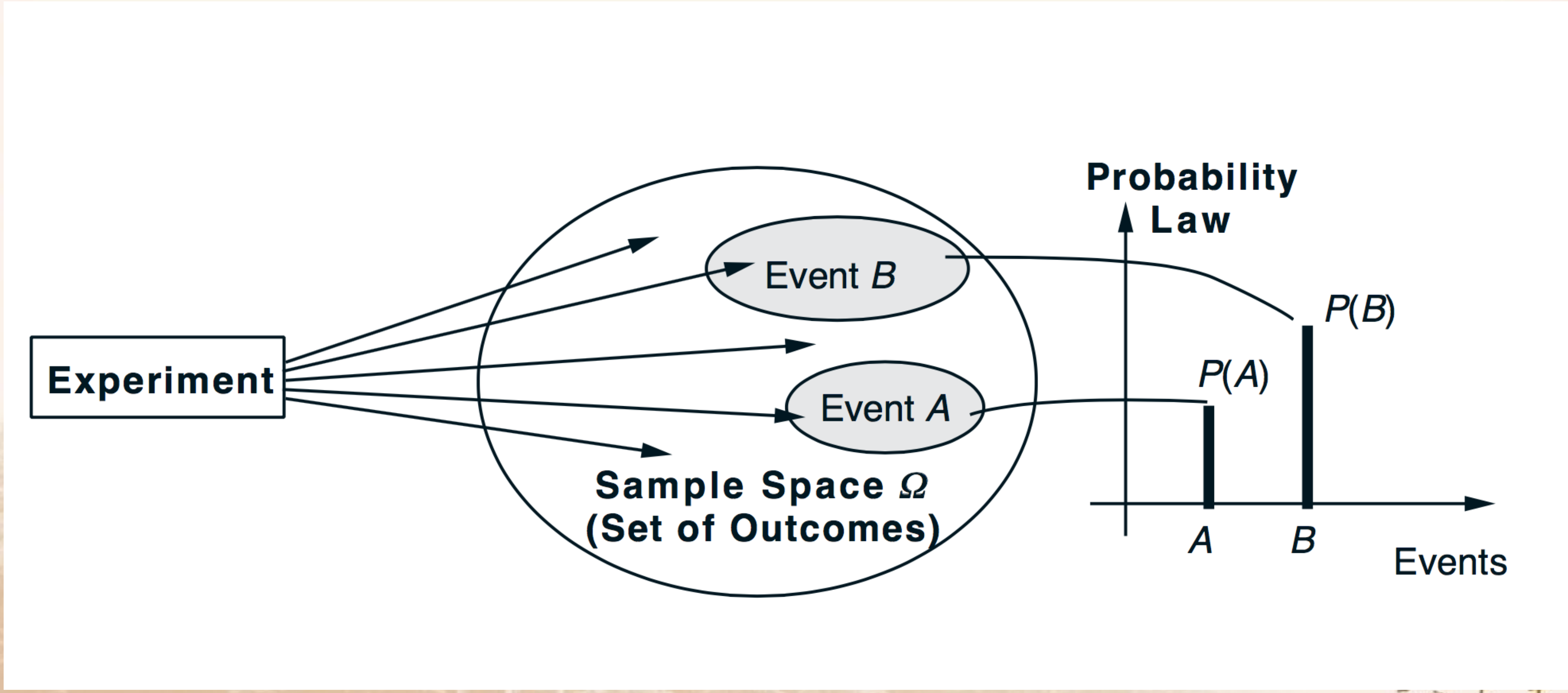
概率论与数理统计
第二章

随机变量与分布

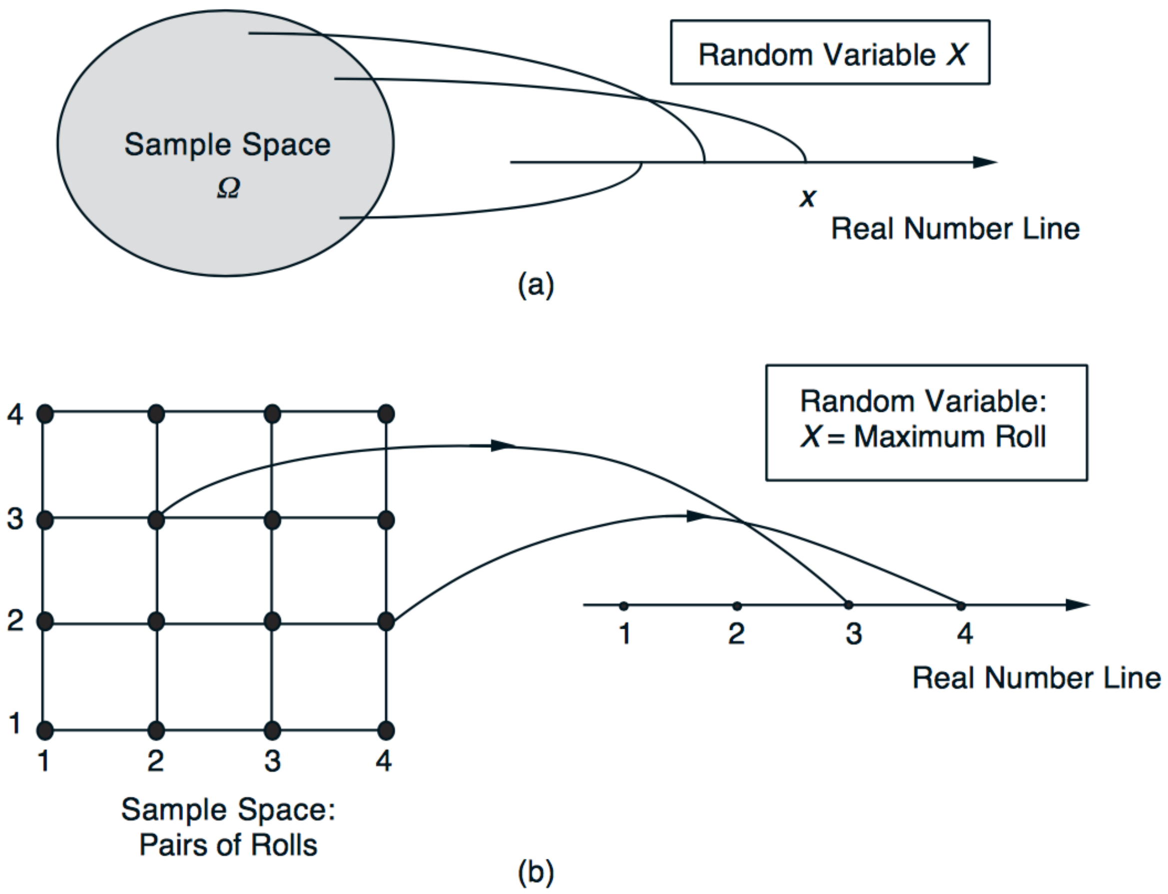
大纲

1. 什么是随机变量
2. 离散型随机变量
   - Bernoulli 分布
   - 二项分布
   - 几何分布
   - Pascal分布（负二项分布）
   - 泊松分布
   - 离散的均匀分布
3. 连续型随机变量
   - 正态分布
   - 指数分布
   - 均匀分布

概率空间


Experiment
Event B
Event A
Sample Space Ω
(Set of Outcomes)
Probability
Law
P(B)
P(A)
A
B
Events

随机变量——样本空间的简单化



随机变量的定义

令 Ω 为一个样本空间. 令 X 是定义在 Ω 上的一个实函数, 则称 X 为一个 (一维) 随机变量.

Definition

常见的随机变量可以分为两大类. 只取有限个或可数个值的随机变量称为**离散型随机变量**; 取连续的值且密度存在的随机变量称为**连续型随机变量**. 当然, 存在既非离散型也非连续型的随机变量. 但它们在实际中并不常见, 也不是我们这里研究的对象.

大纲

1. 什么是随机变量
2. 离散型随机变量
   - Bernoulli 分布
   - 二项分布
   - 几何分布
   - Pascal分布（负二项分布）
   - 泊松分布
   - 离散的均匀分布
3. 连续型随机变量
   - 正态分布
   - 指数分布
   - 均匀分布

创寰宇学府 育天下英才 严济慈 一九八八年五月题

离散型随机变量

设 X 为一随机变量. 如果 X 只取有限个或可数个值, 则称 X 为一个 (一维) 离散型随机变量.

Definition

由于一个随机变量的值是由试验结果决定的，因而是以一定的概率取值. 这个概率分布称为离散型随机变量的概率函数.

设 X 为一离散型随机变量, 其全部可能值为 $\{a_1, a_2, \ldots\}$. 则

$$p_i = P(X = a_i), \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

称为 X 的概率质量函数 (probability mass function, *pmf*) 或分布律.

Definition

概率质量函数 $\{p_i,\ i=1,2,..\}$ 必须满足下列条件:

$$p_i \geq 0,\ i=1,2,....$$
$$\sum_i p_i = 1.$$

概率函数 (1.1) 指出了全部概率 1 是如何在 X 的所有可能值之间分配的. 它可以列表的形式给出:

可能值	a_1	a_2	...	a_i	...
概率	p_1	p_2	...	p_i	...

(1.2)

有时也把 (1.2) 称为随机变量 X 的分布表.

设 Ω 为一样本空间. X 为定义于其上的一个离散型随机变量, 其取值为 $x_1, x_2, ...$ 令 A 为 $\{x_1, x_2, ...\}$ 的任意一个子集. 事件 $\{X$ 取值于 A 中$\}$ 的概率可根据概率的可加性来计算:

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Bernoulli试验

设一个随机试验只有两个可能结果 A 和 $\bar{A}$，则称此试验为一 Bernoulli 试验.

