Seifert–Van Kampen 定理（群胚版本）

桂物

2022 年 8 月 6 日

本文将叙述、证明 Seifert–Van Kampen 定理 (群胚版本)。简言之, 即函子 π, π_1 均将范畴中的 Cocartesian 图表变为另一范畴中的 Cocartesian 图表 (再利用推出的同构意义下唯一性, 我们就可以由 Grp 中图表得出关于基本群的同构或等等信息)。为便于叙述, 总是设 X 是拓扑空间, $X_0, X_1, X_{01} = X_0 \cap X_1$ 作为其子空间，且适合 ${X_0}^\circ \cup {X_1}^\circ = X$ 。事实上，我们有：

定理 12 (Seifert–Van Kampen 定理)**.** 设 X_0, X_1, X_{01} 均为道路连通的（进而 X 也是），则函子 $\pi\colon \mathsf{Top}^* \to \mathsf{Grp}$ 保持 Cocartesian 图表。

回顾上次提过的 Top^* 中 Cocartesian 图表

$$\begin{array}{ccc} (X_{01}, p) & \xrightarrow{i_0} & (X_0, p) \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_0} \\ (X_1, p) & \xrightarrow[j_1]{} & (X, p) \end{array}$$

Seifert–Van Kampen 定理表明，下图

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{01}, p) & \xrightarrow{(i_0)_*} & \pi_1(X_0, p) \\ {\scriptstyle (i_1)_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (j_0)_*} \\ \pi_1(X_1, p) & \xrightarrow[(j_1)_*]{} & \pi_1(X, p) \end{array} \tag{1}$$

是 Cocartesian 的。注意 (1) 是 Grp 中 Cocartesian 图表，换言之

$$(\pi_1(X, p), (j_0)_*, (j_1)_*)$$

为 Grp 中 $(i_0)_*, (i_1)_*$ 的推出，由上次的练习我们知道推出是同构意义下唯一的：

推论 13. 设 X_0, X_1, X_{01} 均为道路连通的，则有群同构

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X_0,p) \sqcup_{\pi_1(X_{01},p)} \pi_1(X_1,p) \tag{2}$$

(2) 给出我们求解基本群的一个重要方法。类似地对于函子 π 有：

定理 14 (R.Brown)**.** 这时我们不再要求道路连通。函子 $\pi\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Grpd}$ 保持 Cocartesian 图表。

我们将首先证明该版本，并且利用它证明 Seifert–Van Kampen 定理。

定理 14 证明. 即证明图表交换以及万有性质成立。

1. 图表交换：这由 π 是函子即得。
2. 万有性质成立：任给 $F\colon \pi(X_0) \to \mathcal{G}$ 和 $G\colon \pi(X_1) \to \mathcal{G}$，满足 $F \circ \pi(j_0) = G \circ \pi(j_1)$，我们证明下图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi(X_{01}) \arrow[r, "\pi(j_0)"] \arrow[d, "\pi(j_1)"'] & \pi(X_0) \arrow[d, "\pi(i_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "F"] & \\
\pi(X_1) \arrow[r, "\pi(i_1)"] \arrow[drr, bend right, "G"'] & \pi(X) \arrow[dr, dashed, "\exists K"] & \\
& & \mathcal{G}
\end{tikzcd} \tag{3}$$

   即存在唯一 $K\colon \pi(X) \to \mathcal{G}$ 适合 $F = K \circ \pi(i_0)$ 和 $G = K \circ \pi(i_1)$。我们定义 K 如下：

   (a) 于对象：$\mathrm{Ob}(\pi(X))$，定义

   $$K(x) := \begin{cases} F(x), & x \in X_0; \\ G(x), & x \in X_1. \end{cases} \tag{4}$$

   这里 K 良好定义，因为 $F \circ \pi(j_0) = G \circ \pi(j_1)$ 蕴含 $x \in X_{01}$ 时 $F(x) = G(x)$。

   (b) 于态射[1]：$\langle\alpha\rangle \in \mathrm{Hom}_{\pi(X)}(x,y)$ 自然的想法是对 α 在 X_0 的部分由函子 F 作用，对 α 在 X_1 的部分由函子 G 作用，从而给出 $K\langle\alpha\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(K(x), K(y))$。下面将这个想法严谨化，分为以下三步（接下来的内容和数学分析中黎曼积分的定义有些相似，即区间的分割等做法）：

