用到的公式

haodayizhia

2023 年 9 月 12 日

目录

1 二体问题

1.1 核心公式

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \tag{1.1}$$

1.2 推导用到的向量公式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{1.2}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{1.3}$$

1.3 角动量 $\vec{h}$ 守恒

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{1.4}$$

1.4 近地点方向 $\vec{B} = \mu\vec{e}$

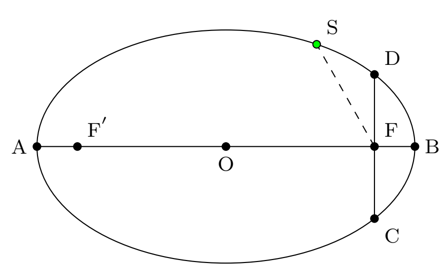
$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r}\vec{r} + \vec{B} \tag{1.5}$$

1.5 运动轨迹[1]

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + B/\mu\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{1.6}$$

$$r = \begin{cases} a & e = 0, \text{圆} \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} & 0 < e < 1, \text{椭圆} \\ \frac{p}{1+\cos\theta} & e = 1, \text{抛物线} \\ \frac{a(e^2-1)}{1\pm e\cos\theta} & 1 < e, \text{双曲线} \end{cases} \tag{1.7}$$

以椭圆为例



F: prime focus, 代表中心天体　F′: secondary/vacant focus

AB: major axis, 长度为 $2a$　F′: focal distance, 焦距, 长度为 $2c$

CD: latus rectum, 长度为 $2p$

A: apoapsis(apogee/aphelion/aposelenium)

B: periapsis(perigee/perihelion/periselenium)

[1] 不包含指向质心的直线降落

1.6 活力公式

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{1.8}$$

1.7 anomaly 转换

θ: True anomaly(真近点角), E: Eccentric anomaly(偏近点角), M: Mean anomaly(平近点角).

$$a - r = ae\cos E \tag{1.9}$$

$$M = n(t-\tau) = E - e\sin E \tag{1.10}$$

1.8 Conversion between rv and classical orbit elements

rv **to** σ(注意 arccos)

$$\begin{cases} e = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\vec{h}-\frac{\mu}{r}\vec{r}|}{\mu} \\ a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)} \\ i = \arccos\frac{\vec{h}\cdot(0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos\frac{(0,0,1)\times\vec{h}\cdot(1,0,0)}{|(0,0,1)\times\vec{h}|} \\ \omega = \arccos\frac{\vec{B}\cdot((0,0,1)\times\vec{h})}{B|(0,0,1)\times\vec{h}|} \\ \theta = \arccos\frac{\vec{r}\cdot\vec{B}}{rB} \end{cases} \quad or \begin{cases} a = -\frac{\mu r}{v^2 r - 2\mu} \\ e = \sqrt{1-\frac{h^2}{\mu a}} \\ i = \arccos\frac{\vec{h}\cdot(0,0,1)}{h} \\ \Omega = \arccos\frac{(0,0,1)\times\vec{h}\cdot(1,0,0)}{|(0,0,1)\times\vec{h}|} \\ \omega = \arccos\frac{\vec{B}\cdot((0,0,1)\times\vec{h})}{B|(0,0,1)\times\vec{h}|} \\ \theta = \arccos\frac{\vec{r}\cdot\vec{B}}{rB} \end{cases} \tag{1.11}$$

σ **to** rv

$$
\begin{cases}
A = \begin{bmatrix} \cos(-\Omega) & \sin(-\Omega) & \\ -\sin(-\Omega) & \cos(-\Omega) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(-i) & \sin(-i) \\ & -\sin(-i) & \cos(-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega+\theta) & \sin(\omega+\theta) & \\ -\sin(\omega+\theta) & \cos(\omega+\theta) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \\
\vec{r} = A \begin{bmatrix} \frac{p}{1+e\cos\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\vec{v} = A \begin{bmatrix} \frac{he\sin\theta}{p} \\ \frac{h(1+e\cos\theta)}{p} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

参考文献