

用到的公式

haodayizhia

2023 年 9 月 13 日

目录

1	二体问题	1
1.1	核心公式	1
1.2	推导用到的向量公式	1
1.3	能量 E 守恒	2
1.4	角动量 \vec{h} 守恒	2
1.5	近地点方向 $\vec{B} = \mu \vec{e}$	2
1.6	运动轨迹	2
1.7	活力公式	3
1.8	anomaly 转换	3
1.9	Conversion between rv and classical orbit elements	3

1 二体问题

1.1 核心公式

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (1.1)$$

1.2 推导用到的向量公式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.3)$$

1.3 能量 E 守恒

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \vec{r} &= 0 \\ \rightarrow E = \frac{v^2}{2} + (c - \frac{\mu}{r}) &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.4 角动量 \vec{h} 守恒

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (1.5)$$

1.5 近地点方向 $\vec{B} = \mu \vec{e}$

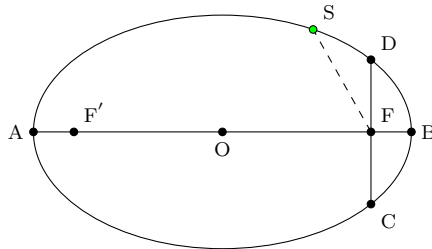
$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{B} \quad (1.6)$$

1.6 运动轨迹¹

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1.7)$$

$$r = \begin{cases} a & e = 0, \text{圆} \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} & 0 < e < 1, \text{椭圆} \\ \frac{p}{1+\cos \theta} & e = 1, \text{抛物线} \\ \frac{a(e^2-1)}{1 \pm e \cos \theta} & 1 < e, \text{双曲线} \end{cases} \quad (1.8)$$

以椭圆为例



¹不包含指向质心的直线降落

F: prime focus, 代表中心天体 F': secondary/vacant focus
 AB: major axis, 长度为 $2a$ F': focal distance, 焦距, 长度为 $2c$
 CD: latus rectum, 长度为 $2p$
 A: apoapsis(apogee/aphelion/aposelenium)
 B: periapsis(perigee/perihelion/periselenium)

1.7 活力公式

取近地点代入能量积分中

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.9)$$

1.8 anomaly 转换

θ : True anomaly(真近点角), E : Eccentric anomaly(偏近点角), M : Mean anomaly(平近点角).

$$a - r = ae \cos E \quad (1.10)$$

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E \quad (1.11)$$

1.9 Conversion between rv and classical orbit elements

rv to σ (注意 arccos)

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \frac{\mu}{r} \vec{r}|}{\mu} \\ a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad or \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{\mu r}{v^2 r - 2\mu} \\ e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

σ to rv

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} \cos(-\Omega) & \sin(-\Omega) \\ -\sin(-\Omega) & \cos(-\Omega) \end{bmatrix} \\ \vec{r} = A \begin{bmatrix} \frac{p}{1+e \cos \theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v} = A \begin{bmatrix} \frac{he \sin \theta}{p} \\ \frac{h(1+e \cos \theta)}{p} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(-i) & \sin(-i) \\ -\sin(-i) & \cos(-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \theta) & \sin(\omega + \theta) \\ -\sin(\omega + \theta) & \cos(\omega + \theta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

参考文献