平衡树

史浩诚

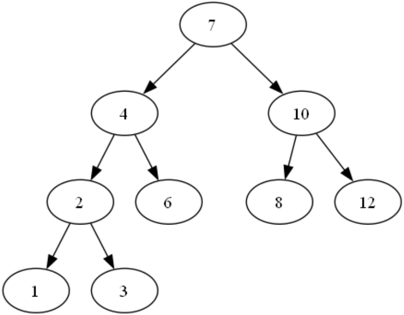
2025 年 2 月 2 日

目录

二叉搜索树

- 二叉搜索树（Binary Search Tree），又名二叉排序树（Binary Sort Tree），简称 BST
- 二叉搜索树是一个二叉树，每个结点都有一个权值（数据），且每个结点左子树所有结点的权值都小于此结点的权值，每个结点右子树所有结点的权值都大于此结点的权值。
- 二叉搜索树的中序遍历是有序的。
- 二叉搜索树支持很多操作。

例：



P3369 【模板】普通平衡树

提高 $+$/省选 $-$

您需要动态地维护一个可重集合 M，并且提供以下操作：

1. 向 M 中插入一个数 x。
2. 从 M 中删除一个数 x（若有多个相同的数，应只删除一个）。
3. 查询 M 中有多少个数比 x 小，并且将得到的答案加一。
4. 查询如果将 M 从小到大排列后，排名位于第 x 位的数。
5. 查询 M 中 x 的前驱（前驱定义为小于 x，且最大的数）。
6. 查询 M 中 x 的后继（后继定义为大于 x，且最小的数）。

对于操作 3,5,6，**不保证**当前可重集中存在数 x。

二叉搜索树

二叉搜索树支持以上操作。
二叉搜索树的每个结点包含一下信息：

```
    Type val; // 值（数据）
    int cnt = 1; // cnt: val出现了cnt次
    size_t size = 1; // size: 子树大小
    Node *leftSon = nullptr; // 左子树
    Node *rightSon = nullptr; // 右子树
```

插入

从根结点开始向下遍历，直到找到一个与插入值相同的结点或者是空结点。

```cpp
void insert(Node *&cur, Type val) {
    if (!cur) {
        cur = new Node(val);
        return;
    }
    if (cur->val == val) {
        cur->cnt++;
    } else if (cmp(val, cur->val)) {
            // val < cur->val
        insert(cur->leftSon, val);
    } else {
        insert(cur->rightSon, val);
    }
    cur->update();
}
```

查询排名

```cpp
size_t _queryRank(Node *&cur, Type val) {
    if (!cur) return 1; // 空树中任何值排名都为1
    size_t leftSonSize = cur->leftSon ? cur->leftSon->size : 0;
    if (val == cur->val) {
        return leftSonSize + 1;
    }
    if (cmp(val, cur->val)) { // val < cur->val
        return _queryRank(cur->leftSon, val);
    } else {
        return leftSonSize + cur->cnt + _queryRank(cur->rightSon, val);
    } // 在右子树中查询排名，加上当前结点的个数和左子树大小
}
```

查询第 K 小

```
Type _queryKth(Node *&cur, size_t rank) {
    size_t leftSonSize = cur->leftSon ? cur->leftSon->size : 0;
    if (rank <= leftSonSize) {
        return _queryKth(cur->leftSon, priority);
    } else if (rank <= leftSonSize + cur->cnt) {
        return cur->val;
    } else if (rank <= cur->size) {
        return _queryKth(cur->rightSon, rank - leftSonSize - cur->cnt);
    }
}
```

查询前驱

```cpp
Type _predecessor(Node *&cur, Type val) {
    if (cmp(val, cur->val) || val == cur->val) {
        // 如果val与当前结点val相同或者小于当前结点val都需要在左子树继续查找前驱
        if (cur->leftSon) return _predecessor(cur->leftSon, val);
        else throw NoSuchValueException("No lesser value in the tree");
    } // 否则val大于当前结点val
    if (cur->rightSon) {
        try { // 若有右子树，先在右子树中查找
            return _predecessor(cur->rightSon, val);
        } catch(const NoSuchValueException &e) {
            return cur->val;
        }
    }
    return cur->val; // 没有右子树返回当前结点
}
```

查询后继

```
Type _successor(Node *&cur, Type val) {
    if (cmp(cur->val, val) || cur->val == val) {
        if (cur->rightSon) return _successor(cur->rightSon, val);
        else throw NoSuchValueException("No greater value in the tree");
    }
    if (cur->leftSon) {
        try {
            return _successor(cur->leftSon, val);
        } catch(const NoSuchValueException &e) {
            return cur->val;
        }
    }
    return cur->val;
}
```

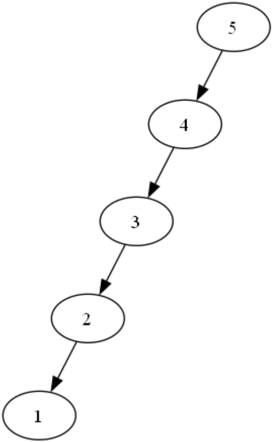
查询 x 的前驱还有其他简单的方法，先查询 x 的排名，再查询排名-1 的数是多少即为 x 的前驱，后继也是同理。

时间复杂度

二叉搜索树的操作的时间复杂度都是取决于操作结点的深度，而二叉搜索树在最坏情况下退化成一条链的形状时，树的深度则会变成结点数 n，所以二叉搜索树单次操作时间复杂度为 $O(n)$

最坏情况例子：先插入 5，再插入 4，再插入 3，再插入 2，再插入 1，此时树为一条链

那么降低时间复杂度，关键是在降低树的高度，使树“平衡”。



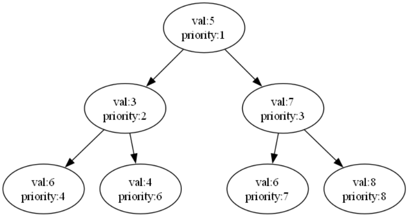
Treap

Treap，即 Tree+heap 组合而来，意思即为树堆，其中树指的就是二叉搜索树。

二叉堆

二叉堆是一棵二叉树，每个结点有一个值，每个结点的子结点的值都小于（或大于）当前结点的值

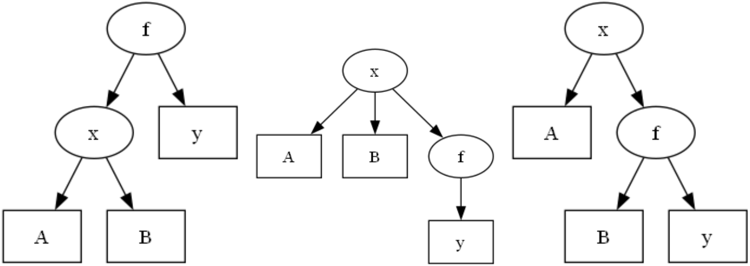
Treap 通过在二叉搜索树每个结点上加上一个随机生成 *priority*，每个结点的子结点的 *priority* 都小于（或大于）当前结点的 *priority*，来使得树平衡。



