黄子豪

代数图论笔记

2022 年 10 月 12 日

Springer Nature

Foreword

本书是笔者本科阶段为日后做代数图论方向所做的学习笔记。主要参考教材包括 Algebraic Graph Theory by Godsil (GTM207) 、Introduction to Graph Theory by Douglas B.West、图论及其应用 by 徐俊明、有限群导引 by 徐明曜、Algebra by Hungerford (GTM 73)。

本书计划分作四部分：第一部分用于介绍图论中基本的概念和结论。第二部分用于介绍群论、有限群的结论。第三部分用于介绍代数图论中的相关内容。第四部分用于写一些论文综述。

2022 9 月于 CSU　　黄子豪

目录

Part I

图论

Chapter 1
图的基本概念

1.1 图的基本定义

1.1.1 图的一些基本定义

Definition 1.1：

(1) complement：一个图的补图是有顶点集 $V(G)$，两个顶点相邻当且仅当在 G 中不相邻得到的图;

(2) clique：是 G 的一个完全子图;

(3) independent set：是一个 $V(G)$ 的子集，其中的顶点两两不相邻;

(4) self-complementary：G 称作是自补的，如果它同构于它的补图;

(5) decomposition：一个图的分解指的是其一列子图，每条 G 的边恰只在其中一个子图中出现;

(6) H-free:G 称作是 H-free 指的是其没有 induce subgraph 同构于 H.

1.1.2 子图

Definition 1.2：

(1) 称 Y 是 X 的子图, 当且仅当 V(Y)⊆V(X), E(Y)⊆E(X);

(2) 若其中 V(Y)=V(X), 则称 Y 是 X 的**生成子图或支撑子图 (spanning subgraph)**;

(3) 若 V(Y) 的两个顶点相邻当且仅当它们在图 X 中相邻, 则 Y 是 X 的**诱导子图 (induce subgraph)**;

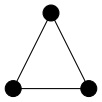
有时候顶点集的元素不一样, 但若一个图同构于另一个图的子图, 我们任然可以说这个图是另一个图的子图. 从定义我们可以看出, 我们可以通过删除图 G 的某一些边, 从而获得一个支撑子图. 若删

掉的边是 e, 此支撑子图可以用 $G-e$ 来表示. 可以通过删除一些点以及同该点关联的边, 来获得一个诱导子图. 设删掉的顶点集是 S, 则此诱导子图用 $G-S$ 来表示.

1.1.3 Graph library

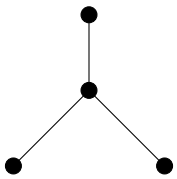
本节旨在列举一些常见的图的名称, 以便查询。

1: trangle 本质上是 K_3.



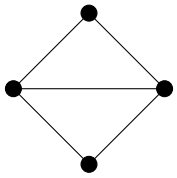
trangle

2: claw 本质上是 1,3-完全图 $K_{1,3}$



claw

3: kite 本质上是 K_4-e



kite

1.2 顶点度

该节重新叙述一遍顶点度这个概念, 旨在介绍一些重要的记号和定义.

Definition 1.3：

(1) $d_G(v)$ 表示 v 在图 G 中边的数量, 称作顶点 v 的**度 (degree)**.

(2) $\triangle(G)$ 表示 G 的最大顶点度, $\delta(G)$ 表示 G 的最小顶点度.

(3) 若 $\triangle(G)=\delta(G)=k$, 则称 G 是 **k-正则的**.

(4) e(G) 表示 G 中边的数量.

Theorem 1.1：

(1) 给定一个图 G, 我们有

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G).$$

(2) 一个有 n 个顶点的 k-正则图有 nk/2 条边.

Definition 1.4 (n 维超立方体 (n-dimensional cube or hypercube) Q_n)：

Q_n 是一个这样的图，它的顶点集

$$V(Q_n) = \{x_1 \cdots x_n : x_i = 0 \ or \ 1\}$$

任意 x, y 属于 V(G), 二者相邻当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1$

由定义知 Q_n 有 2^n 个顶点. 我们可以对 V(G) 作二部划分：

$$X = \{x_1 \cdots x_n : x_1 + \cdots + x_n \equiv 0(mod 2)\}$$

$$Y = \{x_1 \cdots x_n : x_1 + \cdots + x_n \equiv 1(mod 2)\}$$

显然任意两个 X 中的顶点无边, 任意两个 Y 中的顶点也无边. 于是 Q 以 X 和 Y 作为二部划分, 是一个二部图. 另一方面, 任意 X 中的顶点, 容易看出在 Y 中有 n 个顶点和它相邻, 从而 Q 是 n-正则的二部图.

Theorem 1.2 *若 k>0, 则一个 k-正则二部图一定是等二部图.*

Proof 给定 G 的一个二部划分 X 和 Y, 容易得到 e(G)=k|X|=k|Y|, 于是 |X|=|Y|. □

结合该定理, 最终我们得到, 一个 n 维超立方体是一个 k—正则的等二部图.

1.3 walk, trail, path, circuit, cycle

Definition 1.5：

(1) uv-walk：是指一个顶点和边交错出现的序列

$$W = (u =)x_{i0}e_{i0}x_{i1}e_{i1} \cdots e_{ik}x_{ik}(= v)$$

其中与边 e_{ij} 相邻的两个顶点恰好是此边的两个端点, 边的数量称作 walk 的长度, 下同.

(2) uv-trail(迹)：不含重复边的 uv-walk.

(3) uv-path: 不含重复点的 uv-trail.

(4) circuit: 起点终点相同的 trail.

(5) cycle: 起点终点相同的 path.

(6) maximal path: 一个不被包含在任何比他更长的路中的路.

在上面的定义中, walk 之所以需要强调走哪条边是因为在非简单图里可能有重边, 但若在简单图中, 只需点的序列便可以唯一的决定一个 walk. walk,trail,path 的起点和终点相同时，称是闭的.

我们知道 uv-walk 并上 vs-walk 是一个 us-walk, 但 uv-path 并上 vs-path 并不一定是一个 us-path, 因为其中可能有重复的点. 但有了这个定理, 我们可以保证二者的并中至少包含一个 us-path. 并以此来说明顶点的连通关系是一个等价关系, 这将在连通性一节出现.

Theorem 1.3 *每一个 uv-walk 一定包含一个 uv-path*

Proof 对 uv-walk=W 的长度 l 作数学归纳法. 当 l=0 时是显然的.

假设小于 l 时结论成立. 若 W 中无重复出现的点, 则其已经是一个 uv-path. 否则设 x 是其中重复出现的点, 则在 W 的序列中删去两个 x 之间的所有点和边 (以及一个重复的 u). 据此得到一个长度小于 l 的含于 W 的 uv-walk=Q, 由归纳法 Q 中包含一个 uv-path, 则该 uv-path 也含于 W 中, 证毕. □

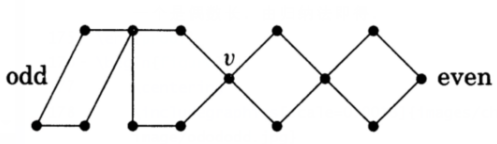
Theorem 1.4 *设 G 是简单图, δ 是 G 的最小顶点度, 则 G 中含长至少为 δ 的路.*

Proof 令 P=$(x_0, x_1 \cdots x_k)$ 是 G 中的最长的路, 则由 P 的最长性, P 一定包含 x_0 的所有邻居, 于是 $L(P) = k \geq |N_{x_0}| \geq \delta$ □

Theorem 1.5 *每一个奇数长的闭 walk, 一定包含一个奇数长的 cycle.*

Proof 仍然对 walk 的长度 l 作归纳. 当 l=1 时, 是一个 loop.

假设小于 l 时结论成立. 仍然, 若 W 中无重复出现的点, 则已经是一个奇数长的 cycle. 否则设 x 是其中重复出现的点, 则可以将 W 分解作两个 x, x-walk, 其中一个是奇数长, 一个是偶数长. 由归纳法即得. □



值得说明的是偶数长的 walk 没有此结论, 因为他可能只是简单的重复走一遍就能得到偶数长的 walk. 上面的定理可以帮我们刻画二部图. 我们有；一个图是二部图当且仅当它没有奇圈. 在证明过程中我们需要用到上定理.

Theorem 1.6 *若 G 的最小顶点度大于等于 2, 则 G 中一定包含一个 cycle.*

Proof 设 P 是 G 中最长的 path, u 是 P 的一个 endpoint. 则 u 的邻居数大于等于 2, 设其有两个邻居 x, y. 由 P 的最长性, x, y 一定都在 P 中出现, 不妨设三者按照 x, y, u 的先后顺序出现. 则 P 中一定不包含边 xu=e. 于是 P+e 组成 G 中的一个 cycle. □

此定理可以用于证明图是欧拉图的一个充要条件：G 是欧拉图当且仅当他之多只有一个非平凡连通分支, 并且其每个顶点度都是偶数.

运用类似的方法, 可以证明得到下面定理.

Theorem 1.7 *若 G 的最小顶点度大于等于 k 大于等于 2, 则 G 中包含一个长至少是 k+1 的 cycle.*

Theorem 1.8 *在偶图中, 每一个极大的 trail 都是闭的, 即都是 circuit.*

Proof 设 T 是 G 中的一个极大迹, v 是 T 中异于起点的点, 则从起点到 v 只用了奇数条以 v 为端点的边, 由于 d(v) 是偶的, 于是 T 可以继续延长, 因此 T 不以 v 作为终点, 于是只能以起点为终点. □

1.4 连通, 连通分支, 割点, 割边, 块

Definition 1.6：

(1) 对于顶点 x、y, 若存在一条 xy-path, 则称 x 和 y 两点是**连通**的.

(2) 连通是 G 中的等价关系.

(3) 连通关系将 V(G) 分作数个等价系, 每个等价系诱导的 G 的子图称作 G 的**连通分支**. (4) 若 G 只有一个连通分支, 则称 G 是**连通图**.

(5) 若连通分支中无边, 则称作 trivial 的连通分支, 此时当且仅当其中只有一个顶点, 当且仅当它是 G 的**孤立点 (isolated vertex)**.

(6) 对于有向图, 若 x 到 y 有一个 path, y 到 x 也有一个 path, 则称 xy 是**强连通的**.

Theorem 1.9 *G 有 n 个顶点 k 条边, 则 G 至少有 n-k 个连通分支.*

Proof 对 k 作归纳法. 当 k=0 时, 结论显然成立. 由于每多一条边最多减少一个连通分支, 于是由归纳法即可得证. □

据此我们有推论

Theorem 1.10 *n 阶图 G 是连通的, 则 G 至少包含 n-1 条边.*

根据最小顶点度也可以判断一个图是否连通

Theorem 1.11 *n 阶简单图 G, 若 G 的最小顶点度 $\delta(G) \geq (n-1)/2$, 则 G 一定是连通图.*

Proof 任意两个顶点 u, v. 若 u, v 无共同的邻居, 则 $|N(u) \cup N(v)| \geq n$, 矛盾. 于是 u, v 有一个共同邻居, 从而有一条 u, v-path. □

前面提到, 减少一条边或点最多增加一个连通分支, 于是我们希望对那些能增加连通分支的边和点进行刻画. 于是我们有定义.

Definition 1.7 :

(1) 对于 $v \in V(G), e \in E(G)$, 若 G-v 的连通分支数增加了, 称 v 是 G 的**割点**, 否则称作**连通点**. 若 G-e 的连通分支增加了, 称 e 是 G 的**割边**, 否则称作**连通边**.

(2) 无割点的连通图称作**块 (block)**.

Theorem 1.12 非平凡连通图至少有两个连通点

Proof 记 P=$x_0x_1\cdots x_k$ 是 G 中的最长的非圈路, 可以断定两个端点都是连通点. 若 x_0 是割点, 则 G-x_0 有两个连通分支. 分别设做 G_1, G_2, 不妨设 $x_1 \in V(G_1)$, 任取 $y \in N_G(x_0) \cap V_{G_0}$. 由于 y 和 x_1 在无 x_0 时是不连通的, 于是 y 不在 P 中. 从而 e=yx_0 不在 P 中, P+e 是比 P 更长的 path, 矛盾. 于是 P 的两个端点都是连通点. □

下面一个定理给出了一条边是割边的充要条件.

Theorem 1.13 一条边是割边当且仅当这条边不在某个 *cycle* 中.

Proof 取 H 是包含 e 的连通分支. e 不是割边等价于 H-e 是连通的. 于是原问题等价于证明 H-e 是连通的当且仅当 e 属于某个 H 的 cycle 中.

若 e 在某个 cycle C 中. 任取 H 的顶点 x、y. 由于 H 是连通的, 于是有一个 xy-path. 若 P 不包含 e, 则已是 H-e 的一条 xy-path. 若 P 包含 e, 则将 e 替换作 C-e, 得到一条不含 e 的 xy-walk, 其中一定包含一条 xy-path 不含 e. 说明 H-e 是连通的.

另一方面, 若 H-e 是连通的, 很容易可以取到一个 H 中的 cycle 包含 e, 此处不证. □

1.5 二部图

Definition 1.8 :

(1) 若无环图的顶点集可以划分作两个非空子集 X 和 Y, 使得 X 中的任何两个顶点无边相连, Y 中的任何两个顶点也无边相连. 则称该图是一个**二部图**, X, Y 称作 G 的**二部划分**.

(2) 若 X 和 Y 顶点数相同, 则 G 称为**等二部图**.

(3) 一个等二部图若每个顶点都关联 k 条边, 称作 **k-正则等二部图**.

(4) 若 X 中的任意一个元素都和 Y 中的任意一个元素有边, 称作**完全二部图**.

下面给出一个图是二部图的等价条件, 证明过程用到定理 1.5.

Theorem 1.14 一个图是二部图当且仅当它没有奇圈.

Proof 首先设 G 是一个二部图, X 和 Y 是它的二部划分. 任意一个从集合 X 里的顶点出发的 cycle, 若要走到 X 一定走过了偶数条边, 于是 cycle 是偶的.

若 G 是一个无奇圈的图, 我们来构建 G 的二部划分. 任取 G 的一个非平凡连通分支 H, 和 H 的一个顶点 u. 对于任意 H 的顶点 v, 定义函数 f(v) 是最小的 uv-path 的长度. 命

$$X = \{v \in V(H) | f(v)\text{是偶数}\}$$

$$Y = \{v \in V(H) | f(v)\text{是奇数}\}$$

我们证明这样得到的 X 和 Y 是 H 的二部划分. 任取 $v_1, v_2 \in V(X)$, 若二者有边相连, 则 uv_1, v_1v_2, v_2u 是 H 中的一个奇数长 walk, 由前面定理 1.5 知包含奇数长的 cycle, 从而矛盾.

于是对于 G 的每一个非平凡连通分支 H, 我们得到了 H 的二部划分. 将每个连通分支的 X 并起来, Y 并起来, 孤立点全部放到 X 中, 我们得到了 G 的二部划分. □

上面定理同时还给了一个作二部图二部划分的方法, 就是对于每一个连通分支我们先取二部划分. 有些时候, 一个完全图 K_n 可以分解作数个二部图的并, 下面定理给出可如此分解的充要条件.

Theorem 1.15 *K_n 可以分解作 k 个二部图的并, 当且仅当 $n \leq 2^k$*

Proof k=1 时, k_n 能表示作一个二部图, 当且仅当其本身是二部图当且仅当 $n \leq 2$

假设小于 k 时结论成立. 若 K_n 可以分解作 k 个二部图的并, 记 $k_n = G_1 \cup \cdot \cup G_k$, 其中每一个 G_I 都是二部图. 我们将 $V_(K_n)$ 分作 X 和 Y, 其中 G_k 在 X 中无边, 在 Y 中也无边. 则剩下的 k-1 个 G_i 的并一定包含 X 生成的完全图和 Y 生成的完全图. 于是由归纳假设, $|X| \leq 2^{k-1}$, $|Y| \leq 2^{k-1}$. 从而 $n = |X| + |Y| \leq 2^k$.

反之若 $n \leq 2^k$, 则将顶点集分作 X 和 Y 两部分, 其中每一部分的数量都小于 2^{k-1}. 由归纳假设可以将它们分解做 k-1 个二部图的并. 我们将 X 的第 i 个分解同 Y 的第 i 个分解合并, 得到 k-1 个 G 的二部子图. 将把 X 和 Y 生成的完全二部图作为第 k 个, 于是得到了 G 的 k 个二部子图, 他们的并是 G. □

1.6 欧拉图

该图起源于七桥问题

Definition 1.9：

(1) 包含每一条边的迹称作**欧拉迹**;

(2) 闭的欧拉迹称作**欧拉回**;

(3) 有欧拉回的图称作**欧拉图**;

通俗来看, 一个图是欧拉图当且仅当它可以一笔不重复走地画完并且回到起点. 此外还有欧拉半图, 即包含欧拉迹的图. 此时就意味着能一笔画完但不要求回到原点.

Theorem 1.16 *图是欧拉图当且仅当他至多只有一个非平凡连通分支, 并且每一个顶点度都是偶数.*

Proof 必要性是显然的.

充分性：对 G 的边数 m 作归纳. 当 m=0 时显然. 假设小于 m 时结论成立. 设 H 是 G 中的非平凡连通分支, 则 H 的每个顶点度都大于等于 2, 于是由前面定理 1.6 知 H 中包含一个 cycle C.

