Rate of Convergence

收敛数列的收敛顺序(convergence order)和收敛速率(convergence rate)是表示数列接近其极限的速度的量。

一个收敛到x^*的数列，具有收敛顺序q和收敛速率μ，如果：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^q}=\mu$$

而在离散化方法中，收敛速度的表示方法为，

$$|x_n-L|<Cn^{-q}\text{ for all }n$$

即，$|x_n-L|=\mathcal{O}\left(n^{-q}\right)$。

接下来用一个例子了解离散方法中收敛速度的计算。蒙特卡洛方法的收敛速率是$O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$，数列均值为$\mu$，方差为$\sigma^2$。

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\right]\to O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

证明:

使用中心极限定理可以得到，

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{N}$$

同时由于对于任何的随机变量来说，$\mathbb{E}[|Z|]^2\leq\mathbb{E}\left[Z^2\right]$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\bar{X}_N-\mu\right|\right]^2&=\mathbb{E}\left[\left|\bar{X}_N-\mathbb{E}\left[\bar{X}_N\right]\right|\right]^2\leq\mathbb{E}\left[\left(\bar{X}_N-\mathbb{E}\left[\bar{X}_N\right]\right)^2\right]\\&=\operatorname{Var}\left(\bar{X}_N\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{Var}\left(X_i\right)=\frac{\sigma^2}{N}\end{aligned}$$

综上所述，

$$\mathbb{E}\left[|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i - \mu|\right] \leq \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

所以收敛速率是$O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$。

Reference

[1] Rate of convergence - WIKI

[2] CLT - StackExchange