推出及其万有性质

桂物

2022年8月5日

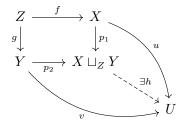
定义 14 (推出). 设有范畴 C 及其中态射 $f: Z \to X, g: Z \to Y$ 。 f, g 的 推出 (也叫纤维余积) 指资料 $(X \sqcup_Z Y, p_1, p_2)$,其中 $X \sqcup_Z Y \in Ob(C)$, $p_1: X \to X \sqcup_Z Y, p_2: Y \to X \sqcup_Z Y$ 使得下图交换:

$$Z \xrightarrow{f} X$$

$$\downarrow^{g_1} \qquad \downarrow^{p_1}$$

$$Y \xrightarrow{p_2} X \sqcup_Z Y$$

并且满足 (万有性质): 任意 u,v 使得 $u \circ f = v \circ g$, 存在唯一 h 使得下图 交换:



定义 14'(拉回). 在 C^{op} 中的推出则称为 C 中的拉回。

定义 15 (Cocartesian 图表). 对 X, Y 及其推出 $X \sqcup_Z Y$, 我们称图表

$$Z \xrightarrow{f} X$$

$$\downarrow p_1$$

$$Y \xrightarrow{p_2} X \sqcup_Z Y$$

为一个 Cocartesian 图表。

练习. 证明: 设有范畴 \mathcal{C} 及其中态射 $f\colon Z\to X, g\colon Z\to Y$,若其中 f,g 的推出存在,则在相差一个同构意义下唯一。

证明. 设 \mathcal{C} 中三元组 (W,q_1,q_2) 也是 f,g 的推出,则有如下两个交换图表:

$$Z \xrightarrow{f} X \qquad Z \xrightarrow{f} X$$

$$\downarrow g \downarrow \qquad \downarrow p_1 \qquad g \downarrow \qquad \downarrow q_1$$

$$Y \xrightarrow{p_2} X \sqcup_Z Y \qquad Y \xrightarrow{q_2} W$$

由 $X \sqcup_Z Y$ 的万有性质,下图交换:

同理由 W 的万有性质,下图交换:

$$Z \xrightarrow{f} X$$

$$g \downarrow \qquad \downarrow q_1 \qquad p_1$$

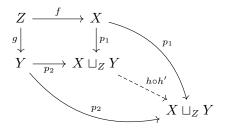
$$Y \xrightarrow{q_2} W \qquad \exists h' \qquad \downarrow q_2 \qquad X \sqcup_Z Y$$

$$(2)$$

由 (1) 得知 $q_j = h \circ p_j$, 由 (2) 得知 $h' \circ q_j = p_j$, 进而:

$$(h' \circ h) \circ p_j = h' \circ (h \circ p_j) = h' \circ q_j = p_j. \tag{3}$$

(3) 表明下图交换:



而此交换图中 $h \circ h'$ 换作 $id_{X \sqcup_Z Y}$ 也成立,由万有性质中的唯一性,我们得到 $h \circ h' = id_{X \sqcup_Z Y}$ 。完全相同的步骤说明 $h' \circ h = id_W$,从而 h 是同构。 \square

下面看几个例子:

1. 考察 Top 范畴: 设 $X \in \text{Ob}(\text{Top})$ 及其子空间 $X_0, X_1, X_{01} = X_0 \cap X_1$ 满足 $X_0^\circ \cup X_1^\circ = X$ 。设包含映射 $i_k \colon X_{01} \to X_j, x \mapsto x$ 以及 $j_k \colon X_j \to X, x \mapsto x$,我们证明

$$X_{01} \xrightarrow{i_0} X_0$$

$$\downarrow j_0$$

$$X_1 \xrightarrow{j_1} X$$

$$(4)$$

为 Cocartesian 图表, 为此要证明两点:

- (a) 证明(4)是交换的: 这很显然。
- (b) 证明万有性质成立: 任给 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Top}}(X_0,Y), g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Top}}(X_1,Y)$ 使得 $f \circ j_0 = g \circ j_1$,则定义

$$h \colon X \to Y, x \mapsto h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X_0, \\ g(x), & x \in X_1. \end{cases}$$
 (5)

 $f \circ j_0 = g \circ j_1$ 表明 h 在 X_{01} 上良好定义,从而 h 是良好定义的。 对于 h 的连续性,任意开子集 $A \subseteq Y$ 有

$$(h|_{X_0^{\circ}})^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap X_0 \in \mathcal{T},$$

 $(h|_{X_1^{\circ}})^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cap X_1 \in \mathcal{T}.$

于是 $h^{-1}(A)=f^{-1}(A)\cup g^{-1}(A)\in\mathcal{T}$,从而 h 连续。这样的 h 当然是唯一的,因为使得图表 (4) 交换就有 $h\big|_{X_0}=f,h\big|_{X_1}=g$ 。从而万有性质成立。