考虑 G^1 是 G 删去 C 中的边得到的子图. G^1 的每一个连通分支仍然满足条件, 由归纳假设知 G^1 的每一个连通分支都包含一个欧拉回. 将这些欧拉回和 C 串起来, 就是一个 G 上的欧拉回. □

1.7 Hamilton 图 *

Chapter 2
树、支撑树、距离

2.1 树

2.1.1 树的定义和基本性质

Definition 2.1：

(1) 一个不含 cycle 的图称作 **forest(林)** 或者 **acyclic(无圈)**.

(2) 无圈连通图称作**树**.

(3) 图中顶点度为 1 的图称作 **leaf(叶)**.

(4) G 的一个支撑子图如果是树, 称作**支撑树**.

支撑子图即 spanning subgraph, 是指一个图删去某些边, 保持顶点集相同的子图. 从定义可以看出一个树就是一个连通的林. 森林的每一个连通分支都是树.

Example 2.1 Paths 一定是树, 这是由于 path 是无圈的连通图. 树是 path 当且仅当树中最大顶点度不超过 2. (注意这里的“是”代表的是一种同构. 必要性是显然的. 我们可以断言树 T 中一定有顶点度为 1 的顶点 u_1 否则由定理 1.6 知其包含一个 cycle. 同时, 我们还可断言顶点度为 1 的点有且只有两个. 否则若有三个, 则与最大顶点度小于 3 矛盾. 记与 u_1 相邻的顶点是 u_2, 则该过程可以一直无重复点的继续下去直到最后一个顶点是另一个顶点度为 1 的顶点. 从而 T 是一个 path.

Example 2.2 一个图是树, 则其恰只有一个支撑树.

下面我们介绍树的一些基本性质.

Lemma 2.1 *每一个至少包含两个顶点的树, 一定包含两个 leaves(叶). 删掉树的一个叶 (及其关联的那条边), 任然得到一个树.*

Proof 在一个无圈图中, 任意一个极大非平凡路的端点都没有除了路中出现的点之外的邻居. 又由于无圈性, 知该端点的顶点度为 1. 因为若端点的顶点度为 2(或更大), 则 x-y-u 这条 path 加上 ux 这条边就组成了一个 cycle. 从而我们得到两个 leaf, 即一条极大非平凡路的两个端点. 删掉一个叶显

然不能使得一个无圈图有圈, 而叶也不包含在任何路的内部, 从而删去后的图仍是连通图, 进而是树. □

这个引理告诉我们, 任何一个树, 我们可以通过删去一个叶得到一个更小的树, 于是在证明某些关于树的结论时, 我们可以考虑用数学归纳法.

Theorem 2.1 *对于一个 n 阶图, 下面四个命题等价:*

(1) G 是连通无圈的.

(2) G 是连通的且有 n-1 条边.

(3) G 有 n-1 条边且无圈.

(4) G 中任意两点有且仅有一条路相连.

此证明参考图论课本第 68 面.

Corollary 2.1 *:*

(1) 树的每一条边都是割边.

(2) 给树增加一条边, 恰增加树中的一个 cycle.

(3) 每一个连通图包含一个生成树.

Proof 由于 G 中无圈, 由前面定理 1.13 知树的每一条边都是割边. 由上定理知道树的两个顶点只有一条路相连, 于是增加一条边只能增加一个 cycle. 将连通图中的所有的圈都删去一条边, 就得到连通的无圈图, 即生成树. □

Theorem 2.2 *若 T, T' 是连通图 G 的两个生成树, 对于任意 $e \in E(T) - E(T')$, 存在 $e' \in E(T') - E(T)$, 使得 T-e+e' 是 G 的一个生成树.*

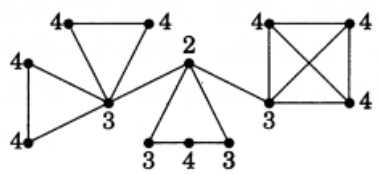
Proof 由上推论知道 e 是 T 的一个割边则记 U, U' 是 T-e 的两个连通分支. 由于 T' 是连通的, 于是有一条边 e', 一端在 U 中, 一端在 U' 中. 此时 T-e+e' 是一个有 n-1 条边的连通图, 于是是一个树. □

2.1.2 距离、离心率、中心

Definition 2.2 若图 G 中有一条 uv-path, 我们将 path 的最小长度定义做是 uv 两点的**距离**, 如果两点无 path, 定义它们的距离是无穷远. 图 G 的**直径 (diameter)** 是 G 中的最大距离. 一个顶点 v 的**离心率 (eccentricity)** 是该点到别的点的最大距离. 记作 $\varepsilon(v)$. 最小的离心率称作 G 的 **radius(半径)**.

我们可以看出, 对于一个不连通的图, 其直径是无穷. 同时我们发现, 若一个图不是树, 其两点间的距离其实并不好取, 但树两点间只有一条 path, 于是我们常在树上考虑距离.

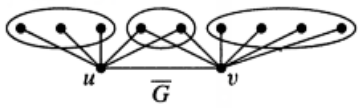
下面这个图，每个顶点上的数字就是它的离心率，其半径是 2，直接是 4，最长路长度是 7.



下面定理给出 G 的直径同 G 的补图的直径之间的关系.

Theorem 2.3 *若 G 是简单图, 则 G 的直径大于等于 3 可以推出 G 的补图直径小于等于 3.*

Proof 由于 G 的直径大于 2, 于是在 G 中存在两点 x, y, 它们不相邻也没有共同的邻居. 此时对于 x, y 之外的顶点 z, 其至多只能与 x, y 其中一个相邻. 于是在 G 的补图里, z 至少跟 x, y 其中一个相邻. 现在：任取 u, v, 在 G 的补图中, u 和 x, y 中的一个相邻, x 和 y 相邻, v 和 x, y 其中一个相邻, 从而有一个 uv-path 长度小于等于 3. □



Definition 2.3 图 G 的**中心 (center)** 是由离心率等于图半径的顶点诱导的子图.

Theorem 2.4 (Jordan) *树的中心是一个点或一条边.*

Proof 我们对树 T 的顶点数作数学归纳. 当 n 小于等于 2 时结论显然成立.

现假设当小于 n 时, 结论成立. 将 T 的叶全部删除, 得到树 T'. 我们指出, 任意一个 T 中的顶点 u, 在 T 中与 u 距离最远的顶点一定是 T 的一个叶. 由于 T 中任意两个非叶的顶点都是由不含叶的路相连的, 并且所有叶都删去了, 于是 $\varepsilon_{T'}(u) = \varepsilon_T(u) - 1$, 对于每一个 T' 中的顶点 u 都成立. 因此, T 中非叶的顶点是 T 中心的顶点, 当且仅当它是 T' 的中心的顶点. 另一方面, 叶一定不是中心的顶点, 因为它的离心率一定大于它邻居的离心率.

综上 T 和 T' 的中心有相同的顶点, 由归纳假设即得. □

2.2 生成树和生成树的数量问题

2.2.1 树的枚举, Cayley 公式

本节旨在解决一些 counting 问题, 例如：对于任意一个图, 我们可以得到多少个生成树. 著名的 Cayley 定理告诉我们, 一个 n 阶完全图, 其有 n^{n-2} 个生成树, 我们将在本节证明这个定理.

Example 2.3 对于一个三个顶点的顶点集, 其生成树有三个, 是三条 path, 通过决定哪个元素为该 path 的中心来区别.

Example 2.4 对于一个四个顶点的顶点集, 其生成树有 16 个, 分别是 4 个星和 12 条 path.

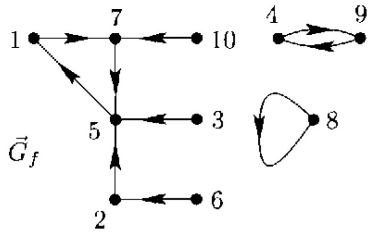
Theorem 2.5 (Cayley's Formula) 对于一个自然数集的 n 阶子集 S, 以 S 为顶点的树有 n^{n-2} 个.

Proof 此证明用到了双射的构造. 我们要在 n 个顶点的生成树的集合和一个基数为 n^{n-2} 的集合找到一个双射. 我们设 $S = \{1, ..., n\}$, 考虑 S 上的树 t, 和两个 S 中的点 x, y (分别称作左右端点). 令 $\mathcal{T}_n = \{(t; x, y)\}$, 那么 $|\mathcal{T}_n| = n^2 T_n$. 我们要证明 $|\mathcal{T}|_n = n^n$.

考虑到 N 到 N 的映射集 N^N 的基数是 n^n, 所以我们要找到 $\mathcal{T}_n$ 到其上的双射. 令 $f : N \to N$ 为一个映射, 那么我们可以用有向图表示 f. 比如映射

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 5 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

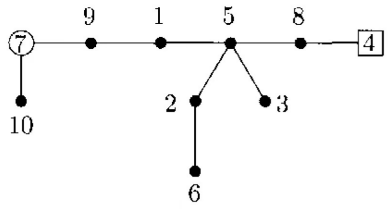
可用如下有向图 G_f 表示



观察 G_f 的一个连通子图, 其中任意两个顶点间都存在一个路径. 由于每个顶点都发出一条边, 连通子图中的顶点数和边数相同, 故恰好包含一个有向圈 (directed loop). 令 $M \subseteq N$ 为所有这些圈的顶点的集合. M 是唯一的最大子集, 使得 F 在 M 上的限制 (restriction) 是 M 上的双射. 记

$$f|_M = \begin{pmatrix} a & \cdots & z \\ f(a) & \cdots & f(z) \end{pmatrix}$$

这里第一行我们按照自然数字顺序排序, 同时也给出了第二行的排序. 我们令 $x = f(a), y = f(z)$, 于是定义了左右端点. 现在我们构造对应该映射 f 的树 t: 按第二行的顺序画从左端点到右端点的路径, 将剩下的顶点按照 G_f 的方向添加, 并去掉所有方向得到一个有向图. 比如上面例子中的 f, 我们有 $M = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, 得到的第二行 $f(M) = \{7, 9, 1, 5, 8, 4\}$, 于是我们画出 f 对应的图 t 如下

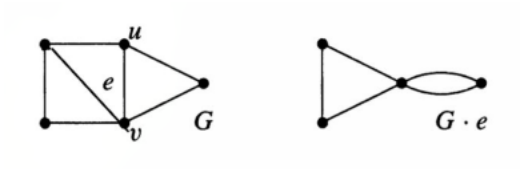


这个对应很容易取得逆, 只需确定左右顶点后, 按照顺序取就行.
从而我们建立了 $\mathcal{T}_n$ 到 N^N 的双射. □

2.2.2 边的收缩、一般无环图的生成树的数量

在上一小节中我们得到了 n 阶完全图的生成树的数量, 下面我们探究一般的图有多少生成树.

Definition 2.4 在一个图 G 中, 假设有一条边 $e = uv$, 我们称图 $G \cdot e$ 是边 e 的收缩. 其将 u, v 两点用另外的一个点代替, 其他顶点与该点相邻当且仅当其与 u 或 v 相邻.

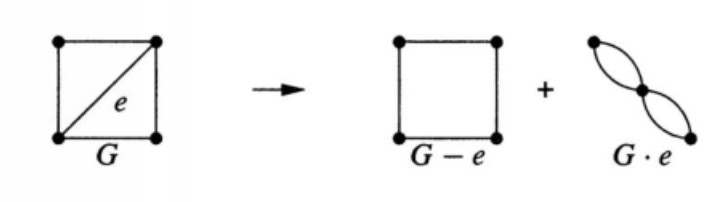


注意到, 收缩后可能会产生重边, 我们应该保留这些重边, 并且对这些重边进行区别. 在有了收缩的概念后, 我们可以对一般无环图的生成树数量进行计算.

Theorem 2.6 *我们记 $\tau(G)$ 是 G 的生成树的数量. 若 e 是 G 的非环边, 则有 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$*

Proof 首先 G 中删去 e 的那些生成树的数量恰是 $\tau(G) = \tau(G-e)$. 于是我们只需要再说明 G 中包含 e 的生成树的数量等于 $\tau(G \cdot e)$ 即可.

考虑任意一个含 e 的生成树, 将 e 收缩后得到一个 $G \cdot e$ 的生成树, 并且不同的含 e 生成树收缩后得到的是不同的 $G \cdot e$ 的生成树, 于是这定义了一个单射. 而每一个 $G \cdot e$ 的生成树, 是经过先收缩 e 再删边得到的, 这个过程可以看作是先删边再收缩 e, 于是可以看作是一个 G 的含 e 的生成树在收缩 e 后得到的. 从而这是一个双射, 于是 G 的含 e 生成树和 $G \cdot e$ 的生成树一样多. □



用这个方法重复进行下去可以计算出 G 中生成树的数量, 前提是 G 的每一条边都不是环. 但是由于删去图中的环不改变图的生成树的数量, 于是我们可以先把所有环删去后再开始计算.

虽然上面给出了一个计算 G 的生成树数量的方法, 但还是太过麻烦, 矩阵图论中有一个更好的结论.

Theorem 2.7 给定 G 是一个无环图, Q 是其 *Laplace* 矩阵, 任意删掉其第 s 行和第 t 列后, 得到的矩阵 Q^*, $\tau(G) = (-1)^{s+t} |Q^*|$

有此定理的话, 前面的 *Cayley* 公式就只是这个定理的简单推论了.

Chapter 3
匹配理论

本章简介：在第一小节中我们给出匹配的基本定义，以及一个匹配是最大匹配的充要条件. 在第二小节中我们给出，二部图存在匹配使得其中一个划分是饱和的充要条件. 在第三四小节中，我们给出最小顶点、边覆盖的 size 和最大匹配、最大独立集的 size 的数量关系.

3.1 Matching and Cover

3.1.1 匹配的基本概念, 最大匹配、极大匹配

Definition 3.1 (1) G 的**匹配**是一个无环的边集, 其中任意两个边无公共顶点. (2) 一个顶点称作是 **M—饱和的**, 如果他和 M 中的边关联. 否则称作**不饱和的 (unsaturated)**. (3) **perfect matching** 是使得 G 中所有顶点都饱和的 matching.

Example 3.1 $K_{n,n}$ 有 n! 个 perfec matching. 可以设 $K_{n,n}$ 的二部划分

$$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$$

$$Y = \{y_1, \cdots, x_n\}$$

则每一个 perfect matching 都对应了一个 X 到 Y 的双射, 其可以表示作 $(1, 2, \cdots, n)$ 的置换, 于是这样的置换有 n! 个.

一个很显然的事实是, 奇数阶的图没有 perfect matching.

对于 K_{2n}, 用 f_n 表示它的 perfect matching 的数量. 则我们有：选定某一个顶点, 可以有 (2n-1) 种选法. 于是

$$f_n = (2n-1)\, f_{n-1} = \cdots = (2n-1)\,(2n-3)\cdots(1)$$

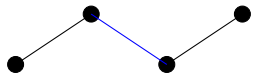
两个不同的匹配之间有时可以进行比较：

Definition 3.2 :

(1) **极大匹配：**一个匹配不能再通过新增加边来扩大.

(2) **最大匹配：**size 最大的匹配, 这里的 size 指的自然是 M 中的边的数量.

一个极大匹配未必是最大匹配. 例如考虑 P_4, 我们选取中间的边, 这就是一个极大匹配. 但最大匹配可以是取 P_4 左右的两条边.



P_4

蓝色的边是 P_4 的极大匹配，但不是最大匹配.

那怎么判别一个匹配是否是最大匹配呢？我们需要定义一些东西来刻画最大匹配.

Definition 3.3 给定一个匹配 M

(1) **M-alternating path (交替路)** 指的是一个路, M 中的边和不在 M 中的边交替出现在 path 中.

(2) **M-augmenting path (可扩路)** 指的是一条交替路, 其端点是 M-不饱和点.

当我们得到一个 M-可扩路 P 时, 我们可以将 P 中的 M 中的边全部替换做 P 中的不在 M 中的边, 得到一个新的匹配 M', 此匹配的 size 比原来的匹配大了 1. 于是我们立刻得到一个匹配是最大匹配的必要条件是其不含 M-可扩路.

Definition 3.4 G 和 H 是顶点集同为 V 的图. 称 $G\Delta H$ 是他们的**对称差**. 这是一个以 V 为顶点集, 以那些只在 G 或只在 H 出现的边为边的图.

Lemma 3.1 两个匹配的对称差的每一个连通分支都是路或偶圈

Proof 以 F 记作他们的对称差. F 中的每一个顶点在每个匹配中至多只有一条边与他关联, 于是在 F 中至多两条边与他关联. 从而对于 F 的每一个连通分支, 其都是最大顶点度小于等于 2 的连通图, 从而只能是路或圈. 若是圈, 由于圈中的边是交替出现的, 因此是偶数条边. □

有了这些准备我们可以给出一个匹配是最大匹配的充要条件

Theorem 3.1 (最大匹配的充要条件) *M 是最大匹配, 当且仅当无 M-可扩路.*

Proof 只证明充分性. 假设 N 是比 M size 更大的匹配, 我们构造一条 M-可扩路. 令 F 是 N 和 M 的对称差, 由前一引理知道 F 的连通分支是路或圈. 由于 $|N - M| > |M - N|$, 说明 F 中 N 的边比 M 的边多, 于是至少存在一个 F 的连通分支包含更多的 N 的边, 此含更多 N 的边的连通分支便是一条 M-交替路 (因为 cycle 含的边一样多) . 由于其含更多 N 的边, 于是这条路起始于 N 的边, 结束于 N 的边, 从而这是一条 M-可扩路, 矛盾. □

3.1.2 Halls matching condition

当考虑工作-应聘者分配问题时, 大多数情况是应聘者数量大于工作岗位数量, 于是我们不需要考虑一个 perfect matching, 只需要考虑一个 matching, 使得所有工作是饱和的即可. 于是我们考虑一个有二部划分 X、Y 的二部图, 我们寻找匹配 M, 使得 X 是饱和的.

