概率论与数理统计
第一章 事件与概率

大纲

1. 基本概念
   - 随机试验
   - 事件
   - 样本空间
   - **事件的运算法则**
2. 从数数开始学习概率
   - 古典概率
   - 概率的统计定义
   - 主观概率
3. 概率是一套公理化体系
   - **概率**
4. 条件概率
   - 乘法定理
5. 独立性
   - 相互独立和两两独立
6. 全概率公式和贝叶斯公式
   - 全概率公式
   - 贝叶斯公式

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

大纲

1. 基本概念
   - 随机试验
   - 事件
   - 样本空间
   - 事件的运算法则
2. 从数数开始学习概率
   - 古典概率
   - 概率的统计定义
   - 主观概率
3. 概率是一套公理化体系
   - 概率

随机试验（experiment）

随机现象: 自然界中的一种客观现象, 当人们观测它时, 不能预先确定会出现哪种结果, 而仅仅知道是多种可能结果之一.

随机试验: 随机现象的实现和对它某个特征的观测.

- 随机试验中要求试验的结果至少 2 个
- 每次试验或观测得到其中的一个结果，在试验或观测之前不能预知是哪个结果发生
- 一般还要求试验在相同条件下能够重复

如观测把硬币抛 4 次后正面向上的次数; 观测某地的温度变化; 某电话总机单位时间内转接的电话次数.

事件（event）

基本事件：随机试验中的每个单一结果，它犹如分子中的原子，在化学反应中不能再分，所以有 ``基本'' 两字.

Definition

如把硬币抛 3 次后有 8 种可能结果：正正正、正正反、正反正、反正正、正反反、反正反、反反正、反反反. 这 8 种可能结果的每一个都是基本事件.

随机事件：简称事件 (Event)，在随机试验中我们所关心的可能出现的各种结果，它由一个或若干个基本事件组成.

Definition

随机事件常用大写英文字母 A, B, C, D 等表示. 如果用语言表达, 则要用花括号括起来.

样本空间（sample space）

样本空间(Sample Space): 随机试验中所有基本事件所构成的集合，通常用 Ω 或 S 表示. 样本空间中的元素，称为样本点，通常用 ω 等表示.

Definition

(1). 掷一枚骰子, 观察出现的点数. 则 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2). 考察某一地区的年降雨量, 则 $\Omega=\{x \mid 0 \leq x<T\}$, 这里 T 表示某个常数, 表示降雨量不会超过 T.

↑Example

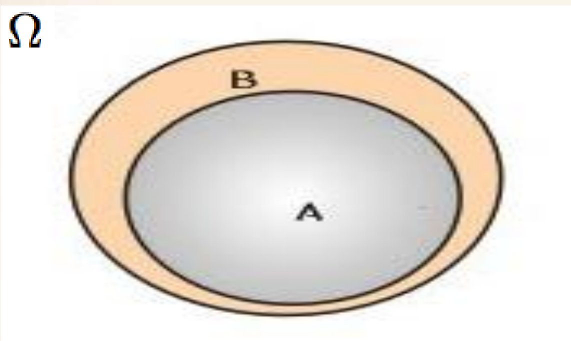
↓Example

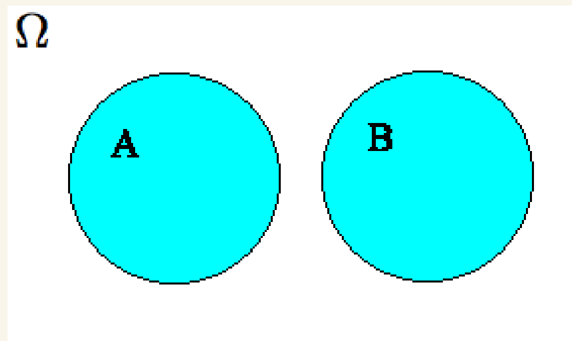
- 样本空间的元素应该是相互不同的, 根据试验的不同目的, 样本空间应该予以不同的选择.
- 但是总的原则是样本空间应该尽可能详细, 即尽可能包含所有可能的结果.

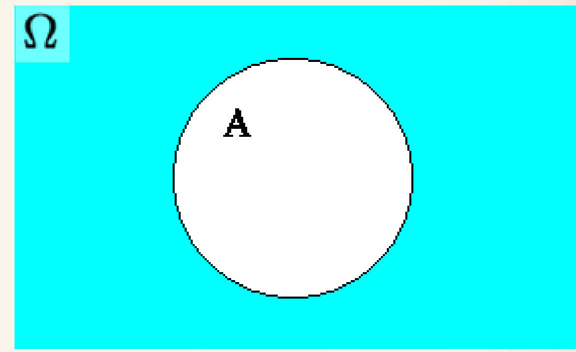
必然事件 (Ω)：　在试验中一定会发生的事件；
不可能事件 (ϕ)：在试验中不可能发生的事件.

