# Phần thứ nhất

# LÝ THUYẾT TỔ HỢP

## Combinatorial Theory

**Hà Nội 2014**

# Nội dung

1. Mở đầu
2. Bài toán đếm tổ hợp (Counting Problem)
3. Bài toán tồn tại tổ hợp (Existence Problem)
4. Bài toán liệt kê tổ hợp (Enumeration Problem)
5. Bài toán tối ưu tổ hợp (Combinatorial Optimization Problem)

# 0. Mở đầu

## NỘI DUNG

**0.1. Tổ hợp là gì?**

0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp

0.3. Tập hợp và ánh xạ

# 0.1 Tổ hợp là gì?

- Đối tượng nghiên cứu
- Nội dung nghiên cứu

# Đối tượng nghiên cứu của tổ hợp

- Lý thuyết tổ hợp gắn liền với việc nghiên cứu ***sự sắp xếp*** của các phần tử trong các tập hữu hạn và ***sự phân bố*** của các phần tử vào các tập hữu hạn. Mỗi cách sắp xếp hoặc phân bố như thế được gọi là một ***cấu hình tổ hợp.***
- Có thể nói vắn tắt: Tổ hợp là lý thuyết về các tập hữu hạn.

# Phân loại bài toán

- Trong các tài liệu về tổ hợp, thường gặp các dạng bài toán dưới đây:
  1. Bài toán đếm tổ hợp (Counting Problem)
  2. Bài toán tồn tại tổ hợp (Existence Problem)
  3. Bài toán liệt kê tổ hợp (Enumeration Problem)
  4. Bài toán tối ưu tổ hợp (Combinatorial optimization Problem)

# Bài toán đếm – Counting Problem

- Đây là các bài toán nhằm trả lời câu hỏi: "Có bao nhiêu cấu hình thoả mãn các điều kiện cho trước?".
- Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý cơ bản và một số kết quả đếm các cấu hình đơn giản.
- Bài toán đếm được áp dụng một cách có hiệu quả vào những công việc mang tính chất đánh giá như tính xác suất của một sự kiện, tính độ phức tạp của một thuật toán, ...

# Bài toán tồn tại tổ hợp
## (Existence Problem)

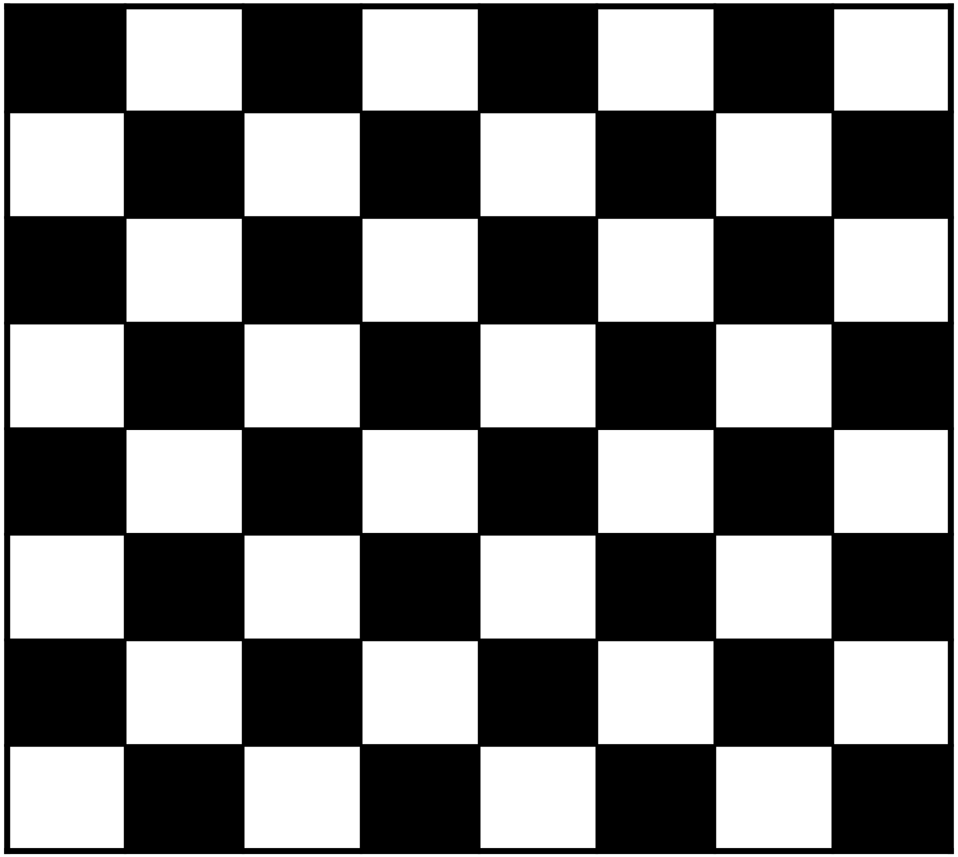
- Khác với bài toán đếm, trong bài toán tồn tại tổ hợp chúng ta cần trả lời câu hỏi: "Tồn tại hay chăng cấu hình tổ hợp thoả mãn các tính chất đã cho?"
- Rõ ràng nếu có thể đếm được số lượng cấu hình tổ hợp thoả mãn các tính chất đó cho thì ta cũng giải quyết được bài toán tồn tại tương ứng!
- Có thể coi bài toán tồn tại như trường hợp riêng của bài toán đếm được không?

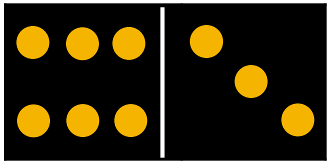
# Ví dụ

- **Bài toán phủ bàn cờ quốc tế bởi các quân bài domino:**

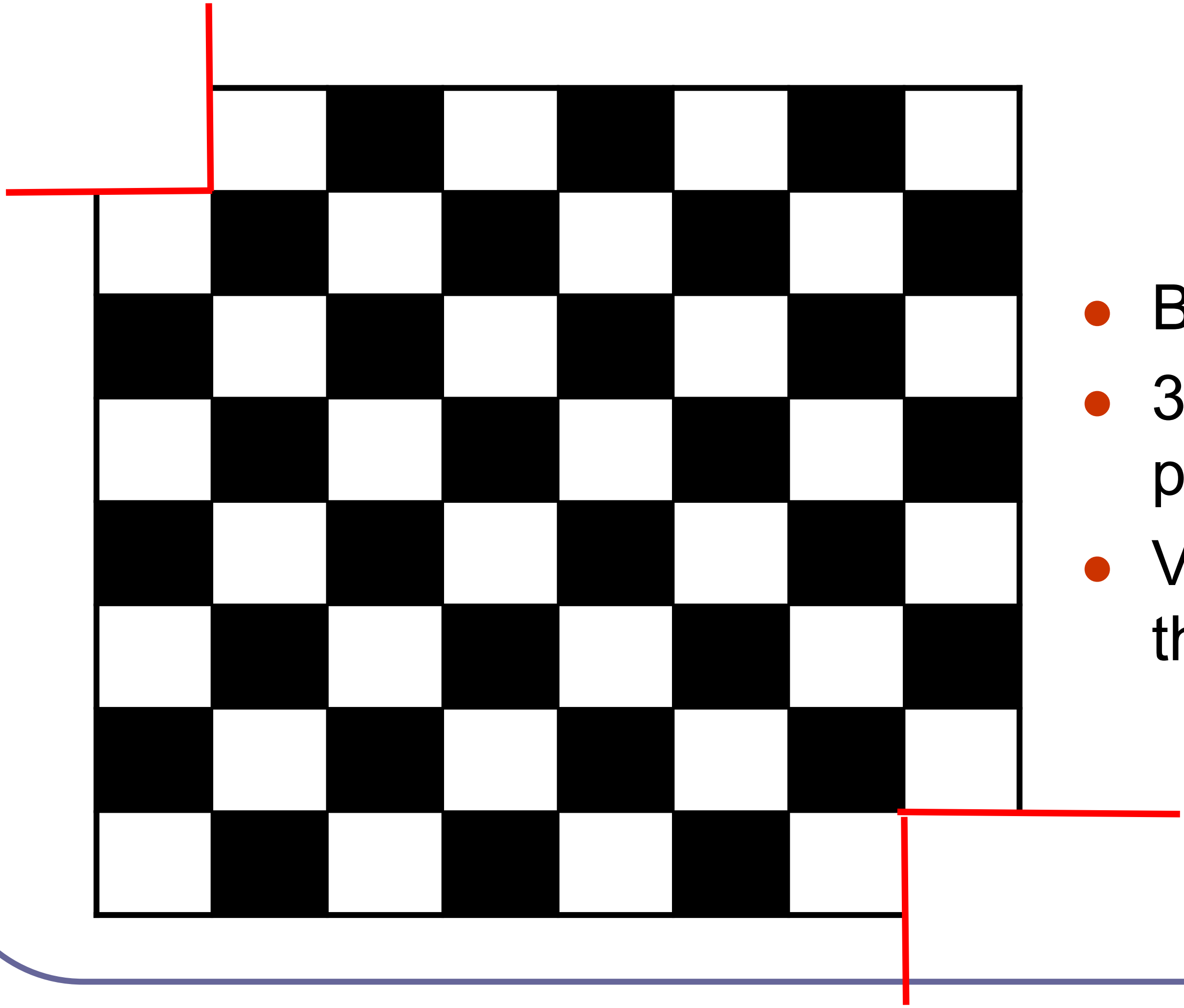
"Cho bàn cờ quốc tế kích thước 8×8 bị đục đi 2 ô ở hai góc đối diện và bộ bài domino, mỗi quân bài phủ kín 2 ô của bàn cờ. Hỏi có thể phủ kín bàn cờ đã cho bởi 31 quân bài domino?"

