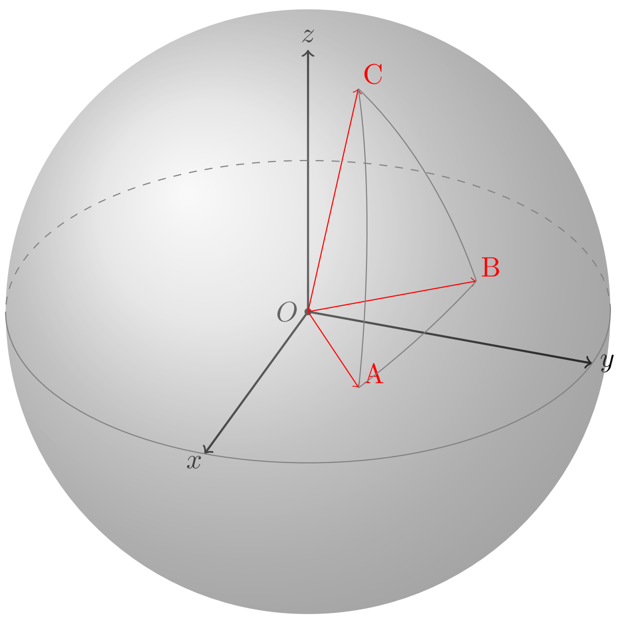
球面三角公式总结

刘天任

2023 年 9 月 20 日



边余弦公式：$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

角余弦公式：$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

正弦公式：$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

证明：已知

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos a \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos b \tag{2}$$

$$(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) = -\sin a \sin b \cos C \tag{3}$$

$$|(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})| = |\sin a \sin b \sin C| \tag{4}$$

由(3)可证边余弦公式

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) \\
&= [(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OA}] \cdot \overrightarrow{OC} \\
&= \cos a \cos b - \cos c = -\sin a \sin b \cos C
\end{aligned} \tag{5}
$$

进而证明角余弦公式

$$
\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A)\cos(\pi - B) - \sin(\pi - A)\sin(\pi - B)\cos(\pi - c) \tag{6}
$$

利用(4)可证正弦公式