数学分析助教记

刘宇扬

November 2, 2019

初衷

个人认为在做完习题后，参考习题答案的同时参考一些错误解法更有助于学习。

目前在做数学分析课的助教，因此收录到了一些课后作业的经典习题和相应的错误解答。

由于读书期间时间有限，只挑选了每次改作业时绝大多数同学做错的少量习题，提供个人认为较有学习意义的解法，并在部分题目后附上一些常见的错误解答。

所依托的教材为高等教育出版社出版、上海交通大学数学系数学分析课题组编写的《数学分析》。

另外，目前Latex使用尚不熟练，若有笔误，恳请读者告知。希望对学习数学分析的同学们有所帮助。并在此感谢大学同窗好友韩俣谈的平台支持。

1 集合与函数

1.1

题目 A、B为两个非空非负数集，记$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$

求证：$inf(AB) = inf(A) \cdot inf(B), sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$

证明 只证明前者，后者同理。

$inf(AB) \geq inf(A) \cdot inf(B)$易得

下面证明反向不等式

$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in A$

记$B_a = \{ab : b \in B\}$

由于a的非负性易得$inf(B_a) = a \cdot inf(B)$

$\exists b(\varepsilon, a) \in B, ab(\varepsilon, a) < a \cdot inf(B) + \varepsilon$

又由于$ab(\varepsilon, a) \geq inf(AB)$

也就是$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in A, inf(AB) < a \cdot inf(B) + \varepsilon$

即$\forall a, a \cdot inf(B) \geq inf(AB)$

若$inf(B) = \infty$，显然。

若$inf(B) = 0$ ，显然。

若$inf(B) = c$ ，c是某个大于0的常数。

则$\forall a \in A, a \geq \frac{inf(AB)}{inf(B)}$

从而$inf(A) \geq \frac{inf(AB)}{inf(B)}$，得证。

错解1 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, sup(A) - a_0 < \widetilde{\varepsilon}, sup(B) - b_0 < \widetilde{\varepsilon}$，其中，$\widetilde{\varepsilon}$为$x^2 + (a_0 + b_0)x = \varepsilon$的正解。因此，$sup(A) \cdot sup(B) - a_0 \cdot b_0 < (a_0 + \widetilde{\varepsilon})(b_0 + \widetilde{\varepsilon}) - a_0 \cdot b_0 = \varepsilon$，即$sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$

错解2 当A与B均有上界时，记为sup(A)与sup(B)

一方面，$\forall ab \in AB, a \in A, b \in B$，有$a \leq sup(A), b \leq sup(B)$，进而$ab \leq sup(A) \cdot sup(B)$

另一方面，根据上确界定义

$\forall a_0 < sup(A), \exists a > a_0$，$\forall b_0 < sup(B), \exists b > b_0$

因此，$\forall a_0b_0 \in AB, a_0b_0 < sup(A) \cdot sup(B), \exists ab > a_0b_0$，即$sup(A) \cdot sup(B)$是AB的上确界。

错解3 一方面，$\forall ab \in AB, a \in A, b \in B$，有$a \leq sup(A), b \leq sup(B)$，进而$ab \leq sup(A) \cdot sup(B)$

另一方面，$\forall \varepsilon > 0, \exists a > sup(A) - \varepsilon, b > sup(B) - \varepsilon : ab > sup(A) \cdot sup(B) - \varepsilon \cdot (sup(A) + sup(B)) + \varepsilon^2$，当$\varepsilon \to 0, \varepsilon \cdot (sup(A) + sup(B)) - \varepsilon^2 \to 0$，即$sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$

1.2

题目 A，B为两个非空数集，$\exists c > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, |a-b| < c$，证明：$|sup(A)-sup(B)| \leq c, |sup(A)-inf(B)| \leq c$

小技巧 对于一个固定的实数m以及某集合A，若$\forall a \in A, a \leq m$

则$sup(A) \leq m, inf(A) \leq m$

若$\forall a \in A, a \geq m$

则$sup(A) \geq m, inf(A) \geq m$

证明 $\forall a \in A, b \in B, b-c < a < b+c$

从而$\forall b \in B, b-c < sup(A) \leq b+c \quad (1)$

进而$sup(B)-c \leq sup(A) \leq sup(B)+c$

即$|sup(A)-sup(B)| \leq c$

再由(1)得$inf(B)-c \leq sup(A) \leq inf(B)+c$

即$|sup(A)-inf(B)| \leq c$

评注 本题目中，由于大部分同学做法繁琐，上述证法有一定的学习价值。

2 极限与连续

2.1

题目 $\forall a \in \mathbf{R}, lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