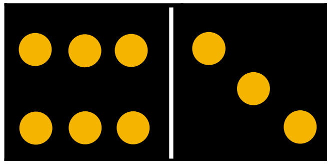
# Bàn cờ quốc tế và quân bài domino





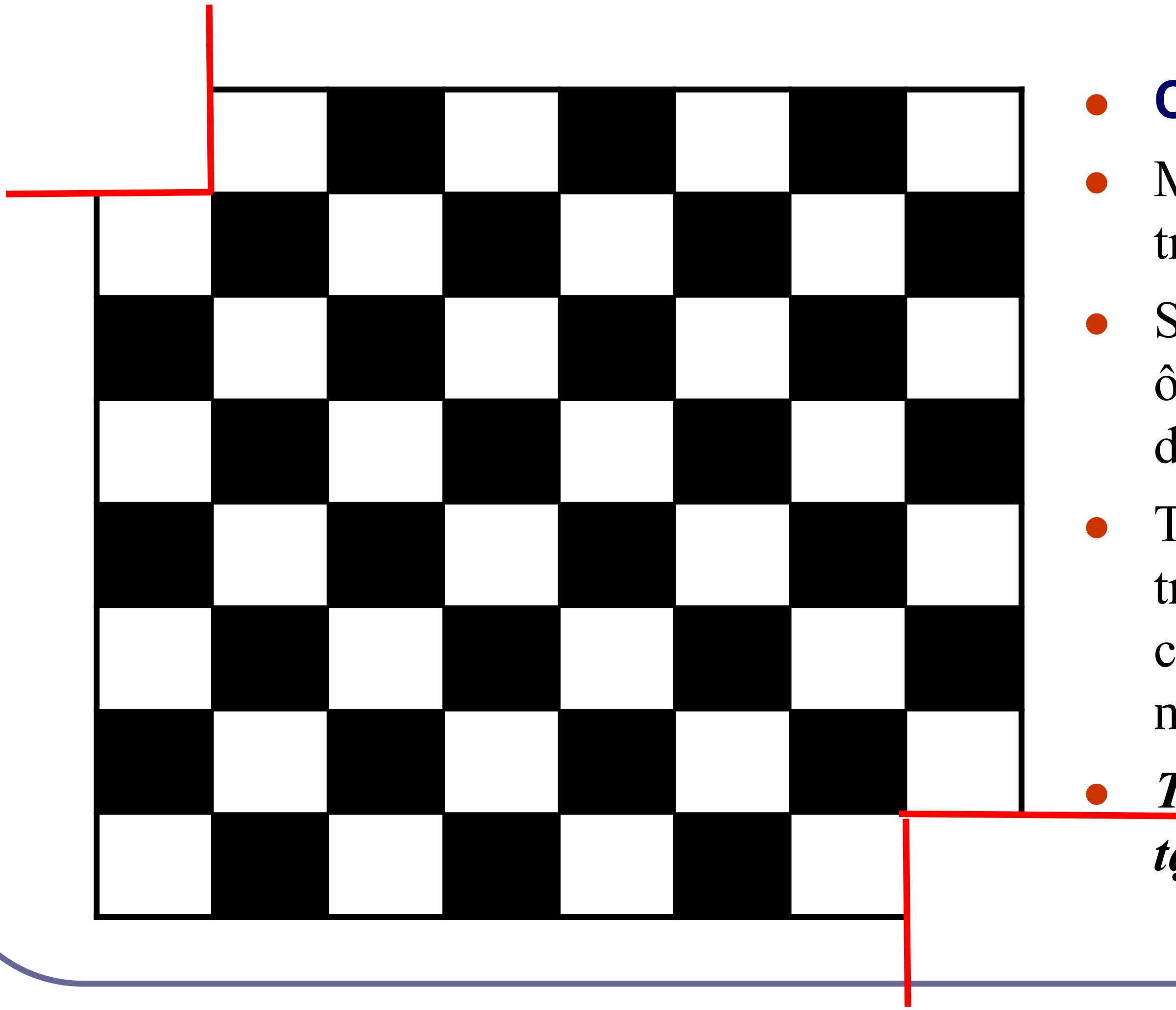
# Có thể phủ bàn cờ như vậy bởi 31 quân bài domino?





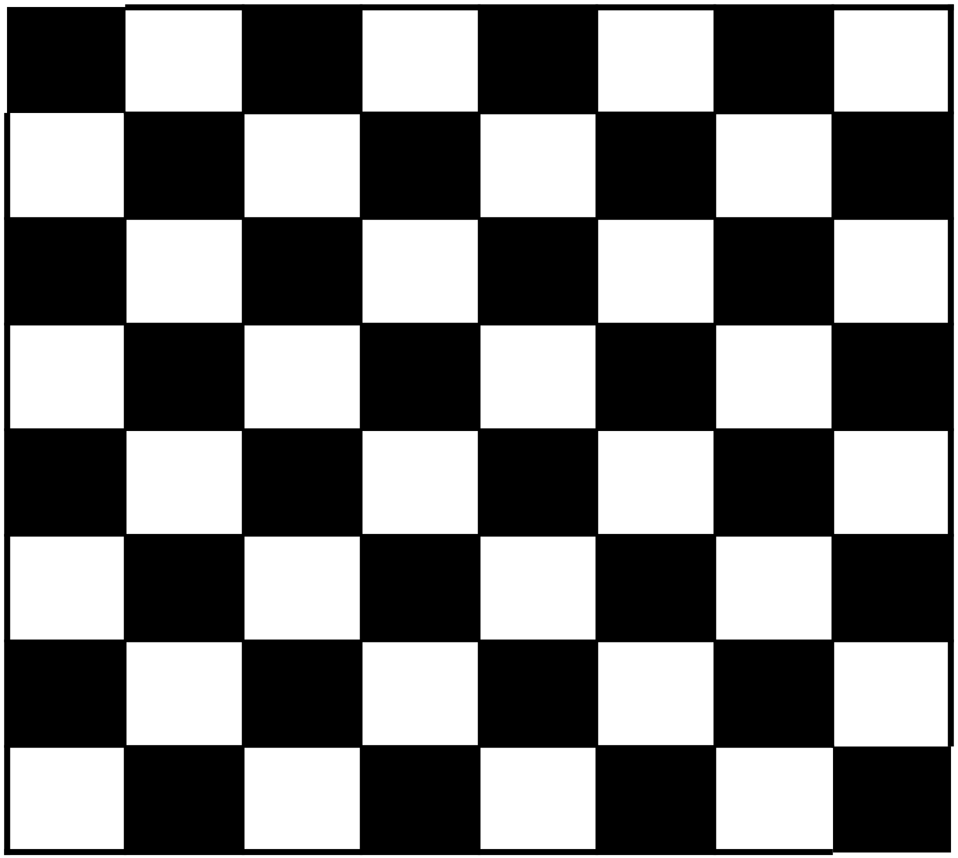
- Bàn cờ còn 62 ô
- 31 quân bài có thể phủ kín được 62 ô
- Về diện tích là có thể phủ được