旋转

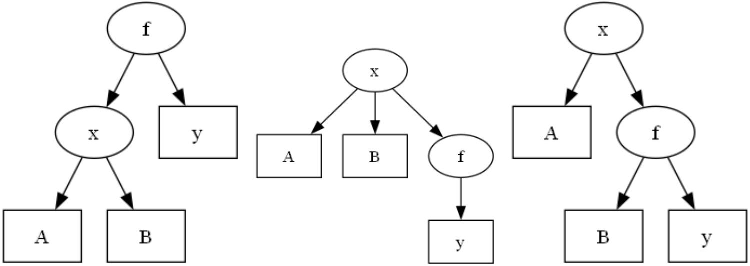
Treap 插入结点有可能破坏堆的性质。
Treap 可以通过旋转操作来维护堆的性质，这种 Treap 称为旋转 Treap。
旋转操作，指不改变 BST 的性质的前提下，调整树的结构。旋转操作有两种：左旋和右旋。旋转操作并不是 Treap 独有的，其它一些平衡树也有旋转操作。
Treap 的旋转使得 BST 满足堆的性质。
首先介绍右旋

右旋



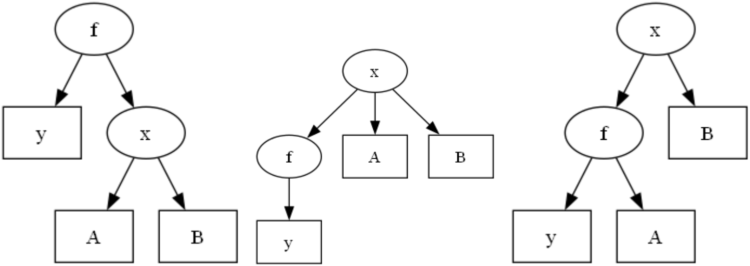
当左子树 x 的 *priority* 大于当前结点 f 的 *priority* 时，需要进行右旋，右旋后，f 成为 x 的右子树，满足了对的性质。
由 BST 的性质可知，$A < x < B < f < y$，A, B, y 代表的是 A, B, y 结点及其子树。
我们先将 x 作为根结点，得到图 2，但此时 x 有 3 个子结点，而 f 只有一个子结点，所以考虑将 B 子树移动成为 f 的左子树。

右旋




```
void rightRotate(Node *&cur) {
    Node *tmp = cur->leftSon; // x
    cur->leftSon = tmp->rightSon; // 移动 B 子树
    tmp->rightSon = cur; // 移动 f
    cur->update(), tmp->update(); // 更新
    cur = tmp; // 将根改成 tmp(x结点)
}
```

左旋




```
void leftRotate(Node *&cur) {
    Node *tmp = cur->rightSon;
    cur->rightSon = tmp->leftSon;
    tmp->leftSon = cur;
    cur->update(), tmp->update();
    cur = tmp;
}
```

插入

满足堆的性质，具体来说，新建结点后，假如子结点大于当前结点的 *priority*，则将其旋转，通过一层层的递归，将其旋转到合适的位置。相比于普通 BST 的插入，代码只多了两个 if 语句。

```
void insert(Node *&cur, Type val) {
    if (!cur) {
        cur = new Node(val);
        return;
    }
    if (cur->val == val) {
        cur->cnt++;
    } else if (cmp(val, cur->val)) { // val < cur->val
        insert(cur->leftSon, val);
        if (cur->leftSon->priority > cur->priority) {
            rightRotate(cur);
        }
    } else {
        insert(cur->rightSon, val);
        if (cur->rightSon->priority > cur->priority) {
            leftRotate(cur);
        }
    }
    cur->update();
}
```

删除

Treap 在删除某个结点时：

1. 假如这个结点没有子结点，直接删除即可。
2. 有一个子结点时，把当前结点改为子结点。
3. 有两个子结点时，将 *priority* 较大的结点旋转上来，此时要删除的结点成为了当前结点的子结点，递归删除。

```
bool _erase(Node *&cur, Type val) {
    if (cur == nullptr) return false;
    if (val < cur->val) {
        if (_erase(cur->leftSon, val)) {
            cur->update();
            return true;
        }
        return false;
    } else if (val > cur->val) {
        if (_erase(cur->rightSon, val)) {
            cur->update();
            return true;
        }
        return false;
    }
```

删除

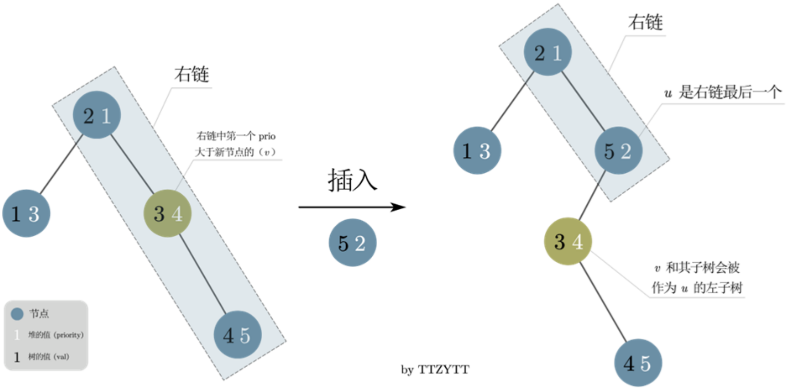
```
    if (cur->cnt > 1) {
        cur->cnt--, cur->size--;
    } else if (cur->leftSon && cur->rightSon) {
        if (cur->leftSon->priority < cur->rightSon->priority) {
            rightRotate(cur);
            _erase(cur->rightSon, val);
        } else {
            leftRotate(cur);
            _erase(cur->leftSon, val);
        }
        cur->update();
    } else if (cur->leftSon) {
        Node* tmp = cur;
        cur = tmp->leftSon;
        delete tmp;
    } else if (cur->rightSon) {
        Node* tmp = cur;
        cur = tmp->rightSon;
        delete tmp;
    } else {
        delete cur;
        cur = nullptr;
    }
    return true;
}
```

