M 2 : Utilisation de *Mathematica*

Exercices

Le fichier doit être renommé exactement comme ceci :
M2VotrenomPrenom.nb
Cela permet à vos enseignants de s'y retrouver et de ne pas avoir à renommer tous les fichiers. Merci.
Votrenom avec une seule majuscule
Prenom avec une seule majuscule
Pas de blanc, ni souligné, ni accent, ni symbole particulier
Ce fichier doit être déposé sur MOODLE à la fin de la séance, et/ou avant la fin de la semaine de la séance.

I. Calculs formels

A. Fonctions essentielles

Dans les calculs ci-dessous, écrivez la suite des opérations que vous devez faire pour pour aboutir au résultat, en faisant une étape (factorisation OU réduction au même dénominateur OU simplification OU réarrangement , etc ...)

1. ==

→ Calculer au moyen d'une suite d'expressions :

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} ==$$

→ Calculer au moyen d'une suite d'expressions :

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\left(1-\frac{3}{4}\right) ==$$

→ Expliquez dans les grandes lignes comment *Mathematica* parvient à ce type de résultat.

→ Ces deux nombres sont très particuliers : en quoi ?
(si vous ne voyez pas, la suite des questions est dans la cellule cachée ci-dessous...)

$$\left(-7-4\sqrt{2}-2\sqrt{2\left(10+7\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$\left(-7-4\sqrt{2}+2\sqrt{2\left(10+7\sqrt{2}\right)}\right)$$

3. Simplify

→ Expliquez ce que vous observez :

```
Sin[x]^2 + Cos[x]^2

Simplify[Sin[x]^2 + Cos[x]^2]

Simplify[Sin[x]^2 + Cos[x]^2 == 1]

Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x]]
```

4. Simplify avec Assumptions

→ Expliquez ce que vous observez :

```
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], x > 0]
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], x < 0]
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], 0 < x < π]
```

On peut aussi donner plusieurs suppositions avec les connecteurs logiques (&& veut dire ET, || veut dire OU) :

```
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], 0 < x < π/2]
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], -π/2 < x < π/2]
Simplify[Abs[Cos[x]] == Cos[x], -π/2 < x < π/2 && (-π/2 + 2 π < x < π/2 + 2 π)]
```

→ En définitive quelle est la solution la plus simple (qui découle de la définition) ? Écrivez là :

Retenir :

```
Simplify[Sqrt[x^2]]
```

```
Simplify[Sqrt[x^2], x ≥ 0]
```

PowerExpand[] suppose toujours que x≥0 et donc :

```
PowerExpand[Sqrt[x^2]]
```

C’est donc une fonction très pratique si l’on est sûr que *x* est réel positif ou nul.

5. Simplify avec Assumptions et Element

→ Expliquez :

```
Simplify[Sqrt[x^2], Element[x, Reals]] == Simplify[√(x²) , x ∈ Reals] == Abs[x]
```

→ À quoi doit être égal ? ??? ci-dessous :

```
Simplify[Sin[x + 2 * n * Pi] == ?? ?? ,Element[n,Integers]]
```

```
Simplify[Cos[n * Pi / 2 - x] == ?? ??,Element[(n-1)/4,Integers]]
```

On peut aussi combiner **Element[]** avec d’autres conditions :

→ Quelles sont les hypothèses de travail de *Mathematica* ? :

→ Quelle est l’expression qui a un sens mathématique simple (avec les hypothèses de travail de *Mathematica*) ? :

```
Simplify[Log[x^r]]
Simplify[Log[x^r], x > 0]
Simplify[Log[x^r], Element[r, Reals]]
Simplify[Log[x^r], x > 0 && Element[r, Reals]]
```

→ Comment se simplifie l’expression suivante : $5 \ln a^2 - 2 \ln a$?

B. Fonction pure

1. Définition

→ Qu’est-ce qu’une fonction pure dans *Mathematica* ? :

→ Construire une fonction pure qui ne retient que les nombres multiples de 4 augmentés de 1 (de la forme : $4n + 1$)

II. Listes

■ A. Définition et Opérations immédiates

■ 1. Définition

→ Qu'est-ce qu'une **List** dans *Mathematica* ?

■ 2. Adressage

Soit la liste :

```
liste3 = {3, 5, 11, 13, 25, 36, 77}
```

→ Adressez le 5ème élément de la liste

■ 3. La propriété "Listable" de fonctions *Mathematica*

→ Ajoutez 10 à chacun des membres de **liste3**.

→ Soustrayez 3 à chacun des membres de **liste3**.

→ Multipliez chacun des membres de **liste3** par 10**.**

→ Divisez chacun des membres de **liste3** par 5.

→ Donnez deux façons simples d'obtenir la liste des carrés de **liste3**.

→ Donnez la liste des **ArcTan[]** de **liste3**.

■ 4. Opérations terme à terme, et fonctions "Listable"

Soit la liste :

```
liste4 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
```

→ Faites les opérations suivantes : qu'en concluez vous ?

```
liste3 + liste4
liste3 - (2 * liste4)
liste3 * liste4
liste3 / liste4
```

→ Construisez (par copier coller) une **liste3bis** qui comporte l'élément "80" de plus que **liste3**.
Que se passe-t-il quand vous faites liste3 + liste3bis ou liste3 / liste3bis ?