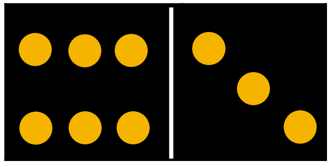
# Không tồn tại cách phủ bàn cờ như vậy bởi 31 quân bài domino!



- **Chứng minh**
- Mỗi quân bài phủ kín 1 ô trắng và một ô đen.
- Suy ra số lượng ô trắng và ô đen bị phủ bởi 31 quân domino là bằng nhau.
- Thế nhưng số lượng ô trắng và ô đen trên phần còn lại của bàn cờ là khác nhau
- ***Từ đó suy ra không tồn tại cách phủ!***

# Có bao nhiêu cách phủ bàn cờ bởi 32 quân bài domino?





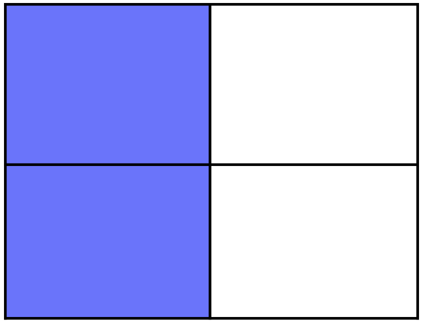
- Sự tồn tại cách phủ là hiển nhiên. Dễ dàng có thể chỉ ra vài cách phủ
- Vấn đề "Có bao nhiêu cách phủ?"
- Không dễ dàng trả lời!

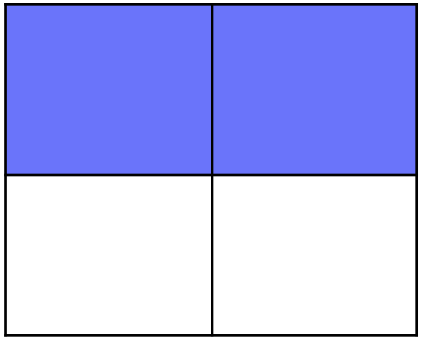
# Có bao nhiêu cách phủ bàn cờ bởi 32 quân bài domino?

- Nếu chỉ phân biệt hai cấu hình bởi dạng hình học của cách phủ thì có tất cả

  **12 988 816**

  cách phủ.





Có 2 cách phủ bàn cờ kích thước 2×2

# 0. Mở đầu

## NỘI DUNG

**0.1. Tổ hợp là gì?**

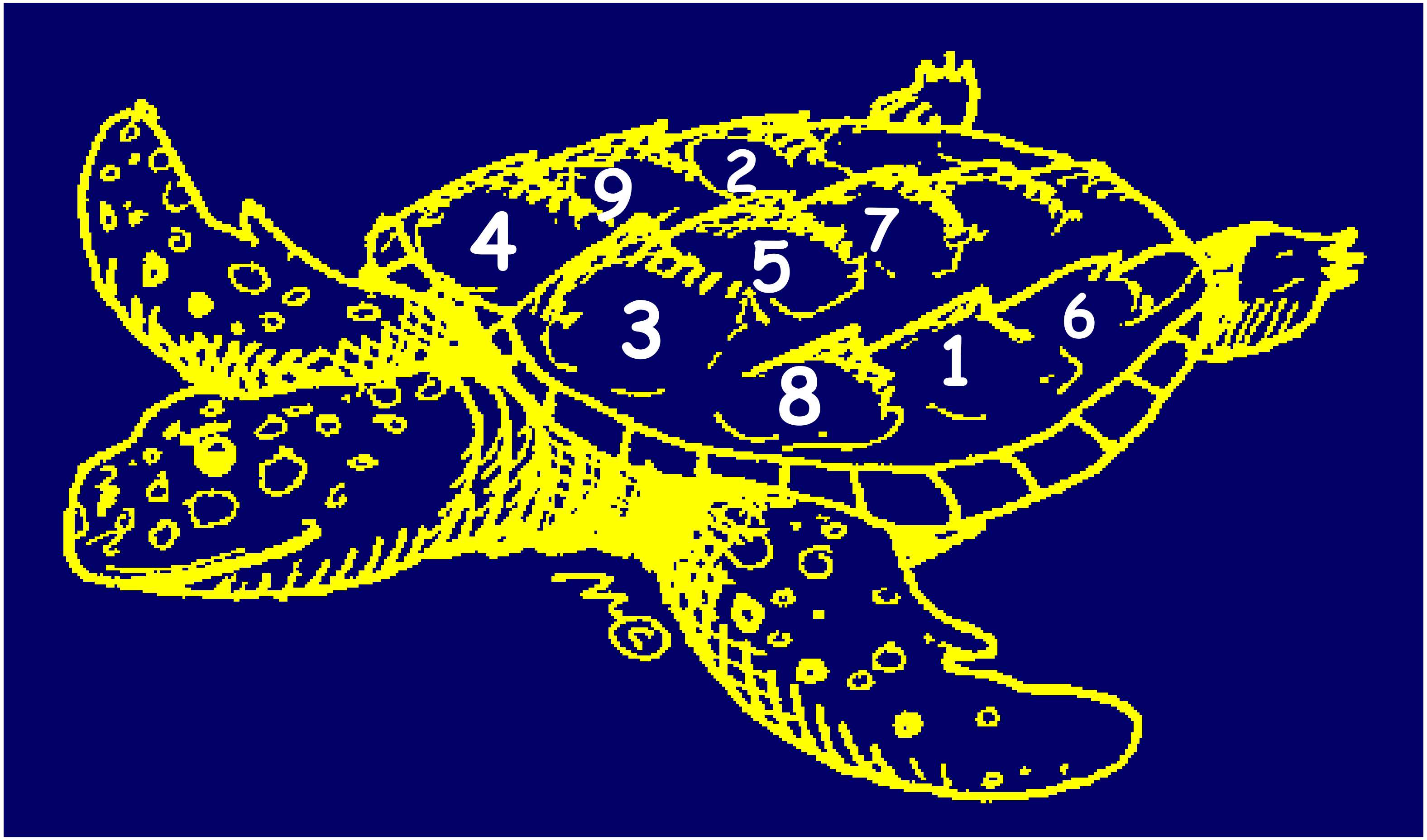
**0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp**

**0.3. Tập hợp và ánh xạ**

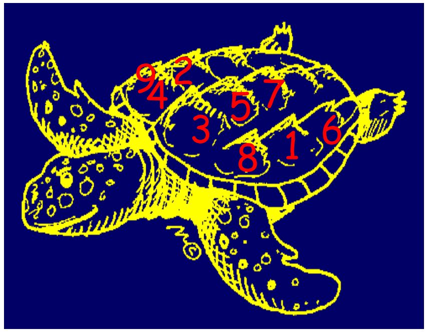
# 0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển

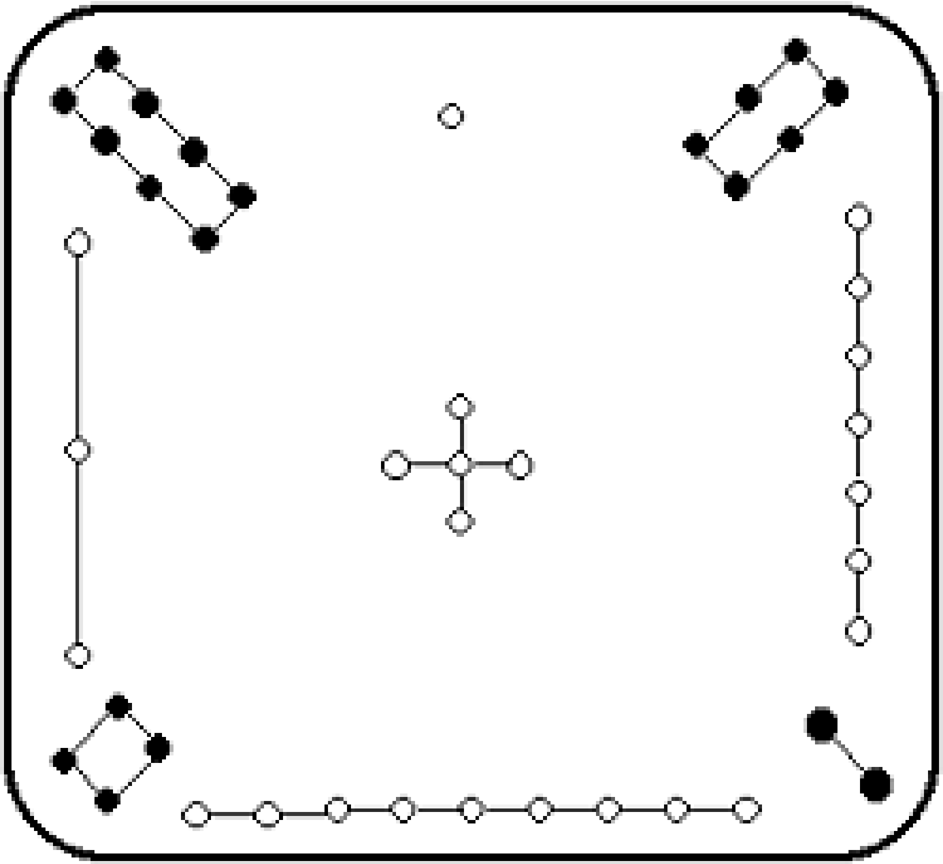
- Có thể nói là tổ hợp là một trong những lĩnh vực có lịch sử phát triển lâu đời nhất của toán học
- Nói về lịch sử phát triển của tổ hợp cũng chính là nói về lịch sử phát triển của toán học
- Vì vậy, chúng ta sẽ chỉ điểm qua vài nét về lịch sử, thông qua một số bài toán nổi tiếng trong lịch sử phát triển của tổ hợp

# Hình vuông thần bí - Ma phương
# Magic Square

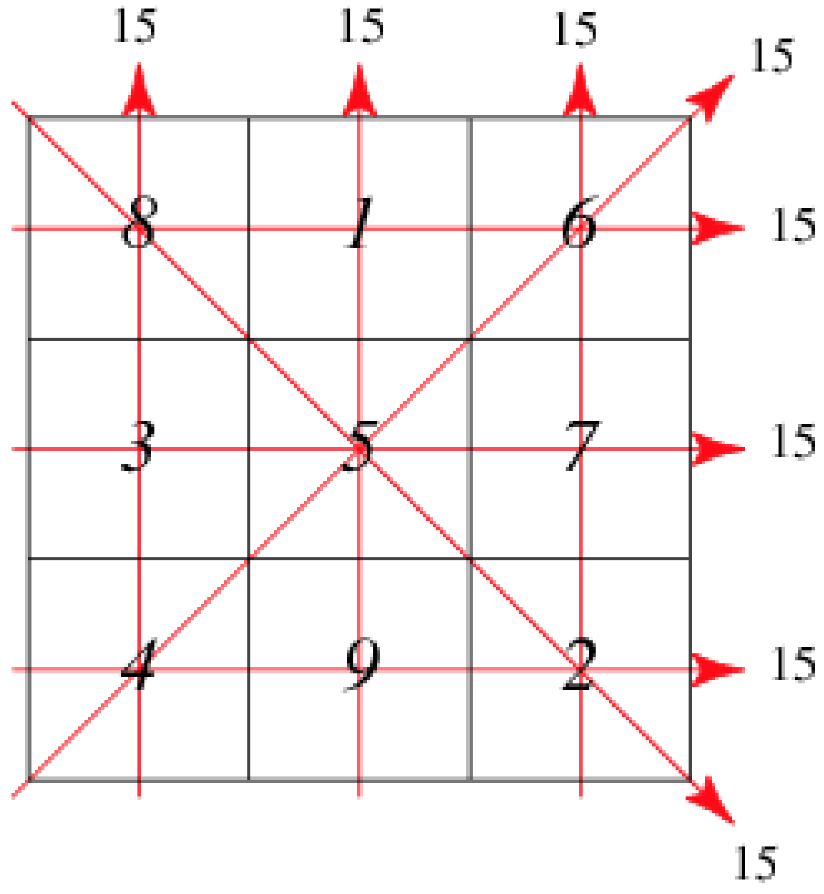


# Hình vuông thần bí - Ma phương
# Magic Square



# Tổng theo mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc cũng như mỗi đường chéo đều bằng 15



# Ma phương

- Bảng số này được biết từ thời nhà Chu (quãng 2200 năm trước công nguyên)
- Hãy chú ý đến những tính chất đặc biệt của bảng số này để có thể thấy tại sao nó được gọi là ma phương và được người Trung hoa cổ đại tôn thờ
  - Con số 5 nằm ở giữa biểu hiện Ngũ hành nằm ở trung tâm vũ trụ
  - Các số lẻ biểu thị cho "dương", các số chẵn biểu thị cho "âm" đều đối xúng nhau qua trung tâm
  - Nếu tính định thức của ma trận cấp 3 này ta được giá trị 360 = số ngày trong một năm
  - Giá trị tuyệt đối của các định thức con cũng là các con số đáng chú ý: 7, 23, 37, 53.

# Các tính chất đặc biệt của các con số

- **36** = 1+2+3+4+5+6+7+8

  (Tổng của 4 số lẻ và 4 số chẵn đầu tiên)
- **36** = $1^3+2^3+3^3$
- Con số 36 được người Trung hoa rất tôn sùng = Số quẻ trong Kinh dịch
- Các nhà triết học Ai cập cổ đại cũng rất tôn sùng các con số: "*Mọi hiện tượng trong tự nhiên cũng như trong xã hội đều cố gắng giải thích bằng các con số*"

# Số hoàn hảo

- **Biểu thị tính hoàn hảo:** Dùng *số hoàn hảo* (*perfect number*). Số tự nhiên *a* được gọi là số hoàn hảo, nếu số này bằng tổng các ước số của nó.
- Ví dụ:
  - 6 = 1+2+3
  - 28 = 1+2+4+7+14
- So sánh: Số lượng số hoàn hảo và Số lượng số nguyên tố trên đoạn [*a*, *b*]

# Cặp số hữu nghị

- **Biểu thị tình hữu nghị:** Dùng *cặp số hữu nghị* (*pair of friendship numbers*). Hai số tự nhiên *a*, *b* được gọi là cặp số hữu nghị nếu số này bằng tổng các ước số của số kia và ngược lại
- Ví dụ: (220, 284), (1184, 1210),

  (2620,2924), (5020, 5564), (6232, 6368)

# 0. Mở đầu

## NỘI DUNG

0.1. Tổ hợp là gì?

0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp

**0.3. Tập hợp và ánh xạ**

# TẬP HỢP

- Các khái niệm cơ bản
- Các phép toán tập hợp
- Sơ đồ Venn
- Các đẳng thức

# Tập hợp

- Ta hiểu: ***Tập hợp như là sự tụ tập của các phần tử.***
  - Ta nói tập hợp chứa các phần tử của nó.
  - Các tập hợp được ký hiệu bởi *A*-*Z*, các phần tử *a*-*z*
  - Thông thường phải có một tập vũ trụ *U* mà tất cả các phần tử được xét trong nó. Tập *U* có thể được chỉ rõ hoặc được ngầm định.
- **Xác định tập hợp:**
  - Danh sách các phần tử:

    $S = \{ a, b, c, d \} = \{ b, c, a, d, d \}$

    (Chú ý: Việc liệt kê lặp lại một phần tử không dẫn đến tập mới. Thứ tự liệt kê là không có vai trò.)