我们知道这样的 matching M 存在的必要条件是, 对于 X 的任意一个非空子集 S , S 的邻居数一定要大于等于 S. , 这个条件称作 Halls Condition. Hall 证明了这个条件同时还是充分的.

Theorem 3.2 (二部图存在使得一个划分饱和的匹配的充要条件) *对于一个有二部划分 X、Y 的二部图 G, 存在使得 X 饱和的划分的充要条件是, 对于 X 的任意子集 S, $|N(S)| \geq |S|$.*

Proof 必要性是显然的, 下面我们证明充分性. 我们考虑命题的逆否命题：若 M 是 G 的最大匹配, 且 M 使 X 不饱和, 则存在 X 的子集 S, 使得 $|N(S)| < |S|$. (这并不意味着有某个顶点无邻居, 因为可能是 S 中的几个顶点共用一个 Y 中的点作为邻居). 我们来找出这样的子集 S.

任取一个 X 中的 M-不饱和点 u, 命 S 是所有 u 可以通过 M-交替路到达的 X 中的点, T 是 u 可以通过 M-交替路到达的 Y 中的点. (S 中一定有异于 u 的点吗？答案是一定有, 因为我们假设 u 在 Y 中是有邻居 y 的, 否则 S= $\{u\}$ 已经是一个满足条件的子集 S. 边 uy 不在 M 中, 但是 y 一定和某个 X 中的顶点 x 关联, 否则将 uy 这条边加入 M 中就比 M 大了. 从而 u 一定能通过交替路走到 X 中的某个顶点 x 中.)

我们断言 M 匹配了 T 和 $S - \{u\}$. 观察从 u 出发的一条 M-交替路, 它先通过一条不在 M 中的边到达 T, 再通过一条 M 中的边回到 $S - \{u\}$ 于是每一个 $S - \{u\}$ 中的元素, 都通过一条 M 中的边与 T 中的顶点关联. 显然, T 是饱和的, 任意 $t \in T$, 存在 M 中一条边, 将 t 与 $S - \{u\}$ 中的某个元素关联起来. 这定义了一个 T 到 $S - \{u\}$ 的映射, 可以证明这个映射是双射, 从而 $|T| = |S - \{u\}|$

下面我们说明, 对于 $S - \{u\}$ 中的任意顶点, 其无除 T 中的点之外的邻居. 若不然, 假设 $S - \{u\}$ 中的点 x 还有除 T 中的点 t 外的邻居 y, 由于 xy 不能是 M 中的边, 则 $\{u, t, x, y\}$ 是一条 M-可扩路. 与 M 是最大匹配矛盾. 从而

$$|N(S)| = |N(S - \{u\})| = |T| = |S - \{u\}| < |S|$$

. □

此定理告诉我们, 如果想检验是否有匹配可以使得二部划分中的其中一个饱和, 我们可以通过检验它子集和子集的邻居数来判断.

Remark 3.1 此定理和证明过程允许 G 中有重边存在.

Corollary 3.1 *对于 $k>0$ 的每一个 k—正则二部图, 都有一个 perfect matching.*

Proof 对于正则的二部图, 我们知道它是等二部图 (由定理1.2) 由对称性, 我们只需考虑存在一个匹配能够使得 X 是饱和的就行了. 任取一个 X 的子集 S, 考虑 S 到 $N(S)$ 的边数 m. 由于 G 是 k-正则的, 于是 $m = k|S|$. 由于有 m 条边与 $N(S)$ 关联, 从而 $m \leq k|N(S)|$, 即 $|N(S)| \geq |S|$. 由上定理知, G 满足 Halls 条件. □

3.1.3 Vertex Cover、Edge Cover、independent set 的关系

若一个图没有 perfect matching, 我们可以通过 M-可扩路来判断一个匹配 M 是否是最大匹配. 但若要将所有 M-交替路找出来, 然后判断是不是可扩路需要花很长的时间. 我们需要找到别的方法.

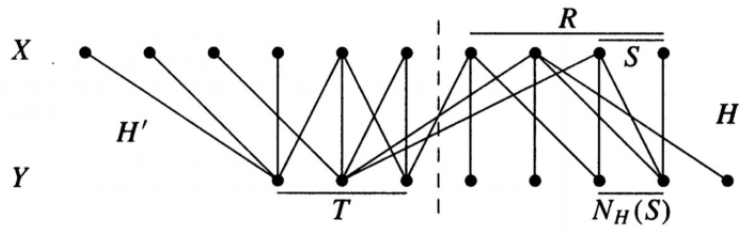
Definition 3.5 G 的一个**顶点覆盖**是 G 顶点集的子集, 其包含了每条边的至少一个端点.

Theorem 3.3 (Konig-Egervary Theorem) *若 G 是一个二部图, 则 G 的最大匹配的 size, 等于 G 的最小顶点覆盖的 size.*

Proof 设 G 是一个有 X、Y 的二部划分的二部图, Q 是一个 G 的最小顶点覆盖, M 是 G 的一个最大匹配. 显然有 $|Q| \geq |M|$. 接下来我们构造一个 size 为 $|Q|$, 使得这个不等式是可达的.

首先考虑 Q 的分割, 命 $R = Q \cap X, T = Q \cap Y$. 记 H 和 H' 是由 $R \cup (Y - T)$ 和 $T \cup (X - R)$ 诱导的子图. 若由 Halls 定理可以证明, H 中有匹配 M 使得 R 饱和, H' 中有匹配 M' 使得 T 饱和. 从而取该匹配的并, 就是一个 G 上的匹配, 这个匹配的 size 就是 $|R| + |T| = |Q|$.

下面我们说明 H 满足 Halls 条件. 由于 $R \cup T = Q$ 是一个顶点覆盖, 于是从 $Y - T$ 到 $X - R$ 无边. 如果 $|N_H(S)| < |S|$, 则我们可以用其替换掉 S, 得到一个更小的顶点覆盖 Q. □



Definition 3.6：

(1) 一个顶点集的子集称作是**独立的 (independent)** , 若该子集中任意两个顶点不相邻.

(2) G 的 **independent number** 是指其最大独立子集的 size.

一个图可能有很多个有最大 size 的独立子集, 例如 C_5 有五个不同的独立子集, 都是 size 为 independent number 的独立子集.

我们知道, 任意一个顶点都不可能覆盖 matching 中的两条边. 同样, 没有哪个边可以包含独立集中的两个点. 这导出了一个对偶的覆盖问题.

Definition 3.7 一个图 G 的**边覆盖**是 G 的边集的子集 L, 使得 G 中的任意一个顶点都与该子集中的某条边关联. 我们可以说 G 的顶点被 L 中的边覆盖.

显然只有无孤立点的图才有边覆盖. 一个 perfect matching 就是一个边覆盖. 一般来说, 我们可以通过对 matching 增加边来获得一个边覆盖. 为了方便后续叙述, 下面给定一些记号.

Definition 3.8：

(1) G 的最大独立子集的 size= $\alpha(G)$

(2) G 最大匹配的 size= $\alpha'(G)$

(3) 最小顶点覆盖的 size= $\beta(G)$

(4) 最小边覆盖的 size= $\beta'(G)$

由前面的 Konig-Egervary 定理, 对于任意二部图, 我们都有 $\alpha'(G) = \beta(G)$ 接下来我们将证明, 对于没有孤立点的二部图, 我们有 $\alpha(G) = \beta(G)$. 于是对于一般的二部图, 马上有 $\alpha(G) \leq \beta(G)$. 为此我们需要一点准备工作.

Definition 3.9 给定顶点集的子集 S, 我们用 $\bar{S}$ 来表示 $V(G) - S$.

Lemma 3.2 *在图 G 中, 取顶点集的子集 S, S 是独立集当且仅当 $\bar{S}$ 是一个顶点覆盖, 因此*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$$

Proof 若 S 是一个独立集, 则任意一条边, 其端点不可能都在 S 中, 于是任意一条边都至少与 $\bar{S}$ 中的一个点关联, 从而 $\bar{S}$ 是顶点覆盖. 反之也可以类似说明. □

Lemma 3.3 *若 G 是一个无孤立点的图, 则*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$$

Proof 证明思路是：给定一个最大匹配, 我们找出其一个 size 为 $n(G) - \alpha'(G)$ 的边覆盖. 从而我们得到 $\beta'(G) \leq n(G) - \alpha'(G)$. 反之, 给定一个最小边覆盖, 我们找出一个 size 为 $n(G) - \beta'(G)$ 的匹配. 从而我们得到 $\alpha'(G) \geq n(G) - \beta'(G)$. 从从而结论成立. 下面我们进行所需构造.

给定一个 G 的最大匹配 M, M 已经是一个边集, 其覆盖了 $V(G)$ 中的 $2|M|$ 个点, 但还有 $n(G) - 2|M|$ 个点没有被覆盖, 这些点都是 M-不饱和点. 由 M 的最大性以及无孤立点性, 于是每一个不饱和点都与饱和点有一条边, 因此我们可以往边集 M 中增加 $n(G) - 2|M|$ 条边, 得到一个 size 为 $n(G) - |M|$ 的边集, 并且此边集覆盖了所有 G 的顶点, 是一个边覆盖.

反之, 给定一个最小边覆盖 L, 由 L 的最小性我们知道, 若一条边 e 的两个端点都属于 L 的其他边, 则 e 不属于 L. 因此 L 的每一个连通分支都至多只有一个点的度大于 1, 即是一个只有一个点不是叶的树. 假设 L 有 k 个连通分支, 由于每一个连通分支 C 中有 $|C| - 1$ 条边, 于是 $|L| = n(G) - k$ 在每个连通分支中, 任取一条边, 得到 size 为 k 的边集 M, M 就是一个最大匹配. □

Corollary 3.2 *若 G 是二部图, 并且没有孤立点, 则 $\alpha(G) = \beta'(G)$*

3.2 Factor

我们转回来研究一个一般图的 perfect matching，为此我们研究图的更多生成子图. 图 G 的一个 **factor** 是 G 的一个生成子图. k-factor 是一个生成 k-正则子图.

通过定义可以看出 1-factor 和 perfect matching 本质上就是同一种东西. 例如一个图 G 有 1-factor，就意味着其有一个 1-正则生成子图，那么这个图的 perfect matching 就是此 1-正则生成子图的边集.

3.2.1 Tutte's 1-factor theorem

Tutte 发现了一个图有 1-factors 的必要条件. 若 G 有一个 1-factor, 我们考虑顶点集的子集 $S \subseteq V(G)$. 则 $G - S$ 的每一个奇数阶连通分支, 都有一个顶点和该连通分支外的点相邻, 这个点只能属于 S. 由于这些对应的 S 中的点必须两两不同, 于是，将奇数阶连通分支的数量记作 $o(G)$，就有 $o(G - S) \leq |S|$.

同时 Tutte 还指出这个条件是充分的，即：

Theorem 3.4 (Tutte's condition) 一个图 G 有 *1-factor* $\iff$ $o(G - S) \leq |S|$ 对于任意 $S \subset V(G)$ 都成立.

Proof 必要性是显然的，我们来证明充分性.

任取 $S \subset V(G)$, 可以看出给 $G - S$ 增加任意边均不增加 $o(G - S)$，只会保持不变或者减少. 因此若 G 满足 tutte 条件，那么 $G' = G + e$ 也满足 tutte 条件. 更进一步，若 G' 无 1-factor，则 G 也无 1-factor.

因此，若定理充分性不成立，则存在一个图 G 满足 tutte 条件，但不存在 1-factor. 我们可以假设 G 任意加一条边就有 1-factor. 我们来证明 G 事实上是有 1-factor 的.

取 $U = \{v \in V(G) \mid d(v) = n - 1\}$.

Case1: G-U 的每一个连通分支都是完全图. 在这种情况下，每一个偶数阶的连通分支都可以取一个 perfect matching. 每一个奇连通分支，任取一个其中的点和 U 中的点匹配，并且由于 $o(G - S) \leq |U|$，可以保证每一个取出的奇连通分支中的点匹配不同的 U 中的点. 每个奇连通分支中其余的偶数多个点两两匹配。这样我们就得到了一个匹配, 其使得 $G-S$ 中的点是饱和的, U 中 $o(G-S)$ 多个点也是饱和的.

我们可以断言此时 U 中还剩下偶数多个点 (读者可以自行验证). 于是再将 U 中的点两两互相匹配起来，最终我们得到一个 G 上的 perfe matching，或者说 1-factor.

Case2: G-U 存在一个连通分支是非完全图此时可以证明 G-U 中存在两个点距离为 2；即存在不相邻的两点 xz, 它们有共同的邻居 $y \notin U$; 更进一步，存在 $w \in G - U$，w 和 y 不相邻. (因为若任意 G-U 中的顶点都和 y 相邻的话，d(y)=n-1, $y \in U$.)

由 G 的取法，任意加一条边都有 1-factor. 于是 M_1, M_2 分别是 $G+xz, G+yw$ 的 1-factors. 我们指出 $M_1\Delta M_2$ 包含一个不含 xz 和 yw 的 1-factor，于是此 1-factor 就是 G 的 1-factor.

命 $F = M_1\Delta M_2$，则 $xz, yw \in F$. 由于每一个顶点在 M_1, M_2 中的度都是 1，于是在 F 中的度是 0 或 2. 因此 F 的连通分支是孤立点或偶 cycle(由定理3.1). 命 C 是包含边 xz 的偶 cycle. 若 C 不包含 yw，则所求的 1-factor 就是 C 中的 M_2 的边，和不在 C 中的 M_1 的边. 若 C 包含 yw，也可以证明其包含 1-factor. □

Chapter 4
着色问题

4.1 Vertex Coloring

Definition 4.1 一个图 G 的 **k-coloring** 是一个 labeling $f : V(G) \to S$, 其中 $|S| = k$, 通常我们令 $S = [n]$. 称每一个顶点的 label 是一个 **color**. 相同 color 的顶点构成一个 **color class**. 特别的称一个 k-coloring 是 **proper** 的，如果它使得相邻的顶点有不同的 color. 于是我们可以称一个图 G 是 **k-colorable**，如果他有一个 k-proper coloring. 我们命 χ_G 是最小的 k, 使得 G 是 k-colorable.

Remark 4.1 在每一个 proper coloring 里, 每一个 color class 都是 independent set. 于是 G 是 k-colorable 当且仅当它是 k-partite.

Remark 4.2 有 loops 的图一定没有 proper coloring，故我们讨论的都是无环图.

Example 4.1 由于 G 是 2-colorable 当且仅当是二部图，于是 Petersen 图和 C_5 都是 $\chi(G) \geq 3$ 的图，可以证明它们有 3-proper coloring, 于是它们的 $\chi(G) = 3$.

Definition 4.2 称图 G 是 **k-chromatic(色)** 的，若 $\chi(G) = k$. 一个 k-色图的 k-proper coloring 称作是 **optimal coloring(最优的)**. 如果对于 G 的任意真子图 $\chi(H) \leq \chi(G) = k$，则称 G 是 **k-critical** 的.

Definition 4.3 G 的 **clique number** 指的是其最大 clique 的阶数，记作 $\omega(G)$

Recall: 我们用 $\alpha(G)$ 表示其最大 independent set 的大小. 在希腊字母表中 α, ω 分别是第一位和最后一位.

我们可以🄴快写出并验证 $\chi(G)$ 的下界：

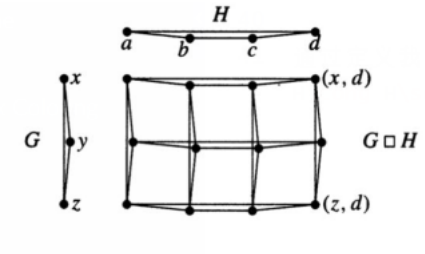
Proposition 4.1 对于任意图 G，$\chi(G) \geq \omega(G)$ 以及 $\chi(G) \geq \dfrac{n(G)}{\alpha(G)}$

Remark 4.3 上面的第一个不等式，我们强调 $\chi(G) > \omega(G)$ 是可能的.

Definition 4.4 G 和 H 的 **cartesian product**:

记作 $G \square H$. 是以 $V(G) \times V(H)$ 为顶点集，两点 $(u, v), (u', v')$ 相邻当且仅当它们之中的一个坐标相同，另一个坐标在原图中相邻.

通过定义我们可以看出 cartesian product 运算是对称的，即 $G\square H \cong H\square G$. 下图给出一个 cartesian product 的例子.



