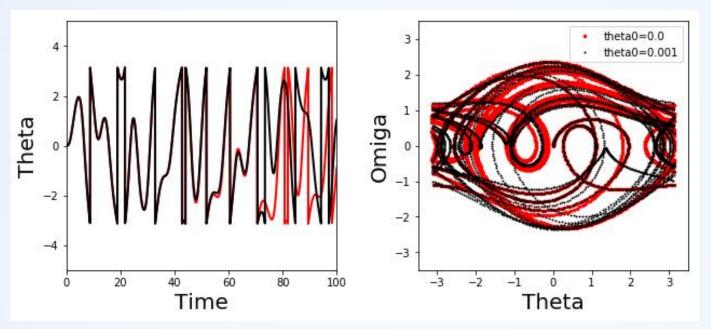
```
fig = pl.figure(figsize=(10,4))
ax1 = fig.add subplot(1,2,1)
ax2 = fig.add subplot(1,2,2)
ax1.plot(Time0, ThetaT0, 'r-', label='theta0=0.1', linewidth=2.0)
ax2.plot(ThetaT0, OmigaT0, 'r-', label='theta0=0.1',linewidth=2.0)
pl.subplots adjust(left=0.15,bottom=0.1,top=0.9,right=0.95, \
```



第四步: 可视化

```
ax1.set ylabel('Theta', fontsize=20)
ax1.set xlabel('Time', fontsize=20)
ax1.set xlim(0,100)
ax1.set ylim(-5.0,5.0)
ax2.set xlabel('Theta', fontsize=20)
ax2.set_ylabel('Omega', fontsize=20)
ax2.set xlim(-3.5, 3.5)
ax2.set ylim(-3.5, 3.5)
pl.legend(loc='upper right')
#将从第二步开始复制,修改theta,和线的颜色
pl.show()
```





- 在短时间尺度内(Time<40),初始条件相近的两条轨迹重叠度很高,几乎用肉眼区分不出明显差别。
- 在长时间尺度时(Time>60), 两条轨迹逐渐分开,差别越来越大,表现出对初值的敏感性。



3.5 混沌: 庞加莱截面

●描述混沌运动相平面轨迹 的一个重要工具是庞加莱 截面,即按驱动外力的周 期记录相平面中的轨迹, 每个周期记录一次相平面 位置,所画出的轨迹即为 庞加莱截面。

只有一个不动点和 少数离散点

周期性运动

准周期运动

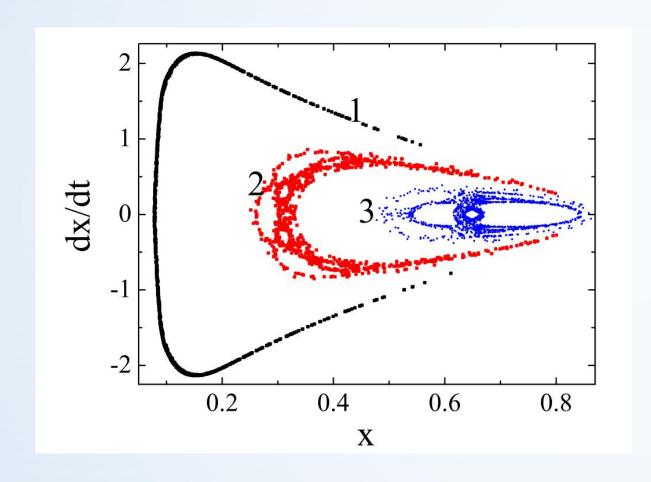


呈现出具有层次结 构的密集点

混沌状态



3.5 混沌: 庞加莱截面



只有一个不动点和 少数离散点

周期性运动

准周期运动



呈现出具有层次结 构的密集点

混沌状态



3.5 混沌: 分形

发现: 非线性耗散系统在外力强度逐渐增加时, 其运动轨迹由规则运动变为混沌运动。

启示: 系统如何随控制参量的变化由规则运动进入混沌运动。

思考:可以在不同的外力强度下观察系统运动轨迹特征。在编程上如何实现?