建树

由一个序列建树，我们可以直接将序列的每项一次次的插入，这样的时间复杂度为 $O(n\log n)$ 但如果这个序列有序，则我们可以由以下两种方法建树：
方法一：通过递归，每次选中间项为根，再递归建左子树和右子树，在建的时候保证 *priority* 满足堆的性质
方法二：Treap 是笛卡尔树的一种，可以用单调栈建树。

单调栈建笛卡尔树

因为我们将一个有序序列建成树，所以我们每次插入的数必定是树上最大的，所以必定在树的右链（从根结点一直向右构成的链），因为小根堆的性质，右链上的 *priority* 是有序的，所以在插入一个数时，先建立一个新结点，在右链上找到大于新结点 *priority* 的结点，用新结点替换这个结点的位置，并把这个结点设为新结点的左子树。



单调栈建笛卡尔树

显然每个数最多进出右链一次（或者说每个点在右链中存在的是一段连续的时间)。这个过程可以用栈维护，栈中维护当前笛卡尔树的右链上的结点。一个点不在右链上了就把它弹掉。这样每个点最多进出一次，复杂度 $O(n)$。

时间复杂度

前面说过，二叉搜索树的操作的时间复杂度都是取决于树的深度。

我们可以感性理解：Treap 为了解决这个问题、达到一个较为「平衡」的状态，通过维护随机的优先级满足堆性质，「打乱」了结点的插入顺序，从而让二叉搜索树达到了理想的复杂度，避免了退化成链的问题。

接下来我们开始证明时间复杂度：

首先我们规定：排名为 i 的结点称为结点 i，$A(x, y)$ 代表 x 是否 y 是的祖先，是则为 1，不是则为 0，$A(x, x) = 0$，$\Pr(x)$ 代表 x 时间发生的概率，$E(x)$ 表示 x 的期望。

单次操作 x 的时间复杂度为 x 的深度，而 x 的深度可以表示为祖先的数量：

$$dep(x) = \sum_{i=1}^{n} A(i, x)$$

时间复杂度

引理

$$A(x,y) = [priority_x = \min_{i=min(x,y)}^{max(x,y)} priority_i](x \neq y)$$

证明:
若 x 是 y 的祖先, $A(x,y) = 1$, 由小根堆的性质可知 $priority_x$ 必定是最小的，所以 $priority_x = \min_{i=min(x,y)}^{max(x,y)} priority_i$。
若 y 是 x 的祖先, $A(x,y) = 0$, 由小根堆的性质可知 $priority_y$ 必定是最小的，所以 $priority_x \neq \min_{i=min(x,y)}^{max(x,y)} priority_i$。
若 x 不是 y 的祖先，y 也不是 x 的祖先，$A(x,y) = 0$，$min(x,y) < LCA(x,y) < max(x,y)$，由小根堆的性质可知 $priority_{LCA(x,y)}$ 必定是最小的，所以 $priority_x \neq \min_{i=min(x,y)}^{max(x,y)} priority_i$。

时间复杂度

$$dep(x) = \sum_{i=1, i\neq x}^{n} [priority_i = \min_{j=min(i,x)}^{max(i,x)} priority_j]$$

$$E(dep(x)) = \sum_{i=1, i\neq x}^{n} E([priority_x = \min_{j=min(i,x)}^{max(i,x)} priority_j])$$

$$E(dep(x)) = \sum_{i=1, i\neq x}^{n} \Pr(priority_x = \min_{j=min(i,x)}^{max(i,x)} priority_j)$$

因为 *priority* 是随机生成的，所以

$$\Pr(priority_x = \min_{i=min(x,y)}^{max(x,y)} priority_i) = \frac{1}{|x-y|}$$

$$E(dep(x)) = \sum_{i=1, i\neq x}^{n} \frac{1}{|i-x|+1}$$

时间复杂度

$$
\begin{aligned}
E(dep(x)) &= \sum_{i=1}^{x-1} \frac{1}{x-i+1} + \sum_{i=x+1}^{n} \frac{1}{i-x+1} \\
&= \sum_{i=2}^{x} \frac{1}{i} + \sum_{i=2}^{n-x+1} \frac{1}{i} \\
&\leq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \\
&= 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} < 2\sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{i}\, dx \\
&= \int_{1}^{n} \frac{1}{i}\, dx = 2\ln n = O(\log n)
\end{aligned}
$$

所以 Treap 的各操作时间复杂度都为 $O(\log n)$

无旋 Treap

无旋 Treap，又称为 FHQ Treap（范浩强），它维护堆的性质的方式与旋转 Treap 不同，它不需要旋转，而是通过分裂与合并来维护堆的性质。

分裂

分裂，指将 Treap 按照值大小或排名分列成两个树。分为按值分裂和按排名分裂。分裂同样通过递归实现。

按值分裂

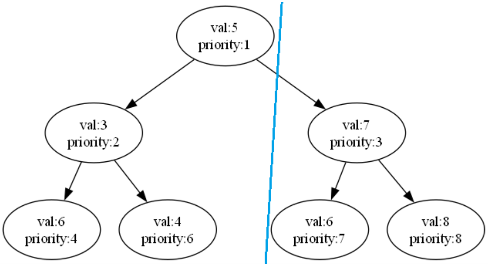


图: $val == cur \to val$

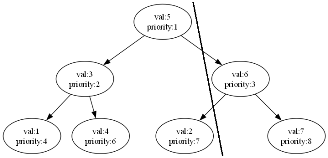


图: $val > cur \to val$

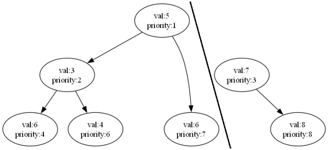


图: $val > cur \to val$

按值分裂

```cpp
std::pair<Node*, Node*> split(Node *cur, int val) {
    if (!cur) return {nullptr, nullptr};
    if (!cmp(val, cur->val)) { // cur->val<=val, cur与cur左子树为左部分
#if (__cplusplus >= 201703L) // 分裂右子树为left和right
        auto [left, right] = split(cur->rightSon, val);
#elif
        Node *left, *right;
        std::tie(left, right) = split(cur->rightSon, val);
#endif // 将cur与右子树分裂后的左半部分连接
        cur->rightSon = left;
        cur->update();
        return {cur, right};
    } else { // cur与cur右子树为右部分
#if (__cplusplus >= 201703L) // 分裂左子树为left和right
        auto [left, right] = split(cur->leftSon, val);
#elif
        Node *left, *right;
        std::tie(left, right) = split(cur->leftSon, val);
#endif // 将cur与左子树分裂后的右半部分连接
        cur->leftSon = right;
        cur->update();
        return {left, cur};
    }
}
```