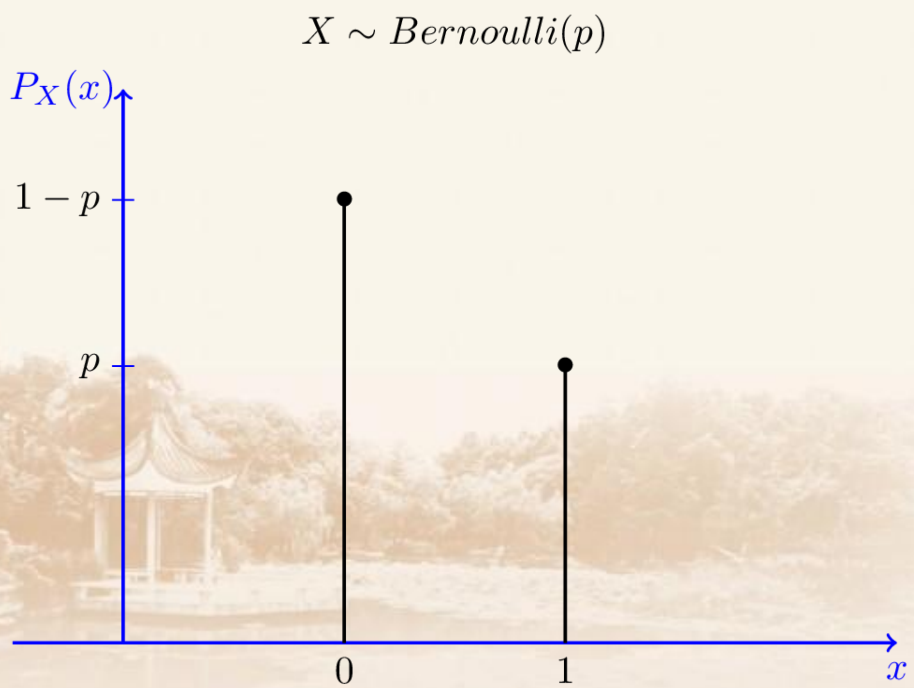
Definition

设将一个可能结果为 A 和 $\bar{A}$ 的 Bernoulli 试验独立地重复 n 次，使得事件 A 每次出现的概率相同，则称此试验为 n 重 Bernoulli 试验.

Definition

Bernoulli分布

设随机变量 X 只取 0,1 两值, $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, 则称 X 服从 0-1 分布或 Bernoulli 分布. 0-1 分布是很多古典概率模型的基础.

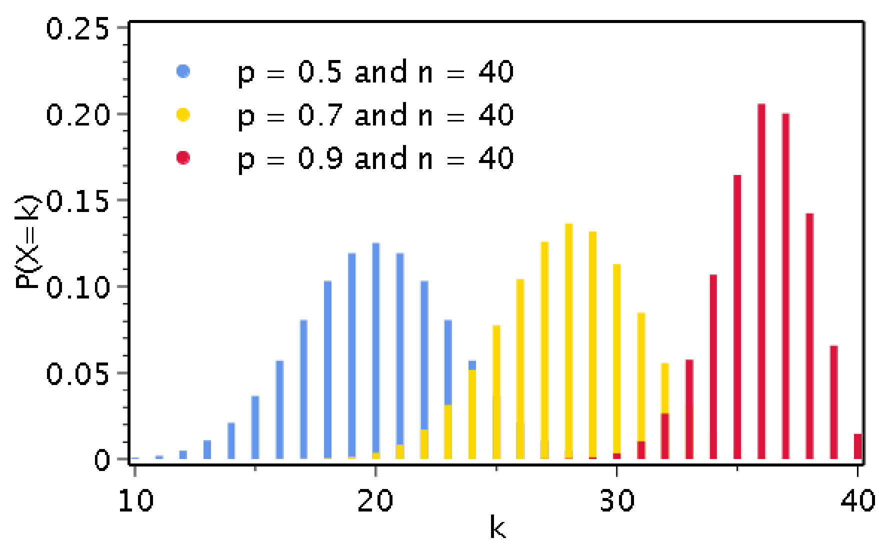


二项分布

设某事件 A 在一次试验中发生的概率为 p. 现把试验独立地重复 n 次. 以 X 记 A 在这 n 次试验中发生的次数，则 X 取值 $0, 1, ..., n$，且有

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{1.3}$$

称 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$.



$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$$

https://i.stack.imgur.com

例子

例 2.1　一批产品有N个，其中废品有M个。现从中随机取出n个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有m个废品”这一事件的概率。

(1) 有放回地选取;

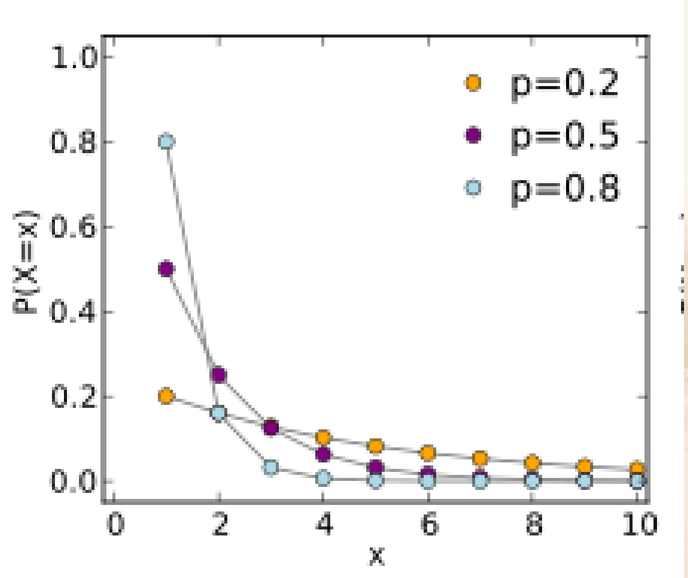
创寰宇学府
育天下英才
严济慈
一九八八年五月题

几何分布

若以 X 表示在可列重贝努里试验中结果 A 出现时的试验次数，即若以“成功”表示结果 A 发生，$p=P(A)=1-q$，则 X 表示首次成功时的试验次数，所以

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots. \tag{1.4}$$

称此分布为几何分布．记为 $X\sim G(p)$.



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

例子

↑Example

一个人要开门，他共有 n 把钥匙。其中仅有一把可以打开门。现随机地有放回的从中选取一把开门，若不成功再放回去重新随机选取一把开门，问这人在第 S 次才首次试开成功的概率。

↓Example

育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月 題

几何分布的无记忆性

定理 1. 以所有正整数为取值集合的随机变量 ξ 服从几何分布 $G(p)$，当且仅当对任何正整数 m 和 n，都有

$$P(\xi > m + n \mid \xi > m) = P(\xi > n). \tag{1.5}$$

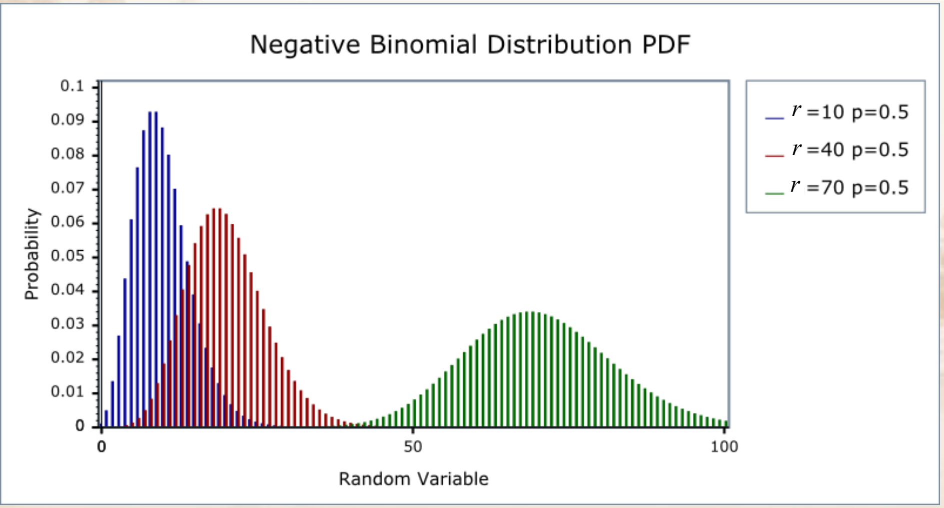
这个性质称为几何分布的无记忆性 (*memoryless property*).

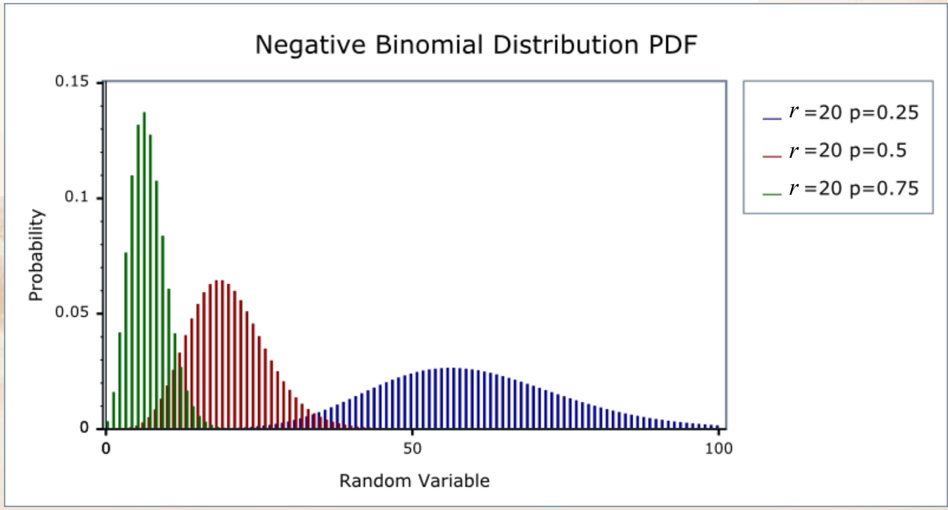
Pascal分布（负二项分布）

在可列重贝努里试验中，若以 X_r 表示第 r 次成功发生时的试验次数，则 X_r 的分布律为

$$\begin{aligned} P(X_r=k) &= P(\{\text{前}k-1\text{次恰有}r-1\text{次成功且第}k\text{次成功}\}) \\ &= P(\{\text{前}k-1\text{次恰有}r-1\text{次成功}\})P(\{\text{第}k\text{次成功}\}) \\ &= C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}\cdot p \\ &= C_{k-1}^{r-1}p^{r}q^{k-r}, \quad k=r,r+1,\cdots. \end{aligned}$$

称此概率分布为 Pascal 分布。





例子

↑Example

(**Banach 火柴问题**) 某人口袋里放有两盒火柴, 每盒装有火柴 n 根. 他每次随机取出一盒, 并从中拿出一根火柴使用. 试求他取出一盒, 发现已空, 而此时另一盒中尚余 r 根火柴的概率.