3.5 混沌: 分形

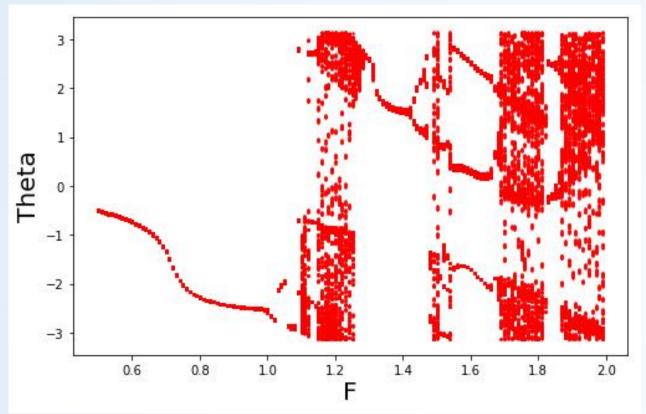
实现:

在 0.5 到 2.0 的外力强度区间内,以 0.01的间隔增加外力强度,在不同的外力强度下计算运动轨迹,并每隔一个外力周期记录一次θ角的位置。

- ◆ 如果运动轨迹具有固定的周期,则每一个外力周期记录得 到的θ角的位置是重叠的,表现为一个点。
- ◆ 如果运动轨迹是无规则的(或具有无限长周期),则每一个 外力周期记录得到的θ角的位置呈条带状。



3.5 混沌: 分形



单摆的运动通过**倍周期分岔**的 途径由周期性运动过渡到混沌 运动。 而在 1.0<F<1.08 范围: 角度θ在不同的外力周期出现在 两个固定的位置,表现为两周 期运动。

在1.08<F<1.1 范围,运动轨迹 由两周期变为四周期、八周期 等,最后到达混沌运动区间。



课后练习

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

- 1. 当 σ =10; b=8/3; r=25时,画出z-x平面中的轨迹;
- 2. 当 $\sigma=10$; b=8/3时,改变r值,计算z-x平面中的轨迹;

补充: 1、控制参量, 画出周期、混沌状态下的庞加莱截面

2、找出由规则运动进入混沌运动的临界参量r



二阶常微分方程

$$y''=f(x,y,y'),a\leq x\leq b$$

的边值问题有以下三类边值条件:

第一类边值条件: $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$

第二类边值条件: $y'(a)=\alpha$, $y'(b)=\beta$ 。

第三类边值条件: $y'(a)-\alpha_o y(a)=\alpha_I$, $y'(b)+\beta_o y(b)=\beta_I$ 。

微分方程附加上第一、第二、第三类边值条件,分别称为第一、第二、第三类边值问题。



边值问题通常是在两个边界上各有一个边界条件,如果在同一个边界上有两个边界条件,就可以把问题作为初值问题来解。

把边值问题化为初值问题的基本做法是,在任一边界上补充一个猜测的边界条件,按照初值问题来解方程,所得的解通常不会满足另一端的边界条件,需要改变猜测的边界条件或者对所得的解加以某些修正,重新解方程,直到找出解为止。



本征值问题就是方程中含有参数的边值问题,只有当参数取某些特定值,这个方程才有解。

打靶法解本征值问题的做法是:先尝试一个本征值,然后将微分方程 作为初值问题求解。如果所得的解不满足边界条件,就改变尝试本征值, 再解方程,重复这个过程,直到能找到一个本征值,在这个本征值下生 成的解和边界条件的误差小于预定的容许误差。



用打靶法解弦振动方程。

考虑一根两端固定的密度均匀的绷紧的弦,描述它的微小振动的方程 经过分离变量以后的本征值方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2 \varphi; \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