综上 Top 中 i_0, i_1 有推出 (X, j_0, j_1) 。

2. 考察 Top^* 范畴: 设 $p \in X_{01}$: 我们证明

$$(X_{01}, p) \xrightarrow{i_0} (X_0, p)$$

$$\downarrow^{i_1} \qquad \qquad \downarrow^{j_0}$$

$$(X_1, p) \xrightarrow{j_1} (X, p)$$

为 Cocartesian 图表,而证明几乎是将上文抄一遍,其中加上关于 p 的描述。

3. 考察 Grp 范畴: 给定 $P,G,H \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$ 以及 $i \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(P,G), j \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(P,H)$,我们知道有群自由积(也即 Grp 中余积) $G \sqcup H$ 及典型同态:

$$G \stackrel{\iota_1}{\longleftrightarrow} G \sqcup H \stackrel{\iota_2}{\longleftrightarrow} H$$

基于此图, 我们构造 G,H 的推出。一个思路是直接证明下图交换

$$P \xrightarrow{i} G$$

$$j \downarrow \qquad \downarrow_{\iota_{1}}$$

$$H \xrightarrow{\iota_{2}} G \sqcup H$$

$$(6)$$

但是,这不现实,比如 i 取平凡同态而 j 非平凡,就知道此时上图不是交换的。但是,有没有办法改造(6)使他交换?(6)最直接的问题就是 $\iota_2 \circ j \neq \iota_1 \circ i$,既然如此我们就强行将所有 $\iota_2 \circ j(x)$ 和 $\iota_1 \circ i(x)$ 视为 $G \sqcup H$ 中同一元素——考虑商群 $G \sqcup H/N$,其中 $N := \{\iota_2 \circ j(x) \cdot (\iota_1 \circ i(x))^{-1} : x \in N\}$ 注意 N 也不一定是正规子群,但考虑 N 的正规闭包

$$\mathrm{ncl}_G(N) := \bigcap_{N \subseteq S \triangleright G} S$$

即可。于是有商群 $G \sqcup H/\mathrm{ncl}_G(N)$ 及关于 $\mathrm{ncl}_G(N)$ 的典型同态 $\pi\colon G \sqcup H \to G \sqcup H/\mathrm{ncl}_G(N), g \mapsto gN$,将 π 与 ι_1, ι_2 复合得到下图表:

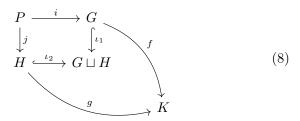
$$P \xrightarrow{i} G$$

$$j \downarrow \qquad \qquad \downarrow_{\tau :=\pi \circ \iota_{1}} \qquad (7)$$

$$H_{\nu :=\pi \circ \iota_{2}} G \sqcup_{P} H$$

其中 $G \sqcup_P H := G \sqcup H/\mathrm{ncl}_G(N)$ 。为证明 $(G \sqcup_P H, \tau, \nu)$ 是 i, j 的推出,即证明 (7) 交换且万有性质成立:

- (a) 证明 (7) 的交换性: 这从 $ncl_G(N)$ 以及 π 的定义立即得到;
- (b) 证明万有性质成立: 任给态射 $f: G \to K$ 及 $H: H \to K$ 适合 $f \circ i = g \circ j$,我们需要定义 $h: G \sqcup_P H \to K$ 使得 $h \circ \tau = h \circ \nu$,并且验证此 h 的唯一性。由下交换图:



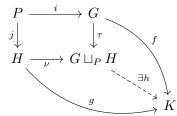
及自由积 $G \sqcup H$ 的万有性质知道存在唯一 $\tilde{h}: G \sqcup H \to K$ 使得 $\tilde{h} \circ \iota_1 = f$, $\tilde{h} \circ \iota_2 = g$ 。下面利用此 \tilde{h} 定义 h,为此插入一个引理:

引理 11. $f: G \to H$ 为群同态,而 $N \not\in G$ 的一个正规子群, $\pi: G \to G/N, g \mapsto gN$ 是典型同态。若 $N \subseteq \ker f$ 则下图交换

其证明将放在本文最后。对照引理的 f 与 \tilde{h} ,我们只需说明 $\mathrm{ncl}_G(N)$ 包含于 $\ker \tilde{h}$,又注意 $\ker \tilde{h}$ 是天然的正规子群,于是只要证明 N 包含于 $\ker \tilde{h}$: 任取 $x \in P$

$$\tilde{h}(\iota_2 \circ j(x) \cdot (\iota_1 \circ i(x))^{-1}) = \tilde{h} \circ \iota_2 \circ j(x) \cdot \tilde{h} \circ \iota_1 \circ i(x^{-1})$$
$$= g \circ j(x) \cdot f \circ i(x^{-1})$$

而 $g \circ j = f \circ i$ 故上式即 $f \circ i(x) \cdot f \circ i(x^{-1}) = f \circ i(e_P) = e_K$,从 而 $N \subseteq \ker \tilde{h}$ 。由上引理,存在唯一 $h : G \sqcup_P H \to K$ 使得下图交换:



至此, 我们证明了 Grp 中 i, j 有推出 $(G \sqcup_P H, \tau, \nu)$ 。

引理的证明. 定义

$$\overline{f} \colon G/N \to H$$
 $xN \mapsto f(x)$

 \overline{f} 是良好定义的,因为 xN = yN 蕴含 $xy^{-1} \in N \subseteq \ker f$ 于是 f(xN) = (yN) 。 \overline{f} 显然使得图交换。至于 f 的唯一性,设 $h: G/N \to H$ 也使得图表交换,则 $h \circ \pi = \overline{f} \circ \pi$ 而 π 是满同态,于是 $h = \overline{f}$ 。