[1] 这里将开始一段较长的论证。

i. 对每个 $\alpha \in P(x,y)$ 定义 $\widetilde{K}(\alpha) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(K(x), K(y))$；

ii. 证明当 $\alpha \simeq \alpha' \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ 时，成立 $\widetilde{K}(\alpha) = \widetilde{K}(\alpha')$；

iii. 定义 $K(\langle\alpha\rangle) = \widetilde{K}(\alpha)$。

引理 15 (Lebesgue 数引理)**.** *设 (X, d) 是一紧致度量空间，以及 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的一族开覆盖，则存在 $\delta > 0$ 使得：对每个 X 的直径不超过 δ 的子集 A，存在 $\alpha \in I$ 使得 $A \subseteq O_\alpha$。*

证明还是放在本文最后。这引理正好帮助我们对道路作限制——使得其局部落在 X_0 或者 X_1 中。由 ${X_0}^{\mathrm{o}}, {X_1}^{\mathrm{o}}$ 作为 X 的开覆盖，由引理得：$\delta > 0$ 使得：对每个 I 的直径不超过 δ 的子集 A 都有 A 在某个 O_α 之中，故对 I 作分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \tag{5}$$

使得 $\triangle_i := t_i - t_{i-1} < \delta$ ，则这些闭区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 使得 $\alpha[t_{i-1}, t_i]$ 一定在 X_0 或者 X_1 中。我们定义（由分割诱导的）道路的局部

$$\begin{aligned} \alpha_i \colon I &\to X \\ t &\mapsto \alpha\big((1-t)t_{i-1} + t_{i+1}\big). \end{aligned} \tag{6}$$

由于我们选取的 t_i 使得 α_i （的像 $\mathrm{Im}\alpha$）一定落在 X_0 或者 X_1 中，这时可以定义

$$\widetilde{K}(\alpha) = \begin{cases} F(\langle\alpha\rangle), & \text{当 } \mathrm{Im}\ \alpha \subseteq X_0; \\ G(\langle\alpha\rangle), & \text{当 } \mathrm{Im}\ \alpha \subseteq X_0 \end{cases} \tag{7}$$

为了保证 K 是函子，必须使得 K 保持态射的复合，进而 $\widetilde{K}(\alpha)$ 也保持有相似性质，具体地说就是我们应该定义 $\widetilde{K}(\alpha)$ 如下

$$\widetilde{K}(\alpha) := K(\alpha_n) \circ \cdots \circ K(\alpha_1). \tag{8}$$

上式中的 $\circ$ 为范畴 $\mathcal{G}$ 中态射的复合。这时 $\widetilde{K}(\alpha)$ 定义依赖于分割的选择，所以我们要验证良好定义。(这里还要说明 $\widetilde{K}(\alpha)$ 良好定义，即当 $\mathrm{Im}\ \alpha \subseteq X_{01}$ 时，$F\big(\langle\alpha\rangle\big) = G\big(\langle\alpha\rangle\big)$，这由 $F \circ \pi(j_0) = G \circ \pi(j_1)$ 立得。）考虑到两个分割可以将分点取并得到加细，我们只要证明加细不影响 $\widetilde{K}(\alpha)$，而加细总是可以拆分成有限次、每次至多添加一个分点的加细，利用数学归纳法，我们只需要证明：

添加一个分点的加细不影响 $\widetilde{K}(\alpha)$。设有(5)的添加一个分点的加细，不失一般性，设为

$$0 = t_0 < t_\triangle < t_1 < \cdots < t_n = 1, \tag{9}$$

则依(5)定义了

$$\widetilde{K}(\alpha) = K(\alpha_n) \circ \cdots \circ K(\alpha_1),$$

依(9)定义了

$$\widetilde{K}(\alpha) = \widetilde{K}(\alpha_n) \circ \cdots \circ \big(\widetilde{K}(\alpha_{1\triangle}) \circ \widetilde{K}(\alpha_{\triangle 0})\big),$$

其中 $\alpha_{1\triangle}, \alpha_{\triangle 0}$ 分别是 $\alpha\big|_{[t_\triangle, t_1]}, \alpha\big|_{[t_0, t_\triangle]}$ 正规化定义域所得。下面证明 $\widetilde{K}(\alpha_{1\triangle}) \circ K(\alpha_{\triangle 0}) = \widetilde{K}(\alpha_1)$ 即可，不失一般性，我们设 $\operatorname{Im} \alpha\big|_{[t_0, t_1]} \subseteq X_0$ ，由(7)知道

$$\widetilde{K}(\alpha_1) = F\big(\langle \alpha_1 \rangle\big),$$

以及

$$\widetilde{K}(\alpha_{1\triangle}) = F\big(\langle \alpha_1 \rangle\big), \widetilde{K}(\alpha_{\triangle 0}) = F\big(\langle \alpha_1 \rangle\big).$$

