数学分析助教记

刘宇扬

November 24, 2019

初衷

个人认为在做完习题后，参考习题答案的同时参考一些错误解法更有助于学习。

目前在做数学分析课的助教，因此收录到了一些课后作业的经典习题和相应的错误解答。

由于读书期间时间有限，只挑选了每次改作业时绝大多数同学做错的少量习题，提供个人认为较有学习意义的解法，并在部分题目后附上一些常见的错误解答。

所依托的教材为高等教育出版社出版、上海交通大学数学系数学分析课题组编写的《数学分析》。

另外，目前Latex使用尚不熟练，若有笔误，恳请读者告知。希望对学习数学分析的同学们有所帮助。并在此感谢大学同窗好友韩俣谈的平台支持。

1 集合与函数

1.1

题目 A、B为两个非空非负数集，记$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$

求证：$inf(AB) = inf(A) \cdot inf(B), sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$

证明 只证明前者，后者同理。

$inf(AB) \geq inf(A) \cdot inf(B)$易得

下面证明反向不等式

$\forall\varepsilon>0,\forall a\in A$

记$B_a=\{ab:b\in B\}$

由于a的非负性易得$inf(B_a)=a\cdot inf(B)$

$\exists b(\varepsilon,a)\in B,ab(\varepsilon,a)<a\cdot inf(B)+\varepsilon$

又由于$ab(\varepsilon,a)\geq inf(AB)$

也就是$\forall\varepsilon>0,\forall a\in A,inf(AB)<a\cdot inf(B)+\varepsilon$

即$\forall a,a\cdot inf(B)\geq inf(AB)$

若$inf(B)=\infty$，显然。

若$inf(B)=0$ ，显然。

若$inf(B)=c$ ，c是某个大于0的常数。

则$\forall a\in A,a\geq\frac{inf(AB)}{inf(B)}$

从而$inf(A)\geq\frac{inf(AB)}{inf(B)}$，得证。

错解1 $\forall\varepsilon>0,\exists a_0\in A,\exists b_0\in B,sup(A)-a_0<\widetilde{\varepsilon},sup(B)-b_0<\widetilde{\varepsilon}$，其中，$\widetilde{\varepsilon}$为$x^2+(a_0+b_0)x=\varepsilon$的正解。因此，$sup(A)\cdot sup(B)-a_0\cdot b_0<(a_0+\widetilde{\varepsilon})(b_0+\widetilde{\varepsilon})-a_0\cdot b_0=\varepsilon$，即$sup(AB)=sup(A)\cdot sup(B)$

错解2 当A与B均有上界时，记为sup(A)与sup(B)

一方面，$\forall ab\in AB,a\in A,b\in B$，有$a\leq sup(A),b\leq sup(B)$，进而$ab\leq sup(A)\cdot sup(B)$

另一方面，根据上确界定义

$\forall a_0<sup(A),\exists a>a_0$，$\forall b_0<sup(B),\exists b>b_0$

因此，$\forall a_0b_0\in AB,a_0b_0<sup(A)\cdot sup(B),\exists ab>a_0b_0$，即$sup(A)\cdot sup(B)$是AB的上确界。

错解3 一方面，$\forall ab\in AB,a\in A,b\in B$，有$a\leq sup(A),b\leq sup(B)$，进而$ab\leq sup(A)\cdot sup(B)$

另一方面，$\forall\varepsilon>0,\exists a>sup(A)-\varepsilon,b>sup(B)-\varepsilon:ab>sup(A)\cdot sup(B)-\varepsilon\cdot(sup(A)+sup(B))+\varepsilon^2$，当$\varepsilon\to0,\varepsilon\cdot(sup(A)+sup(B))-\varepsilon^2\to0$，即$sup(AB)=sup(A)\cdot sup(B)$

1.2

题目 A，B为两个非空数集，$\exists c > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, |a-b| < c$，证明：$|sup(A) - sup(B)| \leq c, |sup(A) - inf(B)| \leq c$

小技巧 对于一个固定的实数m以及某集合A，若$\forall a \in A, a \leq m$

则$sup(A) \leq m, inf(A) \leq m$

若$\forall a \in A, a \geq m$

则$sup(A) \geq m, inf(A) \geq m$

证明 $\forall a \in A, b \in B, b - c < a < b + c$

从而$\forall b \in B, b - c < sup(A) \leq b + c \qquad (1)$

进而$sup(B) - c \leq sup(A) \leq sup(B) + c$

即$|sup(A) - sup(B)| \leq c$

再由(1)得$inf(B) - c \leq sup(A) \leq inf(B) + c$

即$|sup(A) - inf(B)| \leq c$

评注 本题目中，由于大部分同学做法繁琐，上述证法有一定的学习价值。

2 极限与连续

2.1

题目 $\forall a \in \mathbf{R}, lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