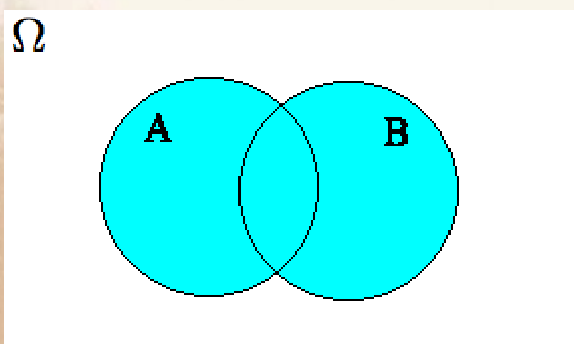
Definition

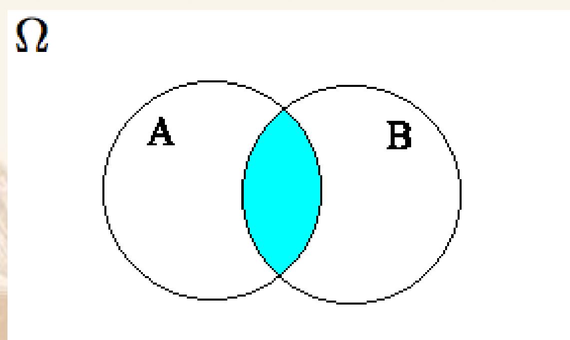
事件的运算法则

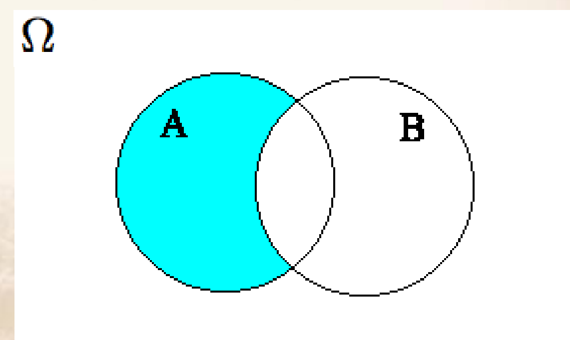












例子

↑Example

设 A, B, C 是三个事件，试表示下列事件

1. 事件 A, B 发生而 C 不发生;
2. 事件 A, B, C 不同时发生;
3. 事件 A, B, C 中至多有一个发生;
4. 事件 A, B, C 中至少发生两个;
5. 事件 A, B, C 中恰好发生两个;

↓Example

學府 英才

大纲

1. 基本概念
   - 随机试验
   - 事件
   - 样本空间
   - 事件的运算法则
2. 从数数开始学习概率
   - 古典概率
   - 概率的统计定义
   - 主观概率
3. 概率是一套公理化体系
   - 概率

古典概型

(1) 古典概型: 有两个条件,

第一, (有限性) 试验结果只有有限个(记为n) ,

第二, (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同.

为计算事件A的概率, 设A中包含m个基本事件, 则定义事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

记号: 为方便起见，以$|B|$记事件B中基本事件的个数，因此，

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

计算古典概率, 主要用到排列组合的知识.

排列组合

1. 从n个不同的元素中, 有放回地取出r个元素组成的可重复排列的种数为n^r种。从n个不同的元素中，不放回地取出r个元素组成的不重复排列的种数为$n(n-1)\cdots(n-r+1)=P_n^r$.

2. 从n个不同的元素中,不放回地取r个组成的组合，种数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.3.1}$$

例子

在运用排列组合公式时，要清楚次序问题.

甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习，两人一对地结为对打的双方，有多少种不同的结对方式?

创寰宇学府 育天下英才
严济慈 一九八八年五月 题

多项式系数

4. **多组组合模式：** 有n个不同元素,要把它们分为k个不同的组,使得各组依次有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个元素,其中$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$$

种不同分法.

4'. **不尽相异元素的排列模式** 有n个元素,属于k个不同的类,同类元素之间不可辨认,各类元素分别有n_1, n_2, $\cdots$, n_k个,其中$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,要把它们排成一列,则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

种不同排法.

例子

例 2.1　一批产品有N个，其中废品有M个。现从中随机取出n个，在以下两种情形下，分别求"其中恰好有m个废品"这一事件的概率。

(1) 有放回地选取；　*(2)* 不放回地选取

例 2.2　n个男生，m个女生排成一排$(m \leq n+1)$. 求事件$A = \{$任意两个女孩不相邻$\}$的概率。又若排成一圈，又如何?