按排名分裂

```
std::tuple<Node*, Node*, Node*> splitByRank(Node *cur, size_t
     rank) {
    if (cur == nullptr) return {nullptr, nullptr, nullptr};
    size_t LeftSonSize = cur->leftSon ? cur->leftSon->size : 0;
    if (rank <= LeftSonSize) {
        Node *l, *mid, *r;
        std::tie(l, mid, r) = splitByRank(cur->leftSon, rank);
        cur->leftSon = r;
        cur->update();
        return {l, mid, cur};
    } else if (rank <= LeftSonSize + cur->cnt) {
        Node *l = cur->leftSon, *r = cur->rightSon;
        cur->leftSon = cur->rightSon = nullptr;
        return {l, cur, r};
    } else {
        Node *l, *mid, *r;
        std::tie(l, mid, r) = splitByRank(cur->rightSon, rank -
            LeftSonSize - cur->cnt);
        cur->rightSon = l;
        cur->update();
        return {cur, mid, r};
    }
}
```

合并

合并也是递归实现，在合并两棵树时，将 *priority* 较小的当做根。

```
Node *merge(Node *u, Node *v) {
    if (u == nullptr && v == nullptr) return nullptr;
    if (v == nullptr) return u;
    if (u == nullptr) return v;
    if (u->priority < v->priority) {
        v->leftSon = merge(u, v->leftSon);
        v->update();
        return v;
    } else {
        u->rightSon = merge(u->rightSon, v);
        u->update();
        return u;
    }
}
```

插入

先按插入值分为三部分：权值小于插入值、权值等于插入值、权值大于插入值。在将权值等于插入值的结点处理，再将三部分合并。

```
void insert(int val) {
    Node *left, *mid, *right;
    tie(left, right) = split(root, val);
    tie(left, mid) = split(left, val - 1);
    if (mid) {
        mid->cnt++, mid->size++;
    } else {
        mid = new Node(val);
    }
    root = merge(merge(left, mid), right);
}
```

删除

先按删除值分为三部分：权值小于删除值、权值等于删除值、权值大于删除值。在将权值等于删除值的结点处理，再将三部分合并。

```
void erase(int val) {
    Node *left, *mid, *right;
    tie(left, right) = split(root, val);
    tie(left, mid) = split(left, val - 1);
    if (mid) {
        if (mid->cnt > 1) {
            mid->cnt--, mid->size--;
        } else {
            delete mid;
            mid = nullptr;
        }
    }
    root = merge(merge(left, mid), right);
}
```

查询第 K 小

按排名 K 分裂为三部分，排名为 K 的结点的值即为答案。

```
size_t queryRank(Type val) {
    Node *l, *r;
    std::tie(l, r) = split(root, val - 1);
    size_t res = (l ? l->size : 0) + 1;
    root = merge(l, r);
    return res;
}
```

查询排名

按查询值分裂为两部分：权值小于查询值、权值大于等于查询值，左半部分大小加一即为排名。

```
Type queryKth(size_t rank) {
    if (rank > root->size) {
        throw NoSuchValueException("No so many vals in the treap");
    }
    Node *l, *mid, *r;
    std::tie(l, mid, r) = splitByRank(root, rank);
    root = merge(l, merge(mid, r));
    return mid->val;
}
```

查询前驱

按查询值减一分裂为两部分，左部分最大的为前驱。

```
Type predecessor(Type val) {
    Node *l, *r;
    std::tie(l, r) = split(root, val - 1);
    if (l == nullptr) {
        root = merge(l, r);
        throw NoSuchValueException("No lower val in the treap");
        return Type();
    }
    Node *ll, *mid, *rr;
    std::tie(ll, mid, rr) = splitByRank(l, l->size);
    root = merge(merge(ll, mid), r);
    return mid->val;
}
```

查询后继

按查询值分裂为两部分，右部分最小的为后继。

```
Type successor(Type val) {
    Node *l, *r;
    std::tie(l, r) = split(root, val);
    if (r == nullptr) {
        root = merge(l, r);
        throw NoSuchValueException("No higher val in the treap");
        return Type();
    }
    Node *ll, *mid, *rr;
    std::tie(ll, mid, rr) = splitByRank(r, 1);
    root = merge(l, merge(mid, rr));
    return mid->val;
}
```

建树

我们可以二分递归建树，建完左子树和右子树，将左子树、根、右子树合并起来就可以了。这样建树的时间复杂度是 $O(n)$ 的。证明：每个点都需要合并一次，合并的时间复杂度取决于左右子树的深度。假如这个点深度为 i，则他的子树的深度不超过 $\lceil \log n \rceil - i$，因为第 i 层有 2^{i-1} 个节点，所以总时间复杂度为：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1}(\lceil \log n \rceil - i) \\
=&\sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} (2^{i-1}\lceil \log n \rceil - 2^{i-1} \cdot i) \\
=&\sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1}\lceil \log n \rceil - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i \\
=&\lceil \log n \rceil \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^{i} - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i
\end{aligned}
$$

建树

$$
\begin{aligned}
&= \lceil \log n \rceil \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^i - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2^{\lceil \log n \rceil} - 1) - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i \\
&\leq \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - (\sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^i \cdot i - \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^{i-1} \cdot i) \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - (\sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil} 2^i \cdot i - \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^i \cdot (i+1)) \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - (2^{\lceil \log n \rceil} \cdot \lceil \log n \rceil + \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^i \cdot i - \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^i \cdot (i+1)) \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - (2^{\lceil \log n \rceil} \cdot \lceil \log n \rceil - \sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} 2^i \\
&= \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - (2^{\lceil \log n \rceil} \cdot \lceil \log n \rceil - (2^{\lceil \log n \rceil} - 1)) \\
&\leq \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - 2n \cdot \lceil \log n \rceil + 2n - 1 \\
&\leq \lceil \log n \rceil \, (2n - 1) - 2n \cdot \lceil \log n \rceil + 2n - 1 \\
&= - \lceil \log n \rceil + 2n - 1 < 2n = O(n)
\end{aligned}
$$