证明 若$\mathrm{a} = 0$，显然。

若$\mathrm{a} \neq 0$

取$k = [|a|] + 1$

$|\frac{a^n}{n!} - 0| = \frac{|a|\cdot|a|\cdot\ldots\cdot|a|\cdot\ldots\cdot|a|}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot\ldots\cdot n} \leq \beta \cdot \frac{|a|}{n}$

其中，$\beta = \frac{|a|^k}{k!}$

那么，$\forall \varepsilon > 0, \exists N = max\{k, \frac{\beta|a|}{\varepsilon}\}, |\frac{a^n}{n!} - 0| \leq \beta \cdot \frac{|a|}{n} < \varepsilon$

2.2

题目 $lim_{n\to\infty}x_n = a \Rightarrow lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$

证明 不妨设$a > 0$

$\exists N_1, \forall n > N_1, x_n > 0$

此时有$|x_n^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}| = \frac{|x_n - a|}{x_n^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}x_n^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} < \frac{|x_n - a|}{a^{\frac{2}{3}}}$

$\forall \varepsilon, \exists N_2, \forall n > N_2, |x_n - a| < a^{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon$

从而取$N_3 = max\{N_1, N_2\}, \forall n > N_3, |x_n^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}| < \frac{|x_n - a|}{a^{\frac{2}{3}}} < \varepsilon$

2.3

题目 $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}} = 1$

证明 $\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{\sqrt{(1\cdot 3)}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(3\cdot 5)}}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{3}{\sqrt{(2\cdot 4)}} \cdot \frac{5}{\sqrt{(4\cdot 6)}} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{\sqrt{((2n-2)\cdot 2n)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

再由结论：$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$与$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$

结合夹逼准则即可得证。

错解 原式$= lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{3}{4}} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{\frac{(2n-1)}{2n}} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

2.4

题目 记$a_n = 1 + \frac{sinx}{1^2} + \ldots + \frac{sinnx}{n^2}$，证明$a_n$收敛。

证明 $|a_{(n+p)} - a_n| = |\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1, \forall n > N, \forall p \in N^*, |a_{(n+p)} - a_n| < \varepsilon$

由实数空间的完备性知$\{a_n\}$收敛。

错解1 $|a_{(n+p)} - a_n| = |\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \leq x(\frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+1}) < \frac{xp}{n}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{xp}{\varepsilon}] + 1, \forall n > N, \forall p \in N^*, |a_{(n+p)} - a_n| < \varepsilon$

错解2 由$\{\frac{1}{n^2}\}$的收敛性:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,\forall p\in N^*,\frac{1}{n^2}<\frac{\varepsilon}{p}$

$|a_{(n+p)}-a_n|=|\frac{sin(n+1)x}{(n+1)^2}+...+\frac{sin(n+p)x}{(n+p)^2}|\le\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{p}{n^2}<\varepsilon$

2.5

题目 $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

证明 $\forall x>1:\frac{[x]}{[x]+1}\cdot\frac{ln[x]}{[x]}<\frac{lnx}{x}<\frac{[x]+1}{[x]}\cdot\frac{ln[x]+1}{[x]+1}$

由Stolz定理，$\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n}=0$

再有复合函数极限以及夹逼定理即可得证。

错解 由Heine定理，$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n}=0$

2.6

题目 确定常数a,b使下列等式成立

$lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

参考解法 $lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

$0=lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}-a-\frac{b}{x})=1-a\Rightarrow a=1$

$0=lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-b)=lim_{x\to+\infty}(\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}-b)=-\frac{1}{2}-b\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

错解1 $0=lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x+(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}$

$\Rightarrow 1-a^2=0,2ab+1=0\Rightarrow a=1,b=-\frac{1}{2}$ 或$a=-1,b=\frac{1}{2}$

错解2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-\frac{1}{2}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}x-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}=0$

2.7

题目 设f在x_0的某邻域$U(x_0)$有界，令

$m(\delta)=inf(f(U(x_0,\delta))),M(\delta)=sup(f(U(x_0,\delta)))$

$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to 0^+}(M(\delta)-m(\delta))$

证明：若f在x_0连续，则$\omega(f,x_0)=0$

证法1 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in U(x_0,\eta):f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

从而$f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\le m(\eta)\le M(\eta)\le f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

进而$\forall\delta\in(0,\eta):0\le M(\delta)-m(\delta)\le M(\eta)-m(\eta)\le\varepsilon$

即$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to 0^+}(M(\delta)-m(\delta))=0$

证法2 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

由Cauchy准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

从而$M(\eta)-m(\eta)=sup_{x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta)}|f(x^{'})-f(x^{''})|\le\varepsilon$