育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月 題

几何概率

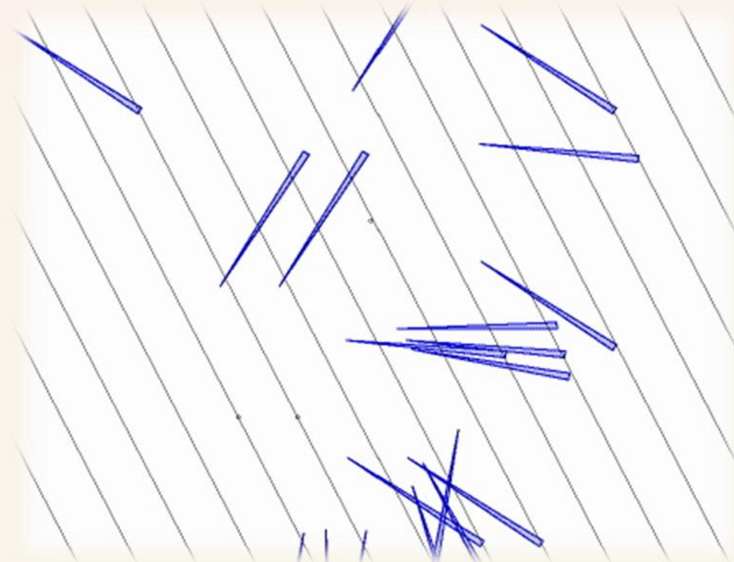
定义 1.4.1. 设Ω是欧氏空间中确定的集合，满足条件$0 < m(\Omega) < +\infty$。对Ω中的任何可测子集A,称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

为事件A的几何概率。这里等可能性体现在“落在区域A的概率与区域A的测度成正比并且与其形状位置无关。”