无旋 Treap 的区间操作

一些平衡树可以像线段树一样支持区间操作，也同样可以和线段树一样打懒标记，而且功能比线段树更多，比如可以区间翻转操作，但常数可能略高。
在维护区间操作时，树并不需要满足 BST 的性质。为了维护区间操作，平衡树往往需要将某个区间提取出来。
而无旋 Treap 通过分裂把需要操作的区间分裂出来，然后打上懒标记，合并起来。

P3391 【模板】文艺平衡树

提高 +/省选 −

【题目描述】

您需要写一种数据结构（可参考题目标题），来维护一个有序数列。

其中需要提供以下操作：翻转一个区间，例如原有序序列是 $5\ 4\ 3\ 2\ 1$，翻转区间是 $[2,4]$ 的话，结果是 $5\ 2\ 3\ 4\ 1$。

【数据范围】

对于 100% 的数据，$1 \leq n, m \leq 100000$，$1 \leq l \leq r \leq n$。

无旋 Treap

先建树，每一次操作分裂出区间，把分裂出的根上打上懒标记。
注意分裂合并的时候下传标记。

P2042 [NOI2005] 维护数列

省选/NOI−

请写一个程序，要求维护一个数列，支持以下 6 种操作：

编号	名称	格式	说明
1	插入	INSERT $posi\ tot\ c_1\ c_2 \cdots c_{tot}$	在当前数列的第 $posi$ 个数字后插入 tot 个数字：$c_1, c_2 \cdots c_{tot}$；若在数列首插入，则 $posi$ 为 0
2	删除	DELETE $posi\ tot$	从当前数列的第 $posi$ 个数字开始连续删除 tot 个数字
3	修改	MAKE-SAME $posi\ tot\ c$	从当前数列的第 $posi$ 个数字开始的连续 tot 个数字统一修改为 c
4	翻转	REVERSE $posi\ tot$	取出从当前数列的第 $posi$ 个数字开始的 tot 个数字，翻转后放入原来的位置
5	求和	GET-SUM $posi\ tot$	计算从当前数列的第 $posi$ 个数字开始的 tot 个数字的和并输出
6	求最大子列和	MAX-SUM	求出当前数列中和最大的一段子列，并输出最大和

数据规模与约定

- 对于 50% 的数据，任何时刻数列中最多含有 3×10^4 个数。
- 对于 100% 的数据，任何时刻数列中最多含有 5×10^5 个数，
任何时刻数列中任何一个数字均在 $[-10^3, 10^3]$ 内，
$1 \leq M \leq 2 \times 10^4$，插入的数字总数不超过 4×10^6。

P2042 [NOI2005] 维护数列

省选/NOI−

这道题目与文艺平衡树类似，但是操作更加的复杂，我们在处理懒标记时也要更加注意。
因为题目要求维护最大子段和，我们可以仿照线段树例题P4513 小白逛公园，对于一个区间，我们维护最大子段和，从左端点起的最大子段和，从右端点结束的最大子段和以及区间的总和。
注：

- 这题不用指针随时释放空间的话会 MLE，需要模拟内存/指针实现。
- 题面中 tot 可能为 0，不特判有可能使你的代码 RE80pts。
- 要仔细处理 update 函数。

Splay

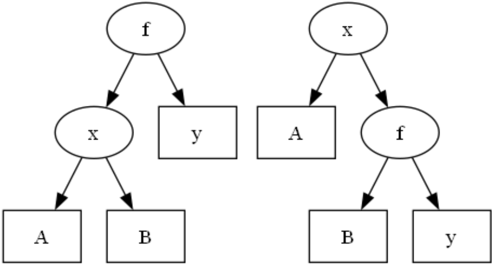
Splay（伸展）也是一种平衡树，它通过 Splay 操作使树平衡。
Splay 树由 Daniel Sleator 和 Robert Tarjan 于 1985 年发明。
Splay 树每次操作都通过 Splay 操作需要将结点旋转到根。

Splay 操作

Splay/伸展操作，指将某个结点旋转到根的操作。
Splay 操作的步骤分为 6 种，zig、zig-zig、zig-zag、zag、zag-zag、zag-zig。这里我们主要介绍前三种，因为后三种就是前三种左右对称的。

旋转

Splay 操作是基于旋转的，而 Splay 的旋转略有不同。



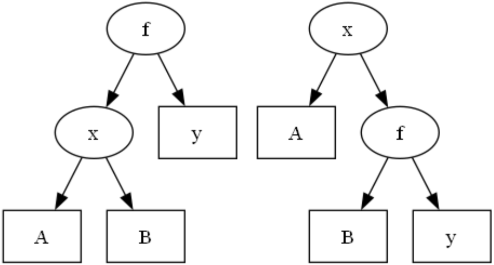
我们说旋转 x 结点，指的是将 x 旋转的其父结点，而不是将 x 的子结点旋转到 x，而且要我们还要维护父节点。

```
void rotate(Node *&cur) {
    Node *father = cur->father;
    Node *grandfather = father->father;
```

旋转

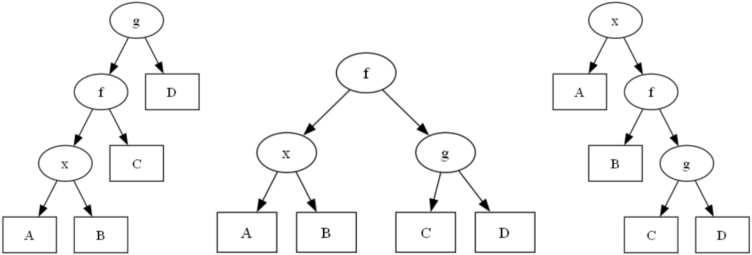
```
    if (grandfather) {
        if (father->isLeftSon()) {
            grandfather->leftSon = cur;
        } else {
            grandfather->rightSon = cur;
        }
    }
    if (cur->isLeftSon()) {
        father->leftSon = cur->rightSon;
        if (father->leftSon) {
            father->leftSon->father = father;
        }
        cur->rightSon = father;
    } else {
        father->rightSon = cur->leftSon;
        if (father->rightSon) {
            father->rightSon->father = father;
        }
        cur->leftSon = father;
    }
    cur->father = grandfather;
    father->father = cur;
    father->update();
    cur->update();
}
```

