可积函数空间

桂物
肆业

2022 年 6 月 28 日

1 开始之前

做一些约定: 全体实数记为 $\mathbb{R}$, 全体正实数记为 $\mathbb{R}_{>0}$, 带上 $+\infty$ 的非负实数记为 $[0,+\infty]$. 取定一个测度空间 $(X,\mathcal{S},\mu)$. 涉及的函数 $\mathcal{S}$-可测（以 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 作为可测空间）, 除非有特殊说明. 这里我只考虑实值函数, 当然复值可以类似讨论. 集合 E 的测度在不至于误会时直接记作 μE. “性质 $\mu-$ a.e. “表示此性质在个 μ-零测的集合之外处处成立.

定义 1.1 (测度的推出) 可测空间 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{U})$ 以及它们之间的可测映射: $f\colon X\to Y$, 定义 $f_*\mu:\mathcal{U}\to[0,+\infty], B\mapsto f_*\mu(B):=\mu\big(f^{-1}(B)\big)$. 容易验证 $f_*\mu$ 是 $(Y,\mathcal{U})$ 上测度.

2 模

定义 2.1 (p-模) $f\colon X\to\mathbb{R}$,$p\in\mathbb{R}_{>0}$,f 的 p-模, 记作 $\|f\|_p$ 定义为

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

注: 注意 p-模不是范数.

定义 2.2 (本性最大模) $f\colon X\to\mathbb{R}$,f 的本性最大模, 记作 $\|f\|_\infty$ 定义为

$$\|f\|_\infty := \inf\big\{t\in\mathbb{R}_{>0} : |f|_*\mu(t,+\infty)=0\big\}.$$

注: 我们有 $|f| \leq \|f\|_\infty (\mu - \text{a.e})$. 事实上, 任意 $n \geq 1$ 存在零测集 E_n 使得

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}, \forall x \in X - E_n.$$

令 $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ 则 $\mu(E) = 0$ 且 $X - E \subseteq X - E_n$ 对于每个 $n \geq 1$ 成立, 所以 $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ 对任意 $x \in X - E$ 成立.

定义 2.3 (p 次可积函数空间) $\forall 0 < p \leq +\infty$,$p$ 次可积函数空间, 记作 $\mathcal{L}^p(\mu)$, 是指

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathbb{R}^X : \|f\|_p < +\infty\}.$$

定理 2.1 $\forall f, g \in \mathcal{L}^p$, 有:

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^p \big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big), \tag{1}$$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

且 $\mathcal{L}^p$ 是域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

证明. 由

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq \big(|f| + |g|\big)^p \\ &\leq \big(2 \max\{|f|, |g|\}\big)^p \\ &\leq 2^p \big(|f|^p + |g|^p\big). \end{aligned}$$

红色部分即 $\max\{|f|, |g|\} \leq |f| + |g|$. 两边对 μ 积分得(1). (2) 由定义立得. 下证明 $\mathcal{L}^p$ 是域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.(1)保证加法封闭, 且函数的加法结合律由实数加法结合律可得, 零函数当然在 $\mathcal{L}^p$, 是加法单位元, 而 $f \in \mathcal{L}^p$ 也蕴含 $-f \in \mathcal{L}^p$; (2)保证 $\mathcal{L}^p$ 对数乘封闭, 其他公理继承自线性空间 $\mathbb{R}^X$. 证毕

定义 2.4 (对偶指数) $\forall 1 \leq p \leq +\infty$,$p$ 的对偶指数, 记作 p', 是 $[1, +\infty]$ 中使得下式成立的数

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

换言之,$p' := p/(p - 1)$, 当 $p \in \{1, +\infty\}$ 则理解为函数极限.

定理 2.2 (杨不等式) 设 $p \in (1, +\infty)$. 任意 $a, b \geq 0$ 成立

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b'}{p'}. \tag{3}$$

注: $p = +\infty, p' = 1$ 上式右边可能无意义, 不考虑.

证明. 只需证明 a, b 均为正实数的情形, 固定 $b > 0$, 定义 $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

$$f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b'}{p'} - ab.$$

求微分得 f 极小值点（唯一, 故也就是最小值点）, 不难证明最小值为零.
证毕.

定理 2.3 $p \in [1, +\infty]$,$f, h \colon X \to \mathbb{R}$ 则

$$\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_{p'}. \tag{4}$$

证明. 情形一,$1 < p < +\infty$. 先设 $\|f\|_p = \|h\|_{p'} = 1$. 由(3)得

$$|fh| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|h|^{p'}}{p'}.$$

积分得

$$\|fh\|_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

其余的情形, 不妨设 $\|f\|_p \neq 0, \|h\|_{p'} \neq 0$, 考虑

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, h_1 = \frac{h}{\|h\|_{p'}},$$

则 $\|f_1\|_p = \|h_1\|_{p'} = 1$, 由刚刚的结果 $\|fh\|_1 \leq 1$, 于是由 (2) 即得(4).

定理 2.4 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是有限测度空间, 且 $0 < p < q < +\infty$. 则有 $\forall f \in \mathcal{L}^q(\mu)$:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{(q-p)/(pq)} \|f\|_q.$$

此外, $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$.