創寰宇學府 育天下英才 嚴濟慈 一九八八年五月題

例子：Buffon投针



假设在平面上画上间距为D的平行线，现在随机投掷长度为L的的针，求针与其中至少一条平行线相交的概率。

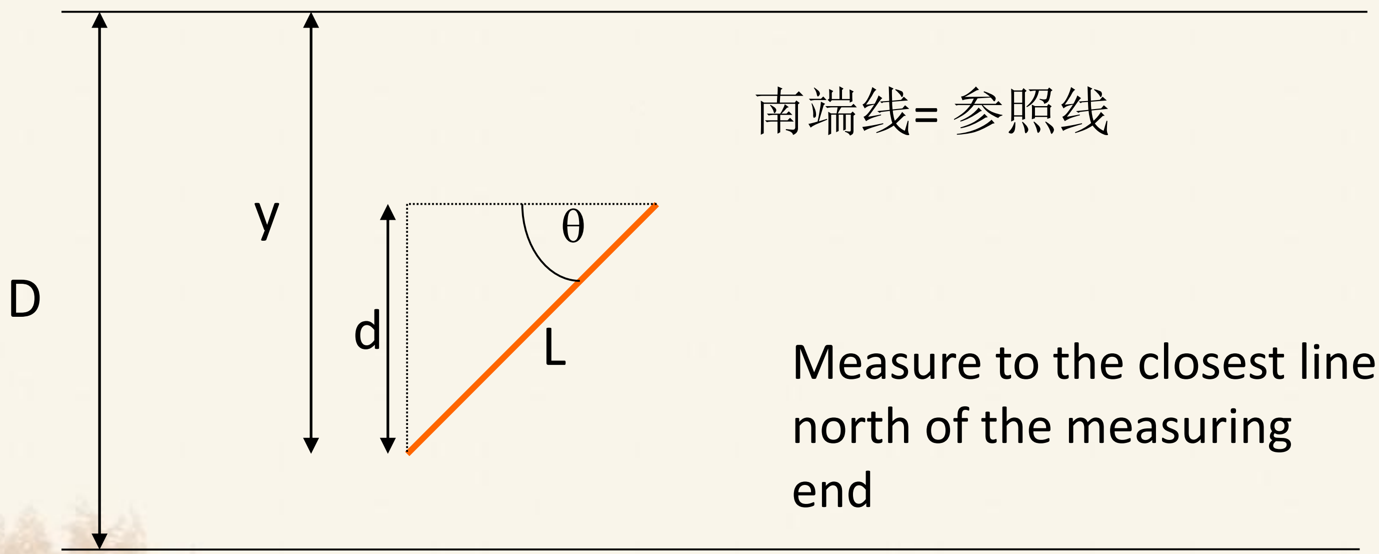
当L⩽D时，所求的概率是 $2L/\pi D$。

創寰宇學府 育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Buffon投针的计算：几何方法

由于针的长度小于线的间距，所以必有一条平行线与针相邻但不相交。我们将这个线作为参照线（南端的线）。

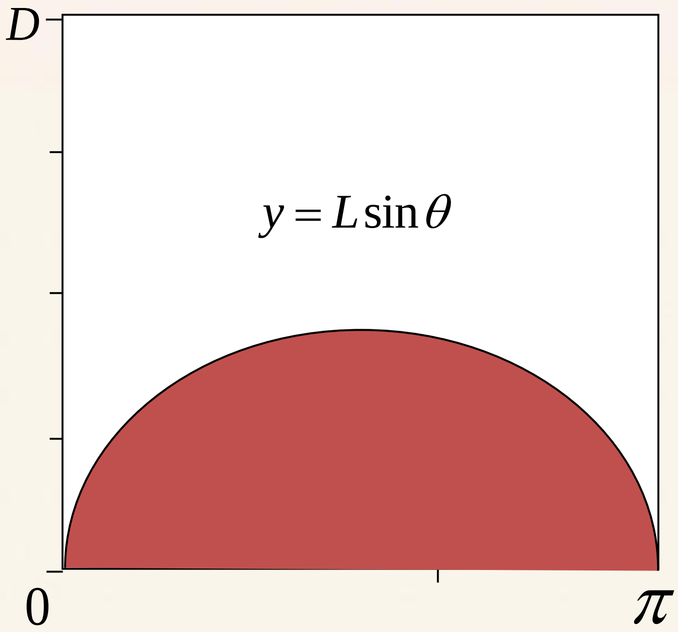


现在我们有：

$$d = L\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le y \le D$$

关系式　　独立均匀分布　　独立均匀分布

如果 $y \le L\sin\theta$，则表示出现了相交。



左图是y与θ的联合分布图，其中红色区域表示$y < L\sin\theta$ ，即能够相交，而白色区域则表示没有相交。最后只需要计算出红色区域所占整体区域的比例即可。

$$\text{总区域} = D\pi$$

$$\text{红色区域} = L\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta$$

$$= L(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= 2L$$

$$\Pr(\text{相交}) = \frac{\text{红区域}}{\text{总区域}} = \frac{2L}{D\pi}$$

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月題

概率的统计定义

把含有事件A的随机试验独立重复n次，设事件A发生了n_A次，称比值$\frac{n_A}{n}$为事件A的频率。当n越来越大时，频率会在某个数p附近波动，这个数定义为事件A的概率。