这里0 < x < 1是沿着弦的标度化后的坐标, φ 是弦的横向位移, k是本征值。由 数学物理方法的知识可知,它的解析解是

$$k_n = n\pi \ n = 1,2,...$$

$$\varphi_n \sim \sin n \pi x$$



具体的解法是:由小到大选取一个试验的k值,从x=0出发向前积分,初始条件为

$$\varphi(0)=0.\varphi'(0)=t$$

数t是任意选取的,因为要解的问题是齐次的,并且对解如何归一化并没有规定。在积到x=1时,一般将得到一个不为零的 φ 值,因为试验本征值并不是一个真正的本征值,于是需要重新调整k并且再度积分,重复这个过程,直到在规定的容许误差限内找到 $\varphi(1)=0$ 为止。这样就找到了一个本征值和对应的本征函数。

求使 $\varphi(1)$ 为零的k值问题就是以前讨论过的求根的问题。可以用对分法来做。为了提高效率,可以在用对分法确定了一个本征值的近似位置之后,再用弦割法来确定更精确的本征值。P248



通常把与外界有能量和物质交换的开放和远离平衡态的系统称之为 耗散系统,反之则是保守系统。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt}$$
 阻尼项

有阻尼的单摆是一个耗散系统。

保守系统在相空间中的体积是守恒的,它只会随时间改变形状而不 会改变大小。



但耗散系统与此不同,如果跟随相空间中一个小体积中△V 中所有点的演化轨迹时,△V 的体积会随着时间增大而缩小,最后这些点的轨迹会聚到一个低维的空间集即所谓的吸引子。初始条件不同,耗散系统可以演化到不同的吸引子。所有落到同一个吸引子上的出发点的集合称为吸引域。保守系统由于相体积守恒而不具有吸引子的吸引域。



吸引子的维数一般要比原始相空间低,这是由于耗散过程中,消耗了大量小尺度的运动模式,因而使得确定性系统长时间行为的有效自由度减少。

如果系统最终剩下一个周期运动,则称该系统具有极限环吸引子。二维以上的吸引子,表现为相空间相应维数的环面。只有耗散系统中的混沌才会产生奇异吸引子。



一般画出相轨线可以大致了解系统的运动状况,相图分析更重要的作用是可以分析解的稳定性以及稳定性发生变化的方式。例如一维的运动方程

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + cx = 0$$

可写成一阶的常微分方程组 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma \dot{x} - cx \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma \dot{x} - cx \end{cases} \tag{*0}$$

两式相除得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\gamma \dot{x} - cx}{y}$$

这是相轨线方程,当 dy/dx 为已知时,可用它画相轨线。当立 \dot{x} =0, \dot{y} =0 时,相点的运动速度为零,这样的点叫不动点,也叫奇点,它就是系统的平衡点。



设 x_0,y_0 是方程组的一个解(对不动点就是 $x_0=0,y_0=0$), 给它加上一个微扰 $\delta x,\delta y$,再代入原方程组得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + \delta x) = y + \delta y\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + \delta y) = -\gamma(y + \delta y) - c(x_0 + \delta x) \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

按照雅可比矩阵J的定义,对于方程组

有

$$egin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,x_2) \ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) \end{aligned} \ J = egin{pmatrix} rac{\partial f_1}{\partial x_1} & rac{\partial f_1}{\partial x_2} \ rac{\partial f_2}{\partial x_1} & rac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

所以系数矩阵(*1)就是方程组(*0)的雅可比矩阵 J,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\gamma \end{pmatrix}$$
 它的本征方程是
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0$$
 即 $\lambda^2 + \gamma \lambda + c = 0$



本征值为 $\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4c}}{2}$ 按照下式可以求出两个特征向量

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

如果能找出两个线性无关的特征向量,可以由它们组成变换矩阵V,使得

$$J = VAV^{-1}$$

引入线性变换

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



将它们代入方程组(*1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

从中可解出 u_1,u_2 都是指数函数,写成 $\exp(\lambda_1,t),\exp(\lambda_2,t)$,,根据线性变换,方程组(*1)的解的一般形式是 u_1,u_2 的线性叠加

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \exp(\lambda_1, t) + a_2 \exp(\lambda_2, t) \\ a_3 \exp(\lambda_1, t) + a_4 \exp(\lambda_2, t) \end{pmatrix}$$

指数函数的形式一般为e^{μ+iσ}, 即指数有实部与虚部.