证明 若a $= 0$，显然。

若a $\neq 0$

取$k = [|a|]+1$

$|\frac{a^n}{n!} - 0| = \frac{|a|\cdot|a|\cdot\ldots\cdot|a|\cdot\ldots\cdot|a|}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot\ldots\cdot n} \leq \beta \cdot \frac{|a|}{n}$

其中，$\beta = \frac{|a|^k}{k!}$

那么，$\forall \varepsilon > 0, \exists N = max\{k, \frac{\beta|a|}{\varepsilon}\}, |\frac{a^n}{n!} - 0| \leq \beta \cdot \frac{|a|}{n} < \varepsilon$

2.2

题目 $lim_{n\to\infty}x_n = a \Rightarrow lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$

证明 不妨设$a > 0$

$\exists N_1, \forall n > N_1, x_n > 0$

此时有$|x_n^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}| = \frac{|x_n-a|}{x_n^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x_n^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}} < \frac{|x_n-a|}{a^{\frac{2}{3}}}$

$\forall\varepsilon, \exists N_2, \forall n > N_2, |x_n - a| < a^{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon$

从而取$N_3 = max\{N_1, N_2\}, \forall n > N_3, |x_n^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}| < \frac{|x_n-a|}{a^{\frac{2}{3}}} < \varepsilon$

2.3

题目 $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot...\cdot2n}} = 1$

证明 $\frac{1\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot...\cdot2n} = \frac{\sqrt{(1\cdot3)}}{2}\cdot\frac{\sqrt{(3\cdot5)}}{4}\cdot...\cdot\frac{\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$\frac{1\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot...\cdot2n} = \frac{3}{\sqrt{(2\cdot4)}}\cdot\frac{5}{\sqrt{(4\cdot6)}}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{((2n-2)\cdot2n)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

再由结论：$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$与$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$

结合夹逼准则即可得证。

错解 原式$= lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\cdot...\cdot\sqrt[n]{\frac{(2n-1)}{2n}} = 1\cdot1\cdot...\cdot1 = 1$

2.4

题目 记$a_n = 1 + \frac{sinx}{1^2} + ... + \frac{sinnx}{n^2}$，证明$a_n$收敛。

证明 $|a_{(n+p)} - a_n| = |\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2} + ... + \frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1, \forall n > N, \forall p \in N^*, |a_{(n+p)} - a_n| < \varepsilon$

由实数空间的完备性知$\{a_n\}$收敛。

错解1 $|a_{(n+p)} - a_n| = |\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2} + ... + \frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \leq x(\frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+1}) < \frac{xp}{n}$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N = [\frac{xp}{\varepsilon}] + 1, \forall n > N, \forall p \in N^*, |a_{(n+p)} - a_n| < \varepsilon$

错解2 由$\{\frac{1}{n^2}\}$的收敛性:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, \forall p \in N^*, \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{p}$

$|a_{(n+p)} - a_n| = |\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2} + ... + \frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{p}{n^2} < \varepsilon$

2.5

题目 $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$

证明 $\forall x > 1: \frac{[x]}{[x]+1}\cdot\frac{ln[x]}{[x]} < \frac{lnx}{x} < \frac{[x]+1}{[x]}\cdot\frac{ln[x]+1}{[x]+1}$

由Stolz定理，$\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n} = 0$

再有复合函数极限以及夹逼定理即可得证。

错解 由Heine定理，$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n} = 0$

2.6

题目 确定常数a,b使下列等式成立

$lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0$

参考解法 $lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0$

$0 = lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - a - \frac{b}{x}) = 1 - a \Rightarrow a = 1$

$0 = lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - x - b) = lim_{x\to+\infty}(\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x} - b) = -\frac{1}{2} - b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

错解1 $0 = lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x+(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}$

$\Rightarrow 1 - a^2 = 0, 2ab + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{2}$ 或$a = -1, b = \frac{1}{2}$

错解2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1} = \lim_{x\to+\infty}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1} - x + \frac{1}{2} = 0$

2.7

题目 设f在x_0的某邻域$U(x_0)$有界，令

$m(\delta) = inf(f(U(x_0,\delta))), M(\delta) = sup(f(U(x_0,\delta)))$

$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to0^+}(M(\delta)-m(\delta))$