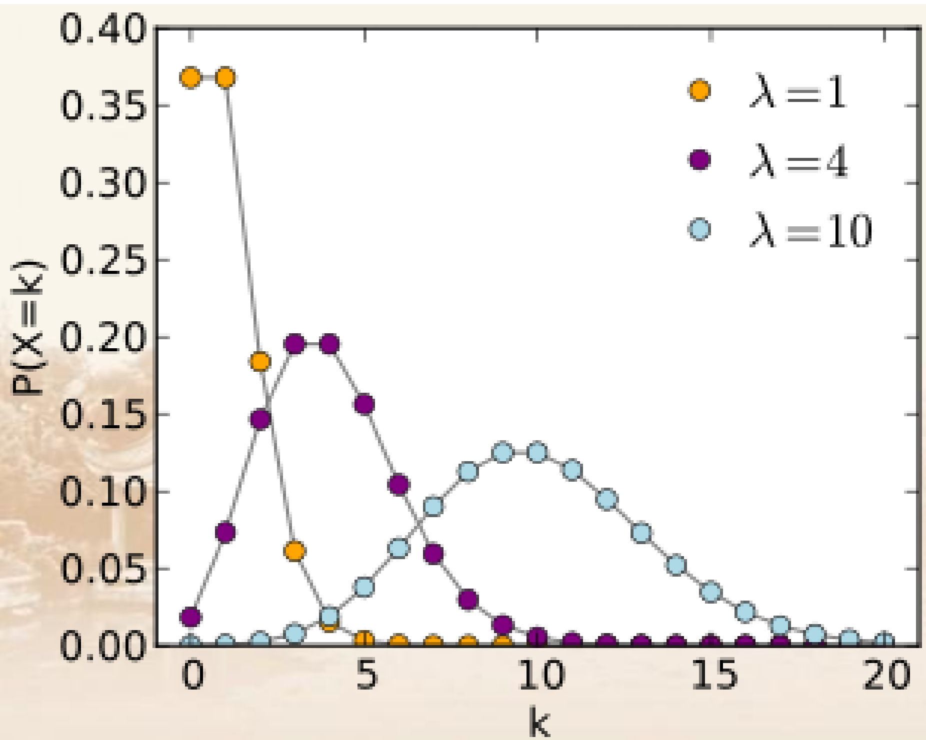
↓Example

泊松（Poisson）分布

设随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots\quad \lambda>0, \qquad (1.7)$$

则称 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，并记 $X\sim P(\lambda)$.



泊松分布的例子

- 某地区100年内发生洪水灾害的次数；
- 某个医院平均每小时出生婴儿的数量；
- 某超市平均每天销售矿泉水的数量；
- 等等

- 它们的特点就是，我们可以预估这些事件的总数，但是没法知道具体的发生时间。已知平均每小时出生3个婴儿，请问下一个小时，会出生几个？

- 泊松分布就是描述某段时间内，事件具体的发生概率

定理 2. 在 n 重 *Bernoulli* 试验中，以 p_n 代表事件 A 在试验中出现的概率，它与试验总数 n 有关. 如果 $np_n \to \lambda$，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{1.10}$$

↑Example

现在需要 100 个符合规格的元件. 从市场上买的该元件有废品率 0.01. 考虑到有废品存在，我们准备买 $100+a$ 个元件使得从中可以挑出 100 个符合规格的元件. 我们要求在这 $100+a$ 个元件中至少有 100 个符合规格的元件的概率不小于 0.95. 问 a 至少要多大?

↓Example

离散的均匀分布

设随机变量 X 取值 $a_1, a_2, ..., a_n$, 且有

$$P(X = a_k) = \frac{1}{n},\ k = 1, ..., n. \tag{1.11}$$

则称 X 服从离散的均匀分布.

可以看出, 离散的均匀分布正是古典概型的抽象.

大纲

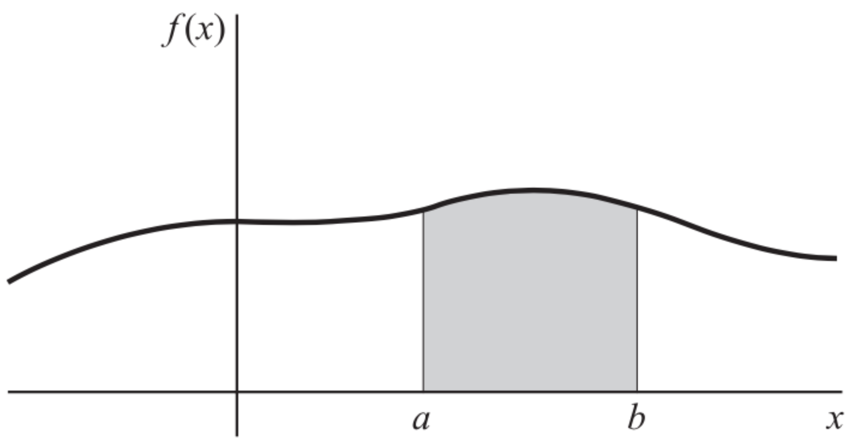
1. 什么是随机变量
2. 离散型随机变量
   - Bernoulli 分布
   - 二项分布
   - 几何分布
   - Pascal分布（负二项分布）
   - 泊松分布
   - 离散的均匀分布
3. 连续型随机变量
   - 正态分布
   - 指数分布
   - 均匀分布

连续性随机变量

X 称为连续型随机变量，如果存在一个函数 f，叫做 X 的概率密度函数，它满足下面的条件：

1. 对所有的 $-\infty < x < +\infty$，有 $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. 对于任意的 $-\infty < a \leq b < +\infty$，有 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Definition



例子

- 试确定常数c，使得函数

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 是一个概率密度函数，并计算P(1<X<2)。

分布函数

- 设X为一随机变量，则函数

$$F(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < +\infty.$$

- 称为X的（累计）分布函数（cumulative distribution function）。

设 X 为一离散型随机变量，它以概率 $\{p_1, \ldots, p_n, ..\}$ 取值 $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. 则

$$F(x) = \sum_{a_i \leq x} p_i.$$

设 X 为一连续型随机变量. 则

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad -\infty < x < +\infty$$

称为 X 的 (累积) 分布函数.

University of Science and Technology of China

分布函数的性质

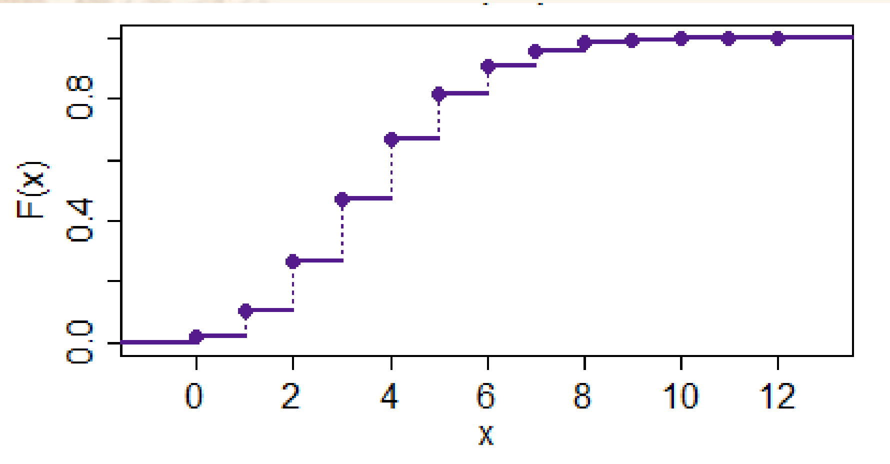
分布函数 F 具有下列性质:

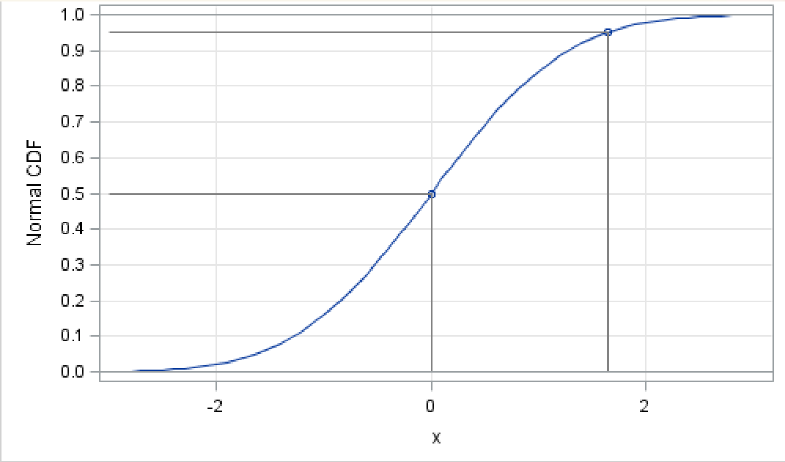
(1) F 是非减的函数;

对任何 $x_1 < x_2$ 都有, $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2) \geq 0$

(2) $0 \leq F(x) \leq 1, x \in R$, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

(3) $F(x)$ 右连续;