进而$\forall\delta\in(0,\eta):0\le M(\delta)-m(\delta)\le M(\eta)-m(\eta)\le\varepsilon$

即$\omega(f,x_0)=lim_{\delta\to 0^+}(M(\delta)-m(\delta))=0$

错解 容易证明$M(\delta)-m(\delta)$单调增

由Cauchy准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

从而$M(\eta)-m(\eta)=sup_{x^{'},x^{''}\in U(x_0,\eta)}|f(x^{'})-f(x^{''})|\le\varepsilon$

令$\eta\to 0^+$，即得$\omega(f,x_0)=0$

2.8

题目 设$f\in C[a,+\infty),\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在，证明$f\in U.C[a,+\infty)$

证明 由$\lim_{x\to+\infty}f(x)$以及Cauchy收敛准则

$\forall\varepsilon>0,\exists b>a,\forall x^{'},x^{''}\in(b,+\infty):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

又$f\in U.C[a,b+1]$

$\exists\delta\in(0,1),\forall x^{'},x^{''}\in[a,b+1],|x^{'}-x^{''}|<\delta:|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

注意到$\delta<1$，从而$\forall x^{'},x^{''}\in[a,+\infty)$，当$|x^{'}-x^{''}|<\delta$，$x^{'},x^{''}$必同时属于$[a,b+1]$或同时属于$[b,+\infty)$

从而$|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

即$f\in U.C[a,+\infty)$

错解1 由$\lim_{x\to+\infty}f(x)$以及Cauchy收敛准则

$\forall\varepsilon>0,\exists b>a,\forall x^{'},x^{''}\in(b,+\infty):|f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon$

所以$f\in U.C[b,+\infty]$

又$f\in U.C[a,b]$

从而$f\in U.C[a,+\infty)$

错解2 由$Cantor$定理，$f\in U.C[a,a+1]$

若$f\in U.C[a,a+k]$

又$f\in U.C[a+k,a+k+1]$

所以$f\in U.C[a,a+k+1]$

由数学归纳法$f\in U.C[a,+\infty)$

3 实数的基本定理

3.1

题目 用闭区间套定理证明单调有界定理

证明 任取单调增有上界的数列$\{x_n\}$，记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0=x_1<b_0$

将区间$[a_0,b_0]$等分为$[a_0,\frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]\cap\{x_n\}\neq\emptyset$，则记$a_1=\frac{(a_0+b_0)}{2},b_1=b_0$；

否则记$a_1=a_0,b_1=\frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得闭区间套$\{[a_n.b_n],n=1,2,...\}$

其中，由$[a_n,b_n]$的递推方法知:

$\forall m,b_m$为$\{x_n\}$的一个上界

$\forall m,\exists N_m,x_{N_m}\in[a_m,b_m]$

由闭区间套定理知，

$\exists t,lim_{n\to\infty}b_n=lim_{n\to\infty}a_n=t$

$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2\in N^*,\forall n\geq N_1,-\varepsilon<b_n-t<\varepsilon,\forall n\geq N_2,-\varepsilon<a_n-t<\varepsilon$

那么，$\forall\varepsilon,\exists N_3=max(N_1,N_2),\exists N_4,x_{N_4}\in[a_{N_3},b_{N_3}]$

此时，$\forall\varepsilon,\forall n>N_4,t-\varepsilon<a_{N_3}\leq x_{N_4}\leq x_n\leq b_{N_3}<t+\varepsilon$

即$lim_{n\to\infty}x_n=t$

错解 任取单调增有上界的数列$\{x_n\}$，记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0=x_1<b_0$

将区间$[a_0,b_0]$等分为$[a_0,\frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]$中存在$\{x_n\}$的无穷多项，则记$a_1=\frac{(a_0+b_0)}{2},b_1=b_0$；

否则记$a_1=a_0,b_1=\frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得闭区间套$\{[a_n.b_n],n=1,2,...\}$

其中，由$[a_n,b_n]$的递推方法知:

$\forall m,[a_m,b_m]$中存在$\{x_n\}$的无穷多项

由闭区间套定理知，

$\exists t,lim_{n\to\infty}b_n=lim_{n\to\infty}a_n=t$

由于$a_n\leq x_n\leq b_n$，即得$lim_{n\to\infty}x_n=t$

3.2

题目 用单调有界定理证明确界原理

证明 任取非空有界集合A，这里只证上确界的存在性

记其一个上界为b_0

这里不妨设$a_0\in A<b_0$

将区间$[a_0,b_0]$等分为$[a_0,\frac{(a_0+b_0)}{2}]$与$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]$

若$[\frac{(a_0+b_0)}{2},b_0]\cap A\neq\varnothing$，则记$a_1=\frac{(a_0+b_0)}{2},b_1=b_0$；

