

用到的公式 [1]

haodayizhia

2023 年 10 月 9 日

目录

1	二体问题	1
1.1	核心公式	1
1.2	推导用到的向量公式	1
1.3	能量 E 守恒	1
1.4	角动量 \vec{h} 守恒	1
1.5	近地点方向 $\vec{B} = \mu \vec{e}$	2
1.6	运动轨迹	2
1.7	活力公式	2
1.8	anomaly 转换	3
1.9	Conversion between rv and classical orbit elements	3
2	定轨	4
3	解析解	4
3.1	经典摄动法	4
3.2	平均根数法	4

1 二体问题

1.1 核心公式

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (1.1)$$

1.2 推导用到的向量公式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.3)$$

1.3 能量 E 守恒

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \vec{r} &= 0 \\ \rightarrow E = \frac{v^2}{2} + (c - \frac{\mu}{r}) &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.4 角动量 \vec{h} 守恒

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (1.5)$$

1.5 近地点方向 $\vec{B} = \mu \vec{e}$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{B} \quad (1.6)$$

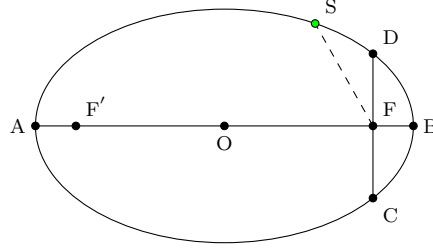
1.6 运动轨迹¹

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1.7)$$

$$r = \begin{cases} a & e = 0, \text{圆} \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} & 0 < e < 1, \text{椭圆} \\ \frac{p}{1+\cos \theta} & e = 1, \text{抛物线} \\ \frac{a(e^2-1)}{1 \pm e \cos \theta} & 1 < e, \text{双曲线} \end{cases} \quad (1.8)$$

以椭圆为例

¹不包含指向质心的直线降落



F: prime focus, 代表中心天体 F': secondary/vacant focus
 AB: major axis, 长度为 $2a$ F': focal distance, 焦距, 长度为 $2c$
 CD: latus rectum, 长度为 $2p$
 A: apoapsis(apogee/aphelion/aposelenium)
 B: periapsis(perigee/perihelion/periselenium)

1.7 活力公式

取近地点代入能量积分中

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.9)$$

1.8 anomaly 转换

θ : True anomaly(真近点角), E : Eccentric anomaly(偏近点角), M : Mean anomaly(平近点角).

$$a - r = ae \cos E \quad (1.10)$$

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E \quad (1.11)$$

1.9 Conversion between rv and classical orbit elements

rv to σ (注意 arccos)

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \frac{\mu}{r} \vec{r}|}{\mu} \\ a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad or \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{\mu r}{v^2 r - 2\mu} \\ e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \\ i = \arccos \frac{\vec{h} \cdot (0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos \frac{(0,0,1) \times \vec{h} \cdot (1,0,0)}{|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \omega = \arccos \frac{\vec{B} \cdot ((0,0,1) \times \vec{h})}{B|(0,0,1) \times \vec{h}|} \\ \theta = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{rB} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

σ to rv

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} \cos(-\Omega) & \sin(-\Omega) \\ -\sin(-\Omega) & \cos(-\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(-i) & \sin(-i) \\ -\sin(-i) & \cos(-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\omega - \theta) & \sin(-\omega - \theta) \\ -\sin(-\omega - \theta) & \cos(-\omega - \theta) \end{bmatrix} \\ \vec{r} = A \begin{bmatrix} \frac{p}{1+e \cos \theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v} = A \begin{bmatrix} \frac{he \sin \theta}{p} \\ \frac{h(1+e \cos \theta)}{p} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

2 定轨

3 解析解

3.1 经典摄动法

根据第1章, 无摄运动的解的形式为 (其中 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 为常数)

$$\vec{r} = \vec{f}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (3.14)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{g}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (3.15)$$

而受摄二体问题运动方程的一般形式:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t; \varepsilon) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (3.17)$$

利用求解常微分方程中的常数变易法, 保持(3.14)和(3.15)解的形式不变, 令 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 是与时间相关的变量, 满足

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} &= 0 \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} &= \mathbf{F}_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

3.2 平均根数法

构造根数 $\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$ 解的形式

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma(t) &= \bar{\sigma}(t) + \sigma_l^{(1)}(t) + \sigma_l^{(2)}(t) + \cdots + \sigma_s^{(1)}(t) + \sigma_s^{(2)}(t) + \cdots \\ \bar{\sigma}(t) &= \bar{\sigma}^{(0)}(t) + \sigma_1(t - t_0) + \sigma_2(t - t_0) + \cdots \\ \bar{\sigma}^{(0)}(t) &= \bar{\sigma}_0 + \delta \bar{n}(t - t_0) \\ \bar{\sigma}_0 &= \sigma_0 - [\sigma_l^{(1)}(t_0) + \sigma_l^{(2)}(t_0) + \cdots + \sigma_s^{(1)}(t_0) + \sigma_s^{(2)}(t_0) + \cdots] \end{aligned} \right. \quad (3.19)$$

其中 $\delta = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$

参考文献

- [1] R.R. Bate, D.D. Mueller, and J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1971.