算子内插定理

桂物

2022 年 8 月 30 日

本文将证明 Riesz-Thorin 内插定理和 Marcinkiewicz 内插定理。除非特殊说明，出现的集合均是可测集合，函数均是可测函数。对 $p \in [1,\infty]$，其对偶数为 $p' := p/(1-p)$ ；特别地 $1' = \infty$ ，可以理解为极限 $\lim\limits_{p\to 1+} p'$。

1　L^p 空间及弱 L^p 空间

回忆：给定测度空间 (M,μ)，我们定义其上 p 次可积函数空间

$$\mathcal{L}^p(M,\mu) := \Big\{ f\colon M \to \mathbb{R} \,|\, \int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \Big\}, p \in (0,\infty),$$

不引起混淆时记作 $\mathcal{L}^p$ 即可。$\mathcal{L}^p$ 作为线性空间，考虑其线性子空间 $\mathcal{Z} := \{f\colon M \to \mathbb{R} | f(x) = 0 \text{ 对}\mu\text{-几乎所有}x \in M\text{成立}\}$，得到商空间 $L^p := \mathcal{L}^p/\mathcal{Z}$，即将 p 次可积函数空间中几乎处处相同的函数视为同一个函数；我们一般都滥用记号，以 f 表示 $f + \mathcal{Z} \in \mathcal{L}/\mathcal{Z}$。

对 $1 \le p < \infty$，L^p 上有范数

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p};$$

对于 $p = \infty$，L^∞ 上有范数

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\{t > 0 : |f|_*\mu(t,\infty) = 0\},$$

其中 $g_*\mu$ 即测度的推出，定义即 $g_*\mu(B) := \mu\big(g^{-1}(B)\big)$。

现在我们定义弱 L^p 空间：

定义 1.1 (弱 L^p 空间)**.** 对测度空间 (M,μ) 和 $p \in (0,\infty)$，定义其上的弱 L^p 空间

$$L^{p,\infty}(M,\mu) := \{f\colon M \to \mathbb{R} | \sup_{\lambda>0} \lambda^p |f|_*\mu(\lambda,\infty) < \infty\}/\mathcal{Z}.$$

不引起混淆时，简记为 $L^{p,\infty}$。$L^{p,\infty}$ 上有半范

$$\|f\|_{p,\infty} := \Big(\sup_{\lambda>0} \lambda^p |f|_* \mu(\lambda,\infty)\Big)^{1/p}.$$

对 $p=\infty$，定义 $L^{\infty,\infty}(M,\mu) = L^\infty(M,\mu)$。

注. 应当说明 $\{h\colon M \to \mathbb{R} | \sup_{\lambda>0} \lambda^p |h|_* \mu(\lambda,\infty) < \infty\}$ 是可测函数空间的线性子空间。由于零元、加法逆元显然，只需说明加法封闭。对其中的 f,g 取

$$A > \max\{\sup_{\lambda>0} \lambda^p |f|_* \mu(\lambda,\infty), \sup_{\lambda>0} \lambda^p |g|_* \mu(\lambda,\infty)\},$$

由于

$$\forall \lambda > 0 : |f+g|^{-1}(\lambda,\infty) \subseteq |f|^{-1}(\lambda/2,\infty) \cup |g|^{-1}(\lambda/2,\infty),$$

有

$$\forall \lambda > 0 : |f+g|_* \mu(\lambda,\infty) \leq |f|_* \mu(\lambda/2,\infty) + |g|_* \mu(\lambda/2,\infty),$$

进而

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p |f+g|_* \mu(\lambda,\infty) \leq 2^{p+1} A < \infty,$$

这表明 $f+g \in \{h\colon M \to \mathbb{R} | \sup_{\lambda>0} \lambda^p |h|_* \mu(\lambda,\infty) < \infty\}$