否则记$a_1=a_0,b_1=\frac{(a_0+b_0)}{2}$

如此可得一族区间$\{[a_n.b_n],n=1,2,...\}$

其中，由$[a_n,b_n]$的递推方法知:

$\forall m,b_m$为A的一个上界

$\forall m,\exists d\in A,d\in[a_m,b_m]$

$\{a_n\}$为一个单调增的数列，$\{b_n\}$为一个单调减的数列

$lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

再由单调有界定理知，

$\exists t, lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty} a_n = t$

并且，$t = sup(a_n) = inf(b_n)$

这里，t为A的一个上界

事实上，$\forall a^* \in A, \forall m \in N^*, a^* \leq b_m$

也就是，$\forall a^* \in A, a^*$ 为$\{b_m\}$的一个下界，再由$t = inf(b_n)$

$\forall a^* \in A, a^* \leq t$

即t为A的一个上界

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, a_N > sup(a_n) - \varepsilon = t - \varepsilon$

对于$N, \exists d_0 \in A, d_0 \in [a_N, b_N]$

也就是，$\forall \varepsilon > 0, \exists d_0 \in A, d_0 > t - \varepsilon$，t是A的上确界

错解 任取非空有界集合A，这里只证明上确界的存在性

若A中元素有限，则确界原理显然

若A中元素有无穷多，则将A中的元素从小到大排成一个数列$\{a_n\}$

显然$\{a_n\}$有界

由单调有界定理，$\{a_n\}$存在极限t，而且t是$\{a_n\}$的上确界

因此A存在上确界t

3.3

题目 用确界原理证明致密性定理

证明 设$\{a_n\}$为一个有界数列

$\exists M > 0, \forall n \in N^*, |a_n| \leq M$

令$E = \{t | \{a_n\}$ 中至多有限项落在$(-\infty, t)$ $\}$

容易证明M是E的上界

事实上，当$t > M$时，$\forall n \in N^*, |a_n| \leq M < t$，即$t \notin E$

也就是$\forall t \in E, t \leq M$

根据确界原理，E有上确界sup(E)

从而，$\forall \varepsilon$, $\{a_n\}$ 中至多有限项落在$(-\infty, sup(E) - \varepsilon)$

而，$\{a_n\}$ 中无限项落在$(-\infty, sup(E)+\varepsilon)$

也就是，$\forall\varepsilon$, $\{a_n\}$ 中无限项落在$[sup(E)-\varepsilon), sup(E)+\varepsilon))$

即存在$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$，$lim_{k\to\infty}a_{n_k}=sup(E)$

错解 **根**据确界原理，非空上有界数集必有上确界

非空上有界数列必存在上确界，那么必存在一个子列趋向于这个上确界

反例 $a_1=100; a_n=sin(n), n\geq 2$

3.4

题目1 **设**$f\in U.C[0,+\infty), \forall x\in[0,1]: lim_{n\to\infty}f(x+n)=0, (n\in\mathbf{N})$。证明：$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明 (1)$f\in U.C[0,+\infty), \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x^{'}, x^{''}: |x^{'}-x^{''}|<\delta, |f(x^{'})-f(x^{''})|<\varepsilon/2$

(2) 取$k>\frac{1}{\delta}$，将区间$[0,1]$$k$等分，记分点为$x_i=i/k\quad(i=1,2,...,k)$，此时$x_i-x_{i-1}<\delta$

(3) 对于$x_i, lim_{n\to\infty}f(x_i+n)=0$，从而，$\exists N_i>0, \forall n>N_i, |f(x_i+n)|<\varepsilon/2$

令$N=max_{1\leq i\leq k}\{N_i\}, \forall n>N, |f(x_i+n)|<\varepsilon/2\quad(i=1,2,...,k)$

(4) 取$X=N+1>0, \forall x>X, [x]>N, x-[x]\in[0,1]$，因而$\exists i\in\{1,2,...,k\}: |x-([x]+x_i)|=|(x-[x])-x_i|<\delta$

从而有$|f(x)|\leq|f(x)-f(x_i+[x])|+|f(x_i+[x])|<\varepsilon$

题目2 **对**于定义在$[0,+\infty)$的函数f

$lim_{n\to\infty}f(x+n)=0, (n\in\mathbf{N})$，对于$x\in[0,1]$是一致的

即$\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, \forall x\in[0,1], |f(x+n)|<\varepsilon$

证明：$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, \forall x\in[0,1], |f(x+n)|<\varepsilon$

取$X=N+1, \forall x^{'}>X$有$[x^{'}]>N$，对于$x=x^{'}-[x^{'}]\in[0,1], |f(x^{'})|=|f([x^{'}]+x)|<\varepsilon$