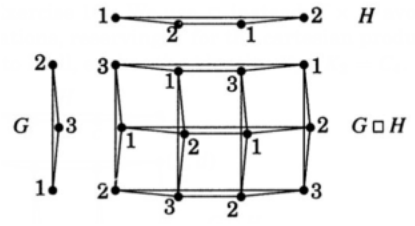
Theorem 4.1 $\chi(G\square H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$

Proof 由于 $\{g\}\square H$ 是其一个子图，于是马上有 $\chi(G\square H) \geq \chi(H)$ 类似的有 $\chi(G\square H) \geq \chi(G)$ 于是 $\chi(G\square H) \geq max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

为了得到另一边不等式，我们命 $k = max\{\chi(G), \chi(H)\}$. 我们接下来找出 $\chi(G\square H)$ 的一个 k-proper coloring. 命 g 是一个 G 的 $\chi(G)$-proper coloring, h 是一个 H 的 $\chi(H)$-proper coloring. 将每个 $G\square H$ 的顶点 (u, v) label 作是 $g(u) + h(v)$ 模 k. 则其是 $G\square H$ 的一个 k-coloring. 我们断言它是 proper 的. 这是因为若 (u', v') (u, v), 则

$$0 \leq |(g(u') + h(v')) - (g(u) + h(v))| \leq k$$

于是它们不可能模 k 同余. 因此这是 $G\square H$ 的一个 k-proper coloring. 进而 $\chi(G\square H) \leq k$. 综上 $\chi(G\square H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$。 □



Part II
有限群论

Chapter 5
群论的基本概念

5.1 群和子群

5.1.1 群的基本定义和等价定义

Definition 5.1 一个非空集合 G, 其上定义了一个二元运算, 称作乘法, 其满足

(1) 结合律

(2) 存在单位元

(3) 每一个元都存在逆元

则称 G 是一个群.

Theorem 5.1 (群的等价定义) *一个非空集合 G, 其上定义了一个二元运算, 称作乘法, 其满足*

(1) 结合律

(2) 存在左单位元

(3) 每一个元都存在左逆元

则称 G 是一个群.

Proof 我们只需从左单位元和左逆元的存在性推出一般单位元和一般逆元的存在性. 任取 $a \in G$ 设 a_L^{-1} 是它的左逆元, 则有

$$\begin{aligned} aa_L^{-1} =& eaa_L^{-1} \\ =& \left(a_L^{-1}\right)^{-1} a_L^{-1} aa_L^{-1} \\ =& e_L \end{aligned}$$

于是每一个左逆元同时还是右逆元. 又由于

$$ae = aa_L^{-1}a = a$$

于是每一个左单位元都是右单位元, 因此是群. □

需要指出的是, 若将条件全部换作“右”, 任然成立, 方法是一样的. 但若条件是：左单位元存在, 并且每个元都有右逆元, 此时不能保证 G 是一个群. 下面我们给出一个例子说明.

Example 5.1 (半群有左单位元和右逆元但不是群) 考虑 $\mathbb{R}^*$ 是除掉 0 外的实数集. 定义其上的二元运算 $*$ 为 $a*b=|a|b, \forall a,b\in\mathbb{R}^*$. 则是一个半群, 且有左单位元 $-1,1$, 每个元也都有右逆元. 但显然不是一个群, 因其单位元不唯一.

Theorem 5.2 (群的等价定义) 一个非空集合 G, 其上定义了一个二元运算, 称作乘法, 其满足

(1) 结合律

(2) $\forall a,b\in G$ 存在 $x,y\in G$, 使得 $ax=b, ya=b$

则称 G 是一个群.

上面两个等价定义对于任意群都成立, 下面的等价定义只对有限的集合 G 成立.

Theorem 5.3 (有限群的等价定义) 一个非空有限集合 G, 其上定义了一个二元运算, 称作乘法, 其满足

(1) 结合律

(2) 满足左右消去律

则称 G 是一个群.

Proof 证明主要用到 G 的有限性.

设 $G=\{a_1,\cdots,a_n\}$, 则 a_1a_i 是 n 个不同的元素 (由消去律保证), 因此一定存在某个元素 a_{i_0} , 满足 $a_1a_{i_0}=a_1$. 记此元素为 $a_{i_0}=e$. $\forall a_j\in G, a_1a_j=a_1ea_j$, 由消去律得到 $ea_j=a_j$. 说明 e 是 G 的左单位元. 又由于 $\forall a_j\in G, \exists a_i$ 使得 $a_ia_j=e$, 于是每个元素存在左逆元. 综上 G 是一个群. □

5.1.2 子群和子群的陪集

Definition 5.2 G 是一个群, 给定 $H\subseteq G$, 若 H 是群, 则称 H 是 G 的子群, 记作 $H\leq G$.

Theorem 5.4 (子群的等价定义) 给定群 G 和 G 的子集 H, 下面三个命题等价.

(1) $H\leq G$

(2) $\forall a,b\in H, ab^{-1}\in G$

(3) $\forall a,b\in H, a^{-1}\in G, ab\in G$

特别的对于有限子集, 其是子群还有一等价定义.

Theorem 5.5 H 是群 G 的有限子集, 其是子群当且仅当 $H^2\subseteq H$

Proof 这是由于 H 是满足消去律和结合律的有限集, 所以 H 是群. □

下面指出子群的运算何时是一个子群.

Theorem 5.6 *:*

(1) $H_i \leq G, i = 1, 2, \cdots, n$ *是群* G *的一列子群, 则* $\cap_i H_i \leq G$

(2) $H, K \leq G, H \cup K \leq G \iff H \leq K$ *或* $k \leq H$

(3) 子群的乘积是子群当且仅当它们可以交换, 即 $H, K \leq G, HK \leq G \iff HK = KH$

Theorem 5.7 *任一群* G *不可能表示作两个真子群的并*

Proof 若 G 有两个真子群 H 和 K, $G = H \cup K$. 由于二者是真子集，于是 $\exists a \in G - K$, $b \in K - H$, 此时 $ab \in G = H \cap K$. 但不管假设 ab 属于 H 还是 K 都会导出矛盾. □

有时候任给一个 G 的子集 M, 其不一定是子群, 但可以嵌入进子群里.

Definition 5.3 M 是 H 的子集, $\langle M \rangle = \left\{ a_1 \cdots a_n | a_i \in M \cup M^{-1}, n = 1, 2, \cdots \right\}$ 称作 M 的生成子群, 其是所有包含 M 的子群的交.

下面来介绍子群的陪集

给定群 G, $H \leq G, a \in G$, 称 aH 是子群 H 的一个陪集. 容易验证两个陪集要么不交, 要么相等, 相等当且仅当 $ab^{-1} \in H$, 并且陪集的元素个数都等于 H 的元素个数. 于是 G 可以作陪集分解, 即存在 $a_1, \cdots, a_n$, 使得

$$G = a_1 H \cup \cdots \cup a_n H$$

元素 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 称作 H 在 G 中的一个左陪集代表系. 类似的我们可以定义右陪集，并且对 G 作右陪集分解，得到右陪集代表系. 那么这样的左右陪集有什么关系呢?

Theorem 5.8 (左右陪集对应定理) *左陪集的集合和右陪集的集合之间存在一个双射，从而左右陪集的个数或都为无限或一样多.*

Proof 取映射

$$\varphi : aH \to Ha^{-1}$$

即可验证这是一个双射. □

由于 H 的左陪集和右陪集一样多，从而我们可以称 H 的左 (右) 陪集的个数，称作是 H 在 G 中的指数, 记作 $|G : H|$. 由群 G 的陪集分解立得:

Theorem 5.9 (Lagrange) G *是有限群,* $H \leq G$*, 则* $|G| = |H||G : H|$.

由此定理立得一个有限群的子集是子群的必要条件是其阶数是群阶数的因子, 以及任一元素的阶数是群阶数的因子, 从而 $a^{|G|} = e$. 于是素数阶群一定是循环群.

应用 *Lagrange* 定理, 我们还可以证明数论中的一个定理.

Theorem 5.10 (Euler Theorem) *设* m *是大于 1 的整数, 若* $(a, m) = 1$ *则*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\ m)$$

Proof 由于 $(a,m)=1$, 于是 $\overline{a}\in\mathbb{Z}^*$, 由于 $|\mathbb{Z}^*|=\varphi(m)$, 由 *Larange* 定理的推论即得 $\overline{a}^{\varphi(m)}=\overline{1}$, 从而 $\overline{a^{\varphi(m)}}=\overline{1}$

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1(mod\ m)$$

此外，我们还可以用此定理来研究非阿贝尔群的最小阶数. 为此需要准备一些引理.

Lemma 5.1 *若群中每一个非单位元的元素阶数都为 2，则 G 是阿贝尔群.*

Proof $\forall a,b\in G$，$abab=e$, 于是 $ba=a^{-1}b^{-1}=ab$. □

现在可以证明：

Theorem 5.11 *非阿贝尔群的最小阶数是 6*

Proof 由上一引理和 *Larange* 定理我们知道，1，2，3，4，5 阶群是阿贝尔群. 最后以 S_3 表示集合 $\{1,2,3\}$ 的对称群，它是 6 阶非对称群. □

Theorem 5.12 *设 H 和 K 是群 G 的两个有限子群, 则*

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}$$

Proof 由于 $H\cap K\leq K$, 因此 $|K:H\cap K|=\dfrac{|K|}{|H\cap K|}$. 另一方面, 由于 HK 可以作陪集分解作 Hk_i 的并, 并且陪集相等当且仅当 $k_1k_2^{-1}\in H\cap K$, 于是 $Hk_1=Hk_2\iff (H\cap K)k_1=(H\cap K)k_2$. 说明 HK 的陪集分解中的 Hk_i 的个数就是 $H\cap K$ 在 K 在陪集的个数, 即 $|K:H\cap K|$. 综上 $|HK|=|H||K:H\cap K|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}$ □

利用陪集分解，我们还可以给出群 G 等于两个子群乘积的一个充分条件是两个子群在 G 的指数互素. 为此我们需要先准备一个引理.

Lemma 5.2 *设 G 是有限群，$A\leq B\leq G$，则*

$$[G:A]=[G:B][B:A]$$

Proof 将 G 作 B 的陪集分解

$$G=\cup_{j=1}^{n}Bg_j,\ n=[G:B]$$

再对 B 作 A 的陪集分解

$$B=\cup_{i=1}^{m}Ab_i,\ m=[B:A]$$

则

$$G=\cup_{j=1}^{n}\cup_{i=1}^{m}Ab_ig_j$$

若 $Ab_ig_j=Ab_{i'}g_{j'}$, 则 $b_ig_j(b_{i'}g_{j'})^{-1}\in A$, 从而 $g_jg_{j'}\in b_i^{-1}Ab_{i'}\subset B$, 从而 $j=j'$, 于是 $i=i'$. 综上 $(i,j)\neq(i',j')$ 时，Ab_ig_j 两两不同. 于是将 G 分解作了 mn 个 A 的不同的陪集的并. 说明 $[G:A]=nm=[G:B][B:A]$. □

Corollary 5.1 对于群 G 的任意两个子群 A,B，$[G:A\cap B]\leq[G:A][G:B]$

Proof 为此我们只需证明 $[B:A\cap B]\leq[G:A]$ 对于 $\forall b,b'\in B$, 从 $A\cap Bb\neq A\cap Bb'\hookrightarrow b(b')^{-1}\notin A\cap B\subset A\hookrightarrow Ab\neq Ab'$, 于是 $[B:A\cap B]\leq[G:A]$ □

现在可以证明我们的定理

Theorem 5.13 给定群 G 的两个子群 A,B, 若 $[G:A]$ 和 $[G:B]$ 互素, 则 $[G:A\cap B]=[G:A][G:B]$, 且 $G=AB$

Proof 由前面我们可以看出 $[G:B]\mid[G:A\cap B]$, $[G:A]\mid[G:A\cap B]$, 再由二者互素就得到 $[G:A\cap B]=[G:A][G:B]$. 从而 $|G|=\dfrac{|A||B|}{|A\cap B|}=|AB|$，于是 $G=AB$. □

5.1.3 元素的阶

Theorem 5.14 *:*

(1) 设 G 是群，$a,b\in G$，则 $o(a)=o(a^{-1})$, $o(ab)=o(ba)$,

(2) 设 G 是群，$g\in G$, $o(g)=n$ 则 $o(g^m)=\dfrac{n}{(m,n)}$

(3) 设 G 是群，H 是 G 的子群, $g\in G$, $o(g)=n$, $g^m\in H$, $(n,m)=1$，则 $g\in H$

(4) 设 G 是群，$g_1,g_2\in G$, $o(g_1)=n_1$, $o(g_2)=n_2$, $(n_1,n_2)=1$ 若 $g_1g_2=g_2g_1$，则 $o(g_1g_2)=n_1n_2$，当二者不可交换时，无此结论。

5.1.4 共轭算子

Definition 5.4 设 G 是群，$a,g\in G$，我们规定

$$a^g=g^{-1}ag$$

称作是 a 在 g 下的共轭变形。类似的对于 G 的子群 H，我们同样规定

$$H^g=g^{-1}Hg$$

称作 H 在 g 下的共轭变形。称两个元素 $a,b\in G$ 是共轭的，如果存在 $g\in G$，使得 $a^g=b$.

可以验证，两个元素的共轭关系是一个等价关系，于是以此可以将 G 中所有元素划分为若干个不相交的等价类，称作共轭类。每个共轭类包含的元素的个数称作此共轭类的长度。

Definition 5.5 设 G 是群，H 是 G 的子集，$g\in G$，若 $H^g=H$，则称元素 g 正规化 H，称所有能够正规化 H 的元素的集合

$$N_G(H) = \{g \in G | H^g = H\}$$

是 H 在 G 中的正规化子。特别的若元素 g 满足 $\forall h \in H, h^g = h$, 则称 g 中心化 H，所有中心化 H 的元素的集合

$$C_G(H) = \{g \in G | h^g = h, \forall h \in H\}$$

为 H 在 G 中的中心化子。规定

$$Z(G) = C_G(G)$$

称作群 G 的中心

从定义我们可以看出，每个子集的正规化子都是 G 的一个子群. 一个群是阿贝尔群当且仅当它等于它的中心. 一个群的中心反映了群 G 的交换性的程度.

下面我们思考, 给定群 G 的一个子集 M, 与 M 共轭的子集的个数是多少?

Theorem 5.15 *M 是群 G 的子集, 与 M 共轭的子集数等于 $[G : N_G(M)]$*

Proof 任一与 M 共轭的子集形如 $g^{-1}Mg$.

$$\begin{aligned} g^{-1}Mg = g'^{-1}Mg' &\iff g'g^{-1}Mgg'^{-1} = M \\ &\iff gg'^{-1} \in N_G(M) \\ &\iff N_G(M)g = N_G(M)g' \end{aligned}$$

从而 M 的共轭集数等于 M 正规化子在 G 的陪集数. □

于是我们知道一个集合 M 的共轭集数一定是 |G| 的因子, 特别的, 取 M 是单点集, 则任意 G 中的元素, 与其共轭的元素的个数是 |G| 的因子. 下面定理就作为上定理的一个应用

Theorem 5.16 *设 p 是素数, G 是 p^n 阶群. 则 G 中存在非平凡的中心元.*

Proof $a \in G$ 是 G 的中心元当且仅当 a 只与自己共轭. 于是中心元等价于其共轭类阶数为 1. 由于每个元素的共轭元的个数都是 p^i. 于是将 G 拆分作共轭元素类的并时, 就有

$$p^n = 1 + 1 + \cdots + 1 + p^{i_1} + \cdots + p^{i_k}$$

由于等式左右两边 $mod\ p \equiv 0$, 于是最少有 p 个 1 阶共轭类, 即最少有 p 个中心元, 或者说有 p-1 个非平凡中心元. □

5.1.5 习题及解答

习题一： 设群 G 中两个元素 g,h 可交换，$o(g) = m$, $o(h) = n$ 则有

(1) $o(g^n h^m) = \dfrac{[m,n]}{(m,n)}$;
(2) G 中存在阶数为 (m,n) 的元素;
(3) G 中存在阶数为 $[m,n]$ 的元素;

Proof (1): 设

$$m = (m,n)m_1,\ n = (m,n)n_1$$

则

$$\frac{[m,n]}{(m,n)} = n_1 m_1,\ (m_1,n_1) = 1$$

由于 $(g^n h^m)^{n_1 m_1)} = e$, 于是

$$o(g^n h^m) \mid n_1 m_1$$

反之，由于

$$(g^n h^m)^{o(g^n h^m) m_1} = g^{n m m_1 o(g^n h^m)} h^{m m m_1 o(g^n h^m)} = e$$

说明

$$h^{m m m_1 o(g^n h^m)} = e,\ n \mid m m m_1 o(g^n h^m),\ n \mid (n,m) o(g^n h^m)$$

类似的有

$$m \mid (n,m) o(g^n h^m)$$

于是由 (n_1, m_1), 可得 $n_1 m_1 \mid o(g^n h^m)$. 综上 $\dfrac{[m,n]}{(m,n)} = n_1 m_1 = o(g^n h^m)$

(2) 考虑元素 g^{m_1}. 由定理5.14的 (2) , 立得.

