第二章

19.

由于 $F(x)$ 右连续. $\therefore F(-1-) = F(-1) \Rightarrow -a+b = \frac{1}{8}$ (1)

又 $P(X=1) = P(X \le 1) - P(X < 1)$

$= F(1) - F(1-)$

$\Rightarrow 1-(a+b) = \frac{1}{4}$ (2)

联立(1)(2) $\Rightarrow \begin{cases} -a+b = \frac{1}{8} \\ 1-(a+b) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{16} \\ b = \frac{7}{16}. \end{cases}$

答案: $a = \frac{5}{16}, b = \frac{7}{16}$.

22. 在曲线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴所围成的区域中随机取一点, 以 X 表示它与 y 轴之间的距离. 试求 X 的密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$.

解: 曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围面积为 S $\Rightarrow S=\int_0^2(2x-x^2)dx=[x^2-\frac{1}{3}x^3]\Big|_0^2=\frac{4}{3}$

r.v X 表示随机点与 y 轴之间的距离, 则有. 当 $x\in(0,2)$ 时

$$P(X\le x)=\frac{\int_0^x(2x-x^2)dx}{S}=\frac{3}{4}(x^2-\frac{1}{3}x^3)$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3, & 0\le x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2, & 0\le x<2\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$

23. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ ax^2\ln x+bx^2+1, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\\ 1, & x>\mathrm{e}.\end{cases}$$

试求: (1) 常数 a,b; (2) 随机变量 X 的密度函数 $f(x)$.

解: 由于 $F(x)$ 是连续函数, 则有

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to e^+}F(x)=F(e)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ae^2\ln e+be^2-1=1\\ b+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\ b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

则有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x^2\ln x-x^2+1, & 1\le x\le e\\ 1, & x>e\end{cases} \Rightarrow f(x)=F'(x)=\begin{cases}x(2\ln x-1), & 1\le x\le e\\ 0, & 其它\end{cases}$$

28. 假定一机器的检修时间服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布 (单位: h). 试求:

(1) 检修时间会超过 2 h 的概率;

(2) 若已经检修了 2 h, 总检修时间会超过 4 h 的概率.

解：设r.v X表示机器的检修时间，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1) 设检修时间超过2h的概率为P_1，则

$$P_1=P(X>2)=\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-2}$$

(2) $P(X>2+2 \mid X>2)=P(X>2)=e^{-2}$

根据指数分布的无记忆性. $P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$

29. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的指数分布 (单位: min). 假设某顾客一旦等待时间超过 10 min 他就立即离开, 且一个月内要到该银行 5 次, 试求他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率.

解：由于r.v X服从指数分布. $\lambda=\frac{1}{5}$. 则有

$$P(X\le 10)=\int_0^{10}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx=1-e^{-\frac{1}{5}\times 10}=1-e^{-2}$$

记总服务时间为Y，则 $Y\sim B(5, 1-e^{-2})$. 故

$$P(Y\le 4)=1-P(Y=5)=1-(1-e^{-2})^5\approx 0.517$$

第三章

5.答案 $a=0.2, b=0.3$

$$P(X=-1)\cdot P(X+Y=0)=P(X=-1, X+Y=0)$$

$$\Rightarrow P(X=-1)\cdot P(X=-1, Y=1 \text{ 或 } X=1\cdot Y=-1)=P(X=-1.Y=1)$$

$$\Rightarrow (0.2+a)(a+b)=a$$

$$\Rightarrow (0.2+a)\times 0.5=a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0,2 \\ b=0.3. \end{cases}$$

8.答案 1/2.