评注 部分同学误用了题目2的证法来证明题目1，其实是擅自添加了收敛对x一致成立的条件，应该注意一下

3.5

题目 设$f \in C[a,b], f(a) < 0, f(b) > 0$

证明：$\exists \xi \in (a,b), f(\xi) = 0$，并且$\forall x \in (\xi, b), f(x) > 0$

证明 令$E = \{x | f(x) \le 0, x \in [a,b]\}$，E非空有上界，记$\xi = supE$，有$\forall x \in (\xi, b), f(x) > 0$

若$f(\xi) < 0$，由连续函数局部保号性，$\exists x_1 \in (\xi, b) : f(x_1) < 0$，从而$x_1 \in E$，这与$\xi$是E的上确界矛盾

若$f(\xi) > 0$，由连续函数局部保号性，$\exists \delta > 0, \forall x \in (\xi - \delta, \xi] : f(x) > 0$，从而$\xi - \delta$为E的一个上界，这与$\xi$是E的上确界矛盾

因此$f(\xi) = \xi$

错解 由零点存在定理，$\exists \xi_0, f(\xi_0) = 0$

若$\exists x_0 \in (\xi_0, b), f(x_0) < 0$

则由零点存在定理，$\exists \xi_1, f(\xi_1) = 0$

如此往复至$\forall x \in (\xi_n, b), f(x) > 0$为止

3.6

题目 设函数f(x)在[a,b]单调增加，且$a < f(a) < f(b) < b$，证明：$\exists \xi \in (a,b), f(\xi) = \xi$

证法1 设$E = \{x | f(x) > x, x \in [a,b]\}$，$a \in E$，E非空有上界b，设其上确界为$\xi = supE$。往证$f(\xi) = \xi$

$\forall x \in E, x \le \xi$，由于f单调增加，$x < f(x) \le f(\xi)$，从而$f(\xi)$为E的上界，$\xi \le f(\xi)$

再由f单调增加，$f(\xi) \le f(f(\xi))$，从而$f(\xi) \in E$，即$f(\xi) \le \xi$

综上，$f(\xi) = \xi$

证法2　**设**$[a_1,b_1]=[a,b]$，满足$f(a_1)>a_1,f(b_1)<b_1$

若$f(\frac{a_1+b_1}{2})=\frac{a_1+b_1}{2}$，则结论成立

若$f(\frac{a_1+b_1}{2})>\frac{a_1+b_1}{2}$，取$[a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$

若$f(\frac{a_1+b_1}{2})<\frac{a_1+b_1}{2}$，取$[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$

如此可构造区间套$[a_n,b_n]$，满足：

$a_n<f(a_n)<f(b_n)<b_n,\quad n=1,2,...$

由区间套定理，$\exists\xi:a_n\le\xi\le b_n,\quad n=1,2,...$

由单调性，$a_n<f(a_n)<f(\xi)<f(b_n)<b_n,\quad n=1,2,...$

再有区间套定理中ξ的唯一性可知$f(\xi)=\xi$

证法3　**设**$E=\{x|f(x)>x,x\in[a,b]\}$，E非空有上界，设其上确界为ξ

$\forall\varepsilon,\exists x\in E,\xi-\varepsilon<x\le\xi$

由单调性，$f(\xi)\ge f(x)>x>\xi-\varepsilon$

即$\forall\varepsilon f(\xi)>\xi-\varepsilon$

从而$f(\xi)\ge\xi$

若$f(\xi)>\xi$，对于$\varepsilon_0=\frac{f(\xi)-\xi}{2}>0$

$f(\xi+\varepsilon_0)\ge f(\xi)=\xi+2\varepsilon_0>\xi+\varepsilon_0$

从而，$\xi+\varepsilon_0\in E$，而这与ξ是E的上确界矛盾

所以$f(\xi)=\xi$

错解　令$F(x)=f(x)-x$，由$F(a)>0,F(b)<0$以及零点存在性定理知

$\exists\xi,f(\xi)=\xi$

4　导数与微分

4.1

题目　**设**函数$f(x)$在x_0处可导，并且$f(x_0)\neq0$，证明$|f(x)|$在x_0处可导

证明　**注**意到$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$

由复合函数求导：

$(|f(x)|)^{'}|_{x=x_0}=\frac{1}{2}(f^2(x_0))^{-\frac{1}{2}}\cdot2f(x_0)\cdot f^{'}(x_0)=\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}\cdot f^{'}(x_0)$

4.2

题目 **设**函数$f(x)$在点$x=0$处连续，$f(0)=0$且$lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$

证明：$f(x)$在点$x=0$处可导，且$f^{'}(0)=A$

证明 由$lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\forall x\in U^{o}(0,\delta)$