证明：若f在x_0连续，则$\omega(f,x_0)=0$

证法1 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in U(x_0,\eta):f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

从而$f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\le m(\eta)\le M(\eta)\le f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

进而$\forall\delta\in(0,\eta):0\le M(\delta)-m(\delta)\le M(\eta)-m(\eta)\le\varepsilon$

即$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to0^+}(M(\delta)-m(\delta))=0$

证法2 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

由Cauchy准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

从而$M(\eta)-m(\eta)=sup_{x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta)}|f(x^{'})-f(x^{''})|\le\varepsilon$

进而$\forall\delta\in(0,\eta):0\le M(\delta)-m(\delta)\le M(\eta)-m(\eta)\le\varepsilon$

即$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to0^+}(M(\delta)-m(\delta))=0$

错解 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

由Cauchy准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

从而$M(\eta)-m(\eta)=sup_{x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta)}|f(x^{'})-f(x^{''})|\le\varepsilon$

令$\eta\to0^+$，即得$\omega(f,x_0)=0$

2.8

题目 设$f\in C[a,+\infty),\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在，证明$f\in U.C[a,+\infty)$

证明 由$\lim_{x\to+\infty}f(x)$以及Cauchy收敛准则

$\forall\varepsilon>0,\exists b>a,\forall x^{'},x^{''}\in(b,+\infty):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

又$f\in U.C[a,b+1]$

$\exists\delta\in(0,1),\forall x^{'},x^{''}\in[a,b+1],|x^{'}-x^{''}|<\delta:|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

注意到$\delta<1$，从而$\forall x^{'},x^{''}\in[a,+\infty)$，当$|x^{'}-x^{''}|<\delta$，$x^{'},x^{''}$必同时属于$[a,b+1]$或同时属于$[b,+\infty]$

从而$|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

即$f\in U.C[a,+\infty)$

错解 由$\lim_{x\to+\infty}f(x)$以及Cauchy收敛准则

$\forall\varepsilon>0,\exists b>a,\forall x^{'},x^{''}\in(b,+\infty):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

所以$f\in U.C[b,+\infty]$

又$f\in U.C[a,b]$

从而$f\in U.C[a,+\infty)$

3 实数的基本定理

3.1

题目 用闭区间套定理证明单调有界定理

证明 任取单调增有上界的数列$\{x_n\}$，记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0=x_1<b_0$

将区间$[a_0,b_0]$等分为$[a_0,\frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]\cap\{x_n\}\neq\varnothing$，则记$a_1=\frac{(a_0+b_0)}{2},b_1=b_0$；

否则记$a_1=a_0,b_1=\frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得闭区间套$\{[a_n.b_n],n=1,2,...\}$

其中，由$[a_n,b_n]$的递推方法知:

$\forall m,b_m$为$\{x_n\}$的一个上界

$\forall m,\exists N_m,x_{N_m}\in[a_m,b_m]$

由闭区间套定理知，

$\exists t,lim_{n\to\infty}b_n=lim_{n\to\infty}a_n=t$

$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2\in N^*,\forall n\geq N_1,-\varepsilon<b_n-t<\varepsilon,\forall n\geq N_2,-\varepsilon<a_n-t<\varepsilon$

那么，$\forall\varepsilon,\exists N_3=max(N_1,N_2),\exists N_4,x_{N_4}\in[a_{N_3},b_{N_3}]$

此时，$\forall\varepsilon,\forall n>N_4,t-\varepsilon<a_{N_3}\leq x_{N_4}\leq x_n\leq b_{N_3}<t+\varepsilon$

即$lim_{n\to\infty}x_n=t$

错解 任取单调增有上界的数列$\{x_n\}$，记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0 = x_1 < b_0$

将区间$[a_0, b_0]$等分为$[a_0, \frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2}, b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2}, b_0]$中存在$\{x_n\}$的无穷多项，则记$a_1 = \frac{(a_0+b_0)}{2}, b_1 = b_0$；

否则记$a_1 = a_0, b_1 = \frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得闭区间套$\{[a_n.b_n], n = 1, 2, ...\}$

其中，由$[a_n, b_n]$的递推方法知:

$\forall m, [a_m, b_m]$中存在$\{x_n\}$的无穷多项

由闭区间套定理知，

$\exists t, lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty} a_n = t$

由于$a_n \le x_n \le b_n$，即得$lim_{n\to\infty} x_n = t$

3.2

题目 用单调有界定理证明确界原理

证明 任取非空有界集合A，这里只证上确界的存在性

记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0 \in A < b_0$

将区间$[a_0, b_0]$等分为$[a_0, \frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2}, b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2}, b_0] \cap A \neq \emptyset$，则记$a_1 = \frac{(a_0+b_0)}{2}, b_1 = b_0$；

否则记$a_1 = a_0, b_1 = \frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得一族区间$\{[a_n.b_n], n = 1, 2, ...\}$

其中，由$[a_n, b_n]$的递推方法知:

$\forall m, b_m$为A的一个上界

$\forall m, \exists d \in A, d \in [a_m, b_m]$

$\{a_n\}$为一个单调增的数列，$\{b_n\}$为一个单调减的数列

$lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

再由单调有界定理知，

$\exists t, lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty} a_n = t$

并且，$t = sup(a_n) = inf(b_n)$

这里，t为A的一个上界

事实上，$\forall a^* \in A, \forall m \in N^*, a^* \leq b_m$

也就是，$\forall a^* \in A, a^*$ 为$\{b_m\}$的一个下界，再由$t = inf(b_n)$

$\forall a^* \in A, a^* \leq t$

即t为A的一个上界

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, a_N > sup(a_n) - \varepsilon = t - \varepsilon$

对于$N, \exists d_0 \in A, d_0 \in [a_N, b_N]$

也就是，$\forall \varepsilon > 0, \exists d_0 \in A, d_0 > t - \varepsilon$，t是A的上确界

错解 **任**取非空有界集合A，这里只证明上确界的存在性

若A中元素有限，则确界原理显然

若A中元素有无穷多，则将A中的元素从小到大排成一个数列$\{a_n\}$

显然$\{a_n\}$有界

由单调有界定理，$\{a_n\}$存在极限t，而且t是$\{a_n\}$的上确界

因此A存在上确界t

3.3

题目 **用**确界原理证明致密性定理

证明 **设**$\{a_n\}$为一个有界数列

$\exists M > 0, \forall n \in N^*, |a_n| \leq M$

令$E = \{t | \{a_n\}$ 中至多有限项落在$(-\infty, t)$ $\}$

容易证明M是E的上界

事实上，当$t > M$时，$\forall n \in N^*, |a_n| \leq M < t$，即$t \notin E$

也就是$\forall t \in E, t \leq M$

根据确界原理，E有上确界sup(E)

从而，$\forall \varepsilon$, $\{a_n\}$ 中至多有限项落在$(-\infty, sup(E) - \varepsilon)$

而，$\{a_n\}$ 中无限项落在$(-\infty, sup(E) + \varepsilon)$

也就是，$\forall \varepsilon$, $\{a_n\}$ 中无限项落在$[sup(E) - \varepsilon), sup(E) + \varepsilon))$

即存在$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$，$lim_{k \to \infty} a_{n_k} = sup(E)$

错解 根据确界原理，非空上有界数集必有上确界

非空上有界数列必存在上确界，那么必存在一个子列趋向于这个上确界

反例 $a_1 = 100; a_n = sin(n), n \geq 2$

3.4

题目1 设$f \in U.C[0, +\infty), \forall x \in [0, 1] : lim_{n\to\infty} f(x + n) = 0, (n \in \mathbf{N})$。证明：$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

证明 $(1) f \in U.C[0, +\infty), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$

(2) 取$k > \frac{1}{\delta}$，将区间$[0, 1]k$等分，记分点为$x_i = i/k \quad (i = 1, 2, ..., k)$，此时$x_i - x_{i-1} < \delta$

(3) 对于$x_i, lim_{n\to\infty} f(x_i + n) = 0$，从而，$\exists N_i > 0, \forall n > N_i, |f(x_i + n)| < \varepsilon/2$

令$N = max_{1\leq i\leq k}\{N_i\}, \forall n > N, |f(x_i + n)| < \varepsilon/2 \quad (i = 1, 2, ..., k)$

(4) 取$X = N+1 > 0, \forall x > X, [x] > N, x-[x] \in [0, 1]$，因而$\exists i \in \{1, 2, ..., k\} : |x - ([x] + x_i)| = |(x - [x]) - x_i| < \delta$

