

# 用到的公式

haodayizhia

2023 年 6 月 22 日

## 目录

1 二体问题	1
1.1 核心公式	1
1.2 推导用到的向量公式	1
1.3 角动量 $\vec{h}$ 守恒	2
1.4 近地点方向 $\vec{B} = \mu \vec{e}$	2
1.5 运动轨迹	2
1.6 活力公式	2
1.7 anomaly 转换	2
1.8 Conversion between rv and classical orbit elements	3

## 1 二体问题

### 1.1 核心公式

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (1.1)$$

### 1.2 推导用到的向量公式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.3)$$

1.3 角动量  $\vec{h}$  守恒

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (1.4)$$

1.4 近地点方向  $\vec{B} = \mu \vec{e}$ 

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{B} \quad (1.5)$$

## 1.5 运动轨迹

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu \cos \theta} \quad (1.6)$$

$$r = \begin{cases} a & e = 0, \text{圆} \\ \frac{p}{1+e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} & 0 < e < 1, \text{椭圆} \\ \frac{p}{1+\cos \theta} & e = 1, \text{抛物线} \\ \frac{p}{1\pm e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{1\pm e \cos \theta} & 1 < e, \text{双曲线} \end{cases} \quad (1.7)$$

## 1.6 活力公式

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.8)$$

## 1.7 anomaly 转换

$\theta$ : True anomaly(真近点角),  $E$ : Eccentric anomaly(偏近点角),  $M$ : Mean anomaly(平近点角).

$$a - r = ae \cos E \quad (1.9)$$

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E \quad (1.10)$$

## 1.8 Conversion between rv and classical orbit elements

rv to  $\sigma$  (注意 arccos)

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{|\vec{r} \times \vec{h} - \frac{\mu}{r} \vec{r}|}{\mu} \\ a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{\mu r}{v^2 r - 2\mu} \\ e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$\sigma$  to rv

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = A \begin{bmatrix} \frac{p}{1+e \cos \theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v} = A \begin{bmatrix} \frac{he \sin \theta}{p} \\ \frac{h(1+e \cos \theta)}{p} \\ 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} \cos(-\Omega) & \sin(-\Omega) \\ -\sin(-\Omega) & \cos(-\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(-i) & \sin(-i) \\ -\sin(-i) & \cos(-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \theta) & \sin(\omega + \theta) \\ -\sin(\omega + \theta) & \cos(\omega + \theta) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

参考文献