$A-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<A+\varepsilon$

注意到当$x\in U^{o}(0,\delta)$时，$\forall k,\frac{x}{2^k}\in U^{o}(0,\delta)$

$\frac{1}{2^k}(A-\varepsilon)<\frac{f(\frac{2x}{2^k})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\frac{1}{2^k}(A+\varepsilon)$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}(A-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\frac{2x}{2^k})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}(A+\varepsilon)$

即$(1-\frac{1}{2^n})(A-\varepsilon)<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x-\frac{x}{2^n}}<(1-\frac{1}{2^n})(A+\varepsilon)$

由f在$x=0$的连续性可知

$A-\varepsilon=lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})(A-\varepsilon)\le lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x-\frac{x}{2^n}}=\frac{f(x)-f(0)}{x}\le lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})(A+\varepsilon)=A+\varepsilon$

即$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$

即$f^{'}(0)$存在且等于A

错解 $A=lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}-lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}-lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=A$

即$f^{'}(0)=A$

4.3

题目 **设**函数$f(x)$在点x_0处可导，$\alpha_n<x_0<\beta_n$，且$lim_{n\to\infty}\alpha_n=lim_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，证明：

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f^{'}(x_0)$

证明 由导数的定义：

$f(\beta_n)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(\beta_n-x_0)+o(\beta_n-x_0)$

$f(\alpha_n)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(\alpha_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}[f^{'}(x_0)+\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}+\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}]$

而$|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}|\le|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}|$

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}=0$

同理$\lim_{n\to\infty}\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}=0$

即$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f^{'}(x_0)$

错解1 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\alpha_n+\beta_n-\alpha_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}f^{'}(\alpha_n)=f^{'}(x_0)$

错解2 **设**$\alpha_n=x_0-\Delta x,\beta_n=x_0+\Delta x$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f^{'}(x_0)$

4.4

题目 **设**$f(0)=0,f^{'}(0)$存在，令

$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots f(\frac{n}{n^2})$

求证$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$

证明 **记**$f^{'}(0)=A$

即$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$

$\forall\varepsilon,\exists\delta,\forall|x|<\delta,A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon$

对于$N=[\frac{1}{\delta}]+1,\forall n>N,\forall k\le n,\frac{k}{n^2}\le\frac{1}{n}<\delta$

从而$\forall k\le n,A-\varepsilon<\frac{f(\frac{k}{n^2})}{\frac{k}{n^2}}<A+\varepsilon$

即$\frac{1}{2}(A-\varepsilon)\frac{n+1}{n}=(A-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}(A+\varepsilon)\frac{n+1}{n}$

也就是$\frac{1}{2}(A-\varepsilon)<\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<\frac{1}{2}(A+\varepsilon)$

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{1}{2}A$

又$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

从而$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}A=\frac{f^{'}(0)}{2}$

错解1 **由**$f(\frac{k}{n^2})=f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)$

可得$x_n=\sum_{k=1}^{n}[f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)]=\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}o(1)$

即$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$

错解2　由$f(\frac{k}{n^2})=f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o_k(1)$

可得$x_n=\sum_{k=1}^{n}[f^{'}(0)\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}o(1)]$

从而$\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}min_{1\le k\le n}\{o_k(1)\}\ge x_n\le\frac{n+1}{2n}f^{'}(0)+\frac{n+1}{2n}max_{1\le k\le n}\{o_k(1)\}$

再由$\lim_{n\to\infty}min_{1\le k\le n}\{o_k(1)\}=\lim_{n\to\infty}max_{1\le k\le n}\{o_k(1)\}=0$

得$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{f^{'}(0)}{2}$

5　微分中值定理及其应用

5.1

题目　$f\in D[0,+\infty),f(0)=0.\forall x\in[0,+\infty),|f^{'}(x)|\le|f(x)|$

证明：$f(x)=0,\forall x\in[0,+\infty)$

证法1　对于区间$[0,\frac{1}{2}]$，设$|f(x)|$在$x_0\in[0,\frac{1}{2}]$取得最大值

由$Lagrange$中值定理，$\exists\xi\in[0,x_0],|f(x_0)|=|f^{'}(\xi)x_0|\le|f(\xi)x_0|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|$

因此$|f(x_0)|=0$

进而$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$

若$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}k]$

考察区间$[\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}(k+1)]$，如上同理可得$f(x)=0,\forall x\in[\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}(k+1)]$

即$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}(k+1)]$

由数学归纳法，$\forall n\in N^*,f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}n]$