注. 弱 L^p 空间是 Lorentz 空间的特例。

2 Marcinkiewicz 内插定理

这里开始总是设有测度空间 (M,μ) 和 (N,ν)。

定义 2.1 (次线性算子)**.** 设 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，$\mathcal{F}_M$ 为 M 上可测函数全体，$\mathcal{D}_M$ 为 $\mathcal{F}_M$ 线性子空间，$T\colon \mathcal{D}_M \to \mathcal{F}_N$。若 T 满足 $\forall f,g \in \mathcal{D}_M$ 有

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \text{ 对}\mu\text{-几乎所有}x \in M\text{成立},$$

则称 T 是次线性的。

定义 2.2 (强/弱 (p,q) 型)**.** 设 $\mathcal{F}_M, \mathcal{D}_M$ 同上，$T\colon \mathcal{D}_M \to \mathcal{F}_N$ 是次线性算子，以及 $1 \leq p,q \leq \infty$。

(1) 称 T 为强 (p,q) 型，若任给 $f \in L^p(M,\mu) \cap \mathcal{D}_M$ 有 $Tf \in L^q(N,\nu)$ ，且 $T\big|_{L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M}$ 是有界的，即存在 $C>0$ 使得 $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ 。

(2) 称 T 为弱 (p,q) 型，若任给 $f\in L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M$ 有 $Tf\in L^{q,\infty}(N,\nu)$ ，且 $T\big|_{L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M}$ 是有界的，即存在 $C>0$ 使得 $\|Tf\|_{q,\infty}\le C\|f\|_p$ 。换言之 $\forall\lambda>0, |Tf|_*(\lambda,\infty)\le\left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$ ，即等价于 [4] 中的定义。

注. (1) 中 $T\big|_{L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M}$ 应当是 $L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M\to L^q(N,\nu)$ ，但是这里为了尽量简单记号，省略了。(2) 同理。

引理 1 (Cavalieri 原理)**.** 设 f 是测度空间 (M,μ) 上的非负函数, $p\in(0,\infty)$, 则

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu=\int_0^\infty f_*\mu(t,\infty)\,\mathrm{d}m(t). \tag{1}$$

其中 m 是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度。

注. 这里不要求 $f\in L^p(M,\mu)$。事实上这就是 “等幂等积定理” 的积分形式。

证明.

$$\begin{aligned}
&p\int_0^\infty f_*\mu(t,\infty)\,\mathrm{d}m(t)\\
=&p\int_0^\infty \mu\big(f^{-1}(t,\infty)\big)t^{p-1}\,\mathrm{d}m(t)\\
=&p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mathrm{d}m(t)\int_M \chi_{f^{-1}(t,\infty)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
=&p\int_M \mathrm{d}\mu(x)\int_0^\infty t^{p-1}\chi_{(0,f(x))}(t)\,\mathrm{d}m(t) && \text{(Tonelli's Theorem)}\\
=&p\int_M \mathrm{d}\mu(x)\int_0^{f(x)} t^{p-1}\,\mathrm{d}m(t)\\
=&\int_M f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) && \text{(calculate as Riemann integral).}
\end{aligned}$$

证毕

引理 2 (Chebyshev 不等式)**.** 对测度空间 (M,μ) 及其上正实值函数 f，任意 $p\in(0,\infty)$ 有

$$f_*\mu(\lambda,\infty)\le\frac{1}{\lambda^p}\int_{\{x\in M:f(x)>\lambda\}}f^p\,\mathrm{d}\mu\le\frac{1}{\lambda^p}\|f\|_p^p,\forall\lambda>0. \tag{2}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
f_*\mu(\lambda,\infty) =&\mu\{x\in M: f(x)>\lambda\} && \text{(def of pushforward measure)}\\
=&\int_{\{x\in M: f(x)>\lambda\}} 1\,\mathrm{d}\mu && \text{(def of integral of simple function)}\\
\le&\int_{\{x\in M: f(x)>\lambda\}} \frac{f^p}{\lambda^p}\,\mathrm{d}\mu && \text{(integral keeps order)}\\
\le&\|f\|_p^p .
\end{aligned}
$$