(3) 答案有点复杂，为了不搞混，我们重新做个记号。

$$m = (m,n)p,\ n = (m,n)q,\ (p,q) = 1$$

我们对 (m,n) 进一步分解

$$(m,n) = r_1 r_2 r_3$$

其中 r_1 只包含那些出现在 p 中的素因子，r_2 只包含那些出现在 q 中的素因子, r_3 不包含 p 和 q 的因子. 那么 r_i 和 r_j 在 $i \neq j$ 时两两互素. 更进一步

$$r_1 p,\ r_2 q,\ r_3$$

三者两两互素. 现在，若我们能够找到三个元素，使得它们的阶数分别等于上面三个数，并且两两可交换，那么由定理5.14的 (4)，将它们乘起来我们就得到一个元素的阶数是 $r_1 r_2 r_3 pq = [m,n]$

下面我们找出这样的三个元素.

$$o(g^{r_2r_3}) = r_1p$$
$$o(g^{r_1r_2p}) = r_3$$
$$o(h^{r_1r_3}) = r_2q$$

并且由于它们两两可交换，且阶数互素，由定理5.14可以验证, 它们乘起来得到的元素就是所求的满足条件的元素. □

习题二: 设 G 是一个群，任取 G 中元素 a,b . $o(a) = m$, $o(b) = n$, $(m, n) = 1$，若存在某个整数 k, 使得 $a^k = b^k$，证明 $mn \mid k$，若 m 和 n 不互素，举出例子说明结论不成立.

Proof 由于

$$(b^k)^m = (a^k)^m = e$$

于是 $n \mid mk$，由于 $(n, m) = 1$，于是 $n \mid k$. 类似可得 $m \mid k$. 再次由它们二者互素，于是 $mn \mid k$

反例：考虑 $(\mathbb{Z}_6, +)$ 中的元素 $\overline{1}$ 和 $\overline{2}$. 则 $m = o(\overline{1}) = 6$, $n = o(\overline{2}) = 3$, 存在 $k = 6$ 使得 $(\overline{2})^6 = (\overline{1})^6 = \overline{0}$, 但 mn 不整除 k. □

习题三: 除平凡子群外无其它子群的群必是素数阶循环群.

Proof 设 $o(G) = ab$，$\forall g \in G$, 由于 G 中无子群，于是 $o(g) = ab$，但我们任可取 g^a, $o(g^a) = b$. 此时 $\langle g^a \rangle$ 是 G 的非平凡子群, 矛盾. □

5.2 正规子群、商群、群同态

5.2.1 正规子群和商群

前言: 假设给定了 N 是群 G 的子群，对 G 作 N 的陪集分解，取 $\overline{G}$ 是 N 的全部右陪集构成的集合，即 $\overline{G} = \{Na | a \in R\}$, 其中 R 是右陪集代表系. 我们希望在 $\overline{G}$ 上定义运算赋予群结构. 最自然的是取运算 $(Na)(Nb) = Nab$. 为此我们需要检验此定义不依赖于代表元的选取，即对于每一个 $a' \in Na$, $b' \in Nb$ 都有 $Na'b' = Nab$. 这相当于要求

$$NaNb = Nab \iff NaN = Na \iff NaNa^{-1} = N \iff aNa^{-1} \subset N, \forall a \in G$$

换句话说，我们要求 N 是一个自共轭子群，即只有 N 自身是 N 的共轭子群. 于是我们引出正规子群的定义:

Definition 5.6 称群 G 的子群 N 是 G 的正规子群，如果 $N^g \subset N$, $\forall g \in G$. 记作 $N \trianglelefteq G$.

Example 5.2 :

如果 $H \leqslant G$ 且 $[G : H] = 2$, 则 $H \trianglelefteq G$.

证: $\forall x \in G$, 若 $x \in H$, 则 $Hx = H = xH$; 若 $x \notin H$, 则 $Hx \cap H = \varnothing, xH \cap H = \varnothing$, 且此时有 $G = H \cup Hx = H \cup xH$, 于是 $Hx = xH$. 总之有 $Hx = xH$, 即 $H \trianglelefteq G$.

Remark: 注意 $aH = Ha$ 只是集合相等, 绝不意味着元素乘积可以交换.

Theorem 5.17 (正规子群的等价定义) 设 G 是群，下面六条等价

(1) N 是 G 的正规子群.

(2) $N^g = N$, $\forall g \in G$, 因此正规子群也称自共轭子群, 因其群中的所有元素的共轭仍在此群中.

(3) $N_G(N) = G$.

(4) 若 $n \in N$，则 n 所属的 G 的共轭元素类 $C(n) \subset N$，即 N 是由 G 的若干整数割共轭类组成.

(5) N 在 G 中的每个左陪集都是一个右陪集. $Ng = gN$.

由于正规子群的左陪集和右陪集重合, 因此对于正规子群只讨论其陪集, 而不用区分左右. 显然阿贝尔群的子群都是正规子群，每个群都有两个平凡的正规子群 G 和 $\{e\}$.. 有些群只有平凡的正规子群，于是我们定义：

Definition 5.7 若群 G 只有平凡的正规子群，称群 G 是单群.

我们知道一个交换群，若是单群，意味着其无非平凡子群，由上节习题5.1.5, 此时其一定是素数阶循环群. 然而非交换单群则十分复杂，决定所有有限非交换单群多年来一直是有限群论的一个核心问题. 在可解群一节我们可以获得非交换群是单群的一些必要条件.

下面阐述一些获得正规子群的方法.

Theorem 5.18 给定一列正规子群 $N_1 \cdots N_s$，则 $\cap_{i=1}^s N_i$ 和 $\langle N_1, \cdots, N_s \rangle$ 仍然是正规子群.

Proof

$$\forall g \in G,\ n \in \cap_{i=1}^s N_i,\ n^g \in N_i,\ i = 1, 2, \cdots, s.$$

于是是正规子群，另一个类似可证. □

下面我们思考，给定任意一个群 G 的子集 M, 怎么找到一个最小的正规子群包含这个子集 M 呢? 以 M^G 记作是包含 M 的最小正规子群, 则应有

$$\{m^g \mid \forall g \in G, m \in M\} \subset M^G$$

同时, 由于 M^G 是包含上述子集的最小群, 于是

$$\langle m^g \mid \forall g \in G, m \in M \rangle \subset M^G$$

到这里就足够使得其是正规的了, 于是包含任意集合 M 的最小正规子群就是

$$M^G = \langle m^g \mid \forall g \in G, m \in M \rangle.$$

称其是 M 在 G 中的**正规闭包**.

又我们思考，给定任意一个群 G，如何找到一个群，使得它在其中正规呢？回顾上一节提到的正规化子

Theorem 5.19 设 G 为群, H 是 G 的子群. 定义 H 的**正规化子** ***(normalizer)*** 为

$$N(H) = \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\}.$$

则 $N(H)$ 是 G 的子群, H 是 $N(H)$ 的正规子群.

Proof (1) 对任意的 $x, y \in N(H)$, 有 $xHx^{-1} = H, yHy^{-1} = H$, 则

$$x^{-1}Hx = x^{-1}\left(xHx^{-1}\right)x = H,$$
$$(xy)H(xy)^{-1} = x\left(yHy^{-1}\right)x^{-1} = xHx^{-1} = H.$$

55 从而 $x^{-1}, xy \in N(H)$, 所以 $N(H)$ 是 G 的子群.

(2) 对任意的 $x \in N(H)$, 由 $N(H)$ 的定义知

$$xHx^{-1} = H,$$

所以 H 是 $N(H)$ 的正规子群. 由此可以看出, $N(H)$ 是将 H 作为正规子群的 G 的最大的子群。特别地, 若 $H \trianglelefteq G$, 则 $N(H) = G$ □

现在我们回到前言提到的内容, 有了正规子群我们就可以在正规子群陪集的集合上定义二元运算, 使得其是一个群, 并且此时不需要考虑到底是左陪集还是右陪集, 因其在正规子群下是一样的. 我们来正式的定义它.

Definition 5.8 给定 $N \trianglelefteq G$, 记 $\overline{G} = \{N^g | g \in G\}$. 定义其上乘法 $Na * Nb = aN * Nb = aNb = Nab$. 则 $\overline{G}$ 在运算 $(*)$ 下封闭, 并且成为一个群. 将其称作 G 对 N 的商群, 记作 $\overline{G} = G/N$.

如果 G 是有限群, 由 *Lagrange* 定理立马有 $|G/N| = [G : N] = \dfrac{|G|}{|N|}$.

我们将下定理作为商群应用的一个例子

Theorem 5.20 (A.L.Cauchy) 设 G 是一个 pn 阶有限交换群, 其中 p 是一个素数, 则 G 有 p 阶元素, 从而有 p 阶子群.

Proof 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, G 是 p 阶循环群, 则 G 的一个生成元就是一个 p 阶元, 定理成立.

假设定理对阶为 $pk(1 \leqslant k < n)$ 的交换群成立, 下证对阶为 pn 的交换群 G 定理成立.

在 G 中任取 $a \neq e$. 若 $p||a|$, 令

$$|a| = ps,$$

则 $|a^s| = p$, 定理成立.

若 $p \nmid |a|$, 令 $|a| = m > 1$, 则 $(m, p) = 1$. 由于

$$m \mid pn,$$

故 $m \mid n$. 令 $N = \langle a \rangle$, 则由于 G 是交换群, 故

$$|G/N| = p \cdot \frac{n}{m},\ 1 \leqslant \frac{n}{m} < n.$$

于是由归纳假设, 群 G/N 有 p 阶元, 任取其一, 设为 bN, 且 $|b| = r$, 则

$$(bN)^r = b^r N = N,$$

从而 $p \mid r$. 令 $r = pt$, 则 $|b^t| = p$. □

实际上, 当 G 是非交换群时, 这个定理仍成立. 此处不再赘述.

5.2.2 群同态和群同构

一个群到群的映射, 如果保持乘法运算, 则称该映射是一个群同态映射. 若该同态映射同时还是双射, 则称是群同构映射.

根据定义立马可以得到群同态的一些简单性质:

Theorem 5.21 设 ϕ 是群 G 到群 G' 的同态映射, e 与 e' 分别是 G 与 G' 的单位元, $a \in G$, 则

(1) ϕ 将 G 的单位元映到 G' 的单位元, 即 $\phi(e) = e'$;

(2) ϕ 将 a 的逆元映到 $\phi(a)$ 的逆元, 即 $\phi\left(a^{-1}\right) = (\phi(a))^{-1}$;

(3) 设 n 是任一整数, 则 $\phi\left(a^n\right) = (\phi(a))^n$;

(4) 如果 $|a|$ 有限, 则 $|\phi(a)||a|$.

Proof (1) 因 e 与 e' 分别是 G 与 G' 的单位元, 所以

$$e' \cdot \phi(e) = \phi(e) = \phi(e \cdot e) = \phi(e) \cdot \phi(e),$$

从而由消去律得

$$e' = \phi(e),$$

即 $\phi(e)$ 为 G' 的单位元.

(2) 直接计算可得

$$\phi(a) \cdot \phi\left(a^{-1}\right) = \phi\left(aa^{-1}\right) = \phi(e) = e' = \phi(a) \cdot (\phi(a))^{-1}.$$

65 从而又由消去律得

$$\phi\left(a^{-1}\right) = (\phi(a))^{-1}$$

即 $\phi\left(a^{-1}\right)$ 为 $\phi(a)$ 的逆元.

(3) 当 $n = 0$ 时,

$$\phi\left(a^0\right) = \phi(e) = e' = (\phi(a))^0.$$

当 $n > 0$ 时,

$$\phi(a^n) = \phi\left(a^{n-1}a\right) = \phi\left(a^{n-1}\right)\phi(a) = \cdots = (\phi(a))^{n-1}\phi(a) = (\phi(a))^n.$$

当 $n < 0$ 时,

$$\phi(a^n) = \phi\left(\left(a^{-1}\right)^{-n}\right) = \left(\phi\left(a^{-1}\right)\right)^{-n} = \left(\phi(a)^{-1}\right)^{-n} = (\phi(a))^n.$$

(4) 设 $|a| = r$, 则

$$(\phi(a))^r = \phi(a^r) = \phi(e) = e',$$

所以 $|\phi(a)|||a|$. □

Theorem 5.22 *设 ϕ 是群 G 到 G' 的同态映射, H 与 K 分别是 G 与 G' 的子群, 则*

(1) $\phi(H)$ 是 G' 的子群;

(2) $\phi^{-1}(K)$ 是 G 的子群;

(3) 如果 H 是 G 的正规子群, 则 $\phi(H)$ 是 $\phi(G)$ 的正规子群;

(4) 如果 K 是 G' 的正规子群, 则 $\phi^{-1}(K)$ 是 G 的正规子群.

Proof (1) 对任意的 $h_1, h_2 \in H$, 有 $h_1h_2^{-1} \in H$, 所以

$$\phi(h_1)\left(\phi(h_2)\right)^{-1} = \phi(h_1)\phi\left(h_2^{-1}\right) = \phi\left(h_1h_2^{-1}\right) \in \phi(H),$$

所以 $\phi(H)$ 是 G' 的子群.

(2) 对任意的 $a, b \in \phi^{-1}(K)$, 有 $\phi(a), \phi(b) \in K$, 则

$$\phi\left(ab^{-1}\right) = \phi(a)\phi\left(b^{-1}\right) = \phi(a)\phi(b)^{-1} \in K,$$

于是 $ab^{-1} \in \phi^{-1}(K)$, 所以 $\phi^{-1}(K)$ 是 G 的子群.

(3) 由 (1) 知 $\phi(H)$ 是 $\phi(G)$ 的子群. 又对任意的 $a' \in \phi(G), h' \in \phi(H)$, 有 $a \in G, h \in H$, 使 $\phi(a) = a', \phi(h) = h'$, 则 $aha^{-1} \in H$. 于是

$$a'h'a'^{-1} = \phi(a)\phi(h)(\phi(a))^{-1} = \phi(a)\phi(h)\phi\left(a^{-1}\right)$$

$66 = \phi\left(aha^{-1}\right) \in \phi(H)$, 所以 $\phi(H)$ 是 $\phi(G)$ 的正规子群.

(4) 由 (2) 知, $\phi^{-1}(K)$ 是 G 的子群. 又对任意的 $a \in G, h \in \phi^{-1}(K)$, 则 $\phi(h) \in K$, 而 K 是 G' 的正规子群, 故

$$\phi\left(aha^{-1}\right) = \phi(a)\phi(h)\phi(a)^{-1} \in K.$$

从而

$$aha^{-1} \in \phi^{-1}(K),$$

所以 $\phi^{-1}(K)$ 是 G 的正规子群. □

在开始同态基本定理前我们先定义一些类似与线性空间中线性映射相似的东西.

Definition 5.9 设 $\alpha : G \to H$ 是一个群同态映射, 则

$$Ker\ \alpha := \{g \in G \mid g^\alpha = 1_H\}$$

称作是该同态映射的核

$$G^\alpha := \{g^\alpha \mid g \in G\}$$

称作是同态映射的像集. 可以验证 $Ker\ \alpha \trianglelefteq G$, 而 $G^\alpha \leq H$.

Theorem 5.23 (同态基本定理) *:*

(1) 任给 G 的正规子群 N, 都对应一个 G 的 G/N 的同态映射, 称作是 G 到 G/N 的自然同态.

(2) 给定一个 $\alpha : G \to H$ 是同态映射. 则 $Ker\ \alpha \trianglelefteq G$, 且 $G^\alpha \cong G/Ker\ \alpha$

Proof 记 $K = ker\ \alpha$, 设 $G/K = \{gK \mid g \in G\}$, 作 $G/K \to G^\alpha$ 的映射

$$\sigma : gK \to g^\alpha$$

则由于

$$g_1K = g_2K \iff g_1^{-1}g_2 \in K \iff (g_1^{-1}g_2)^\alpha = 1_H \iff g_1^\alpha = g_2^\alpha$$

于是 σ 是一个单射. 显然也是一个满同态. 于是 $G^\alpha \cong G/K$ □

这个定理告诉我们: **群 G 的同态像在同构意义下只能是 G 的商群!** 定理中给出的 $\sigma : G/Ker\ \alpha \to G^\alpha$ 称作是正则同构.

下面我们给出几个同态基本定理应用的例子.

Example 5.3 不难验证

$$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$$
$$a^\alpha = \overline{a}$$

是两个加法群之间的满同态, $Ker\ \alpha = n\mathbb{Z}$, 于是我们得到加法群同构 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. 从而有时候我们可以整数模 n 加法群 $\mathbb{Z}_n$ 记作 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的形式.

Example 5.4 映射 $det : GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ 是乘法群的满同态, 它将每一个可逆复方阵 M 映作 M 的行列式. 从而

$$Ker(det) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid det(M) = 1\} = SL(n, \mathbb{C})$$

因此 $SL(n, \mathbb{C})$ 是 $GL(n, \mathbb{C})$ 的正规子群, 并且有 $GL/SL \cong \mathbb{C}^*$.

Theorem 5.24 (第一同构定理) 设 φ 是群 G 到群 $\bar{G}$ 的一个同态满射, 又 $ker\ \varphi \subseteq N \trianglelefteq G$, $\bar{N} = \varphi(N)$, 则

$$G/N \cong \bar{G}/\bar{N}.$$

Proof 因为 $N \trianglelefteq G$, 又 φ 是满同态, 故 $\bar{N} = \varphi(N) \trianglelefteq \bar{G}$. 现在令

$$\tau : G/N \to \bar{G}/\bar{N},$$
$$xN \to \varphi(x)\varphi(N)(\forall x \in G).$$

下证 τ 是商群 G/N 到 $\bar{G}/\bar{N}$ 的一个同构映射.

(1) τ 是映射: 设 $aN = bN(a, b \in G)$, 则 $a^{-1}b \in N$. 但由于 φ 是同态映射, 故

$$\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi(b) = \varphi\left(a^{-1}b\right) \in \varphi(N) = \bar{N}.$$

从而 $\varphi(a)\bar{N} = \varphi(b)\bar{N}$, 即 τ 是 G/N 到 $\bar{G}/\bar{N}$ 的映射.