例子：英文字母被使用的频率是相当稳定的：福尔摩斯探案集<<跳舞的小人>>; π的小数位的数字对0到9应该是等可能的。

创寰宇学府 育天下英才 严济慈 一九八八年五月题

主观概率

常常会拿一个数字去估计随机事件A发生的可能性，并不把它与频率挂钩，这种概率称为主观概率。

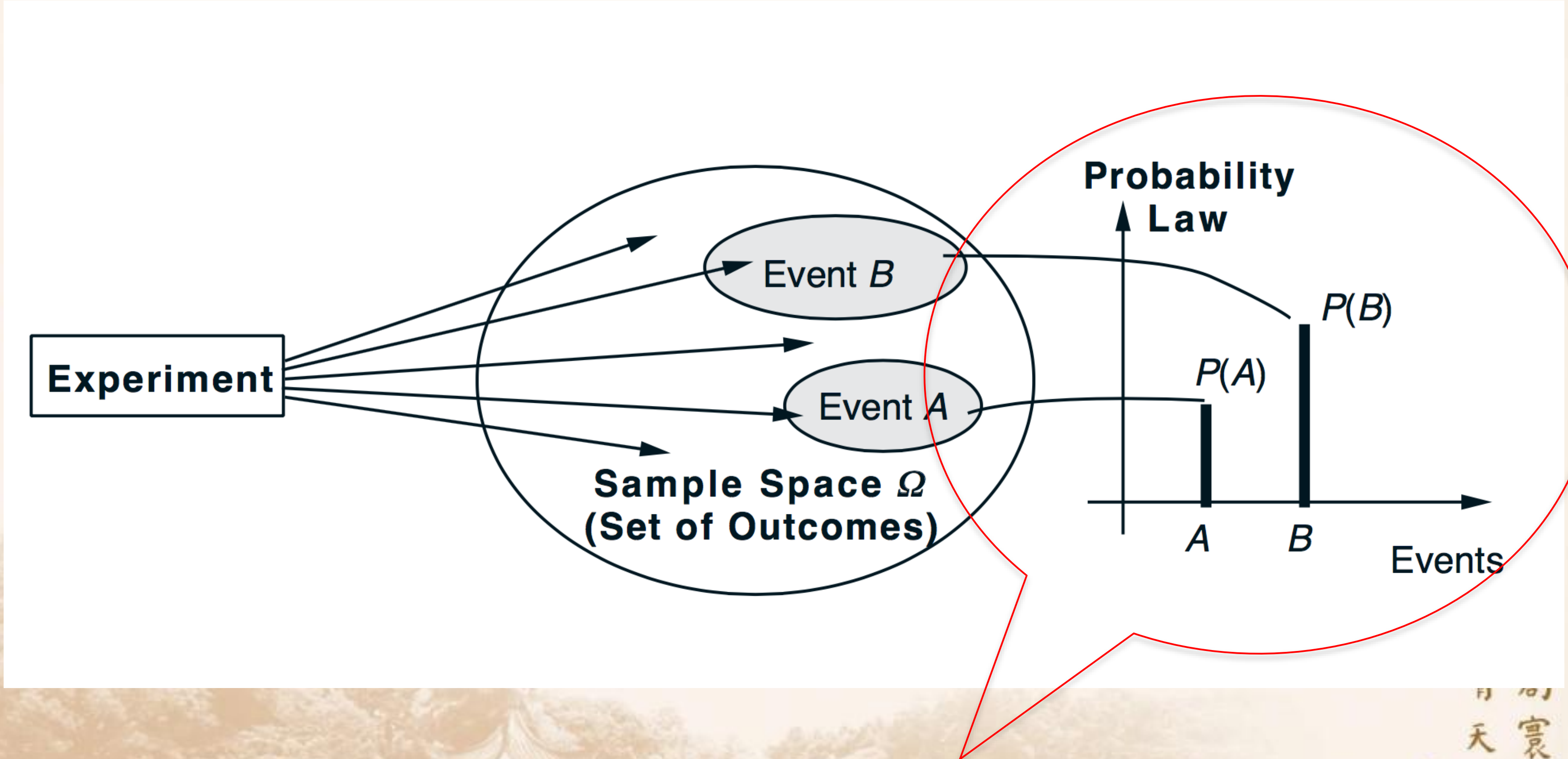
例子：Bayes 统计。

育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月 題

大纲

1. 基本概念
   - 随机试验
   - 事件
   - 样本空间
   - 事件的运算法则
2. 从数数开始学习概率
   - 古典概率
   - 概率的统计定义
   - 主观概率
3. 概率是一套公理化体系
   - **概率**

概率空间



- 概率是事件A的函数，记为P(A)。

概率（probability）

(4) **概率的公理化定义**: 对概率运算规定一些简单的基本法则,

称 $P(\cdot)$ 为一概率，如果

(i) 设 A 是随机事件，则 $0 \le P(A) \le 1$

(ii) 设 Ω 为必然事件，则 $P(\Omega) = 1$

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \ldots$ 为两两不相容的事件序列，则

Definition

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的加法定理

學府 英才 濟慈題 一九八八年五月

概率的基本性质

1. $P(\phi)=0$
2. (有限可加性) 若 $A_k \in \mathcal{F}, k=1,\cdots,n$ 且两两互斥，则

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. (可减性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.
4. (单调性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$，则 $P(A) \leq P(B)$.
5. $P(\bar{A})=1-P(A)$

創寰宇學府 育天下英才 一九八八年五月 嚴濟慈題

例子

一个班有r个人, 不计2月29日出生的(即假定一年为365天)，问至少有两个人同一天生日的概率是多少？

解：样本空间 $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_r): 1\le x_i\le 365, i=1,\ldots,r\}$

随机事件 E ={ 表示至少两人同一天生日}

则

$$P(E)=1-P(\bar{E})=1-\frac{C_{365}^{r}r!}{365^{r}}$$

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

大纲

4. 条件概率
   - 乘法定理
5. 独立性
   - 相互独立和两两独立
6. 全概率公式和贝叶斯公式
   - 全概率公式
   - 贝叶斯公式

創寰宇學府 育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

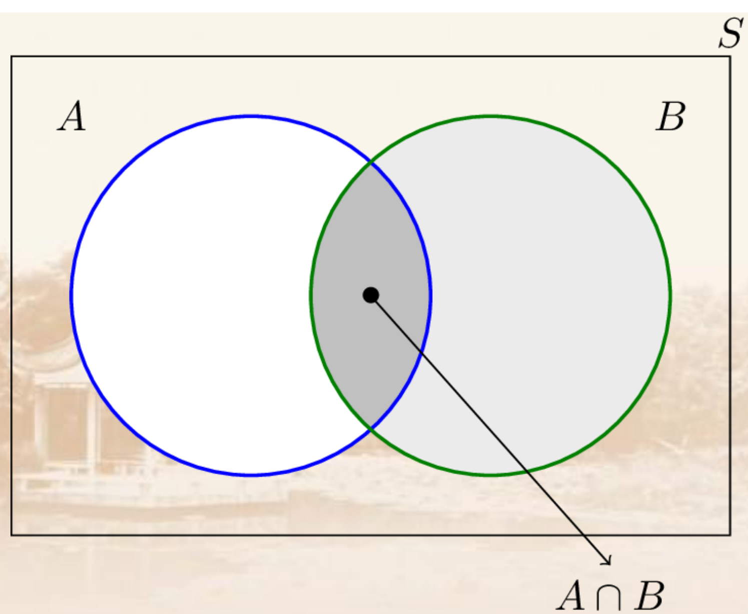
条件概率

设事件 A 和 B 是随机试验 Ω 中的两个事件，$P(B) > 0$ ，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Definition

为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.