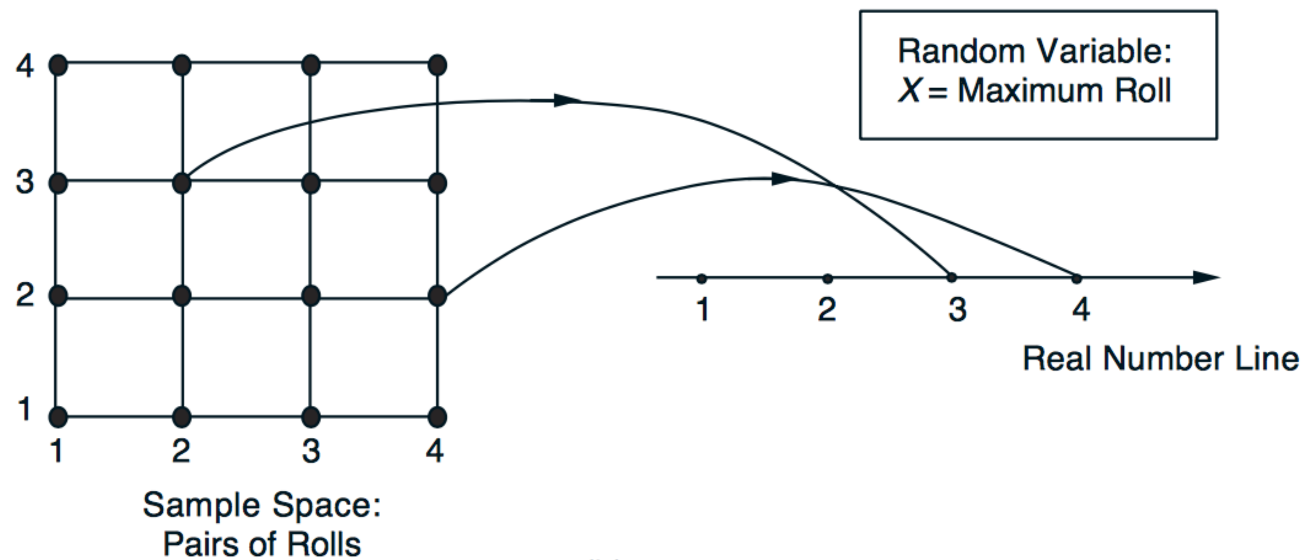
分布函数与密度函数

对于连续随机变量, 如果 $F(x)$ 在点 x 的导数存在, 则

$$f(x) = F'(x).$$

对于离散型随机变量，分布律是怎么由分布函数F(x)得到？

例子


Random Variable:
X = Maximum Roll
4
3
2
1
1
2
3
4
Sample Space:
Pairs of Rolls
1
2
3
4
Real Number Line

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

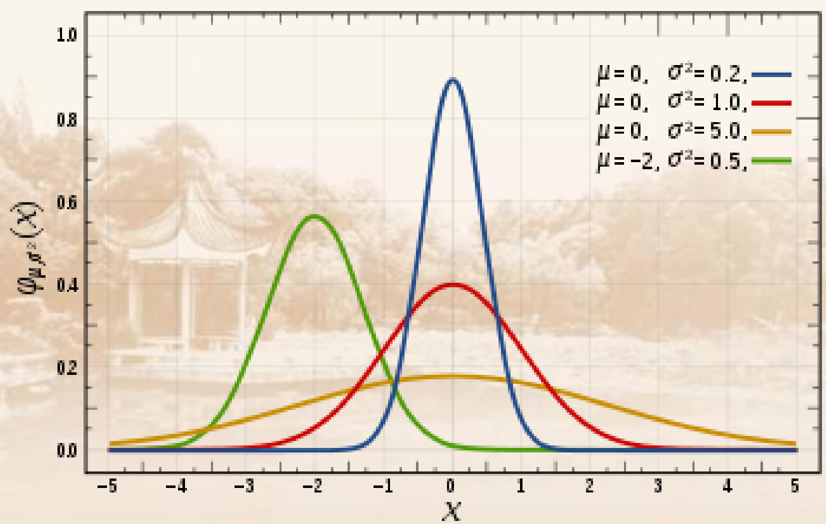
正态分布

如果一个随机变量 X 具有概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad -\infty<x<+\infty \tag{2.3}$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$ $\sigma^2>0$，则称 X 为一正态随机变量，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 以 (2.3) 为密度的分布称为参数为 μ 和 σ^2 的正态分布.

具有参数 $\mu=0$，$\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布. 用 $\Phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 表示标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数和密度函数.



设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

↑Example
↓Example

证: 由

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right) = P(X \leq \sigma x + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma x+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} dt$$

$$\overset{t=\sigma z+\mu}{=\!=} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

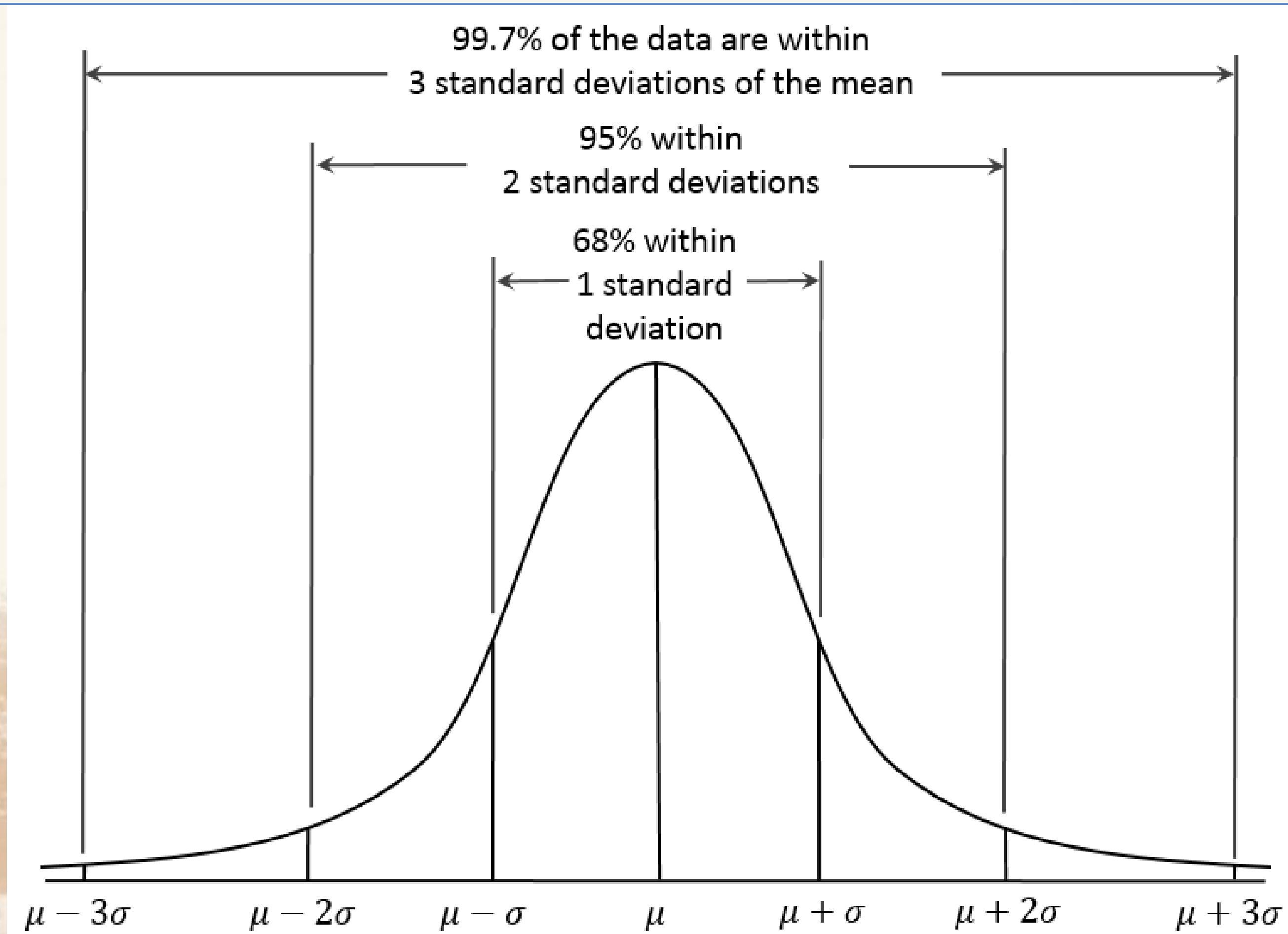
标准正态分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

$P(X<3)=?$

$P(|X|<3)=?$

3σ原则


99.7% of the data are within
3 standard deviations of the mean
95% within
2 standard deviations
68% within
1 standard
deviation
$\mu - 3\sigma$
$\mu - 2\sigma$
$\mu - \sigma$
μ
$\mu + \sigma$
$\mu + 2\sigma$
$\mu + 3\sigma$

从泊松分布说起

- 洪水灾害发生的时间间隔；
- 婴儿出生的时间间隔；
- 矿泉水销售的时间间隔；

- 泊松过程中，第k次随机事件与第k+1次随机事件出现的时间间隔服从指数分布。

$$P(X>t)=P(N(t)=0)=\frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

$$=e^{-\lambda t}$$

指数分布

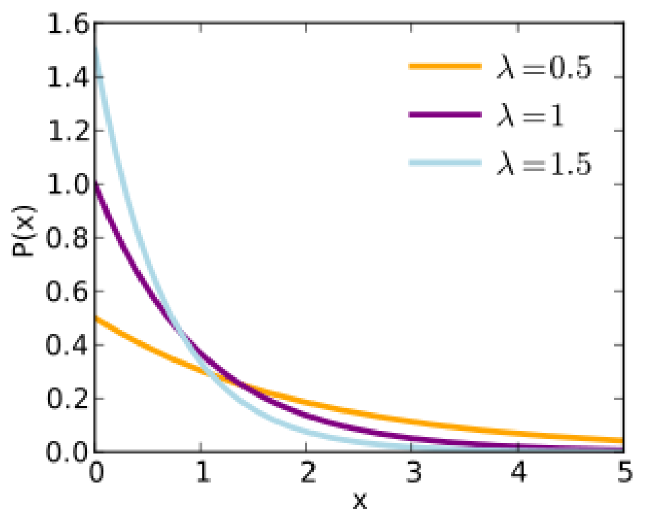
若随机变量 X 具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

指数分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0,\\ 0 & x\le 0.\end{cases} \tag{2.6}$$



指数分布经常用于作为各种" 寿命" 的分布的近似. 令 X 表示某元件的寿命. 我们引进 X 的失效率函数如下:

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x | X > x)}{\Delta x}.$$

失效率表示了元件在时刻 x 尚能正常工作, 在时刻 x 以后, 单位时间内发生失效的概率. 则如果

$$h(x) \equiv \lambda \quad (\text{常数}), \quad 0 < x < +\infty,$$

X 服从指数分布. 即指数分布描述了无老化时的寿命分布.