(2) τ 是满射: 任取 $\bar{a}\bar{N} \in \bar{G}/\bar{N}(\bar{a} \in \bar{G})$, 则因 φ 是满同态, 故有 $a \in G$ 使 $\varphi(a) = \bar{a}$. 从而在 τ 之下 $\bar{a}\bar{N}$ 有逆像 aN, 即 τ 是满射.

(3) τ 是单射: 设 $\varphi(a)\bar{N} = \varphi(b)\bar{N}$, 则

$$\varphi\left(a^{-1}b\right) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b) \in \bar{N}.$$

但 φ 为满同态且 $\bar{N} = \varphi(N)$, 故有 $c \in N$ 使

$$\varphi\left(a^{-1}b\right) = \varphi(c)$$

此即

$$varphi\left(c^{-1}a^{-1}b\right) = \bar{e},$$

其中 $\bar{e}$ 是 $\bar{G}$ 的单位元. 于是 $c^{-1}a^{-1}b \in \ker\varphi$. 但是 $\ker\varphi \subseteq N$, 故

$$a^{-1}b = c \cdot c^{-1}a^{-1}b \in N.$$

从而 $aN = bN$, 即 τ 是单射. 因此, τ 是双射. 又因为显然在 τ 之下有

$$aN \cdot bN = abN \to \varphi(ab)\bar{N} = \varphi(a)\varphi(b)\bar{N} = \varphi(a)\bar{N} \cdot \varphi(b)\bar{N},$$

故 τ 是 G/N 到 $\bar{G}/\bar{N}$ 的同构映射. 因此

$$G/N \cong \bar{G}/\bar{N}.$$

Theorem 5.25 (第二同构定理) *设 H 为 G 的子群, K 为 G 的正规子群, 则 $H \cap K$ 是 H 的正规子群且*

$$H/(H \cap K) \cong HK/K.$$

Proof 令

$$\phi : H \to HK/K,$$
$$h \to hK$$

(1) 显然 ϕ 是 H 到 HK/K 的映射.

(2) 对任意的 $hkK \in HK/K$, 其中 $h \in H, k \in K$, 由于 $hkK = hK$, 故

$$\phi(h) = hK = hkK,$$

所以 ϕ 是 H 到 HK/K 的满映射.

(3) 对任意的 $h_1, h_2 \in H$,

$$\phi\left(h_1 h_2\right) = \left(h_1 h_2\right) K = h_1 K \cdot h_2 K = \phi\left(h_1\right) \phi\left(h_2\right),$$

所以 ϕ 是 H 到 HK/K 的满同态.

(4) 同态的核

$$\begin{aligned} \ker\phi &= \{h \in H \mid \phi(h) = K\} \\ &= \{h \in H \mid hK = K\} \\ &= \{h \in H \mid h \in K\} = H \cap K \end{aligned}$$

(5) 由同态基本定理知, $H \cap K = \ker\phi$ 为 H 的正规子群, 且

$$H/(H \cap K) \cong HK/K$$

5.2.3 习题及解答

习题一： 证明单群的同态像仍是单群.

Proof 设 G 是单群，α 是一个同态映射. 若 G^α 中有正规子群 H. 则 $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} & g^\alpha H = H g^\alpha \\ \Rightarrow & \left(g^\alpha H\right)^{\alpha^{-1}} = \left(H g^\alpha\right)^{\alpha^{-1}} \\ \Rightarrow & g H^{\alpha^{-1}} = H^{\alpha^{-1}} g \\ \Rightarrow & H^{\alpha^{-1}} \text{是 G 中单群} \\ \Rightarrow & H = \{e\} \text{ or } G^\alpha \\ \Rightarrow & G^\alpha \text{是单群} \end{aligned}$$

习题二： 证明若 G 是一个 pn 阶群，p 是一个素数，证明 G 有 p 阶元.

Proof 对 n 作归纳法. 当 n=1 时结论显然成立.

现在假设 $n \leq k$ 时结论成立.

(1) 若有一个子群 H, $p \nmid [G : H]$. 则由于

$$|G| = |H|[G : H] \ , \ p \mid |H|$$

于是由假设知 H 有 p 阶元, 从而 G 中有 p 阶元.

(2) 若对任意子群 H, $p \nmid [G:H]$ 则考虑 $N(a_i)$, 其中 $N(a_i)$ 是 a_i 的正规化子. 则有共轭类分解, 导致

$$|G| = |C| + \sum_{i=1}^{m} [G : N(a_i]$$

进而 $p \mid |C|$ 于是 C 中有 p 阶元. □

习题三: 群 G 的变换

$$\phi : \ x \mapsto x^{-1} \quad (x \in G)$$

是 G 的自同构当且仅当 G 是阿贝尔群.

Proof 显然这样的映射是一个双射. 若是自同构, 则 $\forall a, b \in G$, $\phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, 又 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = a^{-1}b^{-1}$, 于是 G 是交换群. 反之若 G 是交换群, 则 $\phi(ab) = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \phi(a)\phi(b)$, 于是是同态, 进而是自同构. □

习题四: 举例说明: 正规子群的正规子群不一定是正规子群

例: 对于交错群 A_4 , 我们知道: A_4 的非平凡正规子群只有克莱因群 $K_4 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. 但 K_4 有正规子群 $\mathbb{Z}/2$. 于是正规子群 K_4 的正规子群 $\mathbb{Z}/2$ 不是 A_4 的正规子群.

5.3 自同构群

5.3.1 自同构

一个 G 到 G 自身的群同构映射称作是自同构, 用 **Aut(G)** 表示 G 的所有自同构映射的集合. 讨论任意群上的任意一个自同构是抽象的，但我们可以找出一些具体的自同构. 在群 G 中任取一个元素 $a \in G$, 映射

$$\sigma_a(x) := axa^{-1}, \quad \forall x \in G$$

定义了一个 G 的自同构. 所有这样的自同构组成的集合在一般映射运算下构成群，称作内自同构群，记作 **InnG**.

$$InnG := \left\{\sigma_a \mid a \in G, \ \forall x \in G, \ \sigma_a(x) = axa^{-1}\right\}$$

自同构映射和内自同构映射组成的集合在映射的运算下构成群，分别称作**自同构群**和**内自同构群**. 很快我们就可以发现,

$$InnG \trianglelefteq AutG$$

显然一个群的自同构群和该群自身有关，那么自然就想问：两个同构的群，它们的自同构群是否同构？答案是肯定的.

Theorem 5.26 *设 G 和 H 是两个群，有 $G \cong H$, 则 $Aut(G) \cong Aut(H)$.*

Proof 由于 $G \cong H$, 于是有一个同构映射

$$\alpha : \ G \to H$$

下面对于 $\forall \beta \in Aut(G)$ 考虑映射

$$f : Aut(G) \to Aut(H)$$
$$\beta \to \alpha\beta\alpha^{-1}$$

首先我们验证 $\alpha\beta\alpha^{-1}$ 确是一个 H 上的自同构.

$$H \xrightarrow{\alpha^{-1}} G \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H$$

由同构关系的传递性知，$\alpha\beta\alpha^{-1}$ 确是一个 H 上的自同构. 我们接下来只需验证 f 是一个保运算的双射即可. 若 $\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta'\alpha^{-1}$，则有 $\beta = \beta'$, 于是 f 是单射. 对于 $\forall \mu \in Aut(H)$ 由于

$$G \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\alpha^{-1}} G$$

于是 $\alpha^{-1}\mu\alpha$ 是一个 G 上的自同构，并且其在 f 下的像就是 μ. 于是 f 是双射. 容易验证 f 还保持运算，于是 f 是 Aut(G) 到 Aut(H) 的同构映射. □

但据此我们能说明，不同构的两个群它们的自同构群一定不同吗，这是不能的事实上我们有反例.

Example 5.5 (不同构的群有相同自同构群) 考虑 $G = \{e\}, H = \mathbb{Z}_2$，它们不同构，但自同构群中都只有恒等映射.

接下来再成列一些常用的相关定理

Theorem 5.27 (自同构诱导的商群上的自同构) *$N \trianglelefteq G$, $\alpha \in AutG$, 若 $N^\alpha = N$，则*

$$\overline{\alpha} : Ng \mapsto Ng^\alpha$$

是商群 G/N 上的一个自同构，我们称是 α 诱导的自同构.

Proof 显然这是一个满射，因为 $\forall Ng \in G/N$，存在 $g' \in G$, 使得 $(g')^\alpha = g$. (这是由 α 是自同构保证的.) 于是 $(Ng')^{\overline{\alpha}} = Ng' = Ng$. 同时这又是一个单射，因为若 $Ng_1^\alpha = Ng_2^\alpha$ 则我们有

$$g_1^\alpha (g_2^\alpha)^{-1} \in N$$
$$\Rightarrow (g_1 g_2^{-1})^\alpha \in N$$
$$\Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in N$$
$$\Rightarrow Ng_1 = Ng_2$$

因此是单射. 同时很容易验证保持运算，于是是同构. □

Theorem 5.28 (N/C 定理) $H \leq G$, $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $AutG$ 的一个子群.

Proof

$$\forall g \in N_G(H) = \left\{g \in G | g^{-1}Hg = H\right\}$$

都对应一个 H 的自同构

$$\sigma_g : h \mapsto h^g \quad \in AutG$$

于是考虑同态映射

$$f : N_G(H) \to Aut(H)$$

$$g \mapsto \sigma_g$$

显然 $C_G(H)$ 是此同态映射的核，于是由同态基本定理知，此定理得证. □

接下来我们研究内自同构群. 由于内自同构来源于 G 中的元素, 因此很容易建立二者之间的关系, 事实上我们有

Theorem 5.29 $InnG \cong G/C(G)$

Proof 考虑 G 到 InnG 的满同态, 在此同态下 C(G) 是同态核, 于是由同态基本定理即得. □

由此可以立得一个群同构与它的内自同构群的充分条件

Corollary 5.2 当 G 是非交换单群时, $C(G) = \{e\}$, $InnG \cong G$.

于是我们发现了一些有趣的问题, 我们可以问出很多类似的问题, 例如: 什么时候一个群的自同构只有内自同构? 一个自同构群的自同构群和它有什么关系? 一个群是否能同构与它的自同构群?... 为了探究这些问题, 我们需要从简单的开始着手, 锻炼我们的思维.

首先是, 如何确定一个群的自同构群? 我们以整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 为例, 试确定其自同构群:

解: 设 f 是 $\mathbb{Z}$ 的任一自同构, 则它只能把 $0 \mapsto 0$. 设它把 1 映作 $f(1) = k$. 故对于 $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = kx$. 由于是满射, 因此存在 x_0, $f(x_0) = kx = 1$. 由于 k 和 x 都是整数, 因此只能有 $k = \pm 1$. 说明其上只有两种自同构.

$$f_1(x) = x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$f_2(x) = -x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

于是我们分析自同构时候, 可以考虑先分析群中生成元的像, 从而决定此同构映射的约束条件.

5.3.2 完全群

在前面我们实际上已经注意到这种特殊的群了.

Definition 5.10 称 G 是完全群，如果 $C_G = \{e\}$, $AutG = InnG$.

Remark 5.1 由定理5.29, 知一个群是完全群当且仅当 $C_G = \{e\}$, $AutG \cong G$.

我们可以很快举出例子

Example 5.6 S_3 是完全群. 证明只需说明 $|AutS_3| \leq 6$, 并且由于 $C = \{e\}$, 于是 $InnS_3 \cong S_3$.(Th5.29) 于是 $|InnS_3| = |S_3| = 6$. 说明 $AutS_3 = InnS_3$. 事实上我们可以说明 $n \neq 6$ 时 S_n 都是完全群.

下面定理给出了更丰富的完全群.

Theorem 5.30 *设 G 是非交换单群，则 $Aut(G)$ 是完全群.*

Proof 为了方便，我们简记 $I = InnG, A = AutG$. 我们将分三步证明:

(1): $C_A(I) = \{e\}$;

$\forall \xi \in C_A(I)$, $\sigma \in I, \xi^{-1}\sigma_g\xi = \sigma_g$, $\forall g \in G$. 其中 σ_g 是同前面定义的 g 诱导的内自同构. 则对于 $\forall x \in G$, $\exists y \in G$, $y^\xi = x$. 于是

$$x^{\xi^{-1}\sigma_g\xi} = y^{\sigma_g\xi} = (g^{-1}yg)^\xi = y^{\xi\sigma_{g^\xi}} = x^{\sigma_{g^\xi}}.$$

最终得到 $\xi^{-1}\sigma_g\xi = \sigma_{g^\xi}$, 即 $\sigma_g = sigma_{g^\xi}$. 由于 σ 是一个 $G \to I$ 的同构映射，于是 $g = g^\xi$, 从而 $\xi = 1$，是恒等映射.

(2): 设 $\alpha \in Aut(A)$, 则 $I^\alpha = I$; 此处暂略

(3): 设 $\alpha \in Aut(A)$, 则 $\alpha \in Inn(A)$; 此处暂略 □

5.4 可解群

5.4.1 可解群基本定义以及性质

引言: 我们探究回正规子群的商群. 现在有一个这样的问题，一个群可能不是交换群，但它的商群可能是交换群. 于是我们思考，什么样的正规子群的商群是交换群. 等价的，我们只需要去找同态映射 $\sigma: G \to \overline{G}$, $Im(\sigma)$ 是交换群的条件. (这是由同态基本定理 $Im(\sigma) \cong G/Ker(\sigma)$, 而 Ker 是 G 的正规子群).

$$\begin{aligned}
Im\sigma\text{是交换群} &\iff \sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), && \forall x, y \in G \\
&\iff \sigma(xyx^{-1}y^{-1}) = \overline{e}, && \forall x, y \in G \\
&\iff xyx^{-1}y^{-1} \in Ker\sigma, && \forall x, y \in G \\
&\iff \left\{xyx^{-1}y^{-1} \mid \forall x, y \in G\right\} \subseteq Ker\sigma
\end{aligned}$$

于是所有 $xyx^{-1}y^{-1}$ 都必须包含进同态核里. 又由于同态核是一个群，于是 $\left\{xyx^{-1}y^{-1} \mid \forall x, y \in G\right\}$ 生成的群也要包含在同态核里.

Definition 5.11 称 $xyx^{-1}y^{-1}$ 是 x,y 的换位子, 所有换位子生成的群称作是换位子群，或 G 的导群，记作 G'. 即

$$G' =< \left\{xyx^{-1}y^{-1} \mid \forall x, y \in G\right\} >$$

可以看出，一个群的导群越大，其越不可交换 (这与中心刚好相反). 根据定义立刻有:

Corollary 5.3：

(1) G 是交换群 $\iff$ $G' = \{e\}$.

(2) 同态映射 $\sigma: G \to \overline{G}$，其同态像是交换群 $\cong$ $G' \subseteq Ker\sigma$.

(3) $G' \trianglelefteq G$.

Proof 我们只证明 (3) . $\forall g \in G, z \in G', gzg^{-1}z \in G', gzg^{-1} \in G'$. 于是 G' 是正规子群. □

Proposition 5.1 $N \trianglelefteq G$, 则 G/N 是交换群 $\iff$ $G' \subseteq N$.

Proof 考虑自然同态 $G \to G/N$, 则 N 是此同态的核，又由于导群含于此核中，于是由上推论 (2) 即得. □

Remark 5.2 特别的取正规子群 $N = G'$ ，则 G/G' 是交换群，并且是 G 中最大的交换商群.

下面介绍一种特殊的由导群导出的群.

Definition 5.12 称 G 是可解群，如果存在正整数 k, 使得 $G^{(k)} = \{e\}$ ..

这个名称来源于高于四次的一般代数方程根式不可解, 我们有 $f(x) = 0$ 在 $\mathbb{F}$ 上根式可解当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的伽罗瓦群是可解群. 于是我们现在需要先认识了解它. 首先我们很容易看出，交换群都是可解群，因为它们的导群都只有单位元. 为了刻画可解群，我们需要找到它的充要条件. 首先我们思考必要条件:

G 是可解群 $\Rightarrow$ 有 G 的递降子群序列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_s = \{e\}$$

并且每一个 G_{i-1}/G_i 都是交换群. 这是因为，我们可以取一个导群列 $\left\{G^{(i)}\right\}$, 该导群列最终是单位元，并且每一个都是上一个的正规子群，$G^{(i)}/G^{(i+1)}$ 是交换群. 接下来我们可以证明这个条件是充分的，于是:

Theorem 5.31 G 是可解群 $\iff$ 有 G 的递降子群序列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_s = \{e\}$$

Proof 我们证明它的充分性，必要性在上面已经说明了. 由于 G_0/G_1 是交换群，于是 $G' \subseteq G_1$. 又由于 G_1/G_2 是交换群, 进而 $G^{(2)} \subseteq (G_1)' \subseteq G_2$. 归纳的可以证明 $G^l \subseteq G_l$. 于是 $G^{(s)} \subseteq G_s = \{e\}$. 说明 G 是可解群. □

下面这些很容易可以验证

Theorem 5.32 可解群的每一个子群和同态像都是可解群.

Corollary 5.4 可解群的商群是可解的. 因商群是自然同态的同态像.

下面这个定理“听上去很合理”.

Theorem 5.33 $N \trianglelefteq G$, 若 N 和 G/N 都是可解群，则 G 也是可解群.