对于$\forall x\in[0,+\infty),\exists n\in N^*,x\le\frac{1}{2}n$

从而$f(x)=0$

证法2　由$f\in C[0,1]$，设$|f(x)|\le M,\forall x\in[0,1]$

$\forall x\in[0,1)$

由$Lagrange$中值定理

$|f(x)|=|f^{'}(\xi_1)|x\le|f(\xi_1)|x=|f^{'}(\xi_2)|x^2\le|f^{(}\xi_2)|x^2=...\le|f(\xi_n)|x^n\le Mx^n$

因此$|f(x)|=\lim_{n\to\infty}|f(x)|\le\lim_{n\to\infty}Mx^n=0$

即$f(x)=0,\forall x\in[0,1)$

对于$x=1$，由$f(x)$在$x=1$处连续知$f(1)=0$

即$f(x)=0,\forall x\in[0,1]$

类似于证法1得$f(x)=0,\forall x\in[0,+\infty)$

错解1 容易得到$f'_+(0)=0$

从而$\exists\delta>0,f(x)=0,\forall x\in[0,\delta]$

类似于证法1得$f(x)=0,\forall x\in[0,+\infty)$

错解2 对于区间$[0,\frac{1}{2}]$，设$|f(x)|$在$x_0\in[0,\frac{1}{2}]$取得最大值

由$Lagrange$中值定理，$\exists\xi\in[0,x_0],|f(x_0)|=|f^{'}(\xi)x_0|\le|f(\xi)x_0|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|$

因此$|f(x_0)|=0$

进而$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$

若$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}k]$

考察区间$[\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}(k+1)]$，如上同理可得$f(x)=0,\forall x\in[\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}(k+1)]$

即$f(x)=0,\forall x\in[0,\frac{1}{2}(k+1)]$

由数学归纳法，$f(x)=0,\forall x\in[0,+\infty)$

评注 此处错解2与之前2.8的错解2错误类型相同

一般地，数学归纳法不可直接得到含有$+\infty$的结论

5.2

题目 设f在x_0处二阶可导，$f^{'}(x_0)\ne 0$

求$\lim_{x\to x_0}(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f^{'}(x_0)})$

参考解法 先对原式通分而后$L'Hospital$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{'}(x_0)-f^{'}(x)}{f^{'}(x_0)(xf^{'}(x)+f(x)-x_0f^{'}(x)-f(x_0))}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f^{'}(x_0)-f^{'}(x)}{x-x_0}}{f^{'}(x_0)(f^{'}(x)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})}$

$=-\frac{f^{''}(x_0)}{2(f^{'}(x_0))^2}$

评注 这里最后一步应用导数的定义

部分同学求解本题时错用了两次$L'Hospital$，错误原因可以参考一下课本page135例4

5.3

题目　设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，证明$\exists\xi\in(a,b)$

使得$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f^{''}(\xi)$

证法1　将$f(x)$在$x_0=\frac{a+b}{2}$处Taylor展开得

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$$

将$x=a,x=b$代入得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi_1)}{2}(a-\frac{a+b}{2})^2$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi_2)}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2$$

相加得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{f^{''}(\xi_1)+f^{''}(\xi_2)}{2}$$

再由导数介值性可知，$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$

$$f^{''}(\xi)=\frac{f^{''}(\xi_1)+f^{''}(\xi_2)}{2}$$

得证

证法2　假设

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{k}{4}(b-a)^2$$

并记

$$F(x)=f(x)-2f(\frac{a+x}{2})+f(a)-\frac{k}{4}(x-a)^2$$

则$F(x)$在$[a,b]$可导，并且$F(a)=F(b)=0$

从而，$\exists\eta\in(a,b),F^{'}(\eta)=0$

即$f^{'}(\eta)-f^{'}(\frac{a+\eta}{2})-\frac{k}{2}(\eta-a)=0$

$f^{'}(x)$在$[\frac{\eta+a}{2},\eta]$由Lagrange中值定理可得

$\exists\xi\in(\frac{\eta+a}{2},\eta),f^{'}(\eta)-f^{'}(\frac{a+\eta}{2})=f^{''}(\xi)\frac{\eta-a}{2}$

此时有$k=f^{''}(\xi)$，得证

错解 **将**$f(x)$在$x_0=\frac{a+b}{2}$处Taylor展开得

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$$

将$x=a,x=b$代入得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi)}{2}(a-\frac{a+b}{2})^2$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi)}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2$$

相加得证

5.4

题目 **设**函数$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$(1)\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|$$

$$(2)\max_{x\in[a,b]}|f^{'}(x)|\le\frac{1}{2}(b-a)\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|$$

证明 （1）

当$f(x)$恒为常数时，结论显然

当$f(x)$不恒为常数时，$|f(x)|$的最大值必定时在区间内点$x_0\in(a,b)$取得，由Fermat定理得$f^{'}(x_0)=0$

不妨设$x_0-a\le\frac{b-a}{2}$，由Taylor展开得

$$f(a)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f^{''}(\xi)(a-x_0)^2$$

