

## **Rate of Convergence**

收敛数列的收敛顺序(convergence order)和收敛速率(convergence rate)是表示数列接近其极限的速度的量。

一个收敛到 $x^*$ 的数列,具有收敛顺序q和收敛速率 $\mu$ ,如果:

$$\lim_{n o\infty}rac{\leftert x_{n+1}-x^{st}
ightert }{\leftert x_{n}-x^{st}
ightert ^{q}}=\mu$$

而在离散化方法中,收敛速度的表示方法为,

$$|x_n - L| < C n^{-q} ext{ for all } n$$

即,
$$|x_n-L|=\mathcal{O}\left(n^{-q}
ight)$$
。

接下来用一个例子了解离散方法中收敛速度的计算。蒙特卡洛方法的收敛速率是 $O\left(rac{1}{\sqrt{N}}
ight)$ ,数列均值为 $\mu$ ,方差为 $\sigma^2$ 。

$$\mathbb{E}\left[|rac{1}{N}\sum_{i=1}^n X_i - \mu|
ight] o O\left(rac{1}{\sqrt{N}}
ight)$$

## 证明:

使用中心极限定理可以得到,

$$\mathbb{E}\left[\left(rac{1}{N}\sum_{i=1}^n X_i - \mu
ight)^2
ight] = rac{\sigma^2}{N}$$

同时由于对于任何的随机变量来说, $\mathbb{E}[|Z|]^2 \leq \mathbb{E}\left[Z^2
ight]$ ,

$$egin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|ar{X}_{N}-\mu
ight|
ight]^{2} &= \mathbb{E}\left[\left|ar{X}_{N}-\mathbb{E}\left[ar{X}_{N}
ight]
ight|
ight]^{2} \leq \mathbb{E}\left[\left(ar{X}_{N}-\mathbb{E}\left[ar{X}_{N}
ight]
ight)^{2}
ight] \ &= \operatorname{Var}\left(ar{X}_{N}
ight) = rac{1}{N^{2}}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{Var}\left(X_{i}
ight) = rac{\sigma^{2}}{N} \end{aligned}$$

综上所述,

$$\mathbb{E}\left[|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{i}-\mu|\right]\leq\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

所以收敛速率是 $O\left(rac{1}{\sqrt{N}}
ight)$ 。

## Reference

- [1] Rate of convergence WIKI
- [2] CLT StackExchange