指数函数的形式一般为e^{μ+iσ}, 即指数有实部与虚部, 可分以下几种情况:

如果 $\mu=0$,本征值是纯虚数,运动是振荡型的;

如果 $\sigma=0$,本征值是实数,运动将单调衰减或增大;

如果 $\mu\neq 0$, $\sigma\neq 0$ 则运动同时有增减和振荡两种运动。

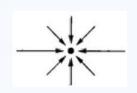
μ=0对应的不动点叫椭圆型不动点,其余的叫双曲型不动点。



按照局域的性质,不动点分类如下:

当 γ^2 -4c≥0 时, λ_1 , λ_2 是一对实数,此时不动点分为:

(1) λ_1 <0, λ_2 <0, 解是随 t单调衰减的,轨线将流向不动点,如图所示,在不动点周围所有方向都是局域稳定的,不动点为稳定结点



(2) λ₁>0, λ₂>0, 解是随 *t*单调增大的, 轨线从不动点流出, 如图所示, 所以在不动点周围所有方向都是局域不稳定的, 不动点为不稳定结点;

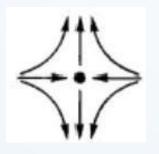




按照局域的性质,不动点分类如下:

当 γ^2 -4c≥0 时, λ_1 , λ_2 是一对实数, 此时不动点分为:

(3) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ 或 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, 不动点附近有一个不稳定方向,如 图所示,不动点为鞍点。





当 γ ²-4c<0 时, λ₁, λ₂是一对共轭复数,特征值具有虚部意味 着解有三角函数的部分,这使得轨线发生旋转,而特征值的实部 γ 则 会影响轨线运动的方向。不动点是根据实部分类:

- (1) γ < 0时不动点为稳定焦点, 轨线在旋转的同时也向不动点收缩;
- (2) γ >0时不动点为不稳定焦点, 轨线在旋转的同时还会从不动点向外逃逸;
 - (3) γ=0时不动点为中心点, 轨线围绕不动点形成闭合曲线.







例如,对于无阻尼无驱动的单摆, 不动点有3个: $\theta=0,-\pi,+\pi;\theta=0,0,0,$

雅可比矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

它的本征方程和本征值是

$$\lambda^2 + \cos\theta = 0, \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\cos\theta}$$

可见, $\theta=0,b=0$ 是中心点,也是椭圆型不动点即相图中的O点。

 $\theta=-\pi,+\pi;\theta=0,0$,都是鞍点,即相图中的G,G'点,也是双曲型不动点。



洛伦茨吸引子最先是由美国MIT大学的数学家与气象学家洛伦茨 (Edward Lorenz) 在1963年提出的,他的主要研究方向用地球大气的液体流动模型作长期天气预报。

洛伦茨方程是由纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组化简而来。纳维-斯 托克斯方程组是牛顿定律在流体力学中一种表述方式,其中含有速度、温度、密 度等物理量,它们都是时间与位置的函数,在实际问题中,它是很难用解析方法求解的,所以它很适合用计算机作数值解。在近50年前洛伦茨研究这个问 题时,受计算机计算能力的限制,他将纳维-斯托克斯方程大大简化,成为如下

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$



$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

洛伦茨方程中 x 是对流的强度 , y 是向上流动和向下流动的液体单位元之间的温度差, z 是垂直方向的温度梯度。式中有三个参数, σ 是普兰特 (Prandtl) 数 、r 是规范化瑞利 (Rayleigh) 数 , b 是描述区域几何形状的参数。三个参数可任取大于0的数值。常用的组合是, σ =10, b=8/3, 而令r 取不同数值。如r=28 时就会出现混沌现象,有奇异吸引子出现.