創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈
一九八八年五月題

例子

有 10 个产品, 内有 3 个次品, 从中一个个地抽取 (不放回) 检验, 问第一次取到次品后第二次再取到次品的概率.

↑Example

↓Example

育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月 題

乘法定理

由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$

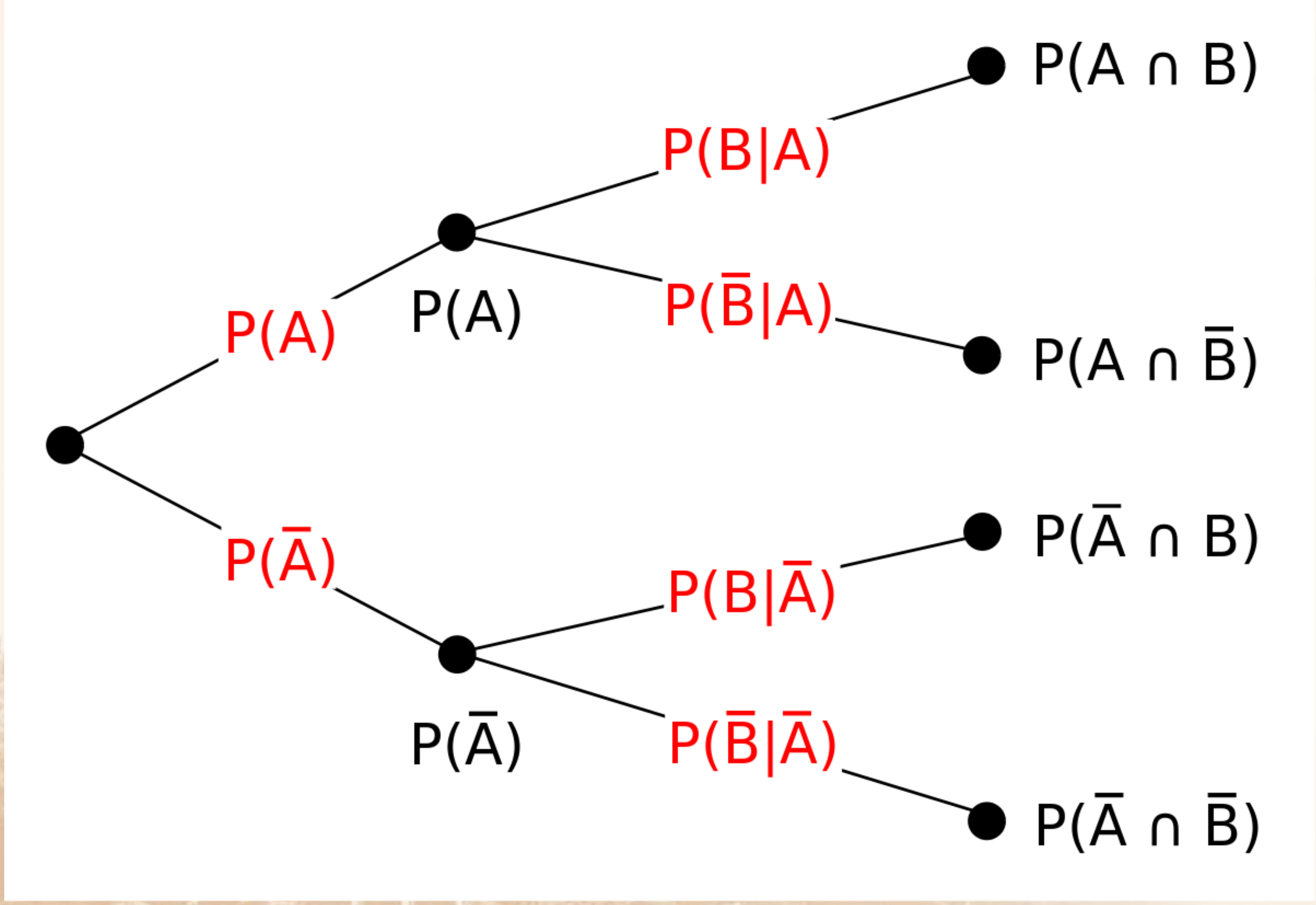
由归纳法容易推广为 n 个事件同时发生的概率有如下公式:

$$\boxed{P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})}$$

上面公式的右边看似麻烦, 其实在实际中很容易算出. 在没有给出 n 个事件之间相互关系时, 这是计算 n 个事件同时发生的一个重要公式.