# Tập hợp

- Xác định tập hợp (tiếp):
  - Mô tả cách xây dựng tập hợp bằng việc sử dụng mệnh đề lôgic:

    $$S = \{\ x \mid P(x)\ \}$$

    *S* chứa các phần tử thoả mãn mệnh đề *P*.
    - Ví dụ, $S = \{\ x \mid x$ là sinh viên ĐHBK HN$\}$

      đọc là "*S* là tập tất cả các phần tử x sao cho x là sinh viên ĐHBK HN."
  - Liệt kê các phần tử:

    $S = \{\ \ldots, -3, -2, -1\ \}$ - tập các số nguyên âm.

# Tập hợp

- Các tập vũ trụ thường dùng
  - $\boldsymbol{R}$ = tập số thực
  - $\boldsymbol{N}$ = tập số tự nhiên = { 0,1, 2, 3, … }
  - $\boldsymbol{Z}$ = tập các số nguyên = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }
  - $\boldsymbol{Z}^+$ tập các số nguyên không âm

# Tập hợp

- **Nhận biết các phần tử của tập hợp**
  - Ký hiệu:
    - $x$ là phần tử của $S$ hay còn nói $x$ thuộc $S$: $x \in S$
    - $x$ không là phần tử của $S$: $x \notin S$
  - **Ví dụ:** Gọi $S$ là tập các số nguyên từ 1 đến 12. Khi đó

    $5 \in S$ nhưng $15 \notin S$

- **Chú ý: V**iệc biết một phần tử có thuộc một tập cho trước hay không là vấn đề không phải lúc nào cũng là dễ dàng:

  **Ví dụ:** Gọi $P$ là tập các số nguyên tố. Hỏi

  $x$=121212121212121212111111111111111111

  có thuộc $P$?

# Tập con

- Tập $A$ được gọi là ***tập con*** của tập $B$ nếu mỗi phần tử của $A$ đều là phần tử của $B$, nghĩa là

$$\forall x\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

- **Ký hiệu:**

$A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$

- **Ví dụ:**
  - Nếu $S = \{ 1, 2, 3, \ldots, 11, 12 \}$ và $T = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

    Thế thì $T \subseteq S$.

# Tập con

- Một số định nghĩa:
  - Một tập luôn là tập con của chính nó.
  - Hai tập là bằng nhau khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập thứ nhất đều là phần tử của tập thứ hai và ngược lại, nghĩa là

$$A = B \quad \text{khi và chỉ khi} \quad A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A$$

  - Nếu $A \subseteq B$, nhưng $A \neq B$ khi đó ta nói $A$ là *tập con thực sự* của $B$. Ký hiệu: $A \subset B$.
  - **Ví dụ:**
    - Giả sử $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2, 3, 1 \}$, $C = \{ 3 \}$
    - Khi đó

$$B = A,\ C \subset A,\ C \subset B.$$

# Tập con

- Một số định nghĩa:
  - ***Tập rỗng (trống)*** là tập không có phần tử nào cả.
    - Ký hiệu: $\varnothing$.
    - $\varnothing$ là tập con của mọi tập
  - ***Tập tất cả các tập con (Power set)*** của tập $A$
    - Ký hiệu: $2^A$ (đôi khi dùng ký hiệu: $P(A)$)
    - Ví dụ, nếu $A = \{1\}$ thì $2^A = \{\varnothing, \{1\}\}$
    - Tập gồm $n$ phần tử có $2^n$ tập con.

# Tập con

- ***Lực lượng (cardinality)*** của tập $A$ là số phần tử trong $A$.
  - Ký hiệu: $|A|$ (đôi khi còn ký hiệu là $\#A$, $N(A)$).
  - Nếu lực lượng của một tập hợp là số tự nhiên thì nó được gọi là ***tập hữu hạn***, nếu trái lại nó là ***tập vô hạn***.
    - **Ví dụ:** $\boldsymbol{N}$ (tập các số tự nhiên) là vô hạn, bởi vì $|\boldsymbol{N}|$ không là số tự nhiên.
  - **Chú ý:** Nếu $|A| = n$ thì $|P(A)| = 2^n$.

# Tập con

- **Ví dụ:**
  - Nếu $A = \{ a, b \}$ thì
    - Tập các tập con của $A$:

      $$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

    - Lực lượng của $A$:

      $$|A| = |\{a, b\}| = 2$$

      $$|2^A| = 4$$

    - $A$ và $2^A$ là các tập hữu hạn.

# Các phép toán tập hợp

- ***Giao (intersection)*** của 2 tập $A$ và $B$:
  - là tập các phần tử vừa thuộc vào $A$ vừa thuộc vào $B$.
  - Ký hiệu: $A \cap B$

    $$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \wedge x \in B\ \}$$

  - Nếu giao là tập rỗng, thì $A$ và $B$ được gọi là không giao nhau.

# Các phép toán tập hợp

- ***Hợp* (*union*)** của 2 tập $A$ và $B$:
  - là tập tất cả các phần tử hoặc thuộc $A$ hoặc thuộc vào $B$.
  - Ký hiệu: $A \cup B$

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \vee x \in B\ \}$$

- Lực lượng của hợp của hai tập $A$ và $B$:

  Có quan hệ so sánh nào ?

$$|A \cup B| \ \ ? \ \ |A| \ \ ? \ \ |B| \ \ ? \ \ |A \cap B|$$

# Các phép toán tập hợp

- ***Hiệu (difference)*** của $A$ và $B$:
  - là tập hợp các phần tử của $A$ không thuộc vào $B$.
  - Ký hiệu: $A - B$ hoặc $A \setminus B$

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

- ***Hiệu đối xứng (symmetric difference)*** *của* $A$ và $B$:
  - là tập $(A - B) \cup (B - A)$
  - Ký hiệu: $A \oplus B$

# Các phép toán tập hợp

- ***Phần bù (complement)*** của tập $A$:
  - là tập $U - A$, trong đó $U$ là tập vũ trụ.
  - phần bù của $A$ là phụ thuộc vào $U$ !
  - Ký hiệu: $\overline{A}$

$$\overline{A} = \{ x \mid \neg(x \in A) \}$$

  - Cách ký hiệu khác: $A^c$.