例子

- 排队论里：
- 假设某银行在工作时间内平均每15分钟服务一个人，也就是说一小时之内平均服务4人，λ= 4，那你去银行排队等待少于30分钟的概率是多少？

↑Example

设 X 表示某种电子元件的寿命，$F(x)$ 为其分布函数。若假设元件无老化，即元件在时刻 x 正常工作的条件下，其失效率保持为某个常数 λ，与 x 无关。试证明 X 服从指数分布。

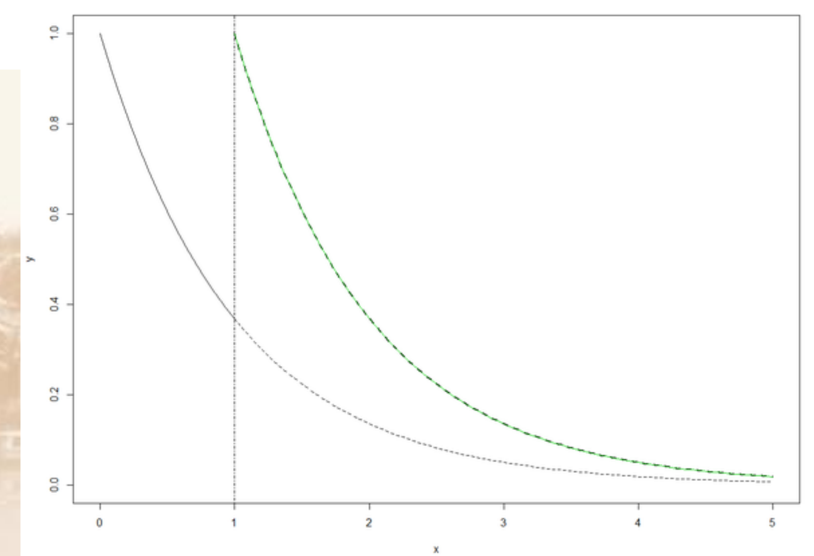
↓Example

指数分布的无记忆性

指数分布的最重要的特点是“无记忆性”. 即若 X 服从指数分布，则对任意的 $s, t > 0$ 有

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t). \tag{2.7}$$

即寿命是无老化的. 可以证明, 指数分布是唯一具有性质 (2.7) 的连续型分布.



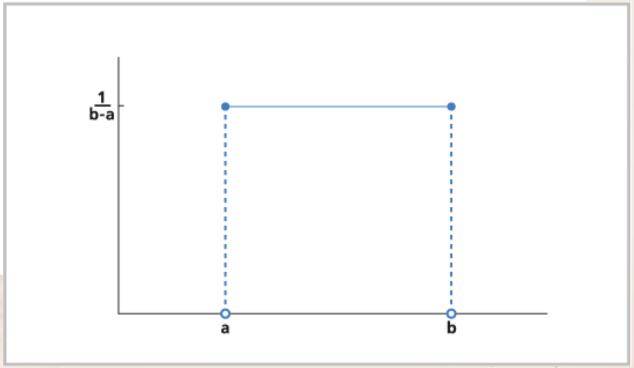
均匀分布

设 $-\infty < a < b < +\infty$，如果随机变量 X 具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b\,, \\ 0 & \text{其它}, \end{cases} \tag{2.8}$$

则称该随机变量为区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, 记作 $U[a,b]$. 如此定义的 $f(x)$ 显然是一个概率密度函数. 容易算出其相应的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



大纲

4. 多维随机变量
   - 多元分布
   - 边缘分布

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$. 如果每个 X_i 都是一个随机变量, $i = 1, \cdots, n$, 则称 X 为 n 维随机变量或者随机向量.

Definition

离散型多维随机变量

如果每一个 X_i 都是一个离散型随机变量，$i=1,...,n$，则称 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 为一 n 维离散随机变量. 设 X_i 的所有可能取值为 $\{a_{i1},a_{i2},\cdots\}$，$i=1,\ldots,n$，则称

Definition

$$p(j_1,\cdots,j_n)=P(X_1=a_{1j_1},\ldots,X_n=a_{nj_n}),\ j_1,...,j_n=1,2,... \tag{2.1}$$

为 n 维随机变量 X 的概率函数.

容易证明概率函数具有下列性质:

(1) $p(j_1,\ldots,j_n)\geq 0,\quad j_i=1,2,\cdots,\ i=1,2,\ldots,n;$

(2) $\sum\limits_{j_1,\cdots,j_n} p(j_1,\ldots,j_n)=1.$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

多项分布

↑Example

设 $A_1,\cdots,A_n$ 为某一实验下的完备事件群，即 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互斥且和为 Ω。记 $p_k=P(A_k)(k=1,\ldots,n)$，则 $p_k\geq 0, p_1+\cdots+p_n=1$。现将实验独立的重复作 N 次，分别用 X_i 表示事件 A_i 出现的次数 $(i=1,\cdots,n)$。则 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 为一离散型随机向量，试求 X 的概率函数。此分布律称为多项分布，记为 $M(N;p_1,\ldots,p_n)$.

↓Example

解：由于试验独立进行，总的结果数为 N，记结果 A_i 出现的次数为 k_i，则 $k_1+\cdots+k_n=N$。因此相当于多组组合，所以

$$
\begin{aligned}
P(X_1=k_1,\cdots,X_n=k_n) &= \frac{N!}{k_1!\cdots k_n!}P(\underline{A_1\cdots A_1}\ldots\underline{A_n\cdots A_n}) \\
&= \frac{N!}{k_1!\cdots k_n!}p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n},
\end{aligned}
$$

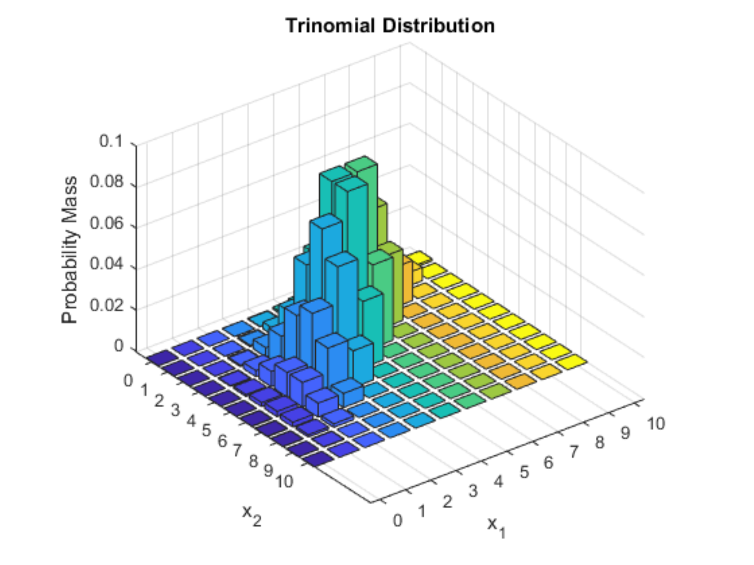
其中 $k_1,\ldots,k_n$ 为非负整数且 $k_1+\cdots+k_n=N$.

离散型二维随机变量

我们具体来看一下二维离散分布. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为 $\{(x_i,y_j): i=1,...,n, j=1,2,...,m\}$. 我们经常以列联表的形式来表示二维离散型随机变量的概率分布. 记

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\ i=1,...,n, j=1,...,m.$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	行和
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\vdots$	p_{nm}	$p_{\cdot m}$
列和	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	1



例子

↑Example

从一个包含五个黑球, 六个白球和七个红球的罐子里抽取四个球. 令 X 是抽到白球的数目, Y 是抽到红球的数目. 则二维随机变量 (X,Y) 的概率函数为

$$p(x,y)=\frac{\binom{6}{x}\binom{7}{y}\binom{5}{4-x-y}}{\binom{18}{4}},\ 0\le x+y\le 4. \tag{2.2}$$

↓Example

Y \ X	0	1	2	3	4	行和
0	$\frac{1}{612}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{5}{102}$	$\frac{5}{153}$	$\frac{1}{204}$	$\frac{11}{102}$
1	$\frac{7}{306}$	$\frac{7}{51}$	$\frac{35}{204}$	$\frac{7}{153}$		$\frac{77}{204}$
2	$\frac{7}{102}$	$\frac{7}{34}$	$\frac{7}{68}$			$\frac{7}{17}$
3	$\frac{35}{612}$	$\frac{7}{102}$				$\frac{77}{612}$
4	$\frac{7}{612}$					$\frac{7}{612}$
列和	$\frac{99}{612}$	$\frac{22}{51}$	$\frac{11}{34}$	$\frac{4}{51}$	$\frac{1}{204}$	1

连续型随机变量

称 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，如果存在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$，使得对任意的 $-\infty < a_1 \leq b_1 < +\infty, ..., -\infty < a_n \leq b_n < +\infty$，有

Definition

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, ..., a_n \leq X_n \leq b_n) = \int_{a_n}^{b_n} ... \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

则称 f 为 X 的概率密度函数.

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为 n 维随机变量. 对任意的 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，称

Definition

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \qquad (2.3)$$

为 n 维随机变量 X 的 (联合) 分布函数.