证毕

定理 1 (Marcinkiewicz 内插定理)**.** 设 $\mathcal{D}_M$ 对乘（函数逐点相乘）特征函数封闭，即任给 f 属于 $\mathcal{D}_M$ 以及特征函数 χ_A 有 $f\chi_A\in\mathcal{D}_M$。设 T 是次线性算子。则 $\forall 1\le p_0<p_1\le\infty$，若 T 是弱 (p_0,p_0) 型同时是弱 (p_1,p_1) 型，则 $\forall p\in(p_0,p_1)$ 有 T 是强 (p,p) 型。

证明. 首先设 $p_1<\infty$：T 是弱 (p_j,p_j) 型，故存在 $C_j>0$ 使得

$$
\forall\lambda>0, |Tf|_*(\lambda,\infty)\le\Big(\frac{C_j\|f\|_{p_j}}{\lambda}\Big)^{p_j}.
$$

任给 $f\in L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M$，任意 $\lambda>0$，定义 $g_\lambda=f\chi_{\{x\in M:|f(x)|>\lambda\}}, h_\lambda=f\chi_{\{x\in M:|f(x)|\le\lambda\}}$，且 $g_\lambda+h_\lambda=f$。则 $g_\lambda,h_\lambda\in L^p(M,\mu)\cap\mathcal{D}_M$。由 Cavalieri 原理得

$$
\int_N |Tf|^p\,\mathrm{d}\nu = p\int_0^\infty |Tf|_*\nu(t,\infty)t^{p-1}\,\mathrm{d}m(t),
$$

其中 m 是 $\mathbb{R}$ 中 Lebesgue 测度。由 T 是次线性算子：

$$
|Tf(x)|\le|Tg_\lambda(x)|+|Th_\lambda(x)| \text{ 对}\nu\text{-几乎所有}x\in N\text{成立}.
$$

于是

$$
\forall\lambda>0: |Tf|_*\nu(\lambda,\infty)\le|Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)+|Th_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty),
$$

进而

$$
\int_N |Tf|^p\,\mathrm{d}\nu\le p\int_0^\infty\big(|Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)+|Th_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)\big)\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}m(\lambda),
$$

下面说明上式右侧可以被 $\|f\|_p^p$ 的常数倍控制即可。

现在估计 $|Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)\lambda^{p-1}$ 的积分：这里需要注意 $\lambda\mapsto\|g_\lambda\|_{p_0}$ 函数。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty |Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}m(\lambda)\\
\le&\int_0^\infty \Big(\frac{\|g_\lambda\|_{p_0}}{\lambda/2}\Big)^{p_0}\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}m(\lambda) && (T\text{ is weak}(p_0,p_0))\\
=&2^{p_0}C_0\int_0^\infty \|g_\lambda\|_{p_1}\cdot\lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}m(\lambda)\\
=&2^{p_0}C_0\int_0^\infty \Big(\int_M |g_\lambda(x)|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}m(\lambda)\\
=&2^{p_0}C_0\int_0^\infty \mathrm{d}m(\lambda)\int_{|f|^{-1}(\lambda,\infty)}|f(x)|^{p_0}\lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}\mu(x) && (\text{def of }g_\lambda)\\
=&2^{p_0}C_0\int_M \mathrm{d}\mu(x)\int_0^{|f(x)|}|f(x)|^{p_0}\lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}m(\lambda) && (\text{Tonelli'Theorem})\\
=&\frac{2^{p_0}C_0}{p-p_0}\int_M |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}
$$

现在估计 $|Th_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)\lambda^{p-1}$ 的部分：同上可得

$$\int_0^\infty |Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}m(\lambda)\le\frac{2^{p_1}C_1}{p_1-p}\int_M |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x).$$