在多维正态中，独立和不相关等价。由题$\rho = 0$，因此 X 和 Y 独立，且 X~N(1,1), Y~N(0,1)

$$\therefore P(XY - Y < 0) = P\big((X-1)Y < 0\big) = P\big(X - 1 < 0, Y > 0 \text{ 或 } X - 1 > 0, Y < 0\big)$$
$$= P(X - 1 < 0, Y > 0) + P(X - 1 > 0. Y < 0)$$
$$= P(X < 1) \cdot P(Y > 0) + P(X > 1. Y < 0)$$
$$\text{又} P(X < 1) = P(X > 1) = P(Y > 0) = P(Y < 0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(XY - Y < 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}.$$

9. (1)

$$\begin{cases} F(\infty, \infty) = 1. \\ F(\infty, -\infty) = 0 \\ F(-\infty, \infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(b + \frac{\pi}{2}\right)\left(c + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ a\left(b + \frac{\pi}{2}\right)\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ a\left(b - \frac{\pi}{2}\right)\left(c + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\pi^2} \\ b = \frac{\pi}{2} \\ c = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(2).

$$P(X > 0, Y > 0) = 1 - F(0, +\infty) - F(+\infty, 0) + F(0,0) = \frac{1}{4}$$

(3) $F(x, +\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$ 可见边缘密度函数

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x, +\infty) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)},\ x \in R$$

, 同理

$$f_Y(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + y^2\right)},\ y \in R$$

16. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\Leftrightarrow \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} c(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 1$

$\xRightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^R \int_0^{2\pi} c\cdot r(R-r)\,d\theta\,dr = c\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{Rr^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R = 1$

$\Rightarrow c = \frac{3}{\pi R^3}$

(2) $P(X^2+Y^2\le r^2) = \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{3}{\pi R^3} a(R-a)\,d\theta\,da = \frac{6}{R^3}\cdot\left(\frac{R}{2}a^2-\frac{a^3}{3}\right)\Big|_0^r$

$= \frac{6}{R^3}\cdot\left(\frac{R}{2}r^2-\frac{r^3}{3}\right) = \frac{1}{R^3}\cdot r^2(3R-2r)$

38. (1) 由于 $P(X^2=Y^2)=1$ 故只有 $P(X=1, Y=-1)$ $P(X=1, Y=1)$
$P(X=0, Y=0)$ 不为0，其余均为0

~~比如 $P(X=1, Y=0)=$~~ $P(X=i, Y=j) = P(X=i, Y=j \mid X^2=Y^2)P(X^2=Y^2)$
$+P(X=i, Y=j \mid X^2\ne Y^2)P(X^2\ne Y^2)$ (*)

由于 $P(X^2\ne Y^2)=0$ 故 (*) $= P(X=i, Y=j \mid X^2=Y^2)$

(由此可知 必有 $i^2=j^2$，否则为0)

$= \frac{P(X=i, Y=j, X^2=Y^2)}{P(X^2=Y^2)} = \frac{P(X=i \mid Y=j, X^2=Y^2)P(Y=j, X^2=Y^2)}{P(X^2=Y^2)}$

则 $\left.\begin{matrix} j=-1 \\ j=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 只有 $i=1$ 时，$P(X=i \mid Y=j, X^2=Y^2)\ne 0$
$P(X=1 \mid Y=-1, X^2=Y^2)=1$

而 $P(Y=j, X^2=Y^2) = P(Y=j)$ （因 $P(X^2=Y^2)=1$）

综上: $P(X=1, Y=-1) = P(Y=-1, X^2=Y^2) = P(Y=-1) = \frac{1}{3}$

$P(X=1, Y=1) = P(Y=1) = \frac{1}{3}$

$P(X=0, Y=0) = P(Y=0) = \frac{1}{3}$

~~解为~~

(2) 易见 $Z=XY$ 取 3个值 $-1, 1, 0$

$P(Z=-1) = P(X=1, Y=-1) = \frac{1}{3}$

$P(Z=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}$

$$P(Z=0) = \sum_{i,j} P(Z=0 \mid X=i, Y=j)\, P(X=i, Y=j) = P(Z=0 \mid X=0, Y=0)\, P(X=0, Y=0)$$
$$= P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$$

时 $P(X=i, Y=j)$ 仅在(1)中~~相~~情况不为0

且 ~~[illegible]~~ 仅当 $i,j=0$ 时 $P(Z=0 \mid X=i, Y=j) \neq 0$