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

概率树图



育天下英才 創寰宇學府
嚴濟慈 一九八八年五月題

例子

某人忘了某饭店电话号码的最后一个数字，因而随意拨号，问他三次之内拨通电话的概率.

大纲

4. 条件概率
   - 乘法定理
5. 独立性
   - 相互独立和两两独立
6. 全概率公式和贝叶斯公式
   - 全概率公式
   - 贝叶斯公式

事件的独立性

设 A, B 是随机试验中的两个事件，若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 和 B 相互独立.

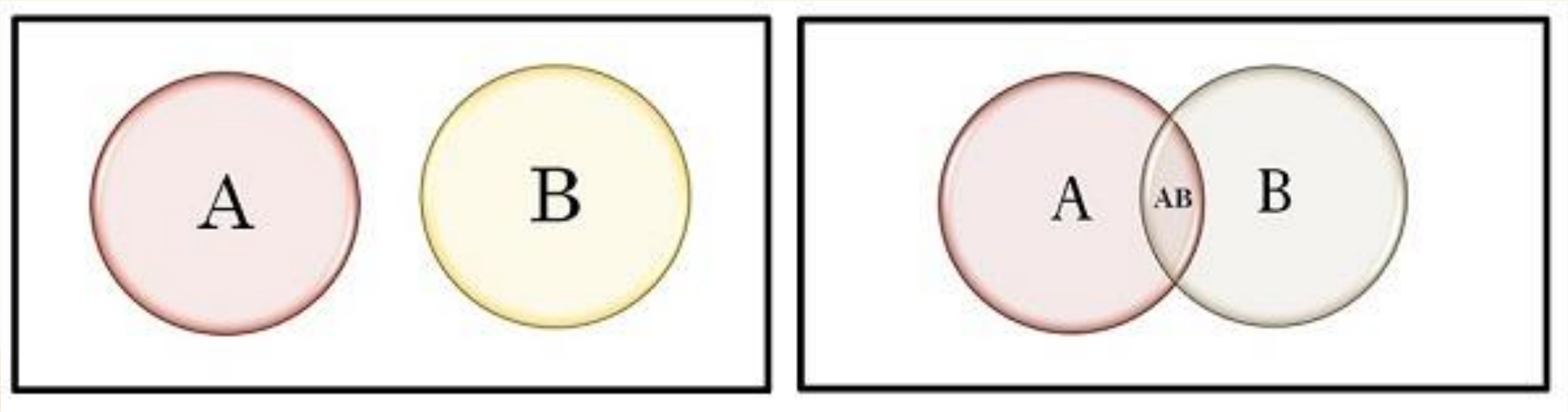
Definition

性质：

1. 若事件A和B独立，$P(\bar{A}\,B) = P(\bar{A})P(B)$.
2. 若事件A和B独立，$P(A\,\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$.
3. 若事件A和B独立，$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

事件的独立性

独立与互斥（不相容）？



創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈
一九八八年五月
題

相互独立

设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是随机试验中的 n 个事件，以 $\tilde{A}_i$ 表示 A_i 或 $\bar{A}_i$ 之一．若满足

Definition

$$P(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\cdots\tilde{A}_n) = P(\tilde{A}_1)P(\tilde{A}_2)\cdots P(\tilde{A}_n),$$

则称事件列 $A_1, A_2, \cdots A_n$ **相互独立**．（上面有 2^n 个等式）

注意: 上面等式等价于对 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中的任意 k 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $k = 2, \cdots n$, 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

若 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意两个事件相互独立, 则称为**两两独立**.

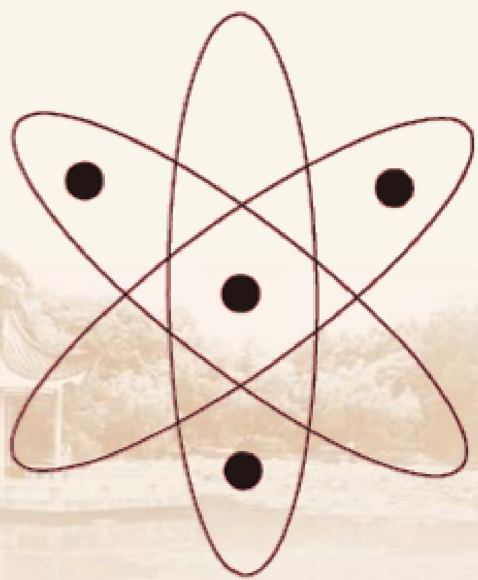
創寰宇學府 育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

两两独立而不相互独立

↑Example

(两两独立而不相互独立的反例) 有四个同样的小球, 分别在其上写上 “1”, “2”, “3” 和 “1,2,3”。引进三个事件: A_i={随机取一球, 球上有数字 i}, $i=1,2,3$. 试讨论事件 A_1, A_2, A_3 是否相互独立.