所以要证明的 $\widetilde{K}(\alpha_{1\triangle}) \circ \widetilde{K}(\alpha_{\triangle 0}) = \widetilde{K}(\alpha_1)$ 等价于

$$\big(F\langle \alpha_{1\triangle} \rangle\big) \circ \big(F\langle \alpha_{\triangle 0} \rangle\big) = F\big(\langle \alpha_1 \rangle\big). \tag{10}$$

F 是函子以及显然的 $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_{1\triangle} \rangle \circ \langle \alpha_{\triangle 0} \rangle$ 保证了(10)。于是我们完成了(2(b)i)。

现在进行(2(b)ii)。设 $\alpha \simeq_H \alpha' \ \mathrm{rel}\{0,1\}$，其中 $\alpha, \alpha' \in P(x, y)$。由 Lebesgue 数引理以及 $\mathbb{R}$ 的 Archimedean 性，我们存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得诸正方形

$$\square_{i,j} := [(i-1)/k, i/k] \times [(j-1)/k, j/k], i, j \in \{1, 2 \ldots, k\}.$$

在 H 下的像 $H(\square_{i,j})$ 均落在 X_0 或者 X_1 中（当然不同的正方形不必在同一个子空间）。我们约定折线 L 指一条 $\cup_{i,j} \partial \square_{i,j}$ 中的道路（即连续映射）的**像**，并且该道路是简单的（即作为映射是单射），此外还要求道路（对于参数增加为正方向）只向右或者上走。每个折线 L 我们可以对应一个（逐段匀速的）连续映射

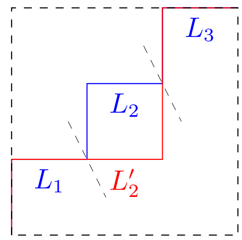

图 1: 以 $k=3$ 为例的图，L_1, L_2, L_3 是 $L \cap L'$ 的子集，L_2' 是 L' 子集。

$\alpha_L\colon I \to L$，也即将 L 参数化。对每个折线 L，定义其诱导的 X 中道路 $\Gamma_L := H \circ \alpha_L\colon I \to X$。

做完以上约定，开始证明。我们证明所有折线 L, L' 都会使得 $\widetilde{K}(\Gamma_L) = \widetilde{K}(\Gamma_{L'})$，为此只需证明当 L, L'（几乎）只相差一个小正方形 $\partial\square_{i,j}$ 时成立 $\widetilde{K}(\Gamma_L) = \widetilde{K}(\Gamma_{L'})$。

通过将 $H\big|_{\partial\square_{i,j}}$ 作适当的线性变换使得其定义域化为 $I \times I$，记得到的映射为 H' 则有 $\Gamma_{L_m} \simeq_{H'} \Gamma_{L_m'}$ rel$\{0,1\}$，进而 $\langle\Gamma_{L_m}\rangle = \langle\Gamma_{L_m'}\rangle$。不妨设 $\widetilde{K}(\square_{i,j}) \subseteq X_0$，则

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K}(\Gamma_L) =& \widetilde{K}(\Gamma_{L_k}) \circ \cdots \circ F\big(\langle\Gamma_{L_m}\rangle\big) \circ \cdots \circ \widetilde{K}(\Gamma_{L_1}), \\
\widetilde{K}(\Gamma_{L'}) =& \widetilde{K}(\Gamma_{L_k}) \circ \cdots \circ F\big(\langle\Gamma_{L_m'}\rangle\big) \circ \cdots \circ \widetilde{K}(\Gamma_{L_1}).
\end{aligned}
$$

而 $\langle\Gamma_{L_m}\rangle = \langle\Gamma_{L_m'}\rangle$ 蕴含 $F\big(\langle\Gamma_{L_m}\rangle\big) = F\big(\langle\Gamma_{L_m'}\rangle\big)$，从而 $\widetilde{K}(\Gamma_L) = \widetilde{K}(\Gamma_{L'})$。