综上，有

$$\int_N |Tf|^p\,\mathrm{d}\nu\le p\Big(\frac{2^{p_0}C_0}{p-p_0}+\frac{2^{p_1}C_1}{p_1-p}\Big)\|f\|_p^p\,.$$

即 T 是强 (p,p) 型的。

再设 $p_1=\infty$：任给 $p\in(p_0,\infty)$，此时存在 $C_0,C_1>0$ 使得 $\forall f\in\mathcal{D}_M$：

$$
\begin{aligned}
|Tf|_*(\lambda,\infty)\le&\Big(\frac{C_0\,\|f\|_{p_0}}{\lambda}\Big)^{p_0}(\forall\lambda>0), && (3)\\
\|Tf\|_\infty\le&C_1\,\|f\|_\infty\,. && (4)
\end{aligned}
$$

任意 $\lambda>0$ 命 $g_\lambda=f\chi_{\{x\in M:|f(x)|>\lambda/2C_1\}},h_\lambda=f\chi_{\{x\in M:|f(x)|\le\lambda/2C_1\}}$，同上有

$$\forall\lambda>0:|Tf|_*\nu(\lambda,\infty)\le|Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)+|Th_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty),$$

而 $\operatorname{ess\,sup}(h_\lambda)\le C_1\cdot\lambda/2C_1=\lambda/2$ 蕴含 $|Th(x)|\le\lambda/2$ 对 μ- 几乎所有 $x\in N$ 成立，从而 $|Th_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)=0$。现在只需证明 $|Tg_\lambda|_*\nu(\lambda/2,\infty)$ 可以被 $\|f\|_p^p$ 的常数倍控制即可，而这与之前所做的没有区别，除了一些常数。

证毕

3 Riesz-Thorin 内插定理

定理 2 (Riesz-Thorin 内插定理)**.** 设有两个 σ-有限的测度空间 $(X,\mu),(Y,\nu)$，以及 $T\colon S_X\to\mathcal{F}_M$ 是**复**线性算子，其中 S_X 为 X 上(复值)有限简单函数(即具有有限测度的支撑的简单函数) 全体构成的集合。任给 $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$ 且设 $\|Tf\|_{q_j}\le M_j\|f\|_{p_j}$ 对所有 $f\in S_X$ 成立。则 $\forall t\in(0,1)$ 有

$$\|Tf\|_q\le M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_p, \tag{5}$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

注. 首先要注意的是此定理是对复算子的情形，这不同于上一定理是实算子的情形。并且该定理依赖复分析的工具。

注. 当 $p<\infty$ 时，由 S_X 在 $L^p(M,\mu)$ 的通常拓扑（即范数诱导的）拓扑下稠密，(5)表明 $T\colon L^p(M,\mu)\to L^q(N,\nu)$ 一致连续，而 L^p 完备，故 T 可以唯一扩展成 $L^p(M,\mu)$ 中的一致连续映射。T 的扩展参考 [3]。

证明. 先假设 $p,q<\infty$：此时 $p_j,q_j<\infty$。任给有限简单函数 $f=\sum_{j=1}^m a_j\mathrm{e}^{i\alpha_j}\chi_{A_j}$ 其中 $a_j>0,\alpha_j\in\mathbb{R}$，诸 A_j 两两不交。此时

$$\|Tf\|_q=\sup_{\substack{g\in S_Y\\ \|g\|_{q'}\le1}}|\int_N(Tf)\cdot g\,\mathrm{d}\nu|.$$

任给 $g\in S_Y,\|g\|_{q'}\le1$，设为 $g=\sum_{j=1}^n b_j\mathrm{e}^{i\beta_j}\chi_{B_j}$ 其中 $b_j>0,\beta_j\in\mathbb{R}$，诸 B_j 两两不交。现在开始利用复分析的工具：

