无穷分析引论笔记

Haocheng Xia

2022 年 1 月 13 日

目录

第一章　函数

Note. 在分析中，a，b，c 等代表常量，x，y，z 等代表变量。确定的量（常量）都只可以是一个数，而变量包含每一个确定的量。指定变量为某个确定的值，它就成了常量。变量包容着正数和负数、整数和分数、有理数和超越数、零和虚数等一切数。

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式。只含一个变量 z，其余均为常量的表达式为 z 的函数，

$$a+3z, az-4z^2, az+b\sqrt{a^2-z^2}, z^2$$

变量的函数本身也是一个变量。变量可以取虚数值，因为函数也可以去任何值。例如 $\sqrt{9-z^2}$。存在样子像函数的常量，

$$z^0, 1^z, \frac{a^2-az}{a-z}$$

函数之间的基本区别是变量和常量的联合方式，联合方式决定于运算。运算包括代数运算，即加、减、乘、除、乘方、开方和解方程；超越运算，即指数运算，对数运算以及积分学提供的运算。下面对包含多于一种运算的表达式加以分类。函数分为**代数函数**和**超越函数**。代数函数只含有代数运算，超越函数含有超越运算。代数函数常常不能显式表出。例如 z 的函数 Z，

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$$

代数函数又分为有理函数和无理函数。有理函数的变量不受根号作用，无理函数反之。有理函数仅含加、减、乘、除和整数次乘方运算，

$$a+z, a-z, az, \frac{a^2+z^2}{a+z}, az^3-bz^5$$

而无理函数形如，

$$a+\sqrt{a^2-z^2}, (a-2z+z^2)^{\frac{1}{3}}, \frac{a^2-z\sqrt{a^2+z^2}}{a+z}$$

无理函数分为显式的和隐式的。显式如上，而**隐式无理函数**是从方程中产生的，例如，

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

而有理函数可以进一步被分为整函数和分数函数。整函数分母中不含 z 且变量 z 的指数为非负整数，形如，

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots$$

而分数函数形如，

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \cdots}$$

还可以从另一个角度考虑函数的分类，即从变量 z 的每一个值能够得到一个确定的函数值。若只得到一个确定的函数值，则为单值函数。有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数。而无理函数则是多值的，例如根号会给出两个值。超越函数有单值、多值和无穷多值的。例如弦函数有无穷多值。

$$chord(\theta) = \sqrt{(1 - cos(\theta))^2 + sin^2(\theta)} = z \iff chord^{-1}(z) = \theta$$

用 P, Q, R, S, T 等表示 z 的单值函数。

可以递归地用方程来定义 n 值函数。

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0$$

这样 Z 就是 z 的 n 值函数。其对应的 n 个值中虚数的值必为偶数个。n 值之和等于 P，积等于 Q，两个两个（组合）之积的和等于 Q，以此类推。（如 3 值函数对应值 a, b, c，$ab + ac + bc = Q$ 且 $abc = R$）

如果 z 的多值函数 Z 恒有且仅有一个实数值，那么 Z 可以被视作单值函数，如 $p^{1/3}, p1/5$。形如 $P^{\frac{m}{n}}$ 的函数，n 为奇数则可当作单值，反之有 0 个或 2 个实根。（$\frac{m}{n}$ 为最简形式）

y 是 z 的函数 $\iff$ z 是 y 的函数。若 x 和 y 是 z 的函数，则若 x 和 y 互为函数。下面考虑一些特殊函数：

- 偶函数：z 取 $\pm k$ 时值相等的函数；偶函数又可分为单值偶函数和多值偶函数，即其多个值都相等。值得注意的是 z 的次数必为偶数，因此可定义偶函数为 z^2 的函数。

- 奇函数：把 z 变为 $-z$ 后，函数值变号的即为奇函数；z 的偶函数乘上 z 的奇函数，积为上 z 的奇函数；两个奇函数相乘或相除，得到偶函数；若 y 是 z 的奇函数，则 z 是 y 的奇函数；如果确定 y 为 z 的函数的方程中，各项中 y 和 z 的指数之和同偶或同奇，则 y 为 z 的奇函数。
- 相似函数：Y 与 y 之间的函数关系同于 Z 与 z 之间的函数关系，则 Y 和 Z 是相似函数。

第二章　函数变换

Note. 改变函数形式的方法包括保持原有变量，改变表达式形式，

$$2-3z+z^2 \to (1-z)(2-z)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z} \to \sqrt{1+z^2}+z$$

以及替换变量，也称换元，例如用 y 替换 $a-z$，

$$a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4 \to y^4$$

本章仅考虑不换元的**改写表达式**替换。

往往可以将整函数分解成因式，对于关于变量 z 的函数，使用 z 的最高次数来区别因式。最高次为 1 的为线性因式，形如，

$$f+gz$$

而最高次为 2 的为二次因式，形如，

$$f+gz+hz^2$$

以此类推，n 次因式是 n 个线性因式的积。

对于 z 的整函数 Z，求出方程 $Z=0$ 的所有根即为求出了所有线性因式。若 $z=f$ 为根，即 $z-f$ 除得尽 Z，也即为因式。若 $z=f,g,h,\cdots$ 为根，即 Z 的乘积形式为，

$$Z=(z-f)(z-g)(z-h)\cdots$$

线性因式可实可虚，实根给出实因式，虚根给出虚因式，根据**??**若函数 Z 有虚因式，则其个数必为偶数。函数 Z 的全部虚因式之积必定为实因式，因为其等于 $\frac{Z}{P}$，P 为 Z 的全体实因式之积。