# Các phép toán tập hợp

- Ví dụ:
  - U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }
  - A= { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 4, 5, 6, 7, 8 }.
  - Khi đó
    - $A \cup B =$
    - $A \cap B =$
    - $\bar{A} =$
    - $\bar{B} =$
    - $A\text{-}B =$
    - $B\text{-}A =$
    - $A \oplus B =$

# Tích Đề các

René Descartes
(1596-1650)

- ***Tích Đề-các (Cartesian product)*** của $A$ với $B$:
  - Là tập bao gồm tất cả các cặp có thứ tự $(a, b)$, trong đó $a$ thuộc $A$ và $b$ thuộc $B$.
  - Ký hiệu: $A \times B$. Theo định nghĩa

    $$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

  - **Ví dụ:**
    - Cho $A = \{ 1, 2, 3 \}$ và $B = \{ 3, 4 \}$. Khi đó

      $$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4) \}$$

      $$B \times A = \{ (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3) \}$$

    - Thông thường $A \times B \neq B \times A$
    - $|A \times B| = ?$

# Tích Đề các

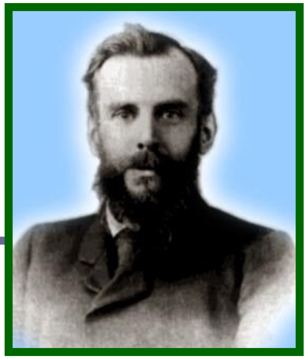
- **Ví dụ:**
  - $A$ = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
  - $B$ = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
  - $A \times B$ = { (T, Mai), ..., (T, Muỗm}, ...,(C, Muỗm) }
- Tích Đề các được mở rộng cho nhiều tập:
  - Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hợp
  - $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m): a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$

# Tích Đề các

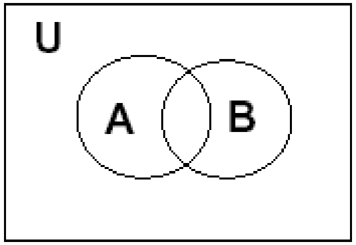
- **Ví dụ:**
  - $A$ = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
  - $B$ = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
  - $C$ = { P30 - B4, P55-B3, P17-A1 }
  - $A \times B \times C$ = {(Thắng, Mai, P30-B4), ... }
- Ký hiệu

$$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ lần}} = X^n$$

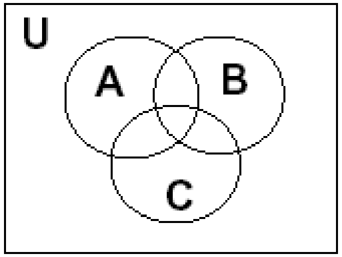
# SƠ ĐỒ VENN
(John Venn 1834-1923)



- **Venn diagrams:**
  - Là cách biểu diễn rất trực quan giúp chỉ ra mối liên hệ giữa 2 hoặc 3 tập hợp.
    - Tập vũ trụ *U* được biểu diễn bởi hình chữ nhật.
    - Mỗi tập con của *U* được biểu diễn bởi phần trong của một vòng kín.
- **Ví dụ:**

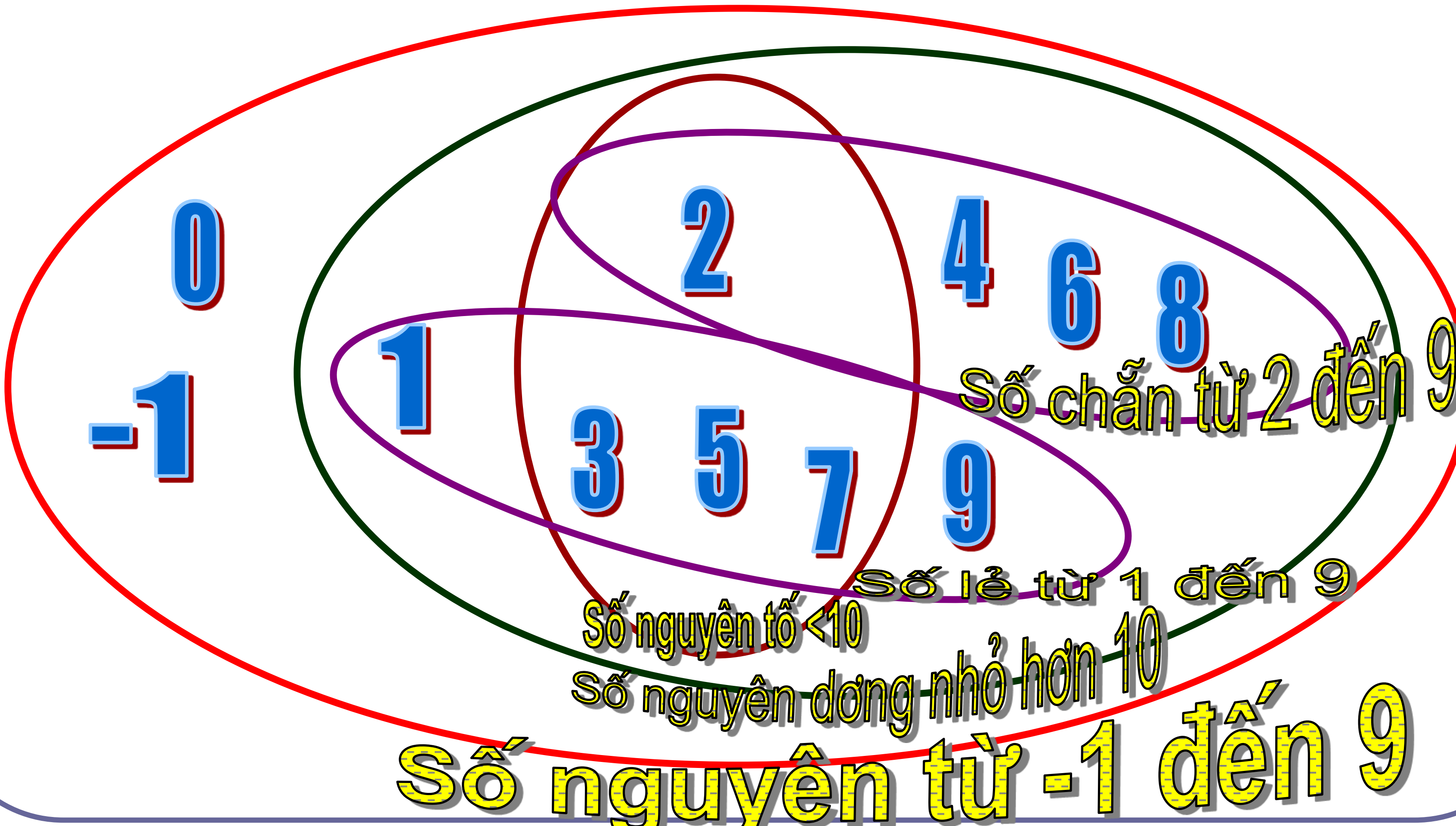



Cho 2 tập




Cho 3 tập

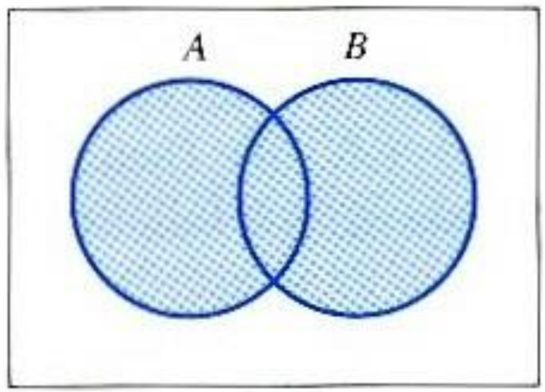
# Ví dụ: Nhiều tập sẽ rất rối mắt!



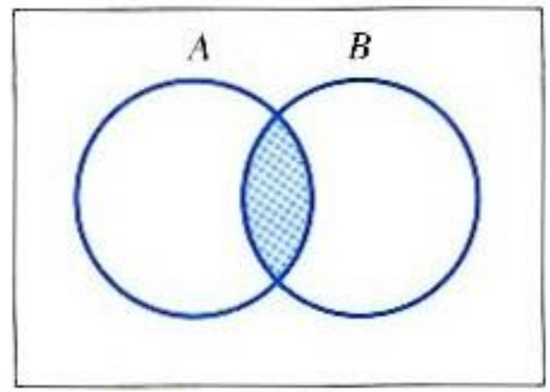
# SƠ ĐỒ VENN

- **Ví dụ:** Vẽ sơ đồ Venn cho thấy tác động của các phép toán tập hợp.
  - Các miền tương ứng với kết quả sẽ tô đen để chỉ ra tác động của phép toán tập hợp.

