

无穷分析引论笔记

Haocheng Xia

2022 年 1 月 12 日

目录

第一章 函数

Note. 在分析中, a, b, c 等代表常量, x, y, z 等代表变量。确定的量(常量)都只可以是一个数, 而变量包含每一个确定的量。指定变量为某个确定的值, 它就成了常量。变量包容着正数和负数、整数和分数、有理数和超越数、零和虚数等一切数。

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式。只含一个变量 z , 其余均为常量的表达式为 z 的函数,

$$a + 3z, az - 4z^2, az + b\sqrt{a^2 - z^2}, z^2$$

变量的函数本身也是一个变量。变量可以取虚数值, 因为函数也可以去任何值。例如 $\sqrt{9 - z^2}$ 。存在样子像函数的常量,

$$z^0, 1^z, \frac{a^2 - az}{a - z}$$

函数之间的基本区别是变量和常量的联合方式, 联合方式决定于运算。运算包括代数运算, 即加、减、乘、除、乘方、开方和解方程; 超越运算, 即指数运算, 对数运算以及积分学提供的运算。下面对包含多于一种运算的表达式加以分类。函数分为**代数函数**和**超越函数**。代数函数只含有代数运算, 超越函数含有超越运算。代数函数常常不能显式表出。例如 z 的函数 Z ,

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$$

代数函数又分为有理函数和无理函数。有理函数的变量不受根号作用, 无理函数反之。有理函数仅含加、减、乘、除和整数次乘方运算,

$$a + z, a - z, az, \frac{a^2 + z^2}{a + z}, az^3 - bz^5$$

而无理函数形如,

$$a + \sqrt{a^2 - z^2}, (a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}}, \frac{a^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{a + z}$$

无理函数分为显式的和隐式的。显式如上，而**隐式无理函数**是从方程中产生的，例如，

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

而有理函数可以进一步被分为整函数和分数函数。整函数分母中不含 z 且变量 z 的指数为非负整数，形如，

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \dots$$

而分数函数形如，

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \dots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \dots}$$

还可以从另一个角度考虑函数的分类，即从变量 z 的每一个值能够得到一个确定的函数值。若只得到一个确定的函数值，则为单值函数。有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数。而无理函数则是多值的，例如根号会给出两个值。超越函数有单值、多值和无穷多值的。例如弦函数有无穷多值。

$$\text{chord}(\theta) = \sqrt{(1 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = z \iff \text{chord}^{-1}(z) = \theta$$

用 P, Q, R, S, T 等表示 z 的单值函数。

可以递归地用方程来定义 n 值函数。

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \dots = 0$$

这样 Z 就是 z 的 n 值函数。其对应的 n 个值中虚数的值必为偶数个。 n 值之和等于 P ，积等于 Q ，两个两个（组合）之积的和等于 Q ，以此类推。（如 3 值函数对应值 a, b, c ， $ab + ac + bc = Q$ 且 $abc = R$ ）

如果 z 的多值函数 Z 恒有且仅有一个实数值，那么 Z 可以被视作单值函数，如 $p^{1/3}, p^{1/5}$ 。形如 $P^{m/n}$ 的函数， n 为奇数则可当作单值，反之有 0 个或 2 个实根。（ $\frac{m}{n}$ 为最简形式）

y 是 z 的函数 $\iff z$ 是 y 的函数。若 x 和 y 是 z 的函数，则若 x 和 y 互为函数。下面考虑一些特殊函数：

- 偶函数： z 取 $\pm k$ 时值相等的函数；偶函数又可分为单值偶函数和多值偶函数，即其多个值都相等。值得注意的是 z 的次数必为偶数，因此可定义偶函数为 z^2 的函数。

- 奇函数：把 z 变为 $-z$ 后，函数值变号的即为奇函数； z 的偶函数乘上 z 的奇函数，积为上 z 的奇函数；两个奇函数相乘或相除，得到偶函数；若 y 是 z 的奇函数，则 z 是 y 的奇函数；如果确定 y 为 z 的函数的方程中，各项中 y 和 z 的指数之和同偶或同奇，则 y 为 z 的奇函数。
- 相似函数： Y 与 y 之间的函数关系同于 Z 与 z 之间的函数关系，则 Y 和 Z 是相似函数。

第二章 函数变换

Note. 改变函数形式的方法包括保持原有变量，改变表达式形式，

$$2 - 3z + z^2 \rightarrow (1 - z)(2 - z)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - z} \rightarrow \sqrt{1 + z^2} + z$$

以及替换变量，也称换元，例如用 y 替换 $a - z$ ，

$$a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4 \rightarrow y^4$$

本章仅考虑不换元的**改写表达式**替换。

往往可以将整函数分解成因式，对于关于变量 z 的函数，使用 z 的最高次数来区别因式。最高次为 1 的为线性因式，形如，

$$f + gz$$

而最高次为 2 的为二次因式，形如，

$$f + gz + hz^2$$

以此类推， n 次因式是 n 个线性因式的积。

对于 z 的整函数 Z ，求出方程 $Z = 0$ 的所有根即为求出了所有线性因式。若 $z = f$ 为根，即 $z - f$ 除得尽 Z ，也即为因式。若 $z = f, g, h, \dots$ 为根，即 Z 的乘积形式为，

$$Z = (z - f)(z - g)(z - h) \dots$$

线性因式可实可虚，实根给出实因式，虚根给出虚因式，根据??若函数 Z 有虚因式，则其个数必为偶数。函数 Z 的全部虚因式之积必定为实因式，因为其等于 $\frac{Z}{P}$ ， P 为 Z 的全体实因式之积。

若 Q 是 4 个虚线性因式之积，则可表示为两个实二次因式之积。 Q 形如，

$$z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$$

证明. 假定 Q 不能表示成两个实因式的乘积, 那么一定可以表示成以下两个虚因式之积,

$$\begin{aligned} & z^2 - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1} \\ & z^2 - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1} \end{aligned}$$

由以上两个虚二次因式又可以得到以下 4 个虚线性因式,

$$\begin{aligned} I. & z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}} \\ II. & z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}} \\ III. & z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}} \\ IV. & z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

而 I、III 之积, II、IV 之积均为实。 □

由于虚线性因式个数是偶数, 而只有两个虚线性因式时, 其乘积为实二次因式, 上述证明又验证了 4 个虚线性因式时, 其可表示为两个实二次因式, 由此不妨得出猜想 (此处未严格证明): z 的整函数可以表示成实线性因式和实二次因式之积。