证明. 任意给定 $f\in\mathcal{L}^q(\mu)$ 令 $r=q/p>1$，其对偶指数 $r'=r/(r-1)=q/(q-p)$. 由(4)得：

$$\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\le\Big(\int_X (|f|^p)^r\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/r}\Big(\int_X 1^{r'}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/r'}.$$

整理右边再两侧取 $1/p$ 次方即得不等式. 不等式直接说明 $f\in\mathcal{L}^p$, 证毕.

定理 2.5 设 $1\le p\le+\infty$,$f\in\mathcal{L}^p$. 则

$$\|f\|_p=\sup\Big\{\Big|\int_X fh\,\mathrm{d}\mu\Big| : h\in\mathcal{L}^{p'}(\mu)\text{ 且}\|h\|_{p'}\le 1\Big\}.$$

证明. 不妨设 $\|f\|_p>0$，否则易证不等式两边都是 0. 记右边被取 sup 的集合为 A. 任意 $h\in\mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 且 $\|h\|_{p'}\le 1$，由(4)得

$$\Big|\int_X fh\,\mathrm{d}\mu\Big|\le\int_X|fh|\,\mathrm{d}\mu\le\|f\|_p\|h\|_{p'}\le\|f\|_p.$$

从而 $\|f\|_p\ge\sup A$. 另一方面，令 $h:X\to\mathbb{R}$,

$$h(x)=\frac{f(x)|f(x)|^{p-2}}{\|f\|_p^{p/p'}},$$

则

$$\begin{aligned}\int_X fh\,\mathrm{d}\mu=&\|f\|_p^{-p/p'}\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\\=&\|f\|_p^{-p/p'+p}\\=&\|f\|_p.\end{aligned}$$

其中红色处用到 $p'=p/(p-1)$, 即 $p-p/p'=1$. 且

$$\begin{aligned}\|h\|_{p'}=&\Big(\int_X\frac{|f|^{(p-1)p'}}{\|f\|_p^p}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'}\\=&\Big(\int_X\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'}\\=&\|f\|_p^{-p/p'}\Big(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'}\\=&\|f\|_p^{-p/p'}\|f\|_p^{p/p'}\\=&1.\end{aligned}$$

由此，得 $\sup A\ge\|f\|_p$. 证毕.

注： $p=+\infty$ 当然也成立，只是没有什么必要了，毕竟几乎处处小于等于 1 直接用更好.

定理 2.6 (Minkowski 不等式) 设 $1\le p\le +\infty$ 且 $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ 则成立三角不等式

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{5}$$

证明. 情形一，$p=+\infty$. 设 $\|f\|_\infty=F,\|g\|_\infty=G$ 且 $F,G<+\infty$ 否则 (5) 显然成立. 由 $|f(x)|\le F(\mu-\text{a.e.})$ 和 $|g(x)|\le G(\mu-\text{a.e.})$ 故存在 $X_1,X_2\subseteq X$ 使得 $\mu(X_1)=\mu(X_2)=0$ 且 $|f(x)|\le F,\forall x\in X-X_1$, $|g(x)|\le G,\forall x\in X-X_2$. 令 $X_3=X_1\cup X_2$ 则 $\mu(X_3)=0$ 且 $|f(x)+g(x)|\le |f(x)|+|g(x)|\le F+G,\forall x\in X-X_3$.

情形二，$1\le p<+\infty$. 首先我们有 (1) 保证 $f+g\in\mathcal{L}^p(\mu)$. 且任意 $h\in L^{\sqrt{'}}(\mu),\|h\|_{p'}\le 1$ 有

$$\begin{aligned}\Big|\int_X (f+g)h\,\mathrm{d}\mu\Big|\le&\int_X|fh|\,\mathrm{d}\mu+\int_X|gh|\,\mathrm{d}\mu\\ \le&\|f\|_p\|h\|_{p'}+\|g\|_p\|h\|_{p'}\\ \le&\|f\|_p+\|g\|_p.\end{aligned}$$

其中红色不等号即(4).

定理 2.7 $\mu(X)<+\infty$ 则 $\forall f\in\mathcal{L}^{+\infty}(\mu)$ 有

$$\|f\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p.$$

证明. 设 $M=\|f\|_\infty$，则存在 $E\subseteq X$ 使得 $\mu(E)=0$ 且 $|f(x)|\le M,\forall x\in X-E$. 于是

$$\begin{aligned}\|f\|_p=&\Big(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\ =&\Big(\int_{X-E}|f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\ \le&\big(M^p\mu(X-E)\big)^{1/p},\end{aligned}$$

红色部分由积分对区域可加，以及 $\int_E|f|^p\,\mathrm{d}\mu=0$ 即得. 令 $p\to+\infty$ 得 $\limsup_{p\to+\infty}\|f\|_p\le M$. 另一方面，任意 $\varepsilon>0$,$|f|_*\mu(M-\varepsilon,+\infty)>0$. 设

$A=|f|^{-1}(M-\varepsilon,+\infty)$. 进而

$$\begin{aligned}\|f\|_p &=\Big(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\ &\geq\Big(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\ &\geq\Big(\mu(A)\big(M-\varepsilon\big)^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

进而

$$\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p\geq M-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得到

$$\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p\geq M.$$

综上

$$M\leq\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p\leq\limsup_{p\to+\infty}\|f\|_p\leq M.$$

证毕.