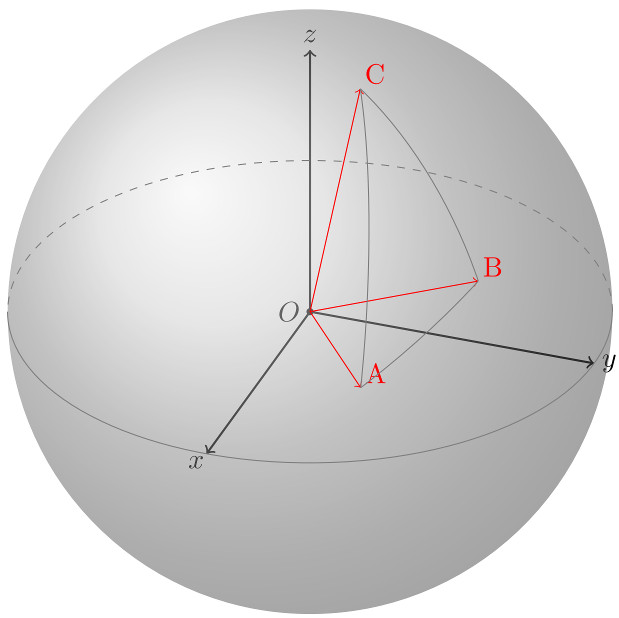
球面三角公式总结

刘天任

2023 年 9 月 18 日



边余弦公式：$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

角余弦公式：$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

正弦公式：$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

证明：已知

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos a \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos b \tag{2}$$

$$(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) = -\sin a \sin b \cos C \tag{3}$$

$$|(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})| = |\sin a \sin b \sin C| \tag{4}$$

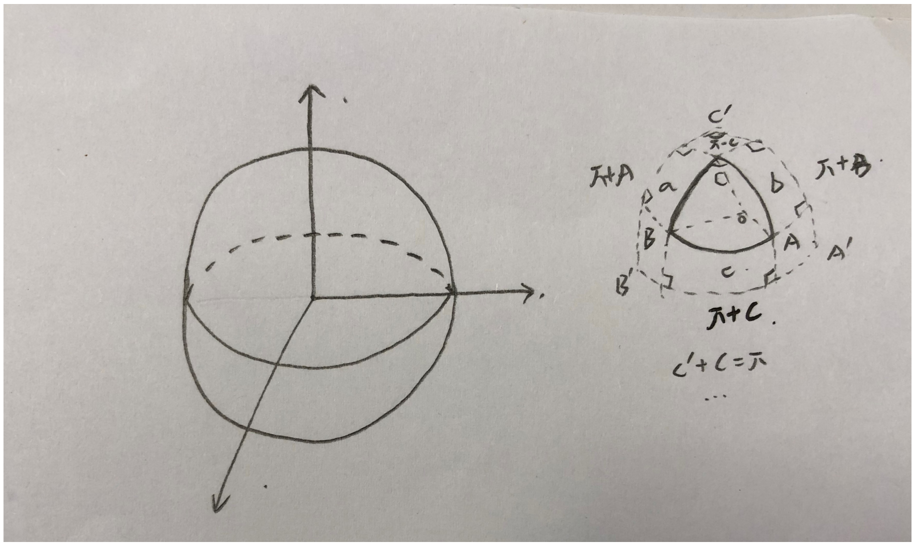


图 1: 示意图

由(3)可证边余弦公式

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\\
&=[(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OA}]\cdot\overrightarrow{OC}\\
&=\cos a\cos b-\cos c=-\sin a\sin b\cos C
\end{aligned}\tag{5}$$

进而证明角余弦公式

$$\cos(\pi-C)=\cos(\pi-A)\cos(\pi-B)-\sin(\pi-A)\sin(\pi-B)\cos(\pi-c)\tag{6}$$

利用(4)可证正弦公式