zig 操作



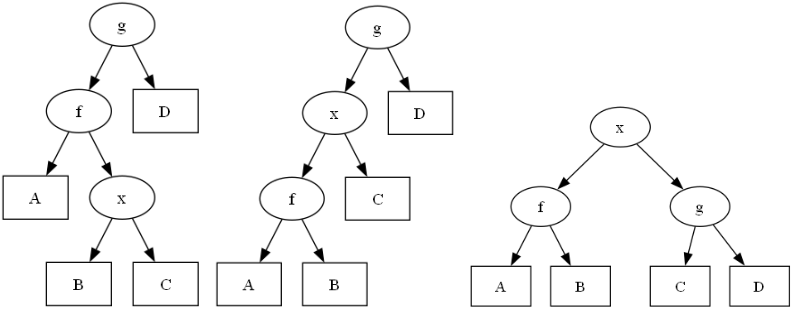
zig 和 zag 操作当且仅当在 x 的父结点 f 是树的根结点时执行，具体来说就是旋转 x 结点。

zig-zig 操作



zig-zig 和 zag-zag 操作在 f 的子结点 x 和 g 结点的子结点 f 在同侧时执行，具体来说是先旋转 f 结点，在旋转 x 结点。

zig-zag 操作



zig-zag 和 zag-zig 操作在 f 的子结点 x 和 g 结点的子结点 f 在异侧时执行，具体来说是先旋转一次 x 结点，在旋转一次 x 结点。

Splay 操作

综上所述，我们发现无论是这六种操作的哪一种最后都需要旋转 x 结点，而先旋转哪个结点，取决于 x 和 f 是否同侧。

```
Node* splay(Node *cur) {
    for (Node *fa; fa = cur->father;) {
        if (fa->father) {
            rotate(cur->isLeftSon() == fa->isLeftSon() ? fa :
                cur);
        }
        rotate(cur);
    }
    return root = cur;
}
```

插入

Splay 的插入操作只需要注意在插入后不要忘记 Splay 操作。

```
void _insert(Node *&cur, Type val, Node *father = nullptr) {
    if (!cur) {
        cur = new Node(val, father);
        if (father) father->update();
        splay(cur);
        return;
    }
    if (cur->val == val) {
        cur->cnt++;
        cur->update();
        splay(cur);
    } else if (cmp(val, cur->val)){
        _insert(cur->leftSon, val, cur);
    } else {
        _insert(cur->rightSon, val, cur);
    }
}
```

删除

首先找到 val 等于删除值的 x 结点，然后将 x 结点旋转到根，如果 x 结点的 cnt 大于 1，那么直接将 cnt 减 1 即可，但如果 $cnt = 1$，那么我们就需要合并 x 的左右子树。

合并子树

如果两棵子树都为空，合并后也为空
如果其中一个为空，返回另一个。
如果两个都不为空，将左子树的最大值旋转到左子树的根，将左子树的根的右子树设为要合并的右子树。(这里选取右子树的最小值旋转到根也是同理)

```
bool erase(Type val) {
    Node *cur = find(val);
    if (cur == nullptr) return false;
    if (cur->cnt > 1) {
        cur->cnt--;
        cur->update();
        return true;
    }
```

删除

```
    if (!cur->leftSon && !cur->rightSon) {
        delete cur;
        root = nullptr;
    } else if (!cur->leftSon) {
        root = cur->rightSon;
        root->father = nullptr;
    } else if (!cur->rightSon) {
        root = cur->leftSon;
        root->father = nullptr;
    } else {
        cur->leftSon->father = nullptr;
        splay(_predecessor());
        root->rightSon = cur->rightSon;
        if (cur->rightSon) cur->rightSon->father = root;
        delete cur;
    }
    return true;
}
```

查询排名

找到 x 结点后，将 x 旋转到根，左子树的大小加一即为排名。

```
int queryRank(Type val) {
    _insert(root, val);
    int res = root->leftSon ? root->leftSon->size + 1 : 1;
    erase(val);
    return res;
}
```

查询第 K 小

```
Type _queryKth(Node *&cur, int rank) {
    int leftSonSize = cur->leftSon ? cur->leftSon->size : 0;
    if (rank <= leftSonSize) {
        return _queryKth(cur->leftSon, rank);
    } else if (rank <= leftSonSize + cur->cnt) {
        return splay(cur)->val;
    } else if (rank <= cur->size) {
        return _queryKth(cur->rightSon, rank - leftSonSize - cur
            ->cnt);
    }
}
```

查询前驱

模版中查询前驱并不保证 x 在集合中，所以我们需要先将 x 插入到集合中，此时 x 已经在根的位置，查询左子树最大值即可，具体来说就是从左子树的根一直向右，最后到达的就是左子树中的最大值。

```
Node *_predecessor() {
    Node *cur = root->leftSon;
    if (!cur) return nullptr;
    while (cur->rightSon) {
        cur = cur->rightSon;
    }
    return splay(cur);
}
```

查询后继

查询后继与查询前驱类似，找右子树的最小值。

```
Node *_successer() {
    Node *cur = root->rightSon;
    if (!cur) return nullptr;
    while (cur->leftSon) {
        cur = cur->leftSon;
    }
    return splay(cur);
}
```

时间复杂度

Splay 树的各个操作都是基于 Splay 操作的，所以我们只需要分析 Splay 操作的时间复杂度。
Splay 操作有 6 种，但 zig 和 zag 是对称的，我们只分析 zig、zig-zig、zig-zag。
这里我们先引进势能分析法。

势能分析法

势能分析法是摊还分析的一种，借用了物理学中的概念，还分析将数据结构中的预付代价表示为“势能”，将积攒的势能释放可以支付未来操作的代价，将势能与整个数据结构相关联。
对于一个初始数据结构 D_0，此时数据结构的势能为 $\Phi(D_0)$，我们有 m 次操作，第 i 次操作后数据结构变为 D_i，此时数据结构的势能为 $\Phi(D_i)$
势能分析法将第 i 次操作的均摊成本设为:$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$，其中 c_i 为实际的代价。

势能分析法

若一共有 m 次操作，则总的均摊成本为：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i &= \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i + \sum_{i=1}^{m} \Phi(D_i) - \sum_{i=1}^{m} \Phi(D_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i + \Phi(D_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \Phi(D_i) - \sum_{i=0}^{m-1} \Phi(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i + \Phi(D_m) - \Phi(D_0)
\end{aligned}$$

总的实际的时间复杂度就是 $\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i + \Phi(D_0) - \Phi(D_m)$