洛伦茨系统的相空间随时间的变化率为

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) \quad (\sigma > 0, b > 1)$$

可见洛伦茨系统为耗散系统,对上式积分得

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+b+1)}$$

可见,系统的相体积元是以指数收缩,这是耗散系统。

洛伦茨系统的相空间随时间的变化率为

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) \quad (\sigma > 0, b > 1)$$

可见洛伦茨系统为耗散系统,对上式积分得

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+b+1)}$$

可见,系统的相体积元是以指数收缩,这是耗散系统。



洛伦兹系统的不动点与稳定性:

令
$$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$$
 得
$$\begin{cases} x=y\\ rx-y-xz=0\\ xy-bz=0 \end{cases}$$

将其中的第一式代入后二式,得 $\begin{cases} x=y \\ x(r-1-z)=0 \\ x^2=bz \end{cases}$

$$\begin{cases} x = y \\ x(r - 1 - z) = 0 \\ x^2 = bz \end{cases}$$

当0<r<1 时,只有一个不动点O(x=0,y=0,z=0);当r>1 时,有三个不动点:

$$\begin{cases} O(x = 0, y = 0, z = 0) \\ C_1(x = y = \sqrt{b(r-1)}, z = r-1) \\ C_2(x = y = -\sqrt{b(r-1)}, z = r-1) \end{cases}$$



O点的雅可比矩阵为

$$\left(egin{array}{cccc} -\sigma & \sigma & 0 \ r & -1 & 0 \ 0 & 0 & -b \end{array}
ight)$$

相应的本征方程为 $(b+\lambda)[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)]=0$ 解出本征值为 $\lambda_1=-b$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} [-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}]$$

所以,

当0 $\langle r\langle 1, \lambda_{1,2,3}$ 均为负实数,故0点为稳定结点。 当 $r>1,\lambda_1$ 仍为负实数,但 λ_{23} 为一正一负,故O点为不稳定结点。 当r=1,三个根之中必有一个为零,O点处于临界状态,也就是有一个根沿实轴穿过虚轴发生一次叉型分岔。

在不动点C 雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0\\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)}\\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

本征方程都是

$$\lambda^{3} + (\sigma + b + 1)X^{2} + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

按照实系数一元三次方程的解法,令 $\lambda = y - (\sigma + b + 1)/3$ 将方程化成

$$y^3 + [b(\sigma+r) - (\sigma+b+1)^2/3]y + 2(\sigma+b+1)^3/27 - b(\sigma+r)(\sigma+b+1)/3 + 2\sigma b(r-1) = 0$$

对形式为y³+py+q=0 的方程, 其判别式为△=q²/4+p³/27:

当△>0时,有一个实根和一对共轭复根;

当△=0时,有三个实根,一个是-2 $\sqrt[3]{q/2}$,另两个相等,都是 $\sqrt[3]{q/2}$;

当△<0时,有三个不同的实根。

由此可知 \triangle =0是分界,将 σ =10,b=8/3 代入得到

p=8r/3-961/27, q=10402/729+1112r/27

 $\triangle = -393440/243 + 487840/729r + 865904/2187r^2 + 512/729r^3$

解得 \triangle =0的一个实根为 r_0 =1.345617179232956318036708773708。

还可求出 $\lambda_1 = -11.0880$, $\lambda_{2,3} = -1.2894$ 。



因而r=r₀ 时 , C₁,C₂ 都是稳定结点。

当 $r<r_0$ 时,有 $\triangle<0$,同时可求出三个实根 λ 12. 3均为负实根,所以 C_1 , C_2 也是稳定结点。

对于r>ro,实根仍为负实数,另外两个是实部为负的共轭复数,C₁,C₂成为稳定焦点,设共轭复根为

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2$$
, $\overline{\beta} = \beta_1 - i\beta_2$

本征方程可写为

$$(\lambda - a)(\lambda - \beta)(\lambda - \overline{\beta}) = 0$$



本征方程可写为

$$\lambda^{3} - (2\beta_{1} + a)X^{2} + (|\beta|^{2} + 2\beta_{1}a)\lambda - |\beta|^{2}a = 0$$

如果 \mathbf{r} 继续增大到 \mathbf{r}_c , 使得实部 β_I =0, 则共轭复根将穿过虚轴,发生霍普夫分岔。下面求分岔点对应的 \mathbf{r}_c 。

$$\beta_1=0$$
代入上式得 $\lambda^3-\alpha\lambda^2+\beta_2^2\lambda-\beta_2^2\alpha=0$

