从可积函数空间到 Banach 空间

桂物

2022 年 7 月 4 日

1 开始之前

上次说到，可积函数空间 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 是线性空间，但是考虑到几乎处处相同的函数积分相同，这使得我们定义的 $\|\|_p$ 不是范数，因此需要一些调整，即不区分几乎处处相同的函数。以下总是假设有测度空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$. 这里约定 $\mathbb{N}$ 为全体正整数.

2 赋范线性空间

定义 2.1 $\mathcal{Z}(\mu) := \{f : f(x) = 0 \text{ for } \mu\text{-a.e. } x \in X\}$.

定义 2.2 设 $0 < p \leq \infty$. $\widetilde{f} := f + \mathcal{Z}(\mu) = \{f + z : z \in \mathcal{Z}(\mu)\}$. 也即 $\widetilde{f}$ 是加法交换群 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 商去正规子群 $\mathcal{Z}(\mu)$ 得到的陪集中，f 所在的陪集.

定义 2.3 设 $0 < p \leq \infty$. $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{Z}(\mu) = \{\widetilde{f} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$. $L^p(\mu)$ 上加法，数乘定义为 $\widetilde{f} + \widetilde{g} := \widetilde{(f+g)}, \alpha\widetilde{f} := \widetilde{\alpha f}$. 换言之，将 $L^p(\mu)$ 视为 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 作为线性空间商去子空间 $\mathcal{Z}(\mu)$ 所得的商空间.

定义 2.4 设 $0 < p \leq \infty$. 则 $L^p(\mu)$ 上的 $p-$ 范数定义为 $\|\|_p$: $L^p(\mu) \to [0, \infty), \widetilde{f} \mapsto \|f\|_p$. 其中 $\|f\|_p$ 即 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 上的 $p-$ 模. 容易验证定义是良好的，

评论: 这里的范数记号与 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 上一样，但是有等价类的记号保证不至于混淆，不用在意.

定理 2.1 设 $1 \le p \le \infty$, 则 $L^p(\mu)$ 及其上范数 $\|\|_p$ 是赋范线性空间.

证明. 线性空间的商空间当然是线性空间。下面说明 $\|\|_p$ 是其上范数：三角不等式是容易的，由之前的 Minkowski 不等式得

$$\|\widetilde{f+g}\|_p = \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p = \|\widetilde{f}\|_p + \|\widetilde{g}\|_p. \tag{1}$$

显然 $\|\|_p$ 非负，且 $\|\widetilde{f}\|_p = 0$ 当且仅当 $f(x) = z(x)\ \mu -$ a.e. 也即 $\widetilde{f} = \widetilde{0}$. 与乘法相容性也显然。综上，$\|\|_p$ 是 $L^p(\mu)$ 上范数.

3 Banach 空间

现在我们有 $L^p(\mu)$ 是赋范线性空间，进而是度量空间，$d(f,g) := \|f-g\|_p$ ，自然要讨论完备性，首先回顾 Cauchy 列的概念：

定义 3.1 (Cauchy 列) 设度量空间 (Y,d). 若其中序列 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall m,n > N$ 有 $d(y_m,y_n) < \varepsilon$，则称 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Y,d) 中 Cauchy 列，有时简称 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 Cauchy 列.

定理 3.1 设 $1 \le p \le \infty$. 设 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 中有 Cauchy 列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 则存在 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 使得 $f_n \xrightarrow{p} f$ ，即 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. 换言之，$\mathcal{L}^p(\mu)$ 中 Cauchy 列收敛.

证明. Case 1: $1 \le p < \infty$. 利用 Cauchy 列，只需要证明，存在 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的一子列 $\{f_{n_k} : n \in \mathbb{N}\}$ 收敛于某个 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ，由 Cauchy 列，任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $n_k \in \mathbb{N}$ 使得 $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. 于是选出子列 $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$，以后将此子列记为 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. 再设 $f_0 = 0$. 定义 $g, g_1, g_2, \ldots : X \to [0,\infty]$ 如下

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k - f_{k-1}|, g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|. \tag{2}$$

由 Minkowski 不等式得

$$\|g_n\|_p \le \sum_{k=1}^{n} \|f_k - f_{k-1}\|_p. \tag{3}$$

易证 $\{g_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 g，利用单调收敛定理及 (3) 得

$$\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n^p\,\mathrm{d}\mu\le\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k-f_{k-1}\|_p\Big)^p<\infty. \tag{4}$$

从而 $g\in\mathcal{L}^p(\mu)$，故 $g(x)<\infty$ 对 $x\in X$ μ-几乎处处成立. 由级数绝对收敛性，可以定义

$$f\colon X\to[-\infty,\infty],x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\big(f_k(x)-f_{k-1}(x)\big)=\lim_{n\to\infty}f_n(x). \tag{5}$$

事实上，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 几乎处处存在有限，即上面的定义除了一个零测集外都是明确的，对于那个零测集中的 x 我们定义 $f(x)=0$. 从而有 $\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 f 且 $|f(x)|\le g(x)$ 对几乎所有 $x\in X$，而 (4) 表明 $g\in\mathcal{L}^p(\mu)$，于是 $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$.

