推出及其万有性质

桂物

2022 年 8 月 5 日

定义 14 (推出)**.** 设有范畴 $\mathcal{C}$ 及其中态射 $f\colon Z \to X, g\colon Z \to Y$。$f, g$ 的推出（也叫纤维余积）指资料 $(X \sqcup_Z Y, p_1, p_2)$，其中 $X \sqcup_Z Y \in Ob(\mathcal{C})$，$p_1\colon X \to X \sqcup_Z Y, p_2\colon Y \to X \sqcup_Z Y$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \\
Y \arrow[r, "p_2"'] & X \sqcup_Z Y
\end{tikzcd}$$

并且满足（万有性质）：任意 u, v 使得 $u \circ f = v \circ g$，存在唯一 h 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[drr, bend right, "v"'] & X \sqcup_Z Y \arrow[dr, dashed, "\exists h"] & \\
 & & U
\end{tikzcd}$$

定义 14' (拉回)**.** 在 $\mathcal{C}^{op}$ 中的推出则称为 $\mathcal{C}$ 中的拉回。

定义 15 (Cocartesian 图表)**.** 对 X, Y 及其推出 $X \sqcup_Z Y$，我们称图表

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \\
Y \arrow[r, "p_2"'] & X \sqcup_Z Y
\end{tikzcd}$$

为一个 *Cocartesian* 图表。

练习. 证明: 设有范畴 $\mathcal{C}$ 及其中态射 $f\colon Z \to X, g\colon Z \to Y$, 若其中 f, g 的推出存在，则在相差一个同构意义下唯一。

证明. 设 $\mathcal{C}$ 中三元组 (W, q_1, q_2) 也是 f, g 的推出，则有如下两个交换图表：

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \\
Y \arrow[r, "p_2"'] & X \sqcup_Z Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "q_1"] \\
Y \arrow[r, "q_2"'] & W
\end{tikzcd}
$$

由 $X \sqcup_Z Y$ 的万有性质，下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[drr, bend right, "q_2"] & X \sqcup_Z Y \arrow[dr, dashed, "\exists h"] & \\
& & W
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

同理由 W 的万有性质，下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "p_1"] & \\
Y \arrow[r, "q_2"'] \arrow[drr, bend right, "p_2"] & W \arrow[dr, dashed, "\exists h'"] & \\
& & X \sqcup_Z Y
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

由 (1) 得知 $q_j = h \circ p_j$ ，由 (2) 得知 $h' \circ q_j = p_j$ ，进而：

$$
(h' \circ h) \circ p_j = h' \circ (h \circ p_j) = h' \circ q_j = p_j. \tag{3}
$$

(3) 表明下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddr, bend left, "p_1"] & \\
Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[drr, bend right, "p_2"] & X \sqcup_Z Y \arrow[dr, dashed, "h \circ h'"] & \\
& & X \sqcup_Z Y
\end{tikzcd}
$$

而此交换图中 $h \circ h'$ 换作 $\mathsf{id}_{X \sqcup_Z Y}$ 也成立，由万有性质中的唯一性，我们得到 $h \circ h' = \mathsf{id}_{X \sqcup_Z Y}$ 。完全相同的步骤说明 $h' \circ h = \mathsf{id}_W$ ，从而 h 是同构。 □

下面看几个例子：

1. 考察 Top 范畴: 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ 及其子空间 $X_0, X_1, X_{01} = X_0 \cap X_1$ 满足 ${X_0}^{\circ} \cup {X_1}^{\circ} = X$ 。设包含映射 $i_k \colon X_{01} \to X_j, x \mapsto x$ 以及 $j_k \colon X_j \to X, x \mapsto x$ ，我们证明

$$\begin{array}{ccc} X_{01} & \xrightarrow{i_0} & X_0 \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_0} \\ X_1 & \xrightarrow[j_1]{} & X \end{array} \tag{4}$$

为 Cocartesian 图表，为此要证明两点:

(a) 证明(4)是交换的：这很显然。

(b) 证明万有性质成立：任给 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X_0, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X_1, Y)$ 使得 $f \circ j_0 = g \circ j_1$ ，则定义

$$h \colon X \to Y, x \mapsto h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X_0, \\ g(x), & x \in X_1. \end{cases} \tag{5}$$

$f \circ j_0 = g \circ j_1$ 表明 h 在 X_{01} 上良好定义，从而 h 是良好定义的。对于 h 的连续性，任意开子集 $A \subseteq Y$ 有

$$\left(h\big|_{{X_0}^{\circ}}\right)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap X_0 \in \mathcal{T},$$
$$\left(h\big|_{{X_1}^{\circ}}\right)^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cap X_1 \in \mathcal{T}.$$

于是 $h^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cup g^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ ，从而 h 连续。这样的 h 当然是唯一的，因为使得图表 (4) 交换就有 $h\big|_{X_0} = f, h\big|_{X_1} = g$ 。从而万有性质成立。

综上 Top 中 i_0, i_1 有推出 (X, j_0, j_1) 。

2. 考察 Top^* 范畴：设 $p \in X_{01}$ ：我们证明

$$\begin{array}{ccc} (X_{01}, p) & \xrightarrow{i_0} & (X_0, p) \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_0} \\ (X_1, p) & \xrightarrow[j_1]{} & (X, p) \end{array}$$