下面设 L_0 为最下最右的折线，L_0' 则为最上最左的折线。刚刚证明的结果蕴含 $\widetilde{K}(\Gamma_{L_0}) = \widetilde{K}(\Gamma_{L_0'})$。又知道 $\Gamma_{L_0} = \alpha \cdot c_y$（其中 $c_y\colon I \to X, t \mapsto c_y(t) \equiv y$）。视 $0 = t_1 < 1/2 = t_2 < 1 = t_3$ 为一个分割，由(8)得

$$
\widetilde{K}(\Gamma_{L_0}) = \widetilde{K}(c_y) \circ \widetilde{K}(\alpha) = \begin{cases} F(\langle c_y\rangle) \circ \widetilde{K}(\alpha) = \widetilde{K}(\alpha), & y \in X_0; \\ G(\langle c_y\rangle) \circ \widetilde{K}(\alpha) = \widetilde{K}(\alpha), & y \in X_1. \end{cases}
$$

同理 $\widetilde{K}(\Gamma_{L_0'}) = \widetilde{K}(\alpha')$，又 $\widetilde{K}(\Gamma_{L_0}) = \widetilde{K}(\Gamma_{L_0'})$。综上所述有 $\widetilde{K}(\alpha) = \widetilde{K}(\alpha')$。

(2(b)iii)现在定义 $K\big(\langle\alpha\rangle\big) := \widetilde{K}(\alpha)$，(2(b)ii)说明 K 良好定义。

至此，我们给出了 K 在 $\pi(X)$ 上的定义。我们断言:

(a) K 是函子：

- 保持恒等态射：不妨设 $x \in X_0$ ，则

$$K(1_x) = F\big(F(\langle 1_x \rangle)\big) = \langle F \circ 1_x \rangle = 1_{F(x)}.$$

- 保持态射复合：

$$\begin{aligned} K(\langle \beta \rangle \circ \langle \alpha \rangle) &= K(\langle \alpha \cdot \beta \rangle) \\ &= \widetilde{K}(\alpha \cdot \beta) \end{aligned}$$

再次视 $0 = t_1 < 1/2 = t_2 < 1 = t_3$ 为一个分割，按(8)可得

$$\begin{aligned} K(\langle \beta \rangle \circ \langle \alpha \rangle) &= \widetilde{K}(\alpha \cdot \beta) \\ &= \widetilde{K}(\alpha) \circ \widetilde{K}(\beta) \\ &= K(\langle \beta \rangle) \circ K(\langle \alpha \rangle). \end{aligned}$$

(b) K 使得(3)交换：关于对象以及态射分别验证即可。

(c) K 是唯一的。设 K' 也具有万有性质，则容易验证它们将对象映射到相同的对象，下面验证它们将态射映射到相同的态射：任给 $\langle \alpha \rangle \in \mathrm{Hom}_{\pi(X)}(x, y)$，其中 $\alpha \colon I \to X$ 满足 $\alpha(0) = x$，$\alpha(1) = y$。取分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,$$

使得

$$K(\langle \alpha \rangle) = \widetilde{K}(\alpha_n) \circ \cdots \circ \widetilde{K}(\alpha_1),$$

这也就是

$$K(\langle \alpha \rangle) = K(\langle \alpha_n \rangle) \circ \cdots \circ K(\langle \alpha_1 \rangle).$$

同时

$$K'(\langle \alpha \rangle) = K'(\langle \alpha_n \rangle) \circ \cdots \circ K'(\langle \alpha_1 \rangle),$$

其中 $\mathrm{Im}\ \alpha_j \subseteq X_0$ 或者 $\mathrm{Im}\ \alpha_j \subseteq X_1$。由

$$K' \circ \pi(i_0) = F = K \circ \pi(i_0), K' \circ \pi(i_1) = G = K \circ \pi(i_1),$$

回忆 i_k 是包含映射，故 $K\big(\langle \alpha_j \rangle\big) = K'\big(\langle \alpha_j \rangle\big)$，进而 $K\big(\langle \alpha \rangle\big) = K'\big(\langle \alpha \rangle\big)$。故 $K = K'$。

从而我们证明了万有性质。

综上，我们证明了定理 14。 □

引理 15 证明. 不妨设 X 不在 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中，否则任意正数 δ 均符合要求。由紧致性，存在 $\{O_{\alpha_k}: 1\leq k\leq n\}$ 使得 $X\subseteq \cup_{k=1}^n O_{\alpha_k}$。命

$$f\colon X\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x, O_{\alpha_k}^c).$$

则 f 是连续函数的有限和，进而是连续函数，且任意 $x\in X$ 总有某个 k 使得 $x\notin O_{\alpha_k}^c$，且 $O_{\alpha_k}^c$ 是闭集，故 $d(x, O_{\alpha_k}^c)>0$ 从而 $f(x)>0$。由紧致性 $\operatorname{Im} f = f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中紧集，从而 f 有最小值，设为 $f(x_0)$，则取 $\delta = f(x_0)$ 即可。 □