



Rate of Convergence

收敛数列的收敛顺序(convergence order)和收敛速率(convergence rate)是表示数列接近其极限的速度的量。

一个收敛到 x^* 的数列，具有收敛顺序 q 和收敛速率 μ ，如果：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^q} = \mu$$

接下来用一个例子了解收敛速率的计算。蒙特卡洛方法的收敛速率是 $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ ，数列均值为 μ ，方差为 σ^2 。

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| \right] \rightarrow O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

证明:

使用中心极限定理可以得到，

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{N}$$

同时由于对于任何的随机变量来说， $\mathbb{E}[|Z|]^2 \leq \mathbb{E}[Z^2]$ ，

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\bar{X}_N - \mu|]^2 &= \mathbb{E} [|\bar{X}_N - \mathbb{E}[\bar{X}_N]|]^2 \leq \mathbb{E} [(\bar{X}_N - \mathbb{E}[\bar{X}_N])^2] \\ &= \text{Var}(\bar{X}_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned}$$

综上所述，

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \mu \right| \right] \leq \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

所以收敛速率是 $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ 。

Reference

[1] [Rate of convergence - WIKI](#)

[2] [CLT - StackExchange](#)