Proof 考虑 $G \to G/N$ 的自然满同态映射 π. 则很容易验证

$$\pi(G') = (G/N)'$$

同理有

$$\pi(G^{(2)} = \pi((G')') = (\pi(G))^{(2)}$$

进一步由归纳法可以说明

$$\pi(G^{(i)}) = (\pi(G))^{(i)}$$

于是存在某一个 $k, \pi(G^{(k)} = (\pi(G))^k = N$. 由商群的性质，得 $G^{(k)} \subseteq N$. 又由于 N 是可解群，存在 l. $G^{(k+l)} \subseteq N^{(l)} = \{e\}$. 说明 G 是可解群. □

Theorem 5.34 非交换单群都是不可解群

Proof 由于是单群，于是导群只能是 G 或者 e，由于 G 非交换，说明导群只能是 G. 这样的话 G 的任意阶导群仍然是 G，不可能是 e. 于是 G 不是可解群. □

Corollary 5.5 非交换可解群不是单群.

这启示我们，若想找非交换单群，只能从不可解群中找.

Theorem 5.35 奇数阶群都是可解群

此证明长达 255 页. 此定理进一步告诉我们若想找非交换单群，只能从偶数阶不可解群中找.

5.4.2 递降子群刻画一般群结构

在前面我们用递降的子群刻画了可解群，当时我们要求每一个商群都是交换群. 现在我们推广至任意群上.

Definition 5.13 群 G 的一个递降子群序列：

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_r = \{e\}$$

称作是 G 的次正规子群列. 其商群组

$$G_0/G_1, \cdots G_{r-1}/G_r$$

称作是因子群组，其中含非单位元的因子群个数称作组的长度.

注意： G 的次正规子群列中，后一个是前一个的正规子群，但不代表是 G 的正规子群. 事实上，正规子群的正规子群不一定是正规子群. 5.2.3.

我们应该指出每一个群都有次正规子群列，理由如下：若 G 是单群，则

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 = \{e\}$$

若 G 不是单群，我们可以在中间插入正规子群. 若插入的正规子群不是单群，此过程还可继续下次. 若我们要求次正规子群列中无重复项，那么对于有限群而言，群列的长度一定小于 $|G|$. 需要提醒，一个群的次正规群列并不唯一.

Definition 5.14 群 G 的次正规子群列如果满足：每一个因子群都是单群，那么称是 G 的一个合成群列.

Example 5.7 交错群 A_4 有三个合成群列：命 $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, 则有

$$A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq [(12)(34)] \trianglerighteq \{1\}$$
$$A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq [(13)(24)] \trianglerighteq \{1\}$$
$$A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq [(14)(23)] \trianglerighteq \{1\}$$

那是否每一个有限群都有合成群列？答案是肯定的

Theorem 5.36 每个**有限群**都有至少应该合成群列

Proof 设 G 是有限群，则子群列长度不会超过 G 的阶. 不妨取 G 的应该无重复项的最长的次正规子群列，我们证明这就是一个合成序列. 若不是合成序列，说明某一个 G_i/G_{i+1} 不是单群，于是其有非平凡正规子群 H/G_{i+1} 其中 H 是 G_i 包含 G_{i+1} 的非平凡正规子群. 于是其可插入我们的次正规子群列中，使得长度增加，这与最长矛盾. 于是最长的次正规子群列一定是合成群列. □

Corollary 5.6 有限群是可解群当且仅当存在一个递降的子群列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_r = \{e\}$$

其中的每一个因子群组都是有限可交换单群，因此是素数阶循环群.

在前面的 A_4 的三个合成群列中，我们还发现合成群列具有相同长度，这是由下面定理保证的：

Theorem 5.37 (Jordan-Holder 定理) 有限群 G 的任意两个无重复项的合成群列具有相同长度，并且因子群组可以用某种方式配对，使得对应的因子群同构.

Proof 证明参考丘维声近世代数 P66. □

5.4.2.1 习题及解答

习题一： $N \geq 5$ 时，求 S_n 的导群.
习题二： 证明 $N \geq 5$ 时，$A_n' = A_n$
习题三： 证明 $S_n, N \geq 5$ 时都是不可解群.
习题四： 证明 $N \geq 5$ 时，A_n 都是单群.

5.5 群作用及 sylow 定理

5.5.1 群作用

引言： 在 Galois 考虑方程根式可解的时候，其考虑导方程根的置换群到根集的作用，这个作用保持了根之间关系式的不变性，于是我们引入群作用的概念.

Definition 5.15 G 是一个群，Ω 是一个非空集合，若映射

$$\begin{aligned} \sigma : G \times \Omega &\to \Omega \\ (a, x) &\mapsto a(x) \end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned} &(ab)(x) = a(b(x)), \quad \forall a, b \in G, \forall x \in \Omega; \\ &e(x) = x, \quad \forall x \in \Omega; \end{aligned}$$

那么称 G 在 Ω 上有一个作用.

我们怎么理解一个群作用呢? 实际上，若 G 在 Ω 上有一个群作用，就意味着每一个 G 中的元 $a \in G$ 都对应了 Ω 上的一个映射 ϕ_a. 由于 $\phi_a \phi_{a^{-1}} = \phi_e = 1_\Omega$, 说明 ϕ_a 是可逆的，进而是一个双射. 于是群中任意一个元素都对应了 Ω 上的一个变换，这种群到变换群的对应就是我们所说的群作用.

事实上我们可以更进一步的证明：

Proposition 5.2 *设 G 在集合 Ω 上有一个作用，则存在一个同态映射 ϕ.*

$$\begin{aligned} \phi : G &\to S_\Omega \\ a &\mapsto \phi_a \end{aligned}$$

其中 $\phi_a(x) = a(x)$. 即群 G 中元素 a 作用在 $x \in \Omega$ 下的像.

在同态映射 ϕ 下的核称作这个群作用的核，我们有

$$\begin{aligned} a \in G\text{是这个作用的核} &\iff a \in Ker\phi \\ &\iff \phi_a = 1_\Omega \\ &\iff \phi_a(x) = x, \quad \forall x \in \Omega \\ &\iff a(x) = x, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

当 $Ker\phi = \{e\}$ 时，称这个作用是**忠实的**. 此时同态 $\phi : G \to S_\Omega$ 是单同态. 我们可以把命题5.2反过来. 即：若群 G 到 Ω 的变换群 S_Ω 有一个同态映射，则 G 在 Ω 上有一个作用.

下面介绍一些重要的群作用

1.

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned}$$

即群 G 在 G 上的作用，称作群 G 在 G 上的**左平移**. 由于 $ax = x,\ \forall x \in G \iff a = e$, 于是 $Ker\phi = \{e\}$, 说明左平移作用是忠实的. 于是 $\phi : G \to S_G$ 是单同态，$G \cong Im\phi \leq S_G$. 于是我们有下定理

Theorem 5.38 (Cayley 定理) *任意一个群都同构于某一个变换群，任意有限群同构于某一个置换群.*

2.

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a, x) &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

称作共轭作用，本质上此作用是 G 到 G 的自同构群的一个双射.

群 G 在集合上的作用还可给出一个集合上的划分. 我们定义

$$x\ y \iff \exists a \in G, a(x) = y \quad \forall x, y \in \Omega$$

可以验证" " 是等价关系. 于是可以据此等价关系划分出等价类：

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \overline{x} &= \{y \in \Omega | y\ x\} \\ &= \{a(x) | a \in G\} \\ &:= G(x) \end{aligned}$$

我们把包含 x 的等价类 $G(x)$ 称作是 x 的 G-轨道. x 的 G-轨道就是 x 在群 G 的作用下能到达的所有点的集合. 容易看出两条轨道要么不相交要么相等. 于是 Ω 可以写作不交轨道的并.

$$\Omega = \cup_{i=1}^{k} G(x_i)$$

我们称 $\{x_i\}$ 是 Ω 的 G-轨道的完全代表系.

下面我们分析一条轨道的长度，也就是 x 在群 G 作用下能到达的点的数量.

我们知道对于 $\forall a \in G,\ x, y \in \Omega, a(x) = b(x) \iff ab^{-1}(x) = x$. 于是我们考虑这样的 G 的子集

$$G_x := \{g \in G | g(x) = x\}$$

可以验证这是一个 G 的子群，称作点 x 的稳定子群. x 的稳定子群中的元素作用在 x 上保持 x 不变. 那么很快我们就可以猜想有

$$|G(x)| = [G : G_x]$$

事实上这是正确的，这是由于

$$\begin{aligned} a(x) \neq b(x) &\iff ab^{-1} \notin G_x \\ &\iff aG_x \neq bG_x \end{aligned}$$

因此不同的 $a(x)$ 的个数应该和不同的 G 在 G_x 下的陪集数一样多. 于是我们证明了：

Theorem 5.39 (轨道-稳定子定理) *设 G 在集合 Ω 上有一个作用，则对于 $\forall x \in \Omega$*

$$|G(x)| = [G : G_x]$$

Corollary 5.7 *对于有限群 G，若 G 在集合 Ω 上有一个作用，那么 $\forall x \in \Omega$ 有*

$$|G(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

从而轨道长度都是 G 的阶的因子.

Remark 5.3 注意区分 $G(x)$ 和 G_x, 前者是 Ω 的子集，表示 $x \in \Omega$ 在群作用下能到达的元素的集合，后者是 G 的子集, 表示 x 的稳定子群.

我们可以将此推论运用到共轭作用上，对共轭作用作 G-轨道划分就得到有限群的**类方程**:

$$|G| = |C_G| + \Sigma_{i=1}^{s} |G(x_i)| = |C_G| + \Sigma_{i=1}^{s} [G : C_G(x)]$$

其中 $G(x)$ 是 x 的共轭类.

接下来我们考虑 Ω 中 G-轨道数.

Definition 5.16 若 G 在 Ω 上的作用只有一条轨道，即对于 $\forall x, y \in \Omega,\ \exists g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 那么称 G 在 Ω 上的作用是传递的. 此时称 Ω 是群 G 的一个齐次空间.

现在考虑，若有限群 G 在有限集合 Ω 上的作用有 r 条轨道，则有 Ω 的 G-轨道完全代表系 $\{x_1, \cdots, x_r\}$, 使得

$$\Omega = \cup_{i=1}^{r} G(x_i$$

于是

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{r} |G(x_i)| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$$

这启示我们，若 x, y 属于同一条轨道，则应有 $|G_x| = |G_y|$. 我们来验证一下.

$$\begin{aligned} \text{x 和 y 属于同一轨道} &\iff \exists a \in G, y = a(x) \\ \forall g \in G_y, g(y) = y &\Rightarrow ga(x) = a(x) \\ &\Rightarrow a^{-1}ga(x) = x \\ &\Rightarrow a^{-1}ga \in G_x \\ &\Rightarrow a^{-1}G_y a \subseteq G_x. \end{aligned}$$

类似的可以得到 $aG_x a^{-1} \subseteq G_y$, 说明 $G_x = a^{-1}G_y a$. 于是我们证明了

Proposition 5.3 *G 在 Ω 上有一个作用，则同一条 G-轨道上的点，它们的稳定子群是共轭的，因此这些稳定子群的阶数相同.*

由此命题，G_{x_i} 中所有元素的稳定子群的阶的和就是

$$|G_{x_i}|G(x_i)| = |G| \quad \text{(由轨道稳定子定理)}$$

更近一步，所有 Ω 中元素的稳定子群的阶的和就是

$$\sum_{x\in\Omega} |G_x| = \sum_{i=1}^{r} |G(x_i)||G_{x_i}| = r|G|$$

为了求 r , 我们需要有另一种方法求 $\sum_{x\in\Omega} |G_x|$.

考虑 $G \times \Omega$ 的子集 $S = \{(g, x)|g(x) = x\}$. 则

$$|S| = \sum_{x\in\Omega} |G_x| = r|G|.$$

另一方面，给定 $\forall g \in G$, 记 $F(g) := \{x \in \omega|g(x) = x\}$, 则

$$|S| = \sum_{g\in G} |F(g)|$$

从而

$$r|G| = \sum_{g\in G} |F(g)|$$

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |F(g)|$$

这就是著名的 *Burside* 引理.

Theorem 5.40 (Burside 定理) 对于有限群 G，有限集 Ω，Ω 在 G 的作用下有 r 条轨道，则

$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|.$$

我们接下来考虑群作用的一种情况，若 $\exists x \in \Omega,\ \forall g \in G,\ g(x) = x$, 我们称 x 是群 G 作用下的不动点，以 Ω_0 记所有不动点的全体.

Proposition 5.4 *p-群 G 在有限集 Ω 上有作用，则*

$$|\Omega_0| \equiv |\Omega|\ (mod\ p)$$

Proof

$$|\Omega| = |\Omega_0| + \sum_{i=1}^{r}|G(x_i)|$$

由于 $|G(x_i)| = \dfrac{|G|}{|G_[x_i}|$, 于是每一个 $|G(x_i)|$ 都被 p 整除，说明

$$|\Omega| = |\Omega_0|\ (mod\ p).$$

将此命题应用在群共轭作用上，我们可以得到 $|G| \equiv |Z(G)|\ (mod\ p)$. 这就是定理5.16.

5.5.2 sylow 定理

前言： *Larange* 定理指出，有限群的任一子群的阶数一定是群阶数的因子，很自然的我们会考虑这个定理的逆：群 G 的阶数 $|G|$ 的因子 d, 是否一定有 d 阶的子群. 对于循环群显然是成立的，很遗憾的是对于一般群此定理不成立. 我们有反例：

Example 5.8 $|A_4| = 4!$, 但 A_4 中只有 2 阶，3 阶和 2^2 阶子群，无 6 阶子群.

这个例子让我们不禁猜想: 若 p 是 $|G|$ 的素因子，是否一定有 p^k 阶子群.

我们正式的提出问题: $|G| = p^l m$, p 是素数，$(m, p) = 1$, 对于 $1 \le k \le l$, 是否一定有 p^k 阶子群?

思路： 首先 G 的 p^k 阶子群一定是 G 的 p^k 阶子集. 于是我们将所有 G 的 p^k 阶子集取出，命名作集合 Ω.

考虑 G 在 Ω 上的作用：

$$\forall g \in G,\ A = \left\{a_1, \cdots, a_{p^k}\right\} \in \Omega,\ gA := \left\{ga_1, \cdots, ga_{p^k}\right\}$$

那么 G_A 就是一个 G 的子群. 由于 $\forall a \in A,\ G_A a \subseteq A$, 于是

$$|G_A| = |G_A a| \le |A| = p^k$$

也就是说，现在我们只需要找到一个 G_A, 满足 $|G_A| \geq 2^k$ 即可. 或者更进一步，找到一个 G_A, 满足 $p^k|G_A$ 也可以.

由于

$$|G| = |G_A||G(A)|$$

于是若 $p^k||G_A|$, 那么 $p^{l-k+1} \nmid |G(A)|$. 于是我们去找一个 $G(A)$, $p^{l-k+1} \nmid |G(A)|$.

我们想到

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{r} |G(A_i)|$$

于是若 $p^{l-k+1} \nmid |\Omega|$, 那么我们就能找到一个 A_i, $p^{l-k+1} \nmid |G(A_i)|$.

事实上，

$$|\Omega| = C_n^{p^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p^k+1)}{p^k(p^k-1)\cdots(p^k-p^k+1)}$$

我们比较每一个 $n-j$ 和 p^k-j, 命 $j = p^t t'$, $(p,t') = 1$, 那么

$$n - j = p^t(p^{l-t} - j')$$
$$p^k - j = p^t(p^{k-t} - j'$$

于是 $C_n^{p^k}$ 中，至多只 p 的 p^{l-s} 因子. 说明 $p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k} = |\Omega|$. 于是根据前面的思考，存在一个 $G(A_i)$, $p^{l-k+1} \nmid |G(A_i)|$, $p^k||G_{A_i}|$, $|G_{A_i}| = p^k$. 我们就找到了要求的 p^k 阶群.

这就是著名的

Theorem 5.41 (Sylow 第一定理) *设 G 的阶 $n = p^l m$, 其中 p 是素数，$(m,p) = 1$. 则对于 $1 \leq k \leq l$, 在 G 中比存在 p^k 阶子群，其中 p^l 阶子群我们称作 G 的* ***Sylow p-子群***.

现在我们知道，每一个 p^l 阶子群，其包含 p^k, $1 \leq k \leq l$ 阶子群，那么反过来，任意 p^k, $1 \leq k \leq l$ 阶子群，是否一定含于某一个 p^l 阶子群中呢?

首先给定一个 Sylow-p 子群 P, 容易验证所有 P 的共轭子群都是 G 的 Sylow-p 子群. 于是我们只需说明，任意 p^k 阶子群 H，一定含于 P 的某个共轭子群即可.

H 含于 P 的共轭子群中

$$\begin{aligned}
&\iff \exists a \in G,\ H \subseteq aPa^{-1} \\
&\iff \exists a \in G,\ a^{-1}Ha \subseteq P \\
&\iff \exists a \in G,\ \forall h \in H,\ a^{-1}ha \in P \\
&\iff \exists a \in G,\ \forall h \in H,\ (ha)P = aP
\end{aligned}$$

于是我们考虑群 H 在集合 G/P 上的左平移作用

$$\begin{aligned}
\phi:\ H \times (G/P) &\to (G/P) \\
(h, gP) &\mapsto (hg)P
\end{aligned}$$

为了证明前面 a 的存在性，我们只需说明在这个左平移作用下的不动点集不空就行.