命 $P(z)=p\big(\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1}\big),z\in\overline{\mathcal{S}}$，则 $P(t)=1$；命 $Q(z)=q'\big(\frac{1-z}{q_0'}+\frac{z}{q_1'}\big),z\in\overline{\mathcal{S}}$，则 $Q(t)=1$ ，因为。命

$$f_z=\sum_{j=1}^m a_j^{P(z)}\mathrm{e}^{i\alpha_j}\chi_{A_j},g_z=\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)}\mathrm{e}^{i\beta_j}\chi_{B_j}.$$

注意 $f_t=f,g_t=g$.

$$F(z):=\int_N(Tf_z)\cdot g_z\,\mathrm{d}\nu=\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{i\alpha_j}\mathrm{e}^{i\beta_k}a_j^{P(z)}b_j^{Q(z)}\int_N(T\chi_{A_j})\chi_{B_k}\,\mathrm{d}\nu.$$

下面说明 F 是 $\mathcal{S}$ 上定义是合理的，只需说明求和中的积分有限，即诸 $(T\chi_{A_j})\chi_{B_k}\in L^1(N,\nu)$ ，由 Hölder 不等式得

$$|\int_N(T\chi_{A_j})\chi_{B_k}\,\mathrm{d}\nu|\le\left\|T\chi_{A_j}\right\|_{p_1}\|\chi_{B_k}\|_{p_1'},$$

而 $\left\|T\chi_{A_j}\right\|_{q_1} \leq M_1 \left\|\chi_{A_j}\right\|_{p_1} < \infty$，且 $\left\|\chi_{B_k}\right\|_{q_1'} < \infty$，故 F 定义合理。现在，我们希望利用：

引理 3 (3 线定理)**.** 设 $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon \Re z \in (0,1)\}$, F 在 $\mathcal{S}$ 中全纯且在 $\overline{\mathcal{S}}$ 上连续,并且存在 $B_0, B_1, M \in (0,\infty)$ 使得 $\sup_{\Re z=0}|F(z)| \leq B_0, \sup_{\Re z=1}|F(z)| \leq B_1, \sup_{z\in\mathcal{S}}|F(z)| \leq M$，则 $\forall x \in (0,1)$，有

$$\sup_{\Re z=x}|F(z)| \leq B_0^{1-x}B_1^{x}.$$

3 线定理的证明放在后面。为了利用 3 线定理,需要估计 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(xix)|$ 和 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(1+xi)|$：

(1) $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(xi)|$：任给 $x \in \mathbb{R}$ 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
|F(xi)| \leq& \left\|Tf_{xi}\right\|_{q_0} \left\|g_{xi}\right\|_{q_0'} \\
\leq& M_0 \left\|f_{xi}\right\|_{p_0} \left\|g_{xi}\right\|_{q_0'} \\
=& M_0 \left\|f\right\|_p^{p/p_0} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_0'}.
\end{aligned}$$

取 sup 得 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(xi)| \leq M_0 \left\|f\right\|_p^{p/p_0} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_0'}$ 。

(2) $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(1+xi)|$：任给 $x \in \mathbb{R}$ 由 Hölder 不等式，同理得

$$\begin{aligned}
|F(1+xi)| \leq& \left\|Tf_{1+xi}\right\|_{q_1} \left\|g_{1+xi}\right\|_{q_1'} \\
\leq& M_1 \left\|f_{1+xi}\right\|_{p_1} \left\|g_{1+xi}\right\|_{q_1'} \\
=& M_1 \left\|f\right\|_p^{p/p_1} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_1'}.
\end{aligned}$$

取 sup 得 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(1+xi)| \leq M_1 \left\|f\right\|_p^{p/p_1} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_1'}$。

此时，由三线引理得

$$\begin{aligned}
\sup_{\Re z=t}|F(z)| \leq& \big(M_0 \left\|f\right\|_p^{p/p_0} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_0'}\big)^{1-t} \big(\left\|f\right\|_p^{p/p_1} \left\|g\right\|_{q'}^{q'/q_1'}\big)^{t} \\
=& M_0^{1-t}M_1^{t} \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_{q'} \\
\leq& M_0^{1-t}M_1^{t} \left\|f\right\|_p.
\end{aligned}$$