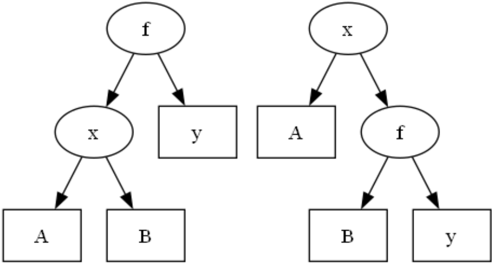
Splay

设结点 x 的势能为：$\phi(x) = \log|x|$，$|x|$ 为 x 结点的子树大小。
性质：如果 $|z| \geq |x| + |y|$，则 $2\phi(z) - \phi(x) - \phi(y) \geq 2$
证明：

$$\begin{aligned}
2\phi(z) - \phi(x) - \phi(y) &= 2\log|z| - \log|x| - \log|y| \\
&= \log\frac{|z|^2}{|x|\cdot|y|} \\
&\geq \log\frac{(|x|+|y|)^2}{|x|\cdot|y|} \\
&\geq \log\frac{|x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y|}{|x|\cdot|y|} \\
&\geq \log\frac{4|x|\cdot|y|}{|x|\cdot|y|} \geq \log 4 \geq 2
\end{aligned}$$

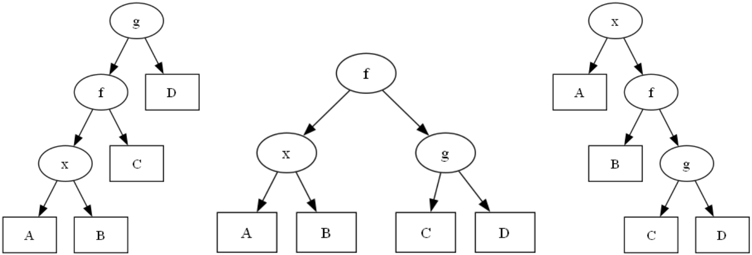
设整棵树的势能 $\Phi = \sum\phi(x)$
我们先把 Splay 操作分成各个小操作，设每个小操作的均摊成本为 $\hat{c_i} = c_i + \Phi(D') - \Phi(D)$ 我们将 $\phi'(x)$ 设为 x 移动后的势能

zig 操作



$$
\begin{aligned}
\hat{c_i'} &= 1 + \Phi(D') - \Phi(D) \\
&= 1 + \phi'(x) + \phi'(f) - \phi(x) - \phi(f) \\
&= 1 + \phi'(f) - \phi(x) \\
&\leq 1 + \phi'(x) - \phi(x)
\end{aligned}
$$

zig-zig 操作



$$\begin{aligned}\hat{c_i'} &= 2 + \Phi(D') - \Phi(D) \\ &= 2 + \phi'(x) + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f) - \phi(g) \\ &= 2 + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f)\end{aligned}$$

$$\because |x'| = |A|+|B|+|C|+|D|+3, |x| = |A|+|B|+1, |g'| = |C|+|D|+1$$

$$\because |x'| > |x| + |g'|$$

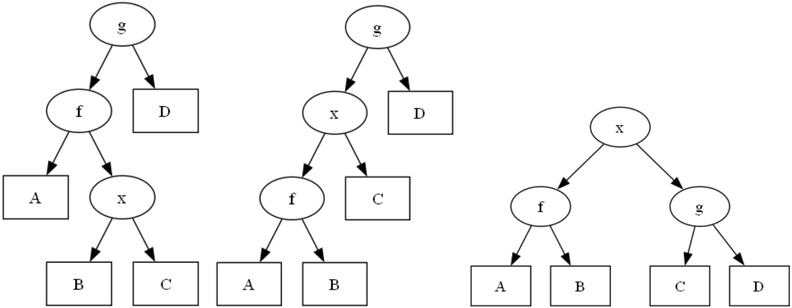
$$\therefore 2\phi'(x) - \phi(x) - \phi'(g) \geq 2$$

$$\hat{c_i'} \leq 2\phi'(x) - \phi(x) - \phi'(g) + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f)$$

zig-zig 操作

$$
\begin{aligned}
\hat{c}'_i &\le 2\phi'(x) - \phi(x) - \phi'(g) + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f) \\
&= 2\phi'(x) - 2\phi(x) + \phi'(f) - \phi(f) \\
&\le 2\phi'(x) - 2\phi(x) + \phi'(x) - \phi(x) \\
&= 3(\phi'(x) - \phi(x))
\end{aligned}
$$

zig-zag 操作



$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i' &= 2 + \Phi(D') - \Phi(D) \\
&= 2 + \phi'(x) + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f) - \phi(g) \\
&= 2 + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f)
\end{aligned}
$$

$$\because |x| = |f| + |g| + 1$$

$$\therefore |x| > |f| + |g|$$

$$\therefore 2 \leq 2\phi'(x) - \phi'(f) - \phi'(g)$$

zig-zag 操作

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &\leq 2\phi'(x) - \phi'(f) - \phi'(g) + \phi'(f) + \phi'(g) - \phi(x) - \phi(f) \\
&= 2\phi'(x) - \phi(x) - \phi(f) \\
&\leq 2\phi'(x) - \phi(x) - \phi(x) \\
&\leq 2(\phi'(x) - \phi(x)) \\
&\leq 3(\phi'(x) - \phi(x))
\end{aligned}
$$

总结

因为 zig 操作可以放缩为 $\le 3(\phi'(x)-\phi(x))+1$，但至多执行一次，其余操作均能放缩为 $\le 3(\phi'(x)-\phi(x))$。所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\hat{c_i} &= 1+\sum_{i=1}^{k}3(\phi^{(i)}(x)-\phi^{(i-1)}(x)) \\ &= 1+3\phi^{(k)}(x)-3\phi^{(0)}(x) \\ &= 1+3\phi(root)-3\phi(x) \\ &\le 1+\phi(root)\le 1+3\log n\le O(\log n)\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{c}_i = O(\log n)$$

实际时间复杂度为 $\sum_{i=1}^{m}\hat{c}_i+\Phi(D_0)-\Phi(D_m)$
若结束时 Splay 中的节点全部被删除了，此时 $\Phi(D_m)=0$
若初始时 Splay 中有 n 个节点

$$\Phi(D_0)=\sum_{i=1}^{n}\phi(i)\le\sum_{i=1}^{n}\log|i|\le\sum_{i=1}^{n}\log n=n\log n$$