从而有$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_i + [x])| + |f(x_i + [x])| < \varepsilon$

题目2 对于定义在$[0, +\infty)$的函数f

$lim_{n\to\infty} f(x + n) = 0, (n \in \mathbf{N})$，对于$x \in [0, 1]$是一致的

即$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in [0, 1], |f(x + n)| < \varepsilon$

证明：$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in [0, 1], |f(x + n)| < \varepsilon$

取$X = N + 1, \forall x' > X$有$[x'] > N$，对于$x = x' - [x'] \in [0, 1], |f(x')| = |f([x'] + x)| < \varepsilon$

评注 部分同学误用了题目2的证法来证明题目1，其实是擅自添加了收敛对x一致成立的条件，应该注意一下

3.5

题目　设$f \in C[a,b], f(a) < 0, f(b) > 0$

证明：$\exists \xi \in (a,b), f(\xi) = 0$，并且$\forall x \in (\xi, b), f(x) > 0$

证明　令$E = \{x | f(x) \leq 0, x \in [a,b]\}$，E非空有上界，记$\xi = supE$，有$\forall x \in (\xi, b), f(x) > 0$

若$f(\xi) < 0$，由连续函数局部保号性，$\exists x_1 \in (\xi, b) : f(x_1) < 0$，从而$x_1 \in E$，这与$\xi$是E的上确界矛盾

若$f(\xi) > 0$，由连续函数局部保号性，$\exists \delta > 0, \forall x \in (\xi - \delta, \xi] : f(x) > 0$，从而$\xi - \delta$为E的一个上界，这与$\xi$是E的上确界矛盾

因此$f(\xi) = \xi$

错解　由零点存在定理，$\exists \xi_0, f(\xi_0) = 0$

若$\exists x_0 \in (\xi_0, b), f(x_0) < 0$

则由零点存在定理，$\exists \xi_1, f(\xi_1) = 0$

如此往复至$\forall x \in (\xi_n, b), f(x) > 0$为止

3.6

题目　设函数f(x)在[a,b]单调增加，且$a < f(a) < f(b) < b$，证明：$\exists \xi \in (a,b), f(\xi) = \xi$

证法1　设$E = \{x | f(x) > x, x \in [a,b]\}$，$a \in E$，E非空有上界b，设其上确界为$\xi = supE$。往证$f(\xi) = \xi$

$\forall x \in E, x \leq \xi$，由于f单调增加，$x < f(x) \leq f(\xi)$，从而$f(\xi)$为E的上界，$\xi \leq f(\xi)$

再由f单调增加，$f(\xi) \leq f(f(\xi))$，从而$f(\xi) \in E$，即$f(\xi) \leq \xi$

综上，$f(\xi) = \xi$

证法2　设$[a_1, b_1] = [a,b]$，满足$f(a_1) > a_1, f(b_1) < b_1$

若$f(\frac{a_1+b_1}{2}) = \frac{a_1+b_1}{2}$，则结论成立

若$f(\frac{a_1+b_1}{2}) > \frac{a_1+b_1}{2}$，取$[a_2, b_2] = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

若$f(\frac{a_1+b_1}{2})<\frac{a_1+b_1}{2}$，取$[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$