与原本征方程比较:

$$(\sigma+b+1)(\sigma+r)b=2\sigma b(r-1)$$

取 o=10, b=8/3 解出

$$r_c = 24.74$$



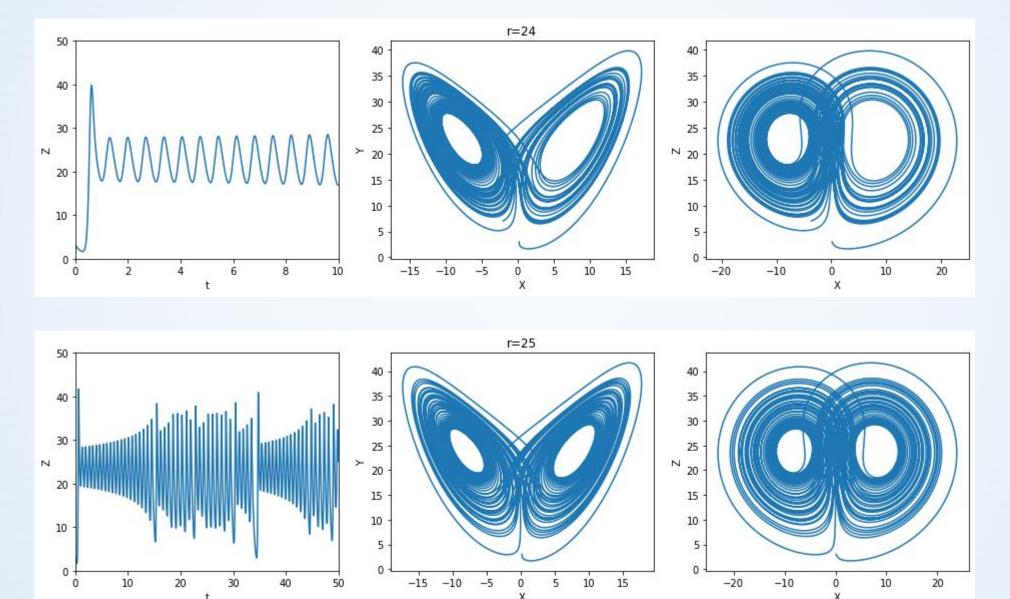
- (1)O ≤ r < 1,平衡态 O 是稳定的结点。
- (2)1 < r < ro = 1.346, O 点失稳变成鞍点, C_1, C_2 点是新生出来的稳定结点。
- (3) ro<r<13. 92656, 0点依然是鞍点, 但C1,C2 点变成了稳定焦点。
- (4) r=13. 92656, 是C₁,C₂ 从稳定焦点变成不稳定极限环的分界值。
- (5) 13. 92656 $\langle r \langle r_c = 24.74, \text{这时C}_1, \text{C}_2$ 形成两个不稳定的极限环。
- $(6)r_c < r$ 时, C_1, C_2 成为了鞍-焦点,系统出现了复杂的分岔序列。在某些 r 范围出现了奇怪吸引子,也就是混沌运动。在某些 r 范围又会出 现

周期解,如在145~148,210~234,1000等值都会出现极限环。



洛伦茨系统具有另一种通向混 沌的机制,就是经过阵发达到混沌。 阵发原是湍流理论中用来描述流场中在层 流的背景上湍流随机爆发 的现象, 表现为层流、湍流相交而使相应空间域随机 的交替。在混 沌理论中主要是借助于阵发这个概念来表示时间域中不规则行为 和 规则行为随机交替发生的现象。也就是说,当系统从有序向混沌转化 时,在非 平衡非线性的条件下,当某些参数的变化达到临界值时, 系统的行为忽而周期, 忽而混沌, 在两者之间交替。当有关参数继 续变化时,整个系统会由阵发混沌发展成混沌。







勤动手,多思考!

苏湘宁

邮箱: suxn@hainanu.edu.cn