为 Cocartesian 图表，而证明几乎是将上文抄一遍，其中加上关于 p 的描述。

3. 考察 Grp 范畴：给定 $P, G, H \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$ 以及 $i \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(P, G), j \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(P, H)$ ，我们知道有群自由积（也即 Grp 中余积）$G \sqcup H$ 及典型同态：

$$G \xhookrightarrow{\iota_1} G \sqcup H \xhookleftarrow{\iota_2} H$$

基于此图，我们构造 G, H 的推出。一个思路是直接证明下图交换

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & G \arrow[d, "\iota_1"] \\ H \arrow[r, "\iota_2"'] & G \sqcup H \end{tikzcd} \tag{6}$$

但是，这不现实，比如 i 取平凡同态而 j 非平凡，就知道此时上图不是交换的。但是，有没有办法改造 (6) 使他交换？(6)最直接的问题就是 $\iota_2 \circ j \neq \iota_1 \circ i$ ，既然如此我们就强行将所有 $\iota_2 \circ j(x)$ 和 $\iota_1 \circ i(x)$ 视为 $G \sqcup H$ 中同一元素——考虑商群 $G \sqcup H / N$ ，其中 $N := \{\iota_2 \circ j(x) \cdot \big(\iota_1 \circ i(x)\big)^{-1} : x \in N\}$ 注意 N 也不一定是正规子群，但考虑 N 的正规闭包

$$\mathrm{ncl}_G(N) := \bigcap_{N \subseteq S \triangleright G} S$$

即可。于是有商群 $G \sqcup H / \mathrm{ncl}_G(N)$ 及关于 $\mathrm{ncl}_G(N)$ 的典型同态 $\pi \colon G \sqcup H \to G \sqcup H / \mathrm{ncl}_G(N), g \mapsto gN$ ，将 π 与 ι_1, ι_2 复合得到下图表：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & G \arrow[d, "\tau :=\pi \circ \iota_1"] \\ H \arrow[r, "\nu :=\pi \circ \iota_2"'] & G \sqcup_P H \end{tikzcd} \tag{7}$$

其中 $G \sqcup_P H := G \sqcup H / \mathrm{ncl}_G(N)$ 。为证明 $(G \sqcup_P H, \tau, \nu)$ 是 i, j 的推出，即证明 (7) 交换且万有性质成立：

(a) 证明 (7) 的交换性：这从 $\mathrm{ncl}_G(N)$ 以及 π 的定义立即得到；

(b) 证明万有性质成立：任给态射 $f \colon G \to K$ 及 $H \colon H \to K$ 适合 $f \circ i = g \circ j$，我们需要定义 $h \colon G \sqcup_P H \to K$ 使得 $h \circ \tau = h \circ \nu$ ，并且验证此 h 的唯一性。由下交换图：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & G \arrow[d, hook, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ H \arrow[r, hook, "\iota_2"] \arrow[drr, bend right, "g"] & G \sqcup H & \\ & & K \end{tikzcd} \tag{8}$$

及自由积 $G \sqcup H$ 的万有性质知道存在唯一 $\tilde{h}\colon G \sqcup H \to K$ 使得 $\tilde{h} \circ \iota_1 = f$，$\tilde{h} \circ \iota_2 = g$ 。下面利用此 $\tilde{h}$ 定义 h，为此插入一个引理：

引理 11. $f\colon G \to H$ 为群同态，而 N 是 G 的一个正规子群，$\pi\colon G \to G/N, g \mapsto gN$ 是典型同态。若 $N \subseteq \ker f$ 则下图交换

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{9}$$

其证明将放在本文最后。对照引理的 f 与 $\tilde{h}$,我们只需说明 $\mathrm{ncl}_G(N)$ 包含于 $\ker \tilde{h}$，又注意 $\ker \tilde{h}$ 是天然的正规子群，于是只要证明 N 包含于 $\ker \tilde{h}$：任取 $x \in P$

$$\begin{aligned} \tilde{h}\big(\iota_2 \circ j(x) \cdot (\iota_1 \circ i(x))^{-1}\big) &= \tilde{h} \circ \iota_2 \circ j(x) \cdot \tilde{h} \circ \iota_1 \circ i(x^{-1}) \\ &= g \circ j(x) \cdot f \circ i(x^{-1}) \end{aligned}$$

而 $g \circ j = f \circ i$ 故上式即 $f \circ i(x) \cdot f \circ i(x^{-1}) = f \circ i(e_P) = e_K$，从而 $N \subseteq \ker \tilde{h}$。由上引理，存在唯一 $h\colon G \sqcup_P H \to K$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & G \arrow[d, "\tau"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ H \arrow[r, "\nu"'] \arrow[drr, bend right, "g"] & G \sqcup_P H \arrow[dr, dashed, "\exists h"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

至此，我们证明了 Grp 中 i, j 有推出 $(G \sqcup_P H, \tau, \nu)$。

引理的证明. 定义

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon G/N &\to H \\ xN &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$\overline{f}$ 是良好定义的，因为 $xN = yN$ 蕴含 $xy^{-1} \in N \subseteq \ker f$ 于是 $f(xN) = (yN)$ 。$\overline{f}$ 显然使得图交换。至于 f 的唯一性，设 $h\colon G/N \to H$ 也使得图表交换，则 $h \circ \pi = \overline{f} \circ \pi$ 而 π 是满同态，于是 $h = \overline{f}$。 □