无穷分析引论笔记

Haocheng Xia

2022 年 1 月 4 日

目录

第一章　函数

Note. 在分析中，a，b，c 等代表常量，x，y，z 等代表变量。确定的量（常量）都只可以是一个数，而变量包含每一个确定的量。指定变量为某个确定的值，它就成了常量。变量包容着正数和负数、整数和分数、有理数和超越数、零和虚数等一切数。

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式。只含一个变量 z，其余均为常量的表达式为 z 的函数，

$$a + 3z, az - 4z^2, az + b\sqrt{a^2 - z^2}, z^2$$

变量的函数本身也是一个变量。变量可以取虚数值，因为函数也可以去任何值。例如 $\sqrt{9 - z^2}$。存在样子像函数的常量，

$$z^0, 1^z, \frac{a^2 - az}{a - z}$$

函数之间的基本区别是变量和常量的联合方式，联合方式决定于运算。运算包括代数运算，即加、减、乘、除、乘方、开方和解方程；超越运算，即指数运算，对数运算以及积分学提供的运算。下面对包含多于一种运算的表达式加以分类。函数分为**代数函数**和**超越函数**。代数函数只含有代数运算，超越函数含有超越运算。代数函数常常不能显式表出。例如 z 的函数 Z，

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$$

代数函数又分为有理函数和无理函数。有理函数的变量不受根号作用，无理函数反之。有理函数仅含加、减、乘、除和整数次乘方运算，

$$a + z, a - z, az, \frac{a^2 + z^2}{a + z}, az^3 - bz^5$$

而无理函数形如，

$$a + \sqrt{a^2 - z^2}, (a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}}, \frac{a^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{a + z}$$

无理函数分为显式的和隐式的。显式如上，而**隐式无理函数**是从方程中产生的，例如，

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

而有理函数可以进一步被分为整函数和分数函数。整函数分母中不含 z 且变量 z 的指数为非负整数，形如，

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots$$

而分数函数形如，

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \cdots}$$

还可以从另一个角度考虑函数的分类，即从变量 z 的每一个值能够得到一个确定的函数值。若只得到一个确定的函数值，则为单值函数。有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数。而无理函数则是多值的，例如根号会给出两个值。超越函数有单值、多值和无穷多值的。例如弦函数有无穷多值。

$$chord(\theta) = \sqrt{(1 - cos(\theta))^2 + sin^2(\theta)} = z \iff chord^{-1}(z) = \theta$$

用 P, Q, R, S, T 等表示 z 的单值函数。

可以递归地用方程来定义 n 值函数。

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0$$

这样 Z 就是 z 的 n 值函数。其对应的 n 个值中虚数的值必为偶数个。n 值之和等于 P，积等于 Q，两个两个（组合）之积的和等于 Q，以此类推。（如 3 值函数对应值 a, b, c，$ab + ac + bc = Q$ 且 $abc = R$）

如果 z 的多值函数 Z 恒有且仅有一个实数值，那么 Z 可以被视作单值函数，如 $p^{1/3}, p1/5$。形如 $P^{\frac{m}{n}}$ 的函数，n 为奇数则可当作单值，反之有 0 个或 2 个实根。（$\frac{m}{n}$ 为最简形式）

y 是 z 的函数 $\iff$ z 是 y 的函数。若 x 和 y 是 z 的函数，则若 x 和 y 互为函数。下面考虑一些特殊函数：

- 偶函数：z 取 $\pm k$ 时值相等的函数；偶函数又可分为单值偶函数和多值偶函数，即其多个值都相等。值得注意的是 z 的次数必为偶数，因此可定义偶函数为 z^2 的函数。

- 奇函数：把 z 变为 $-z$ 后，函数值变号的即为奇函数；z 的偶函数乘上 z 的奇函数，积为上 z 的奇函数；两个奇函数相乘或相除，得到偶函数；若 y 是 z 的奇函数，则 z 是 y 的奇函数；如果确定 y 为 z 的函数的方程中，各项中 y 和 z 的指数之和同偶或同奇，则 y 为 z 的奇函数。
- 相似函数：Y 与 y 之间的函数关系同于 Z 与 z 之间的函数关系，则 Y 和 Z 是相似函数。

第二章　函数变换