二维正态分布

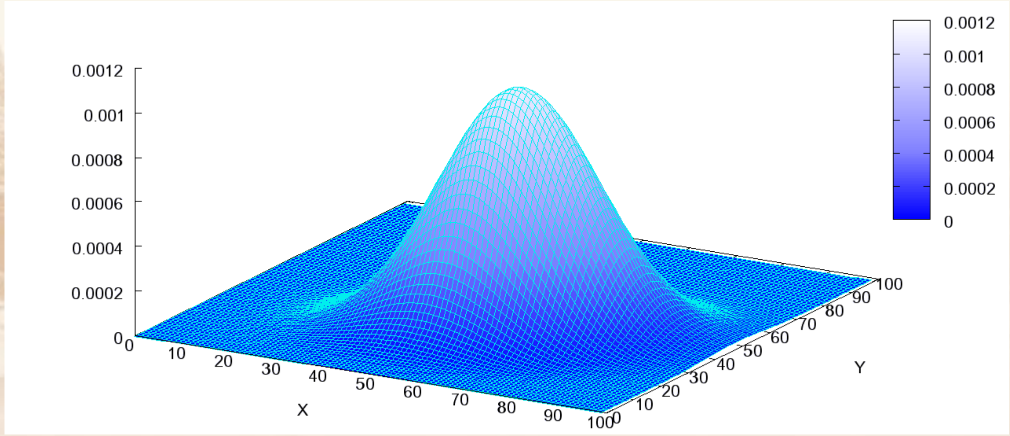
↑Example

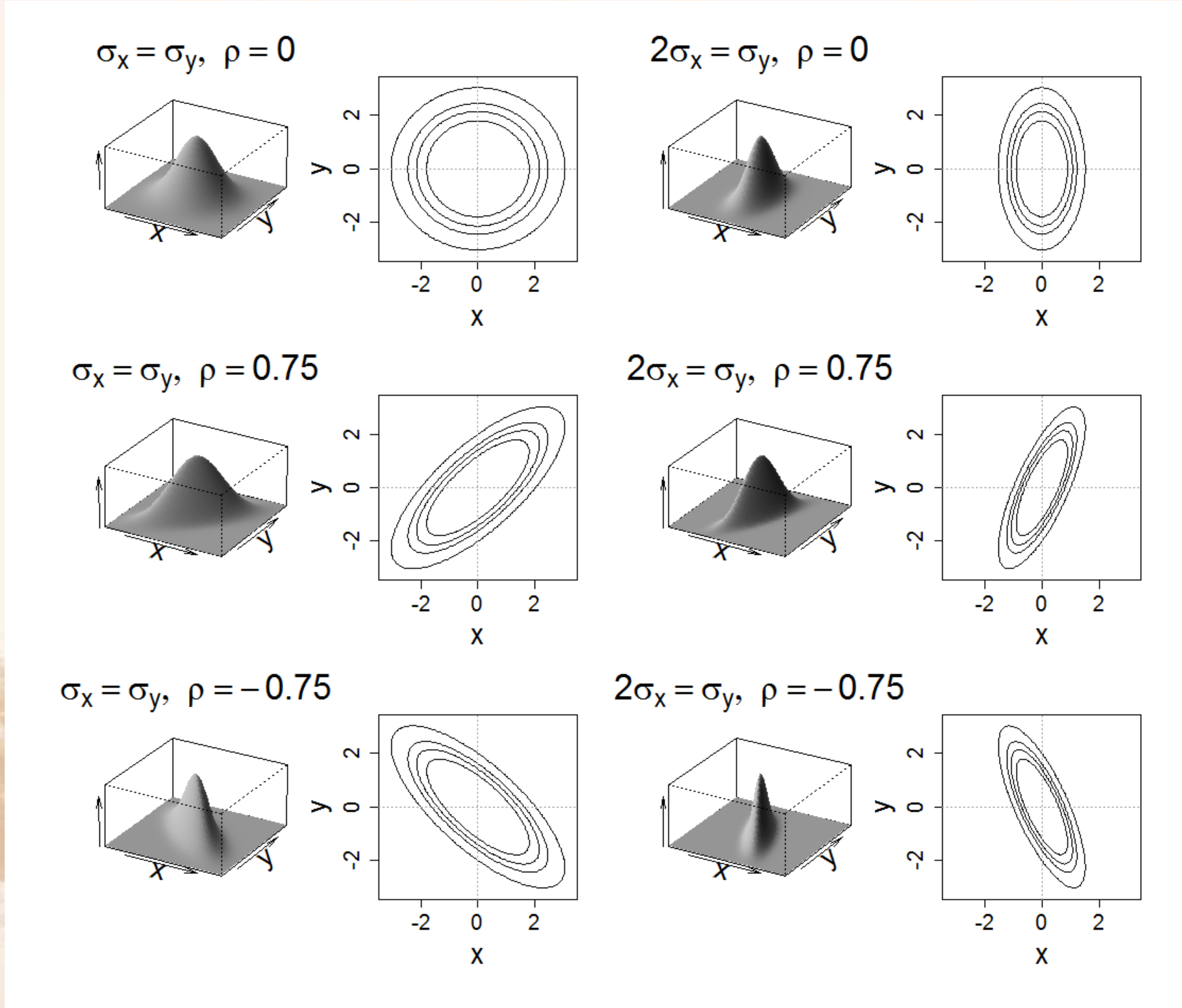
设 (X,Y) 的概率密度函数有形式

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} -2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $-\infty < a,b < \infty$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty$, $-1 \le \rho \le 1$. 称 (X,Y) 服从参数为 $a,b,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，记为 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

↓Example




$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0$
$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0.75$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0.75$
$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = -0.75$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = -0.75$
x
y
-2
0
2

二维均匀分布

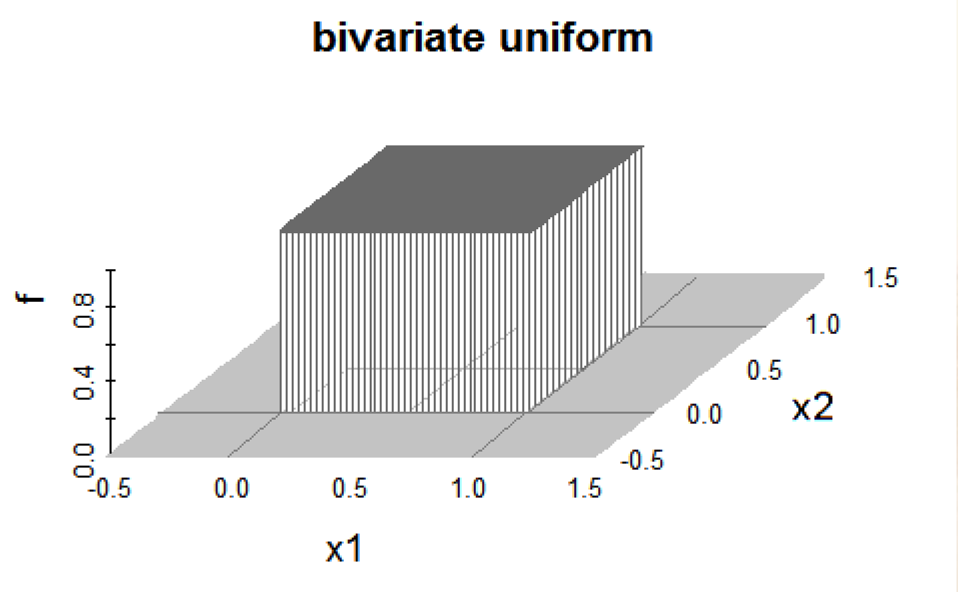
↑Example

考虑二维随机变量 $X=(X_1,X_2)$，其概率密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 1/[(b-a)(d-c)] & \text{当 } a\le x_1\le b,\ c\le x_2\le d, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

称此概率密度为 $[a,b]\times[c,d]$ 上的均匀分布.

↓Example



边缘分布

设 $(X_1,...,X_n) \sim F$ 已知. 令 $(i_1,...,i_m) \subset (1,...,n)$, 则 $X_{i_1},...,X_{i_m}$ 的分布称为 $X_1,...,X_n$ 或 F 的一个m维边缘分布. 如何得到该分布?

引例

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	行和
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\vdots$	p_{nm}	$p_{\cdot m}$
列和	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	1

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j}^{m} p_{ij} = p_{i\cdot},$$

离散型边缘分布

类似地, 可对 $n\ (n>2)$ 维的随机变量定义边缘分布. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为 n 维随机变量，其概率分布 F 已知. 令 $i_1<\cdots<i_m$ 为 $1,\ldots,n$ 的任一子集，则 $X_{i_1},\ldots,X_{i_m}$ 的概率函数为

$$
\begin{aligned}
& p_{i_1\ldots i_m}(j_{i_1},\ldots,j_{i_m}) = P(X_{i_1}=a_{i_1 j_{i_1}},\ldots,X_{i_m}=a_{i_m j_{i_m}}) \\
= \quad & P(X_{i_1}=a_{i_1 j_{i_1}},\ldots,X_{i_m}=a_{i_m j_{i_m}}) \\
= \quad & \sum_{j_{i_{m+1}},\ldots,j_{i_n}} P(X_1=a_{1j_1},\ldots,X_{i_1}=a_{i_1 j_{i_1}},\ldots,X_{i_m}=a_{i_m j_{i_m}}, \\
& X_{i_{m+1}}=a_{i_{m+1} j_{i_{m+1}}},\ldots,X_n=a_{n j_n}) \\
= \quad & \sum_{\text{除}j_{i_1},\ldots,j_{i_m}\text{的所有}} p(j_1,\ldots,j_n).
\end{aligned}
$$

多项分布的边缘分布

Marginal Distributions

3. Show that $Y_{n,i}$ has the binomial distribution with parameters n and p_i:

$$\mathbb{P}(Y_{n,i} = j) = \binom{n}{j} p_i^{\,j} (1 - p_i)^{n-j}, \ \ j \in \{0, 1, ..., n\}$$

a. Give a probabilistic proof, by defining an appropriate sequence of Bernoulli trials.
b. Give an analytic proof, using the joint probability density function.

Grouping

The multinomial distribution is preserved when the counting variables are combined. Specifically, suppose that $(A_1, A_2, ..., A_m)$. is a partition of the index set $\{1, 2, ..., k\}$ into nonempty subsets. For $j \in \{1, 2, ..., m\}$ let

$$Z_{n,j} = \sum_{i \in A_j} Y_{n,i}, \quad q_j = \sum_{i \in A_j} p_i$$

4. Show that $\mathbf{Z}_n = (Z_{n,1}, Z_{n,2}, ..., Z_{n,m})$ has the multinomial distribution with parameters n and $(q_1, q_2, ..., q_m)$.

a. Give a probabilistic proof, by defining an appropriate sequence of multinomial trials.
b. Give an analytic proof, using the joint probability density function.

