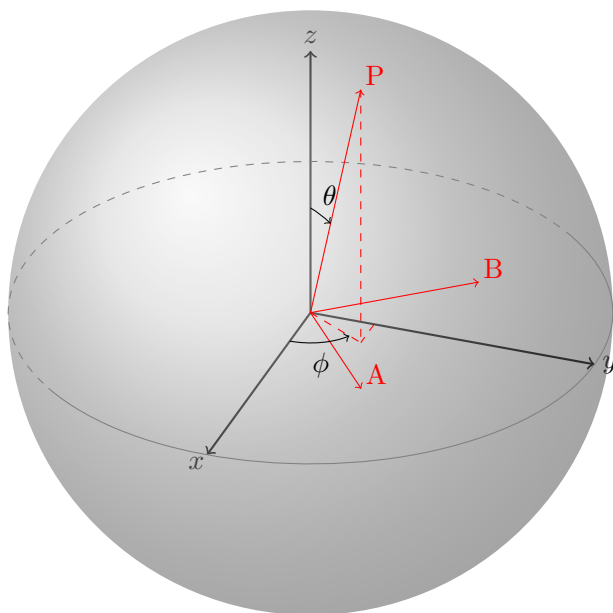


# 球面三角公式总结

刘天任

2023 年 9 月 15 日



边余弦公式:  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

角余弦公式:  $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

正弦公式:  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

证明: 已知

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \cos a \quad (1)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \cos b \quad (2)$$

$$(\vec{OC} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}) = -\sin a \sin b \cos C \quad (3)$$

$$|(\vec{OC} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})| = |\sin a \sin b \sin C| \quad (4)$$

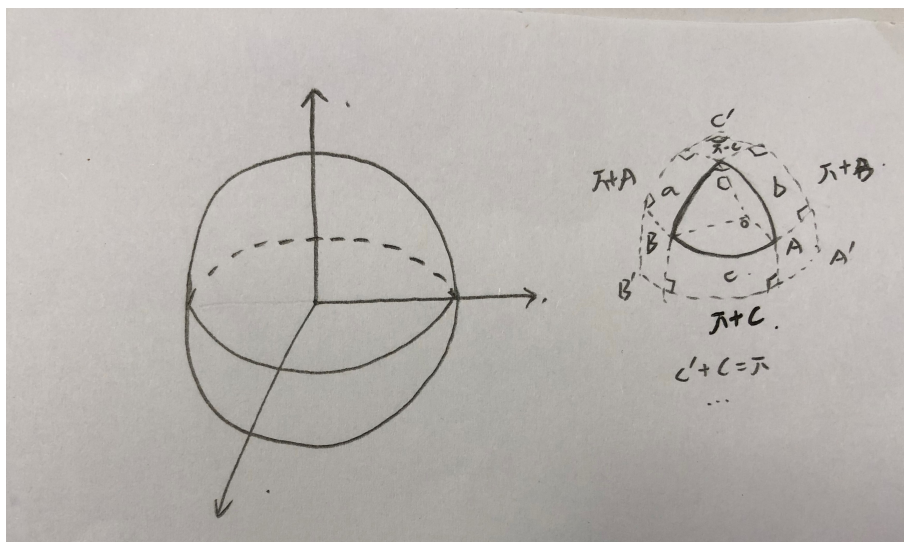


图 1: 示意图

由(3)可证边余弦公式

$$\begin{aligned}
 & (\vec{OC} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}) \\
 &= [(\vec{OC} \times \vec{OB}) \times \vec{OA}] \cdot \vec{OC} \\
 &= \cos a \cos b - \cos c = -\sin a \sin b \cos C
 \end{aligned} \tag{5}$$

进而证明角余弦公式

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A) \cos(\pi - B) - \sin(\pi - A) \sin(\pi - B) \cos(\pi - c) \tag{6}$$

利用(4)可证正弦公式