Soient les listes :

```
liste5 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
liste6 = {1, 2, 3, {4, 4}, 5, 6, 7}
```

→ Expliquez ce qui se passe dans chaque cas ?

```
liste3 + liste5
```

```
liste3 + (2 * liste6)
```

■ B. Générations de listes

■ 1-3 Les méthodes simples de génération de listes

→ Générez de 2 (voire 3) façons différentes la liste des multiples de 7 positifs de 1 à 100 :

→ Quelle est la méthode la plus rapide ? (testez progressivement pour cette même liste de 100 à au plus 10^6)

4. Sélection dans une liste : Select[]

→ Générer une liste appellée **liste0** avec **RandomInteger[]** (*cf.* Aide) une liste de 100 nombres aléatoires compris entre 1 et 1000 :

→ Utiliser la fonction pure établie plus haut pour ne retenir que les nombres de la forme : $4n + 1$ ou $4n - 1$.

→ Utiliser une fonction dédiée pour ne retenir que les nombres premiers. Comparer.

5. Comparaison des différentes méthodes de génération

Comparez les temps de génération pour : **Range[]**, **Table[]**, (et **Do[]**).

6. Comparaison des différentes méthodes de calcul de somme d'une liste

→ Comparez les différentes méthodes pour calculer la somme des 10^6 premiers entiers $s = \sum_{i=1}^{1\,000\,000} i$:

C. Opérations sur les listes

→ Donner en une seule opération la longueur de chaque liste : liste3, liste4, liste5, liste6.

→ Calculer la somme de liste3

→ Calculer en une seule opération les somme de chaque liste : liste3, liste4, liste5, liste6.

D. Mise en forme et Représentations de listes

1. Tracer une liste simple

→ Tracer une liste des points ;

→ Tracer une liste en représentant la ligne qui joint les points ;

On peut le faire aussi avec **ListLinePlot[]** :

```
ListLinePlot[liste3] == ListPlot[liste3, Joined → True]
```

2. Tracer une liste de deux coordonnées

→ Tracer une liste des points ayant deux coordonnées, l'abscisse est la première des coordonnées et l'ordonnée la seconde :

Notez que les points sont rendus visibles avec l'option : **PlotMarkers→Automatic**

3. Tracer une liste à trois entrées

→ Examinez l'exemple :

```
liste8 = Table[Cos[i] Cos[j], {i, 0, 2 π, 0.6}, {j, 0, 2 π, 0.6}]
ListContourPlot[liste8]
```

4. Tracer une liste à quatre entrées

→ Examinez l'exemple :

```
liste8 = Table[
   Cos[i + k (π / 30)] Cos[j],
   {i, 0, 2 π, 0.6}, {j, 0, 2 π, 0.6}, {k, 0, 30, 1}
  ];
```

```
ListAnimate[
 Map[
  ListContourPlot,
  liste8
 ]
]
```

- **5. Mise en forme de listes avec TableForm[]**

```
liste7 = Table[{i, i^2}, {i, 3.1, 8.5, 0.5}]
```

→ Affichez **liste7** sous forme de tableau qu'on appellera **liste7MiseEnForme** :
on utilisera la fonction **TableForm[]**

```
? TableForm
```

Rappelez **liste7** :

```
liste7MiseEnForme =
```

→ Testez **liste7*3** et **liste7MiseEnForme***3 :

III. Programmation fonctionnelle et Programmation par règles

En première approximation, ce sont deux modes de programmation très proches dans l'esprit, qui diffèrent principalement par leur mode d'écriture.

- **1. ReplaceAll[] et Rule[]**

→ Expliquez quelle est la différence entre :

```
(x + 3 y) /. {x → y, y → z}
(x + 3 y) /. {x → y} /. {y → z}
```

Un brin d'ADN **list9** est constitué de nucléotides : A, T, G, C.

```
list9 = {A, C, G, T, G, T, A, C, G, T, G, T}
```

→ Remplacez dans **liste9** tous les A par T, les T par A, les G par C, et les C par G (pour avoir la séquence du brin complémentaire)

IV. Traitement d'expressions symboliques

- **A. Transformations algébriques**
- **1. Expand[] et Factor[]**

→ Développer et factoriser : $-\frac{1}{2}\left(\left(1-\sqrt{a}\right)^8-\left(1+\sqrt{a}\right)^8\right)\left(\left(1-\sqrt{a}\right)^8+\left(1+\sqrt{a}\right)^8\right)\sqrt{a}$

- **B. Réarrangements algébriques**

→ Factoriser $x^2 - 3$ avec *Mathematica*.

→ Soit $f[x] = \frac{(x+3)\,(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)\,(x+5)^2}$. Utiliser les fonctions **Expand**, **ExpandAll**, **ExpandDenominator** et **ExpandNumerator** pour $f[x]$ et commenter les résultats.

→ Rechercher les fonctions *Mathematica* qui transforment (en une ou plusieurs étapes) $f(x) = \frac{1}{(x^2-16)} - \frac{x+4}{(x^2-3\,x-4)}$ en

$g[x] = \frac{-15-7x-x^2}{-16-16x+x^2+x^3}$

■ C. Transformer des expressions trigonométriques

→ Comparer et commenter les trois résultats des fonctions **TrigExpand**, **TrigReduce** et **TrigFactor** appliquées à $f(x) = (\sin(x))^2 + (\tan(x))^2$

→ Vérifier les identités trigonométriques suivantes :

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$(1 - \cot(a))^2 + (1 - \tan(a))^2 = (\sec(a) - \csc(a))^2$