育天下英才 創寰宇學府

例子

↑Example

袋中有 5 张外形相同的卡片，其中 3 张写上数字"0"，另 2 张写上"1"。现从袋中任取两张卡片，分别以 ξ,η 表示第一张和第二张卡片上的数字，试求分别在有放回和不放回两种情形下 (ξ,η) 的联合分布律及边际分布律.

↓Example

$\eta\backslash\xi$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{i\cdot}$	3/5	2/5	1

$\eta\backslash\xi$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	6/20	6/20	3/5
1	6/20	2/20	2/5
$p_{i\cdot}$	3/5	2/5	1

边际分布律不能决定联合分布律！

引例：连续型边缘分布

现考虑连续型随机向量的边缘分布. 先考虑二维的情形. 设 (X,Y) 有概率密度函数 $f(x,y)$. 则

$$\begin{aligned} P(x_1 \le X \le x_2) &= P(x_1 \le X \le x_2, -\infty < Y < +\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1}^{x_2} f(u,v)dudv \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(u)du, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv. \tag{2.5}$$

从 (2.4) 我们可以看出, X 的边缘密度函数即为 (2.5). 类似地, Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du. \tag{2.6}$$

创寰宇学府 育天下英才
一九八八年五月 严济慈题

连续型边缘分布

当 $n > 2$ 时, 令 $f(x_1, ..., x_n)$ 为 n 维连续型随机变量 $(X_1, ..., X_n)$ 的概率密度函数. 设 $(i_1, \cdots, i_m)$ 为 $(1, 2, ..., n)$ 的一个子集. 则同上可证, $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 的概率密度函数为

$$f(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) = \int ... \int f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

其中积分是对除 $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 之外的所有变量来求积.

寰宇學府
天下英才
嚴濟慈
一九八八年五月題

例子

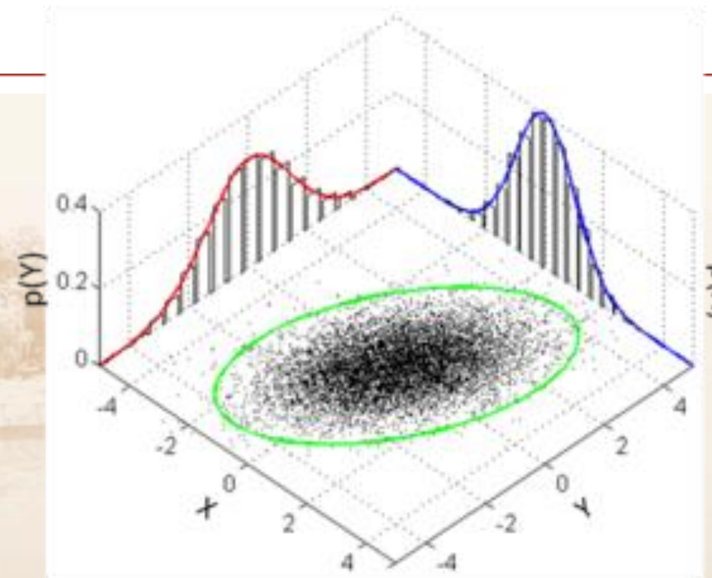
↑Example

设 (X, Y) 的联合概率密度有形式 $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\
& \left.\left.-2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $-\infty < a, b < \infty; 0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty; -1 \leq \rho \leq 1$. 则称 (X, Y) 服从参数为 $a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二元正态分布，记为 $N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 试计算 X 和 Y 的边际概率密度。

↓Example



创寰宇学府 育天下英才
一九八八年五月 严济慈题

例子

↑Example

考虑两个概率密度函数

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= x+y, \qquad 0<x,y<1 \\
q(x,y) &= (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}), \qquad 0<x,y<1
\end{aligned}
$$

试求边际概率密度。

↓Example

边际概率密度不能决定联合概率密度！

大纲

5. 条件概率分布

6. 随机变量的独立性

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

离散型随机变量的**条件分布**

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其全部的可能取值为 $\{(x_i,y_j):i,j=1,2,\cdots\}$。记其联合分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\qquad i,j=1,2,\cdots$$

若对给定的事件 $\{Y=y_j\}$，其概率 $P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在给定 $Y=y_j$ 的条件下 X 的**条件分布律（概率函数）**。类似的，若 $P(X=x_i)>0$，则称

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots$$

为在给定条件 $X=x_i$ 下 Y 的**条件分布律**。

創寰宇學府

例子

↑Example

设二维随机向量 (X_1, X_2) 的联合分布律如下所示:

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	5	行和 $p_{i\cdot}$
1	0.17	0.05	0.21	0.43
3	0.04	0.28	0.25	0.57
列和 $p_{\cdot j}$	0.21	0.33	0.46	1.00

试求当 $X_2 = 0$ 时，X_1 的条件分布律。

↓Example

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

例子

设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim M(N;p_1,p_2,\ldots,p_n)$，试求 X_1 在给定 $X_2=k$ 的条件下的条件分布律。

↑Example

↓Example

創寰宇學府 育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月題

连续性随机变量的条件分布

设 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)$，我们考虑在给定 $y \le Y \le y+\epsilon$ 的条件下 X 的条件分布函数 (设$P\{y \le Y \le y+\epsilon\} > 0$)

$$\begin{aligned}
P(X \le x | y \le Y \le y+\epsilon) &= \frac{P(X \le x, y \le Y \le y+\epsilon)}{P(y \le Y \le y+\epsilon)} \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\epsilon} f(u,v)dvdu \Big/ \int_{y}^{y+\epsilon} f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{\int_y^{y+\epsilon} f(u,v)dv}{\int_y^{y+\epsilon} f_Y(y)dy} du
\end{aligned}$$

对上式两端关于 x 求导并令 $\epsilon \to 0$, 可求得 X 在给定条件 $Y=y$ 下的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) > 0.$$

记为

$$X|Y=y \sim f_{X|Y}(x|y).$$

例子

$\overline{\uparrow}$Example

设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求 $X|Y=y$ 的条件概率密度。

$\underline{\downarrow}$Example

$\overline{\uparrow}$Example

设 X,Y 服从单位圆上的均匀分布，试求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

$\underline{\downarrow}$Example

大纲

5. 条件概率分布

6.随机变量的独立性

随机变量的独立性

称随机变量 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，如果对任意的实数区间 $A_1,\ldots,A_n$ 都有

$$P(X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)\cdots P(X_n \in A_n)$$

Definition

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量，如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1,\cdots,x_n) = F_1(x_1)\cdots F_n(x_n), \quad \forall\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

则称随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立.

Definition

Definition

称离散型随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，若它们的联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积，即

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n),$$

其中 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的值域中的任意一点.

Definition

称连续型随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，若它们的联合密度等于各自的边缘密度的乘积，即

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \quad \forall \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

例子

设 $(X,Y) \sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0$。

↑Example ↓Example

设 (X,Y) 服从矩形 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上的均匀分布，则 X 与 Y 相互独立。

↑Example ↓Example

设 (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布，则 X 与 Y 不独立。

↑Example ↓Example

大纲

7. 随机变量的函数的分布

随机变量的和

随机变量的商

随机变量的极大极小值

常用分布关系图

一维离散型随机变量

设 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

$g : R \to R$，令 $Y = g(X)$，则 Y 的分布律为

$$P(Y = y_j) = P(g(X) = y_j) = \sum_{x_i : g(x_i) = y_j} P(X = x_i) = \sum_{i : g(x_i) = y_j} p_i$$

寰宇學府
天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

例子

↑Example

设 X 的概率函数为

X	-1	0	1	2
P	1/4	1/2	1/8	1/8

试求 $Y = X^2$， $Z = X^3 + 1$ 的分布律。

↓Example

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

一维连续性随机变量

定理 1. *[密度变换公式]* 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)$, $x \in (a,b)(a,b$ 可以为 $\infty)$, 而 $y=g(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 上是严格单调的连续函数，存在唯一的反函数 $x=h(y), y \in (\alpha,\beta)$ 并且 $h'(y)$ 存在且连续，那么 $Y=g(X)$ 也是连续型随机变量且有概率密度函数

$$p(y)=f(h(y))|h'(y)|, \quad y \in (\alpha,\beta).$$

设随机变量 $X \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 求 $Y=tgX$ 的概率密度函数。

设随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$, $a<x<b$. 如果可以把 (a,b) 分割为一些 (有限个或可列个) 互不重叠的子区间的和 $(a,b)=\bigcup_j I_j$, 使得函数 $u=g(t)$, $t\in(a,b)$ 在每个子区间上有唯一的反函数 $h_j(u)$, 并且 $h_j'(u)$ 存在连续, 则 $\eta=g(\xi)$ 是连续型随机变量, 其密度函数为:

$$p_\eta(x)=\sum_j p_\xi(h_j(x))|h_j'(x)|\ .$$

设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

↑Example

↓Example

二元连续性随机变量

定理 2. 设 (ξ_1,ξ_2) 是 2 维连续型随机向量, 具有联合密度函数 $p(x_1,x_2)$, 设 $\zeta_j=f_j(\xi_1,\xi_2), j=1,2$. 若 (ξ_1,ξ_2) 与 (ζ_1,ζ_2) 一一对应, 逆映射 $\xi_j=h_j(\zeta_1,\zeta_2), j=1,2$. 假定每个 $h_j(y_1,y_2)$ 都有一阶连续偏导数. 则 (ζ_1,ζ_2) 亦为连续型随机向量, 且其联合概率密度为

$$q(y_1,y_2)=\begin{cases} p\left(h_1(y_1,y_2),h_n(y_1,y_2)\right)|J|, & (y_1,y_2)\in\mathbb{D}, \\ 0, & (y_1,y_2)\notin\mathbb{D}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{D}$ 是随机向量 (ζ_1,ζ_2) 的所有可能值的集合, J 是变换的 $Jaccobi$ 行列式, 即

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

创寰宇學府 才

例子

$\overline{\uparrow}$Example

在直角坐标平面上随机选取一点, 分别以随机变量 ξ 与 η 表示其横坐标和纵坐标, 可以认为 ξ 与 η 相互独立. 如果 ξ 与 η 都服从正态分布 $N(0,1)$, 试求其极坐标 (ρ,θ) 的分布.