移项并取绝对值得

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|=|f(x_0)|\le\frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|(a-x_0)^2\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|$$

（2）

$\forall x\in[a,b]$，由Taylor公式：

$$f(a)=f(x)+f^{'}(x)(a-x)+\frac{1}{2}f^{''}(\xi_1)(a-x)^2$$

$$f(b)=f(x)+f^{'}(x)(b-x)+\frac{1}{2}f^{''}(\xi_2)(b-x)^2$$

相减后取绝对值可得

$$\begin{aligned}&|f^{'}(x)|(b-a)\le\frac{1}{2}[|f^{''}(\xi_1)|(a-x)^2+|f^{''}(\xi_2)|(b-x)^2]\\&\le\frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|[(a-x)^2+(b-x)^2]\le\frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|(b-a)^2\end{aligned}$$

从而

$$\max_{x\in[a,b]}|f^{'}(x)|\le\frac{1}{2}(b-a)\max_{x\in[a,b]}|f^{''}(x)|$$

得证

5.5

题目 **设**函数在区间I上连续，且I内只有一个极值点x_0，证明：x_0必为$f(x)$的最值点

证明 不妨设x_0为极小值点，若并非最小值点，存在$x_1\ne x_0,f(x_1)<f(x_0)$

不妨设$x_1 < x_0$，由于$f \in C[x_1,x_0]$，因此f在$[x_1,x_0]$中有异于x_1,x_0的最大值点x_2

而x_2是极大值点，与极值点的唯一性矛盾

5.6

题目 n为偶数，设函数

$$f(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

证明：$f(x)$在$\mathbf{R}$上有正的最小值

证明 由$lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$以及$f \in C(\mathbf{R})$可得$f(x)$在$\mathbf{R}$上有最小值点$x_0$

由于

$$f^{'}(x_0) = 1 + x_0 + \cdots + \frac{x_0^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

可得$f(x_0) = \frac{x_0^n}{n!}$

再有$f^{'}(0) \neq 0$知$x_0 \neq 0$

从而$f(x_0) > 0$，得证

5.7

题目 **设**函数$f(x), g(x)$均在$\mathbf{R}$上有定义，f二阶可导且满足

$$f^{''}(x) + f^{'}(x)g(x) - f(x) = 0$$

若$f(a) = f(b) = 0(a < b)$，证明：$f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$

证明 **由**$f \in C[a,b]$，知$f(x)$在$[a,b]$上有最小值$f(x_0)$，若最小值$f(x_0) < 0$

则有$x_0 \in (a,b), f^{'}(x_0) = 0$

从而$f^{''}(x_0) = f(x_0) < 0$

进而由带$Peano$余项的$Taylor$展开可知

$\exists U^o(x_0), \forall x \in U^o(x_0), f(x) < f(x_0)$

与最小值矛盾，即$f(x)$在$[a,b]$上最小值为0

同理可以证明最大值为0，得证

错解 **由**$f\in C[a,b]$，知$f(x)$在$[a,b]$上有最小值$f(x_0)$，若最小值$f(x_0)<0$

则有$x_0\in(a,b), f^{'}(x_0)=0$

从而$f^{''}(x_0)=f(x_0)<0$

$\exists U(x_0), f^{'}(x)$在$U(x_0)$严格单调减

结合$f^{'}(x_0)=0$可知

$\forall x\in U^o(x_0), f(x)<f(x_0)$

与最小值矛盾，即$f(x)$在$[a,b]$上最小值为0

同理可以证明最大值为0，得证

5.8

题目 **设**函数$f(x)$二阶可导，$f^{'}(0)=0,\forall x\in\mathbf{R}$满足

$$xf^{''}(x)+3x(f^{'}(x))^2=1-e^{-x}$$

证明$f(x)$在$x=0$处取得极小值

证法1 **当**$x\neq 0$时有

$$f^{''}(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}-3(f^{'}(x))^2$$

从而

$$\lim_{x\to 0}f^{''}(x)=1$$

再注意到$f^{'}(x)$在$x=0$连续，由导数极限定理得$f^{''}(0)=1>0$

由极值第二充分条件可得$f(x)$在$x=0$处取得极小值

证法2 **同**上方法有

$$\lim_{x\to 0} f^{''}(x) = 1$$

再由导数定义以及$L'Hospital$法则有

$$f^{''}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{'}(x) - f^{'}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} f^{''}(x) = 1$$

由极值第二充分条件可得$f(x)$在$x = 0$处取得极小值

评注　部分同学在本题中证明到$\lim_{x\to 0} f^{''}(x) = 1$后直接得证