如此可构造区间套$[a_n,b_n]$，满足：

$a_n<f(a_n)<f(b_n)<b_n,\quad n=1,2,...$

由区间套定理，$\exists\xi:a_n\leq\xi\leq b_n,\quad n=1,2,...$

由单调性，$a_n<f(a_n)<f(\xi)<f(b_n)<b_n,\quad n=1,2,...$

再有区间套定理中ξ的唯一性可知$f(\xi)=\xi$

证法3 设$E=\{x|f(x)>x,x\in[a,b]\}$，E非空有上界，设其上确界为ξ

$\forall\varepsilon,\exists x\in E,\xi-\varepsilon<x\leq\xi$

由单调性，$f(\xi)\geq f(x)\geq f(\xi-\varepsilon)>\xi-\varepsilon$

即$\forall\varepsilon f(\xi)>\xi-\varepsilon$

从而$f(\xi)\geq\xi$

若$f(\xi)>\xi$，对于$\varepsilon_0=\frac{f(\xi)-\xi}{2}>0$

$f(\xi+\varepsilon_0)\geq f(\xi)=\xi+2\varepsilon_0>\xi+\varepsilon_0$

从而，$\xi+\varepsilon_0\in E$，而这与ξ是E的上确界矛盾

所以$f(\xi)=\xi$

错解 令$F(x)=f(x)-x$，由$F(a)>0,F(b)<0$以及零点存在性定理知

$\exists\xi,f(\xi)=\xi$

4 导数与微分

4.1

题目 设函数$f(x)$在x_0处可导，并且$f(x_0)\neq0$，证明$|f(x)|$在x_0处可导

证明 注意到$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$

由复合函数求导：

$(|f(x)|)'|_{x=x_0}=\frac{1}{2}(f^2(x_0))^{-\frac{1}{2}}\cdot2f(x_0)\cdot f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}\cdot f'(x_0)$

4.2

题目 **设**函数$f(x)$在点$x=0$处连续，$f(0)=0$且$lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$

证明：$f(x)$在点$x=0$处可导，且$f^{'}(0)=A$

证明 由$lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\forall x\in U^{o}(0,\delta)$

$A-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<A+\varepsilon$

注意到当$x\in U^{o}(0,\delta)$时，$\forall k,\frac{x}{2^k}\in U^{o}(0,\delta)$

$\frac{1}{2^k}(A-\varepsilon)<\frac{f(\frac{2x}{2^k})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\frac{1}{2^k}(A+\varepsilon)$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}(A-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\frac{2x}{2^k})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}(A+\varepsilon)$

即$(1-\frac{1}{2^n})(A-\varepsilon)<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x-\frac{x}{2^n}}<(1-\frac{1}{2^n})(A+\varepsilon)$

由f在$x=0$的连续性可知

$A-\varepsilon=lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})(A-\varepsilon)\leq lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x-\frac{x}{2^n}}=\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})(A+\varepsilon)=A+\varepsilon$

即$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$

即$f^{'}(0)$存在且等于A

错解 $A=lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}-lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}-lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=A$

即$f^{'}(0)=A$

4.3

题目 **设**函数$f(x)$在点x_0处可导，$\alpha_n<x_0<\beta_n$，且$lim_{n\to\infty}\alpha_n=lim_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，证明：

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f^{'}(x_0)$

证明 由导数的定义：

$f(\beta_n)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(\beta_n-x_0)+o(\beta_n-x_0)$

$f(\alpha_n)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(\alpha_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}[f^{'}(x_0)+\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}+\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}]$

而$|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}|\leq|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}|$

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}=0$

同理$\lim_{n\to\infty}\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}=0$

即$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f^{'}(x_0)$

错解1 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\alpha_n+\beta_n-\alpha_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}f^{'}(\alpha_n)=f^{'}(x_0)$

错解2 **设**$\alpha_n=x_0-\Delta x,\beta_n=x_0+\Delta x$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f^{'}(x_0)$

4.4

题目 **设**$f(0)=0,f^{'}(0)$存在，令

$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots f(\frac{n}{n^2})$

求证$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$

证明 **记**$f^{'}(0)=A$

即$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$

$\forall\varepsilon,\exists\delta,\forall|x|<\delta,A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon$

对于$N=[\frac{1}{\delta}]+1,\forall n>N,\forall k\le n,\frac{k}{n^2}\le\frac{1}{n}<\delta$

从而$\forall k\le n,A-\varepsilon<\frac{f(\frac{k}{n^2})}{\frac{k}{n^2}}<A+\varepsilon$

即$\frac{1}{2}(A-\varepsilon)\frac{n+1}{n}=(A-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}(A+\varepsilon)\frac{n+1}{n}$

也就是$\frac{1}{2}(A-\varepsilon)<\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<\frac{1}{2}(A+\varepsilon)$

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{1}{2}A$

又$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

从而$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}A=\frac{f^{'}(0)}{2}$

错解1 **由**$f(\frac{k}{n^2})=f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)$

可得$x_n=\sum_{k=1}^{n}[f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)]=\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}o(1)$

即$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$

错解2 由$f(\frac{k}{n^2})=f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o_k(1)$

可得$x_n=\sum_{k=1}^{n}[f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)]$

从而$\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}min_{1\leq k\leq n}\{o_k(1)\}\geq x_n\leq\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}max_{1\leq k\leq n}\{o_k(1)\}$

再由$\lim_{n\to\infty}min_{1\leq k\leq n}\{o_k(1)\}=\lim_{n\to\infty}max_{1\leq k\leq n}\{o_k(1)\}=0$

得$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$