↓Example



例子

↑Example

A, B, C 三人独立地破译密码, 每人能破译密码的概率分别为 $1/3, 1/4, 1/5$. 问密码能被破译的概率有多大?

↓Example

创寰宇学府
育天下英才
严济慈 一九八八年五月 题

大纲

4. 条件概率
   – 乘法定理
5. 独立性
   – 相互独立和两两独立
6. 全概率公式和贝叶斯公式
   – 全概率公式
   – 贝叶斯公式

創寰宇學府 育天下英才 嚴濟慈 一九八八年五月 題

样本空间的分割

设 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 是样本空间 Ω 中的两两不相容的一组事件，即 $B_iB_j = \phi$, $i \neq j$，且满足 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割（又称为完备事件群，英文为 *partition*）.

Definition

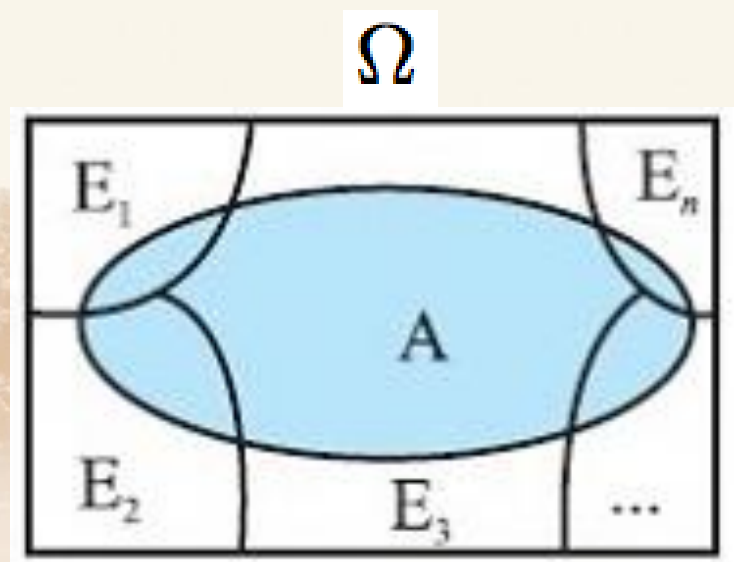
创寰宇学府
育天下英才
严济慈 一九八八年五月题

全概率公式

全概率公式:

设 $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ 是样本空间 Ω 的一个分割, 且 $P(B_i) > 0(i = 1, \cdots, n)$, A 为 Ω 中的一个事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$



例子

↑Example

设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的. 已知有一半是 B_1 厂提供的, B_2 厂商和 B_3 分别提供 25% . 已知厂商 B_1 和 B_2 的次品率都是 2%, B_3 的次品率为 4%, 从该厂产品中任取一个产品, 问该产品的这个零部件是次品的概率.

↓Example

創寰宇學府 育天下英才 嚴濟慈 一九八八年五月 題

贝叶斯公式(Bayes)

设 $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ 是样本空间的一个分割, A 为 Ω 中的一个事件, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $P(A) > 0$, 则

先验概率

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\boxed{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}}$$

后验概率

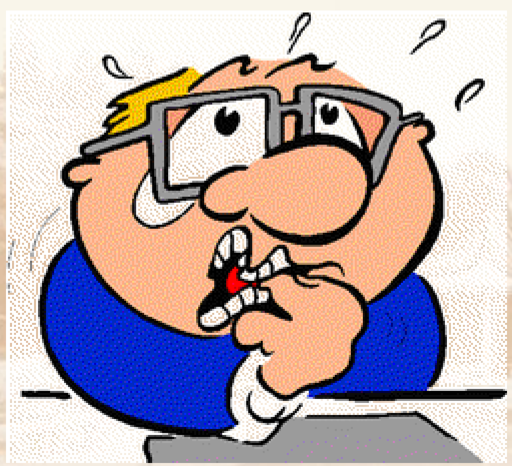
P(A)

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

例4：对疾病发生概率的认识

- 某种疾病的患病率为0.5%，通过验血诊断该病的误诊率为5%（即非患者中有5%的人验血结果为阳性，患者中有5%的人验血结果为阴性）。现知某人验血结果为阳性，那他确患有此病的概率

贝叶斯公式 ？ 0.087



获知验血结果为阳性时，
不要紧张

创寰宇学府 育天下英才
严济慈 一九八八年五月 题

例子

- 如果该人进行了两次独立的验血，结果均为阳性，那他确患有此病的概率为?

育天下英才 創寰宇學府 嚴濟慈 一九八八年五月題

Thank You!

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月