总结

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i + \Phi(D_0) - \Phi(D_m) \\
\le& m \log n + n \log n - 0 \\
=& (n+m) \log n
\end{aligned}
$$

所以，Splay 树的总时间复杂度为 $O((n+m)\log n)$，每次 splay 操作和其它各的平均复杂度为 $O(\log n)$。

P2596 [ZJOI2006] 书架

省选/NOI−

第一行有两个整数，分别表示书的个数 n 以及命令条数 m。
第二行有 n 个整数，第 i 个整数表示初始时从上向下书第 i 本书的编号 p_i。
接下来 m 行，每行表示一个操作。每行初始时有一个字符串 op。

- 若 op 为 'Top'，则后有一个整数 s，表示把编号为 s 的书放在最上面。
- 若 op 为 'Bottom'，则后有一个整数 s，表示把编号为 s 的书放在最下面。
- 若 op 为 'Insert'，则后有两个整数 s, t，表示若编号为 s 的书上面有 x 本书，则放回这本书时他的上面有 $x + t$ 本书。
- 若 op 为 'Ask'，则后面有一个整数 s，表示询问编号为 s 的书上面有几本书。
- 若 op 为 'Query'，则后面有一个整数 s，询问从上面起第 s 本书的编号。

题目描述节选
小 T 的记忆力是非常好的，所以每次放书的时候至少能够将那本书放在拿出来时的位置附近，比如说她拿的时候这本书上面有 x 本书，那么放回去时这本书上面就只可能有 $x-1$、x 或 $x+1$ 本书。
数据规模与约定
对于 100% 的数据，保证：$3 \le n, m \le 8 \times 10^4$，$p_i$ 是一个 $1 \sim n$ 的排列，$1 \le s \le n$，$-1 \le t \le 1$

P2596 [ZJOI2006] 书架

Splay，支持五个操作：

1. 将某元素置顶：将元素旋到根，然后将左子树合并到该元素的后继
2. 将某元素置底：将元素旋到根，然后将右子树合并到该元素的前驱
3. 将某元素提前/滞后 1 位：直接与该元素的前驱/后继交换位置及信息
4. 询问指定元素排名：splay 基本操作
5. 询问指定排名元素：splay 基本操作

但是我们需要快速的找到编号对应的节点，就需要一个 Map 数组。操作的时候一定要仔细分析。

代码

```cpp
Node *root, *Map[100000];
int p[100000], n, m;
Node *build(int p[], int l, int r, Node *fa = nullptr) {
    if (l > r) return nullptr;
    int mid = l + r >> 1;
    Node *t = new Node(p[mid], fa);
    t->leftSon = build(p, l, mid - 1, t);
    t->rightSon = build(p, mid + 1, r, t);
    t->update();
    return Map[p[mid]] = t;
}
Node *pre() {
    Node *x = root->leftSon;
    while (x->rightSon) x = x->rightSon;
    return x;
}
Node *suc() {
    Node *x = root->rightSon;
    while (x->leftSon) x = x->leftSon;
    return x;
}
```

```cpp
void top(int s) {
    root = splay(Map[s]);
    if (!root->leftSon) return;
    if (!root->rightSon) {
        root->rightSon = root->leftSon;
        root->leftSon = nullptr;
        return;
    }
    root->rightSon->father = nullptr;
    root->rightSon = splay(suc());
    root->rightSon->father = root;
    swap(root->leftSon, root->rightSon->leftSon);
    root->rightSon->leftSon->father = root->rightSon;
    root->rightSon->update();
    root->update();
}
```

代码

```
void insert(int s, int t) {
    if (!t) return;
    root = splay(Map[s]);
    Node *x = (t == 1 ? suc() : pre());
    if (x->father) {
        if (x->isLeftSon()) {
            x->father->leftSon = root;
        } else {
            x->father->rightSon = root;
        }
    }
    swap(root->leftSon, x->leftSon);
    swap(root->rightSon, x->rightSon);
    swap(root->father, x->father);
    if (root->leftSon) root->leftSon->father = root;
    if (root->rightSon) root->rightSon->father = root;
    if (x->leftSon) x->leftSon->father = x;
    if (x->rightSon) x->rightSon->father = x;
    root = splay(root);
}
int Ask(int s) {
    root = splay(Map[s]);
    return root->leftSon ? root->leftSon->size : 0;
}
```

区间操作

由旋转的性质可知，Splay 操作并不影响树的中序遍历。
但是区间操作还需要将某段区间分离出来，Splay 怎么实现呢?
要想找到 $[l, r]$ 这段区间，我们先将 $l-1$ 通过 Splay 操作旋转到根，然后将 $r+1$ 结点通过 Splay 操作旋转到根的右儿子，此时根的右子树的左子树即为区间 $[l, r]$。
但是假如 $l=1$ 或者 $r=n$ 时，在特殊处理就不太方便，所以我们在建树的时候会加上两个“哨兵”节点，就不再需要特殊处理。

P3391 【模板】文艺平衡树

提高 +/省选 −

```
struct Node {
    ...
    void addTag() {
        tag = !tag;
        swap(leftSon, rightSon);
    }
    void pushDown() {
        if (!tag) return;
        if (leftSon) leftSon->addTag();
        if (rightSon) rightSon->addTag();
        tag = 0;
    }
};
void splay2(Node *cur) {
    for (Node *fa; fa = cur->father, cur->father != root;) {
        if (fa->father != root) {
            rotate(fa->isLeftSon() == cur->isLeftSon() ? fa :
                cur);
        }
        rotate(cur);
    }
}
```

代码

```
void print(Node *cur = root) {
    if (!cur) return;
    cur->pushDown();
    print(cur->leftSon);
    if (cur->val > 0 && cur->val <= n)
        cout << cur->val << ' ';
    print(cur->rightSon);
}
int main() {
    scanf("%d%d", &n, &m);
    root = build(0, n + 1);
    while (m--) {
        scanf("%d%d", &p, &q);
        splay(Kth(p));
        splay2(Kth(q + 2));
        root->rightSon->leftSon->addTag();
    }
    print();
    return 0;
}
```

其他题目

P3850 [TJOI2007] 书架
P1110 [ZJOI2007] 报表统计
P4008 [NOI2003] 文本编辑器
P3224 [HNOI2012] 永无乡
P2521 [HAOI2011] 防线修建
P3968 [TJOI2014] 电源插排
P3215 [HNOI2011] 括号修复 / [JSOI2011] 括号序列
P3224 [HNOI2012] 永无乡