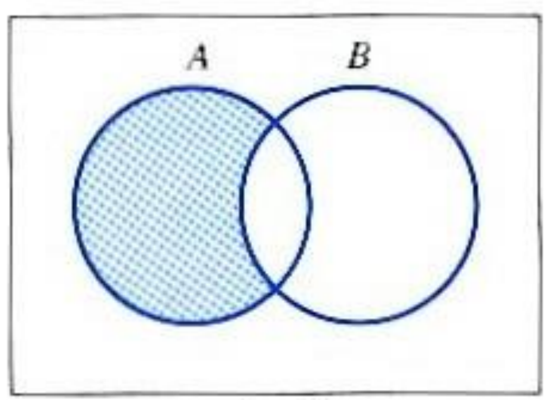
# Sơ đồ Venn



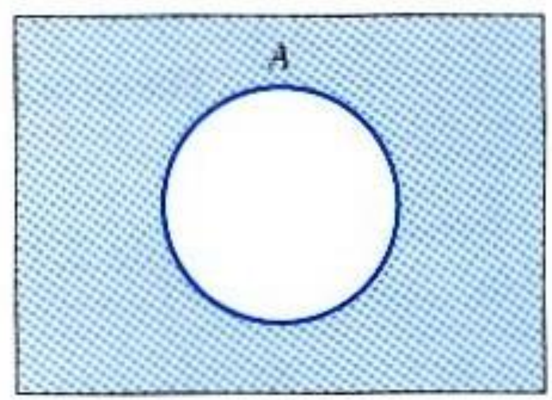

$A \cup B$




$A \cap B$

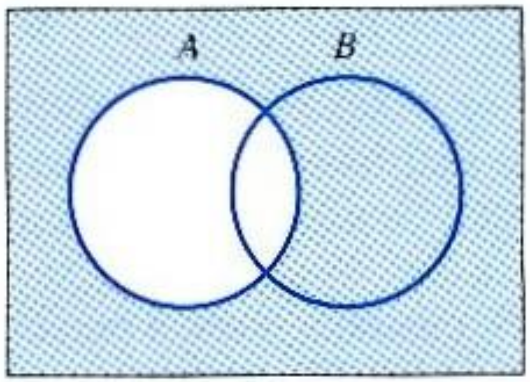



$A - B$

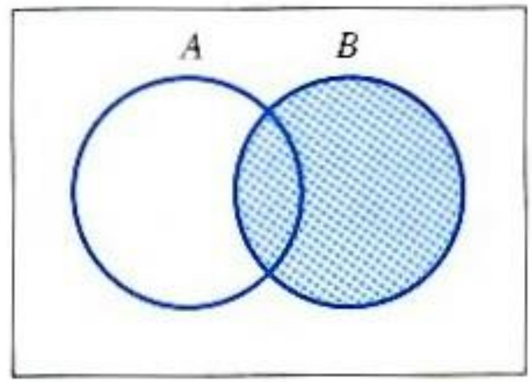



$\overline{A}$

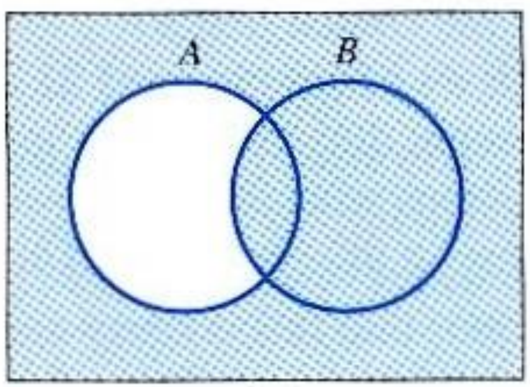
# Sơ đồ Venn



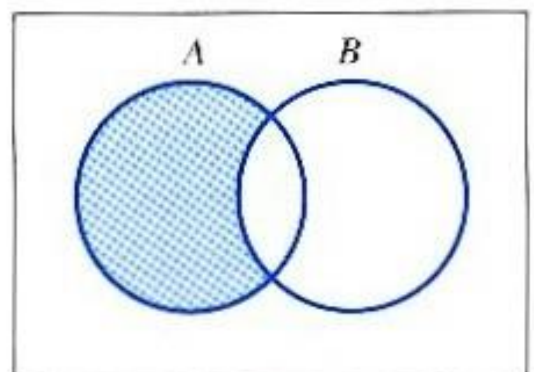

$\overline{A}$




$B$




$\overline{A} \cup B$




$\overline{(\overline{A} \cup B)}$

# Sơ đồ Venn

- Câu hỏi:
  - Hãy vẽ sơ đồ Venn của $A \oplus B$
  - Phép $\oplus$ được sử dụng trong logic như là phép toán Exclusive OR?

# Các đẳng thức tập hợp

- Các đẳng thức tập hợp tương tự như các đẳng thức logic.
- Các đẳng thức quan trọng:

| Đẳng thức | Tên gọi |
|---|---|
| $A \cup \varnothing = A$<br>$A \cap U = A$ | Đồng nhất<br>(Identity laws) |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \varnothing = \varnothing$ | Trội<br>(Domination laws) |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Đồng nhất<br>Idempotent laws |
| $\overline{(\overline{A})} = A$ | Bù (Complementation laws) |

# Các đẳng thức tập hợp

- Tiếp theo:

| **Đẳng thức** | **Tên gọi** |
|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap \mathrm{A}$ | Giao hoán<br>Commutative laws |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Kết hợp<br>Associative laws |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Phân phối<br>Distributive laws |
| $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | Luật De Morgan<br>De Morgan's laws |

# Hợp của nhiều tập

- Hợp của hai tập: $A \cup B$
- Hợp của $n$ tập:
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cup A_2) \cup \ldots) \cup A_n)$
  (ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)
- Ký hiệu:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

# Giao của nhiều tập

- Giao của hai tập: $A \cap B$
- Giao của $n$ tập:
  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cap A_2) \cap \ldots) \cap A_n)$
  (ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)
- Ký hiệu:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

# Phân hoạch

- Giả sử $X_1, X_2, ..., X_m$ là các tập con của $X$. Ta nói $X_1, X_2, ..., X_m$ tạo thành một phân hoạch của $X$ (hoặc $X$ được phân hoạch thành các tập $X_1, X_2, ..., X_m$ ) nếu:
  - $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ ;
  - $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j.$

# ÁNH XẠ

- Định nghĩa
- Cách xác định ánh xạ
- Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

# Ánh xạ

- Ta nói $f$ là ánh xạ từ tập $X$ vào tập $Y$ nếu nó đặt tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in Y$ nào đó.
  - Ký hiệu: $f: X \to Y$ hoặc $y = f(x)$
  - $x$ gọi là gốc, $y$ gọi là ảnh.
- Trong giáo trình giải tích chúng ta đã làm quen với hàm số thực $f$ đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbf{R}$ với một giá trị thực $\boldsymbol{y = f(x)}$.