下证明 $f_n\xrightarrow{p}f$，给定 $\varepsilon>0$ 以及 N 使得 $\|f_j-f_k\|_p<\varepsilon$ 对于所有 $j,k\ge N$. 令 $k\ge n$，由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\|f_k-f\|_p&=\Big(\int_X|f_k-f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\&\le\liminf_{j\to\infty}\Big(\int_X|f_k-f_j|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\&=\liminf_{j\to\infty}\|f_k-f_j\|_p\\&\le\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 任意性，得 $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$.

Case 2: $p=\infty$. 利用 Cauchy 列，只需要证明，存在 $\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 的一子列 $\{f_{n_k}\colon n\in\mathbb{N}\}$ 收敛于某个 $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$，由 Cauchy 列，任意 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $n_k\in\mathbb{N}$ 使得 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_\infty<2^{-k}$. 于是选出子列 $\{f_{n_k}\colon k\in\mathbb{N}\}$，以后将此子列记为 $\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}$. 再设 $f_0=0$. 定义 $\{g_n\colon n\in\mathbb{N}\},g$ 同上，则 $\lim_{n\to\infty}g_n=g$. 由 Minkowski 不等式得

$$\|g_n\|_\infty\le\sum_{k=1}^{n}\|f_k-f_{k-1}\|_\infty. \tag{6}$$

且 $\lim_{n\to\infty}g_n=g$. 任意 $n\in\mathbb{N}$ 设 $E_n\subseteq X$ 使得 $|f_n-f_{n-1}(x)|\le\|f_n-$

$f_{n-1}\|_\infty, \forall x \in X - E_n$ 且 $\mu(E_n)=0$. 令 $E=\cup_{n\geq 1}E_n$ 则 $\mu(E)=0$. 且

$$|g(x)| \leq \sum_{n\geq 1}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty, \forall x \in X - E. \tag{7}$$

从而

$$\|g\|_\infty \leq \sum_{n\geq 1}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty < \infty \ \mu\text{-a.e.} \tag{8}$$

现在任意 $x \in X - E$ 可以定义 $f(x) = \sum_{n\geq 1}\big(f_n(x) - f_{n-1}(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$，因为 (7) 中绝对收敛蕴含收敛. 对于 $x \in E$ 定义 $f(x)=0$. 则 $|f(x)| \leq g(x)$ 对几乎所有 $x \in X$ 成立，又 (8) 说明 $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ 进而 $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

下证明 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$, 给定 $\varepsilon > 0$ 以及 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall j,k \geq N$ 有 $\|f_j - f_k\|_\infty < \varepsilon$. 固定 $k \geq N$，则

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_\infty =& \|f_k - \liminf_{j\to\infty} f_j\|_\infty \\
\leq& \liminf_{j\to\infty}\|f_k - f_j\|_\infty \\
\leq& \varepsilon
\end{aligned} \tag{9}$$

得证. 其中红色不等号是下面的引理:

引理 3.2 $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^\infty(\mu)$ 则有

$$\|\liminf_{n\to\infty} g_n\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty}\|g_n\|_\infty.$$

证明. 函数的正负取值不影响其范数，故不妨设 $g_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 设序列 $\{g_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\|g_{n_k}\|_\infty = \liminf_{n\to\infty}\|g_n\|_\infty =: A$. 则 $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ 使得 $\forall k > K$ 有 $\|g_{n_k}\|_\infty < A + \varepsilon$ 进而 $g_{n_k} \leq A + \varepsilon$ μ-a.e. . 对一列零测集取并，可得 $\lim_{k\to\infty} g_{n_k} \leq A + \varepsilon$ μ-a.e. . 又 $\liminf_{n\to\infty} g_n \leq \lim_{k\to\infty} g_{n_k}$，故

$$\liminf_{n\to\infty} g_n \leq A + \varepsilon \ \mu\text{-a.e.} \ ,$$

从而

$$\|\liminf_{n\to\infty} g_n\|_\infty \leq A + \varepsilon.$$

由 ε 任意性，得证.

定义 3.2 (Banach 空间) 完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

定理 3.3 设 $1 \le p \le \infty$，则 $L^p(\mu)$ 是 Banach 空间.

证明. 利用3.1所得结果，在 $L^p(\mu)$ 中选择恰当的元即可得到完备性.