$\underline{\downarrow}$Example

创寰宇学府 育天下英才
严济慈 一九八八年五月 题

大纲

1. 随机变量的函数的分布
2. 随机变量的和
3. 随机变量的商
4. 随机变量的极大极小值
5. 常用分布关系图

随机变量的和

当 ξ, η 是相互独立的非负整值随机变量，各有分布律 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$. 那么 $\xi+\eta$ 有分布律

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

称此公式为**离散卷积公式**

当 X 与 Y 独立时，分别记 X 和 Y 的概率密度为 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$，则 $X+Y$ 的概率密度为

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy \quad \triangleq \quad f_1 * f_2(z)=f_2 * f_1(z)$$

称此公式为**卷积公式**。

例子

设 $X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(m,p)$ 且 X 和 Y 相互独立，则 $X+Y \sim B(n+m,p)$。

↑Example

↓Example

再生性

设 $X \sim P(\lambda)$，$Y \sim P(\mu)$，且 X 和 Y 独立，则有 $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$。即 *Poisson* 分布亦具有再生性。

↑Example

↓Example

↑Example

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且 X 与 Y 相互独立，则:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

更一般地，设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \cdots, n$, $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立. $a_1, \cdots, a_n, b$ 为任意 $n+1$ 个实数，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 不全为零. 令 $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, 则有: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$.

↓Example

育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月 題

例子

设 X 服从期望为 2 的指数分布，$Y \sim U(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立。求 $X-Y$ 的概率密度和 $P(X \le Y)$。

↑Example
↓Example

设 $X_1, \ldots, X_n i.i.d \sim N(0,1)$, 试求 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的分布.

↑Example
↓Example

自由度为n的卡方分布

创寰宇学府 育天下英才
严济慈 一九八八年五月题

具有再生性的分布

- 二项分布 (关于试验次数具有再生性)
- $Poisson$ 分布 (关于参数 λ 具有再生性)
- $Pascal$ 分布 (关于成功次数 r 具有再生性)
- 正态分布 (关于两个参数都具有再生性)
- χ^2 分布具有再生性

大纲

1. 随机变量的函数的分布
2. 随机变量的和
3. 随机变量的积
4. 随机变量的商
5. 随机变量的极大极小值
6. 常用分布关系图

大纲

1. 随机变量的函数的分布
2. 随机变量的和
3. 随机变量的商
4. 随机变量的极大极小值
5. 常用分布关系图

定理 5. 如果 (ξ,η) 是二维连续型随机向量，它们的联合密度为 $f(x,y)$，则它们的商 ξ/η 是连续型随机变量，具有密度函数

$$
\begin{aligned}
&p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|t|f(xt,t)dt, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.\\
\text{而 } &p_{\frac{\eta}{\xi}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|f(u,xu)du, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

寰宇學府
天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

设随机变量 ξ 与 η 相互独立, 同服从参数 $\lambda = 1$ 的指数分布, 试求 ξ/η 的密度函数.

↑Example

↓Example

设 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim \chi_n^2$, 且 X_1 与 X_2 独立。求 $Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 的概率密度函数. (记 $Y \sim t_n$, 称为自由度为 n 的 t 分布)。

↑Example

↓Example

设 $X_1 \sim \chi_n^2$, $X_2 \sim \chi_m^2$, 且 X_1 与 X_2 独立, 求 $Y = \frac{X_1/n}{X_2/m}$ 的概率密度函数. (记 $Y \sim F_{n,m}$, 称为自由度为 n, m 的 F 分布)。

↑Example

↓Example

学府英才

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

大纲

1. 随机变量的函数的分布
2. 随机变量的和
3. 随机变量的商
4. 随机变量的极大极小值
5. 常用分布关系图

创寰宇学府 育天下英才 严济慈 一九八八年五月题

对于 n 个随机变量 $X_1, ..., X_n$, 我们可以考察它们的最大值和最小值:

$$X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\},$$

$$X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}.$$

如此定义的 $X_{(n)}$ 与 $X_{(1)}$ 也是随机变量.

当 $X_1, ..., X_n$ 相互独立时, 我们不难利用它们的分布函数 $F_1(x), ..., F_n(x)$ 求出 $X_{(n)}$ 与 $X_{(1)}$ 的分布函数 $F_{X_{(n)}}(x)$ 和 $F_{X_{(1)}}(x)$.

事实上,

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \le x) = P(\max\{X_1, \cdots, X_n\} \le x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \le x)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \le x) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x); \qquad (2.5) \end{aligned}$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

而利用关系式

$$(X_{(1)} > x) = (X_1 > x, \dots, X_n > x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)$$

可得

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \le x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k(x)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

例子

↑Example

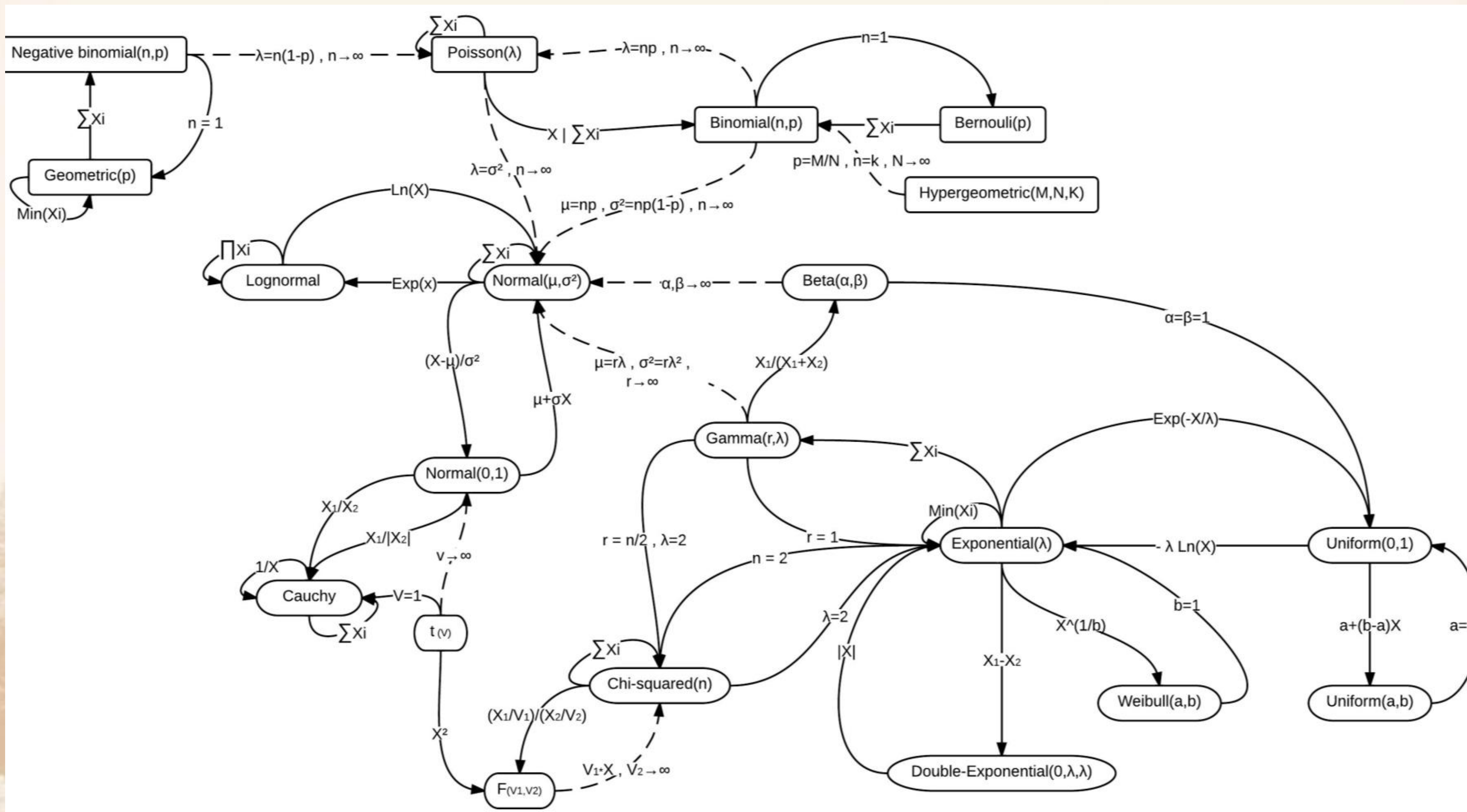
设 $X_1,...,X_n i.i.d \sim U(0,\theta),\theta>0$, 求 $X_{(n)}=max_{1\le i\le n}X_i$ 的密度函数.

↓Example

大纲

1. 随机变量的函数的分布
2. 随机变量的和
3. 随机变量的商
4. 随机变量的极大极小值
5. 常用分布关系图

分布之间的联系


Negative binomial(n,p)
λ=n(1-p) , n→∞
Poisson(λ)
∑Xi
λ=np , n→∞
n=1
Binomial(n,p)
Bernouli(p)
∑Xi
X | ∑Xi
n = 1
∑Xi
Geometric(p)
Min(Xi)
λ=σ² , n→∞
p=M/N , n=k , N→∞
Hypergeometric(M,N,K)
Ln(X)
μ=np , σ²=np(1-p) , n→∞
∏Xi
∑Xi
Lognormal
Exp(x)
Normal(μ,σ²)
α,β→∞
Beta(α,β)
α=β=1
(X-μ)/σ²
μ+σX
μ=rλ , σ²=rλ² , r→∞
X₁/(X₁+X₂)
Gamma(r,λ)
∑Xi
Exp(-X/λ)
Normal(0,1)
X₁/X₂
X₁/|X₂|
v→∞
Min(Xi)
r = n/2 , λ=2
r = 1
1/X
Exponential(λ)
- λ Ln(X)
Uniform(0,1)
n = 2
Cauchy
V=1
∑Xi
t(V)
λ=2
b=1
X^(1/b)
a+(b-a)X
a=0
∑Xi
|X|
X₁-X₂
Chi-squared(n)
Weibull(a,b)
Uniform(a,b)
(X₁/V₁)/(X₂/V₂)
X²
V₁∗X , V₂→∞
F(V1,V2)
Double-Exponential(0,λ,λ)

Thank You!

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題