由于 H 是 p-群，由5.4

$$|\Omega_0| \equiv |(G/P)| = \frac{|G|}{|P|} = m \neq 0 \ (mod\ p)$$

于是不动点集非空，说明 $\exists a \in G, H \subseteq a^{-1}Pa$, 即含于某个 Sylow-p 子群中. 特别的取 $k = l$, 我们得到容易 Sylow-p 子群都是共轭的. 这就是:

Theorem 5.42 (Sylow 第二定理) *设 G 的阶 $n = p^l m$, 其中 p 是素数，$(m, p) = 1$. 则对于 $1 \leq k \leq l$, 任意 p^k 阶子群，其一定含于某一个 Sylow p-子群中. 特别的，两个 Sylow p-子群是共轭的.*

Corollary 5.8 *有限群 G 的 Sylow p-子群是正规子群当且仅当 G 中只有一个 Sylow p-子群.*

Proof 取 G 的一个 Sylow p-子群 P. 由于 $\forall a \in G$, $a^{-1}Pa$ 也是一个 Sylow p-子群，故 $a^{-1}Pa = P \Rightarrow aP = Pa$, 故 P 是正规子群. 必要性同理. □

自然的我们就会去思考，如何求一个 Sylow p-子群的个数?

命 $\Omega = \{P_1, \cdots, P_r\}$ 是所有 Sylow p-子群的集合. 由命题5.4, 我们可以考虑 p-群的群作用. 最自然的就是考虑 P_1 (Remark: 这是任意一个 Sylow p-子群). 规定群作用

$$\begin{aligned} \phi: \ & P_1 \times \Omega \to \Omega \\ & (a, P_i) \mapsto a^{-1}P_i a \end{aligned}$$

我们研究此作用的不动点:

$$\begin{aligned} Q \in \Omega_0 &\iff a^{-1}Qa = Q, \ \forall a \in P_1 \\ &\iff a \in N_G(Q), \ \forall a \in P_1 \\ &\iff P_1 \subseteq N_G(Q) \end{aligned}$$

显然 P_1, Q 都是 $N_G(Q)$ 的 Sylow-p 子群, 并且 $Q \trianglelefteq N_G(Q)$, 于是由上推论知, $P_1 = Q$. 故

$$\Omega_0 = \{P_1\}$$

于是由命题5.4

$$r = |\Omega| \equiv 1 \ (mod\ p).$$

此外 P_1 在 G 中共轭子群的个数 $r = [G : N_G(P_1)] \mid |G| = p^l m$, 于是 $r|m$. 综上我们证明了:

Theorem 5.43 (Sylow 第三定理) *G 中 Sylow p-子群的个数 r, 满足*

$$r \equiv 1 \ (mod\ p)$$

$|G| = p^l m$, $(m, p) = 1$, 则 $r|m$.

5.5.3 习题及解答

习题一: 证明 12 阶群不是单群.

5.6 有限群的结构

5.6.1 群的直积

设 G 和 H 是两个群, 运算都为乘法运算，在 $G\times H$ 上规定

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2):=(g_1g_2,h_1h_2)$$

这是 $(G\times H,G\times H$ 到 $G\times H$ 的映射. 容易验证在此运算下 $G\times H$ 是一个乘法群. 称它是 G 和 H 上的**直积**.

Remark 5.4 对于有限多个群的直积，我们都可以这样定义，但无限多个时不行. 为此我们需要范畴论的知识，所以在这里暂时不讲.

自然的我们会想问 G 是一个群，H,K 是它的两个子群. 什么时候有 $G\cong H\times K$? 下面定理给出了充要条件.

Theorem 5.44 $G\cong H\times K$ 当且仅当下列三条成立.

(1) $G=HK$;

(2) $H\cap K=\{e\}$;

(3) H 中的每一个元素和 K 都可交换;

Proof 考虑映射

$$\begin{aligned}\sigma:\ H\times K&\to G\\(h,k)&\mapsto hk.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\text{是满射}&\iff G\text{中每个元素}g\text{能表示作}g=hk,h\in H,k\in K\\&\iff G=HK\\\sigma\text{是单射}&\iff h_1k_1=h_2k_2\text{可推出}h_1=h_2,k_1=k_2\\&\iff h_2^{-1}h_1=k_2k_1^{-1}\text{可推出}h_1=h_2,k_1=k_2\\&\iff H\cap K=\{e\}\\\sigma[(h_1,k_1)(h_2,k_2)=\sigma(h_1,k_1)\sigma(h_2,k_2),\forall h_i\in H,k_i\in K&\\&\iff \text{H 中每个元素与 K 中每个元素可交换.}\end{aligned}$$

5.6.2 有限可换群的结构

Definition 5.17 设 n 是一个正整数.

(1) 若 n 可表示作

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

其中 p_i 是素数，不要求彼此互异，$\alpha_i \geq 1$, 我们就称 $\{p_1^{\alpha_1}, \cdots, p_s^{\alpha_s}\}$ 是 n 的一个**初等因子组**.

(2) 若 n 可表示作

$$n = h_1 \cdots h_r$$

其中 $h_i | h_{i+1}$，则称 $\{h_1, \cdots, h_r\}$ 是 n 的一个**不变因子组**.

Theorem 5.45 (初等因子定理) 设 G 是有限阿贝尔群，其阶数为 n，则 G 可表示作

$$G \cong C_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times C_{p_s^{\alpha_1}}$$

其中 $\{p_1^{\alpha_1}, \cdots, p_s^{\alpha_s}\}$ 是 n 的一个初等因子组. *(该表示除乘积顺序外唯一.)*

思路： G 是有限群，于是 G 可以由有限多个元素生成. 如果 G 有一个生成元集 W，其中含有 r 个元素. 若 G 的任何 r-1 个元素都不能生成 W，则称 W 是**极小生成元集**. 对于有限群一定有极小生成元集，生成元集可以不同，但有一样的元素个数. 于是在证明时候我们可以对生成元集的元素个数作归纳法. 此外，我们若能证明对有限可交换 p-群 P 结论成立，那么根据定理5.44和 Sylow 第一定理，就可以知道对任意有限可交换群 G 成立.

Proof 我们着手证明此定理对有限可交换 p-群 P 成立. 对可交换 p-群 P 的极小生成元集含有的元素个数 n 做归纳法.

n=1 时，此 Abel p-群是循环群，结论成立.

设当 n=r-1 时，命题成立，下面验证 n=r 的情形. 设 P 是阶为 p^l 的阿贝尔 p-群, 它的极小生成元集含有 r 个元素. 为了使用归纳假设，我们希望将 P 分解作

$$P =< a > \times P_1, \quad a \in P,\ P_1 \leq P$$

并且 P_1 的极小生成元集含有 r-1 个元素. 若能找到这样的 a 和 P_1 就由归纳假设就证完了，于是我们去找这样的两个东西. 自然的我们会想到要去 P 的含 r 个元素的极小生成元集中找.

回顾定理5.44, 知道我们找的 a 和 P_1 应该满足：

(1) $< a > \cap P_1 = \{e\}$;

(2) $P =< a > \times P_1$;

(3) $< a >$ 和 P_1 中元素可以任意交换;

考虑 M 是这样的集合:

$$M = \left\{(j_1, \cdots, j_r) \mid x_1^{j_1} \cdots x_r^{j_r} = e,\ \{x_1, \cdots, x_r\} \text{是 P 的一个极小生成元集}\right\}$$

M' 是这样的集合

$$M' = \{min\{j_1, \cdots, j_r\} \mid (j_1, \cdots, j_r) \in M,\ j_i > 0\}$$

于是 M' 有最小正整数，记作 m. 因而有 P 的极小生成元集 $\{x_1, \cdots, x_r\}$, 使得

$$x_1^m x_2^{j_2} \cdots x_r^{j_r} = e \quad (1)$$

我们断言 $m \mid j_i,\ 2 \le i \le r$. 否则, 以 $i = 2$ 为例： $j_2 = q_2 m + u_2,\ 0 \le u_2 \le m$

$$e = (x_1 x_2^{q_2})^m x_2^{u_2} \cdots x_r^{j_r}$$

由于 $\left\{x_1 x_2^{q_2}, x_2, \cdots, x_r\right\}$ 也是 P 的一个极小生成元集，于是 $(m, u_2, \cdots, j_r) \in M,\ u_2 \in M'$, 由于 m 是 M' 中最小的，于是 $u_2 = 0$. 类似可证得 $m \mid j_i,\ 2 \le i \le r$.

因此 (1) 化作

$$(x_1 x_2^{q_2} \cdots x_r^{q_r})^m = e$$

我们命 $a = (x_1 x_2^{q_2} \cdots x_r^{q_r}),\ P_1 = < x_2, \cdots, x_r$.

我们可以验证：

(1) $< a > P_1 = P$

(2) $< a >$ 和 P_1 中元可任意交换

(3) 若 $< a > \cap P_1 = y$, 则 $\exists s < m\ a^s = x_2^{q_2} \cdots x_r^{q_r}$, 于是

$$a^s x_2^{-q_2} \cdots x_r^{-q_r}$$

导致 $s \in M'$, 这与 m 的选取有关，进而

$$< a > \cap P_1 = \{e\}.$$

从而 $G =< a > \times P_1$. 由归纳假设

$$P_1 \cong C_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_r}}$$

再

$$< a > \cong C_{p^{\alpha_1}}$$

于是

$$G \cong C_{p^{\alpha_1}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_1}}.$$

其中 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = l$

于是我们对可交换 p-群证明了结论正确. 再由于 G 可以分解作 Sylow-p 子群的乘积，Sylow-p 子群又可以分解，于是定理得证.

Theorem 5.46 (不变因子定理) 设 G 是有限阿贝尔群，其阶数为 n，则 G 可表示作

$$G \cong C_{h_1} \times \cdots \times C_{h_r}$$

其中 $\{h_1, \cdots, h_r\}$ 是 n 的一个不变因子组.

Theorem 5.47 每一个有限阿贝尔群的初等因子组唯一，两个有限阿贝尔群同构当且仅当它们有一样的初等因子组.

Proof 此证明有些复杂，具体参考丘维声近世代数 P93. □

5.7 群例

5.7.1 n 元对称群

Definition 5.18 :

(1) 给定一个集合 Ω, 其上全部自双射组成的集合记作 S_Ω, S_Ω 是一个群，称作 Ω 上的全变换群.

(2) 特别的当 Ω 基数有限时，称集合上的每一个自双射是一个置换，此时 S_Ω 称作是 n 元对称群，记作 S_n.

一个 n 元置换 σ 把 $i \mapsto a_i$, 记作

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

可以看出这样的置换一共有 $n!$ 个, 于是 $|S_n| = n!$.

S_n 中任意两个置换相乘是按照映射的乘法进行的, 以 S_4 中两个置换 σ, τ 为例. 设

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

则

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ 4\,3\,2\,1 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ 2\,3\,4\,1 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix}.$$

我们还可以用一种更节省的方式写出置换. 例如, (4) 式中的 σ, 它把 $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$, 于是可以把 σ 写成下述形式:

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

类似地, (4) 式中的 τ, 它把 $1 \mapsto 4, 4 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$, 于是可以把 τ 写成下述形式: $\tau = (14)(23)$. 由此引出下述概念:

如果一个 n 元置换 σ 把 i_1 映成 i_2, 把 i_2 映成 $i_3, \cdots\cdots$, 把 i_{r-1} 映成 i_r, 把 i_r 映成 i_1, 并且 σ 保持其余元素不变, 那么称 σ 为一个 **r-轮换** ($r-$ cycle), 简称为轮换, 记做 $(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r)$, 也可以写成 $(i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r i_1)$, 还可以写成 $(i_3 i_4 \cdots i_{r-1} i_r i_1 i_2)$, 等等. 特别地, 2 - 轮换也称为**对换**; 恒等映射 I 记做 (1). 两个轮换如果它们之间没有公共的元素, 那么称它们不相交 (disjoint).

例如, S_5 中, (134) 与 (25) 是不相交的两个轮换. 乘积 (134) (25) 把 $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1, 5 \mapsto 2$, 而乘积 (25) (134) 也是把 $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1, 5 \mapsto 2$. 因此, (134) (25) = (25)(134). 这种分析方法对于任意两个不相交的轮换都适用. 因此我们得到: **不相交的两个轮换对乘法是可交换的**.

从 (4) 式中的 σ, τ 写成轮换形式的过程, 容易猜想有下述结论:

Theorem 5.48 *S_n 中任一非单位元的置换都能表示成一些两两不相交的轮换的乘积, 并且除了轮换的排列次序外, 表示法是唯一的.*

Proof 设 $\sigma \in S_n$, 且 $\sigma \neq (1)$. 于是在 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中至少有一个 i_1 使得 $\sigma(i_1) \neq i_1$. 设

$$\sigma(i_1) = i_2, \quad \sigma(i_2) = i_3, \quad \cdots .$$

由于 $|\Omega| = n$, 因此在有限步后所得的像必与前面的元素重复. 设 i_r 是第一个与前面的元素重复的元素, 设 $i_r = i_j, j < r$. 假如 $j > 1$, 由于 $\sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma\left(i_{j-1}\right) = i_j$, 因此

$$\sigma^{r-1}(i_1) = i_r = i_j = \sigma^{j-1}(i_1) .$$

在上式两边用 σ^{-1} 作用得

$$\sigma^{r-2}(i_1) = \sigma^{j-2}(i_1) .$$

即 $i_{r-1} = i_{j-1}$. 这与 i_r 的选择矛盾. 因此 $j = 1$. 从而 $i_r = i_1$. 于是得到一个轮换 $\sigma_1 = (i_1 i_2 \cdots i_{r-1})$. 在 $\Omega \backslash \{i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}\}$ 中重复上述步骤, 便可得到 σ 表示成两两不相交轮换乘积的式子:

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t .$$

唯一性假设 σ 还有一个表示成两两不相交轮换乘积的式子: $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$. 任取在 σ 下变动的元素 a, 则在 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$ 中存在唯一的 σ_l, 使得 $\sigma_l(a) \neq a$. 同理, 在 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s$ 中存在唯一的 τ_k, 使得 $\tau_k(a) \neq a$. 我们有

$$\sigma_l^m(a) = \sigma^m(a) = \tau_k^m(a), \quad m = 0, 1, 2, \cdots .$$

$\sigma_l = \tau_k$. 继续这样的讨论, 可得 $t = s$, 并且在适当排列 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s$ 的次序后, 有 $\sigma_i = \tau_i, i = 1, 2, \cdots, t$. 从而唯一性成立. □

现在对于前面 S_4 中的 σ, τ, 用它们的轮换分解式来做乘法:

$$\sigma\tau = (1234)(14)(23) = (1)(24)(3) = (24),$$
$$\tau\sigma = (14)(23)(1234) = (13)(2)(4) = (13).$$

像上两式那样, 在运算的结果中常常把 1-轮换省略不写.

现在我们来思考一共轮换的逆元. 对于 σ, 容易求出它的逆元:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} = (1432).$$

与 σ 的轮换表示式 $\sigma = (1234)$ 比较, 猜测有如下结论:

$$(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r)^{-1} = (i_1 i_r i_{r-1} \cdots i_2).$$

证明如下: 由于

$$(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r)(i_1 i_r i_{r-1} \cdots i_2) = (i_1)(i_2)\cdots(i_{r-1})(i_r),$$
$$(i_1 i_r i_{r-1} \cdots i_2)(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r) = (i_1)(i_2)\cdots(i_{r-1})(i_r),$$

因此

$$(i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r)^{-1} = (i_1 i_r i_{r-1} \cdots i_2).$$

通过直接计算可知下式成立:

$$(1234) = (14)(13)(12).$$

一般地, 可以直接验证下式成立:

$$(i_1 i_2 i_3 \cdots i_{r-1} i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \cdots (i_1 i_3)(i_1 i_2).$$

再结合定理5.48, 以及 $(1) = (12)(12)$, 得

Corollary 5.9 *S_n 中每一个置换都可以表示成一些对换的乘积.*

注意: 把置换表示成对换的乘积, 其表示方式不唯一, 并且这些对换会相交. 例如:

$$(134) = (14)(13),$$
$$(134) = (12)(34)(24)(12).$$

从上式看出, 把 (134) 表示成对换的乘积, 对换的个数都是偶数. 由此猜测有下述结论:

Proposition 5.5 *S_n 中一个置换表示成对换的乘积, 其中对换的个数的奇偶性由这个置换本身决定, 与表示方式无关.*

Proof 任取 $\sigma \in S_n$, 设

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

则 σ 把 n 元排列 $12\cdots n$ 变成 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$. 可以证明，把 n 元排列 $12\cdots n$ 变成 $a_1a_2\cdots a_n$ 可以经过一系列对换实现, 并且所做对换的次数与 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 有相同的奇偶性. 因此 σ 可以表示成一些对换的乘积, 其中对换的个数由 σ 本身决定, 与表示方式无关. □

由于上命题, 我们引出下述概念:

如果一个置换可以分解做偶数个兑换的乘积，称作偶置换，否则称作奇置换. 可以证明偶置换全体构成偶置换群，称作 **n 元交错群**, 记作 A_n.

5.7.2 习题及解答

习题一： 证明

(1) $S_n =< \{(12), (23), \cdots, (n-1, n)\} >$.

(2) $S_n =< \{(12), (12\cdots n)\} >$.