# Xác định ánh xạ

- Cho hai tập hữu hạn *X* và *Y*.
- Để xác định một ánh xạ *f* từ *X* vào *Y* ($f$: $X \rightarrow Y$) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:
  - Bảng giá trị đầy đủ
  - Sơ đồ ánh xạ
  - Ma trận ánh xạ

# Xác định ánh xạ: Bảng giá trị đầy đủ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,
- Một ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$ ($f$: $X \to Y$) có thể xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau đây

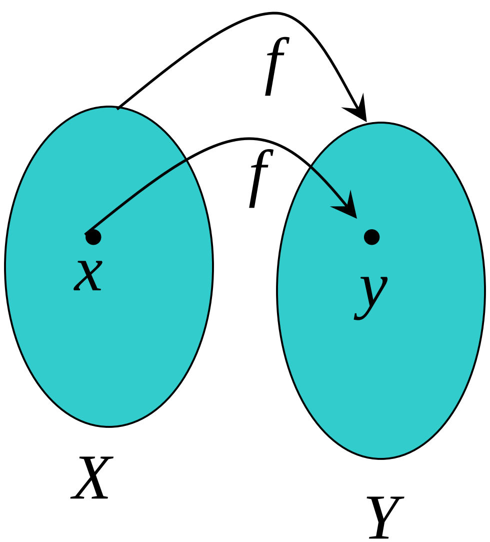
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | ... | $f(x_m)$ |

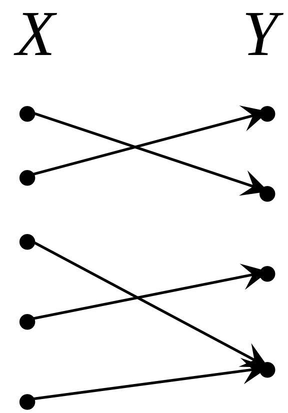
**Như vậy mỗi ánh xạ từ tập *m* phần tử *X* vào tập *n* phần tử *Y* hoàn toàn xác định bởi bộ ảnh**

$$(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))$$

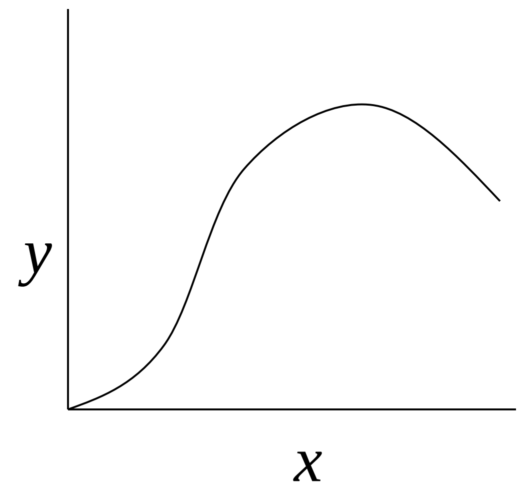
# Sơ đồ ánh xạ

- Ánh xạ có thể xác định bởi sơ đồ như sau:




Sơ đồ




Đồ thị hàm số

# Ma trận ánh xạ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,
  - $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,
- Một ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$ ($f$: $X \to Y$) có thể xác định bởi ma trận $A_f = \{a_{ij}\}$ kích thước $m \times n$ với các phần tử được xác định theo qui tắc sau đây:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } y_j \text{ là phần tử tương ứng với } x_i \text{ qua ánh xạ } f \\ 0, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

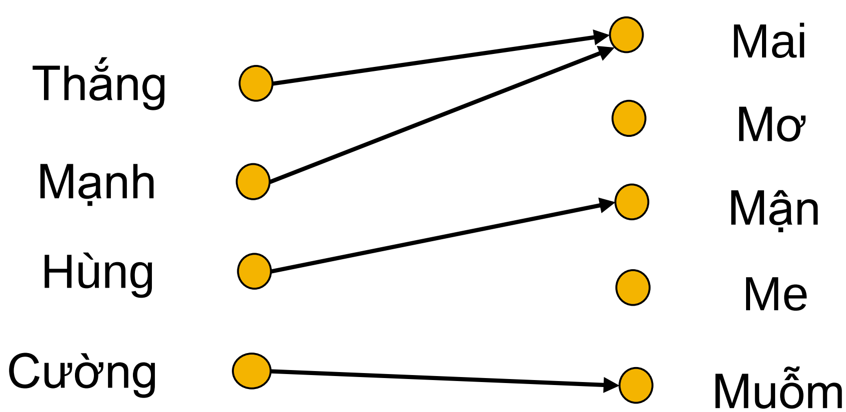
# Ví dụ

- X = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
- Y = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }

- Xét ánh xạ f từ X vào Y xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau:

| x | Thắng | Mạnh | Hùng | Cường |
|---|---|---|---|---|
| y=f(x) | Mai | Mai | Mận | Muỗm |

- Ánh xạ nói trên có thể cho bởi sơ đồ và ma trận như sau:




$$A_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Mai} & \text{Mơ} & \text{Mận} & \text{Me} & \text{Muỗm} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Thắng} \\ \text{Mạnh} \\ \text{Hùng} \\ \text{Cường} \end{array}$$

# Một số loại ánh xạ hay dùng

- Xét 3 loại ánh xạ hay dùng
  - Đơn ánh
  - Toàn ánh
  - Song ánh
- Giả sử *X*, *Y* là các tập hợp.
- **Đơn ánh:** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* (*injection*) nếu nó đặt tương ứng hai phần tử khác nhau của *X* với hai phần tử khác nhau của *Y*.

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

# Một số loại ánh xạ hay dùng

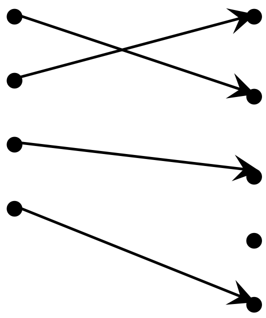
- **Toàn ánh:** Ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$ được gọi là *toàn ánh* (*surjection*) nếu mỗi phần tử của $Y$ đều là ảnh của ít nhất một phần tử nào đó của $X$ qua ánh xạ $f$.

$$\forall y \in Y, \exists\, x \in X: y = f(x)\ .$$

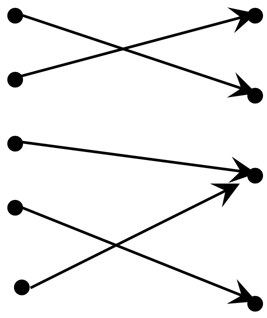
- **Song ánh:** Ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$ được gọi là *song ánh* (*bijection*, *one to one*) hay còn gọi là tương ứng 1-1(*one-to-one correspondence*), ***sánh***, nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

# Ví dụ

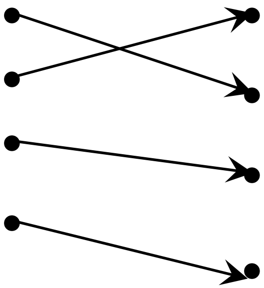
- Sơ đồ của một số ánh xạ:



Đơn ánh



Toàn ánh



Song ánh

# Ứng dụng

- **Xét bài toán:** Đếm số phần tử của tập $X$. Giả sử $Y$ là tập mà số phần tử của nó là đã biết: $n_y = |Y|$. Giả sử ta có thể xây dựng được ánh xạ $f$ từ $X$ vào $Y$. Khi đó
  - Nếu $f$ là đơn ánh, thì ta có $|X| \leq n_y$
  - Nếu $f$ là toàn ánh, thì ta có $|X| \geq n_y$
  - Nếu $f$ là song ánh, thì ta có $|X| = n_y$
- Trong tình huống thứ ba ta giải được bài toán đếm đặt ra, nhờ xây dựng được song ánh từ tập các cấu hình tổ hợp cần đếm (tập $X$) vào tập các cấu hình tổ hợp mà ta đã biết trước số phần tử (tập $Y$).

# Ví dụ

- **Hỏi có bao nhiêu số có 5 chữ số mà mỗi chữ số đứng sau lại lớn hơn chữ số đứng trước?**

**Giải:** Mỗi một số cần đếm tương ứng với một cách chọn ra 5 chữ số từ 9 chữ số 1, 2, ..., 9, và ngược lại mỗi một cách lấy ra 5 chữ số từ 1, 2, ..., 9 sau khi sắp xếp theo thứ tự tăng dần cho ta đúng một số cần đếm. Vậy số lượng số cần đếm là C(9, 5).

- Lập luận tương tự ta cũng có số lượng số cần đếm chính bằng số cách loại bỏ 4 chữ số từ dãy 1 2 3 ... 9. Vậy số lượng số cần đếm là C(9, 4)
- Như vậy bằng lập luận tổ hợp ta đã chứng minh được C(9,5) = C(9,4).

Ask questions!