名

号

班级

一、选择题（每题 3 分,共 15 分）1. $-1\times(-a)+0\cdot 5+2\times(-9)+4\times 2=0 \Rightarrow a=10$

1. 已知 4 阶行列式中第 2 行元素为−1，0，2，4，第 4 行元素的余子式依次为 a，5，9，2，则 $a=$（ A ）。

(A) 10　　(B) 9　　(C) 5　　(D) 2

2. 设 A,B 为 n 阶方阵，则（ D ）

(A) A 且 B 可逆，则必有 $A+B$ 可逆 ×

(B) A 且 B 不可逆，则必有 $A+B$ 不可逆 ×

(C) A 或 B 可逆，则必有 AB 可逆 ×

(D) A 或 B 不可逆，则必有 AB 不可逆 √

装

3. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第一行与第二行得单位矩阵。记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A=$（ C ）

$P_2AP_1=E \Rightarrow A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$

订

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) $P_2P_1^{-1}$　　(D) P_2P_1

4. 设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(A)。

当 $r>s$ 时

$R(\alpha_1\cdots\alpha_r)\le R(\beta_1\cdots\beta_s)\le s<r$

则 组I 相关

(A) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关

(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关

(D) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关。

线

5. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则下列命题不正确的是（ B ）。

(A) A 必与某对角矩阵相似　(B) A 的特征向量之和必是特征向量　书 P123. 例 9

(C) A 的特征值必为实数　(D) A 的不同特征值的特征向量必正交。

二、填空题（每题 3 分,共 15 分）

1. 若 $\begin{vmatrix}x&2&1\\y&0&1\\z&3&1\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\4&0&6\\1&1&1\end{vmatrix}=$ __2__。

$|A|=1$　　$=\begin{vmatrix}x&y&z\\4&0&6\\1&1&1\end{vmatrix}=2|A^T|=2\times1=2$

2. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=1$，则 $|3A^{-1}-A^*|=$ ___8___。 $=8$

3. 设 A 是 3×5 矩阵，且 A 的秩 $R(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 R（BA）= ___2___。

$|B|=10\neq0$ $R(BA)=R(A)=2$

4. 设 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1，t，5)$，若 α_1，α_2，α_3 线性相关，则 $t=$ ___3___。

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$相关 则 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&t\\1&3&5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow t=3$

5. 设 A 与 $B=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$ 相似，则 $|A^2+E|=$ ___740___。

5、 A 有特征值 1, 3, 6
A^2+E 〃 2, 10, 37
则 $|A^2+E| = 2\times10\times37=740$

三、（10 分）设四阶方阵 B 的伴随矩阵 $B^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $BAB^{-1}=AB^{-1}+3E$，其中 E 为四阶单位阵，求矩阵 A。

解：因为 $BAB^{-1}=AB^{-1}+3E$，

所以右乘 B 得 $BA=A+3B$，左乘 B^* 得 $B^*BA=B^*A+3B^*B$

$$|B|A=B^*A+3|B|E$$ 3 分

因为方阵 $|B^*|=|B|^{n-1}$，四阶方阵 $|B^*|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{vmatrix}=8$

所以 $|B|=2$ 3 分

所以 $2A=B^*A+6E$，$(2E-B^*)A=6E$，

$$A=6(2E-B^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$ 4 分

选课序号

姓　名

学　号

专业班级

装　订　线

四、（12分）设四维列向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，

$\alpha_3=(1,-1,2,0)^T$，$\alpha_4=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_5=(0,3,1,6)^T$，

（1）求向量组的秩；

（2）求向量组的一个最大无关组；

（3）用最大无关组表示其它向量。

解：因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\-1&3&-1&0&3\\2&1&2&7&1\\4&2&0&14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\0&3&0&3&3\\0&1&0&1&1\\0&2&-4&2&6\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 3分

2分

所以（1）向量组的秩为3；

3分

（2）一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；

4分

（3）$\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

五、（10分）设4元非齐次线性方程组 $AX=b$，已知 $R(A)=3$，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $AX=b$ 的解，$\xi_1=(2,0,1,8)^T$，$\xi_2+\xi_3=(3,1,1,17)^T$，求 $AX=b$ 的通解。

解：因为4元非齐次方程组 $AX=b$ 有 $R(A)=3$，

所以齐次方程组基础解系为 $n-R(A)=4-3=1$ 个向量， 3分

因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $AX=b$ 的解，$\xi_1=(2,0,1,8)^T$，$\xi_2+\xi_3=(3,1,1,17)^T$，

3分

所以 $\xi_2+\xi_3-2\xi_1=(-1,1,-1,1)^T$ 为 $AX=0$ 的解，

所以 $AX=b$ 的通解为

4分

$$X=(2,0,1,8)^T+c(-1,1,-1,1)^T$$

C 为任意实数。

六、（14 分）设，$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$ 为三阶实对称矩阵 A 的特征值，且对应于 λ_3 的特征向量为 $\alpha_3=(0,-1,1)^T$，求矩阵 A。

解：设 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha_2=(x_1,x_2,x_3)^T$，因实对称矩阵的不同特征值的特征向量正交，知 $\alpha_3^T\cdot\alpha_2=x_2-x_3=0$，从而 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$ 为 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量。……………………………………………………6 分

记 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，易知 P 是正交矩阵。……………………………………3 分

且 $P^TAP=diag(1,1,-1)$ ………………………………………2 分

故 $A=Pdiag(1,1,-1)P^T$

$$A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ ……………………………………3 分

序号

名

号

业班级

七、（14 分）设二次型 $f=bx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2ax_1x_3$（$a>0$），其中二次型对称阵 A 的特征值之和为1，A 的特征值之积为 -12。

（1）写出二次型对称阵 A；

（2）求出 a,b 的值；

（3）求一个正交变换 $X=PY$，将二次型化成标准型，并写出标准型。

装

解：（1）$A=\begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{pmatrix}$； 3 分

（2）因为 $b+2-2=1$，$|A|=\begin{vmatrix} b & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{vmatrix}=-12$

所以 $a=2,b=1$； 3 分

订

（3）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(\lambda+3)$

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$ 3 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程 $(A-2E)X=0$ 得特征向量

$P_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

线

当 $\lambda_3=-3$ 时，解方程 $(A+3E)X=0$ 得特征向量

$P_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2 分

得正交矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，

二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。 2 分

八、（10 分）设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证明　已知的 r 个等式可以写成

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$ ……………4 分

上式记为 $B=AK$. 因为 $|K|=1\neq 0$, K 可逆, ……………2 分

所以有 R（B）$=R$（A）$=r$，……………2 分

所以向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关。 ……………2 分