由 g 的任意性，得 $\left\|Tf\right\|_q \leq M_0^{1-t}M_1^{t}\left\|f\right\|_p$。综上，我们证明了 $p, q < \infty$ 的情形。

另一方面,对 $p = q = \infty$(注意 $p = \infty \iff q = \infty$):此时 $p_j = q_j = \infty$,这时要证明的不等式由 $\left\|Tf\right\|_{q_j} \leq M_j \left\|f\right\|_{p_j}$ 以及 $M_0^{t}M_1^{1-t} \geq \min\{M_0, M_1\}$ 即得。 证毕

现在我们证明引理:

证明 (3 线定理)**.** 命 $G(z) = F(z)\big(B_0^{1-z}B_1^z\big)^{-1}$，由

$$|B_0^{1-z}B_1^z| \geq \min\{1, B_0\}\min\{1, B_1\} > 0$$

可知 G 在 $\mathcal{S}$ 上全纯，$\overline{\mathcal{S}}$ 上连续。命

$$G_n(z) = F(z)\big(B_0^{1-z}B_1^z\big)^{-1}\exp\big((z^2-1)/n\big),$$

则 G_n 在 $\mathcal{S}$ 中全纯，$\overline{\mathcal{S}}$ 上连续。而且任意 $x \in [0,1], y \in \mathbb{R}$ 有

$$|G_n(x+yi)| \leq M \cdot 1 \cdot \exp\left(-y^2-1\right)/n,$$

于是任意 $n \in \mathbb{N}^*$，当 $|y| \to \infty$ 有 $G_n(x+yi)$ 一致收敛于 0，其中一致性是关于 $x \in [0,1]$ 的；这说明对每个 n 存在 $y_n > 0$ 使得任意 $|y| \geq y_n$ 有

$$\sup_{x\in[0,1]} |G_n(x+yi)| \leq 1.$$

于是对 $\mathbb{C}$ 中闭区域 $R_n := \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in [0,1], \Im z \in [-y_n, y_n]\}$，有

$$\sup_{z\in\partial R_n} |G_n(z)| \leq 1,$$

矩形左右两边的上界由 F 在 $\partial\mathcal{S}$ 的上界给出，而矩形上下两边的上界由 y_n 的选取给出。又 $\lim_{n\to\infty} G_n = G$，得到

$$\sup_{z\in\partial R_n} |G(z)| \leq 1.$$

再由全纯函数的最大模原理，

$$\sup_{z\in R_n} |G(z)| = \sup_{z\in\partial R_n} |G(z)| \leq 1.$$

综上我们证明了 $\sup_{z\in R_n} |G(z)| \leq 1$，这自然给出想要的不等式。 证毕

注. 为什么 $Q(t) = 1$? 这个东西我第一次推导时比较不清不楚，但是确实只要注意对偶数的变化、以及 q, t 之间的关系即可：

$$\begin{aligned}
Q(t) =& q'\Big(\frac{1-t}{q_0'} + \frac{t}{q_1'}\Big) \\
=& q'\Big((1-t)\frac{1-q_0}{q_0} + t\frac{1-q_1}{q_1}\Big) \\
=& q'\Big(\frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} - (1-t) - t\Big) \\
=& q'(1/q - 1) \\
=& 1.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Lashi Bandara. *Harmonic Analysis*. URL: `https://maths-people.anu.edu.au/~bandara/documents/harm/harm.pdf`.

[2] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics No.249. Springer, 2014. ISBN: 9781493911936.

[3] 许全华; 马涛; 尹智. *泛函分析讲义*. 高等教育出版社, 2017. ISBN: 9787040474565.

[4] 林钦诚. *调和分析*. 现代数学基础. 高等教育出版社, 2016. ISBN: 9787040456134.