若 Q 是 4 个虚线性因式之积，则可表示为两个实二次因式之积。Q 形如，

$$z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D$$

证明. 假定 Q 不能表示成两个实因式的乘积，那么一定可以表示成以下两个虚因式之积，

$$z^2-2(p+q\sqrt{-1})z+r+s\sqrt{-1}$$
$$z^2-2(p-q\sqrt{-1})z+r-s\sqrt{-1}$$

由以上两个虚二次因式又可以得到以下 4 个虚线性因式，

$$I.z-(p+q\sqrt{-1})+\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}}$$
$$II.z-(p+q\sqrt{-1})-\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}}$$
$$III.z-(p-q\sqrt{-1})+\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}}$$
$$IV.z-(p-q\sqrt{-1})-\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}}$$

而 I、III 之积，II、IV 之积均为实。 □

由于虚线性因式个数是偶数，而只有两个虚线性因式时，其乘积为实二次因式，上述证明又验证了 4 个虚线性因式时，其可表示为两个实二次因式，由此不妨得出猜想（此处未严格证明）：z 的整函数可以表示成实线性因式和实二次因式之积。

整函数的连续性，如果 z 的整函数 Z 在 $z=a$ 时取值为 A，在 $z=b$ 时取值为 B，那么对于一个在 A 和 B 之间的值 C，一定存在一个 c 使得 $z=c$ 时 $Z=C$。因此若表达式 $Z-A=0$ 和 $Z-B=0$ 各有一个实线性因式，那么对 $Z-C=0$ 也有一个实线性因式。

如果最高次式是奇数，那么函数 Z 至少有一个实线性因式，可以从虚根为偶数个出发得证。另一种证明方法如下。

证明. $z=\infty$ 时，除了最高次的 z^{2n+1} 其他项可忽略，从而 $Z-\infty$ 有因式 $z-\infty$。$z=-\infty$ 时类似。因此若 $Z=C$，且 C 在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之间时，必有实数 c 使得 $Z-C=0$。 □

进一步可以得到最高次为奇数的情况，实线性因式的个数为奇数，因为若存在偶数个实线性因式的情况下，Z 分离出这两个因式后最高次再次变为奇数，又至少有一个实线性因式。

而如果最高次为偶数，且常数 A 的符号为负，则 Z 至少有两个实线性因式，此时 Z 形如，

$$z^{2n}\pm\alpha z^{2n-1}\pm\beta z^{2n-2}\pm\cdots\pm\gamma z-A$$

证明. 令 $z=0$，$Z=-A$；令 $Z=\pm\infty$，$Z=\infty$。又 $-A<0$，一定存在实根在 $-\infty$ 到 0 上使得 $Z=0$，在 0 到 ∞ 同理。 □

在分数函数中，若分子中 z 的最高次不小于分母的，则该函数（假分数函数）可表示为一个整函数和一个新的分数函数之和。新的分数函数中，分子最高次小于分母的。

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}$$

分母是两个互质因式（即这两个因式的因式互不相同）乘积的分数函数，可分解为分别以这两个因式作为分母的两个分数函数的和。例如，

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

分母可分解为 $1+2z+2z^2$ 和 $1-2z+2z^2$。假设有，

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}=\frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2z^2}+\frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2z^2}$$

可以得到，

$$\begin{gathered}\alpha+\gamma=1\\ -2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2\\ 2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3\\ 2\beta+2\delta=-4\end{gathered}$$

从而，

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z}{1+2z+2z^2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}z}{1-2z+2z^2}$$

由于引进的未知数个数恒等于分子的项数因此一定有解。

分数函数 $\frac{M}{N}$ 可以被分解成 N 的不相同线性因式个数那么多个简分式，形如 $\frac{A}{p-qz}$。例如，

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}$$

分母 N 的每一个线性因式都对应得到一个分数函数 $\frac{M}{N}$ 分解式中的一个简分式，下面给出单个简分式的求法：

设 $p-qz$ 是 N 的一个线性因式，即

$$N=(p-qz)S$$

此处 S 是 z 的整函数，把两个因式对应的分式记作 $\frac{A}{p-qz}$ 和 $\frac{P}{S}$，有

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qz)S}$$

即

$$\frac{P}{S} = \frac{M-AS}{(p-qz)S}$$

可知 $q-qz$ 是 $M-AS$ 的因式。$z=\frac{p}{q}$ 时 $A=\frac{M}{S}$，也就是说 A 等于 $z=\frac{p}{q}$ 时，$\frac{M}{S}$ 的值。

应用实例，

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}$$

取线性因式 z，那么此时 $S=1-z^2, M=1+z^2$，可得 $A=1$。