

图论

李昊

图的一些概念

- **$G=(V,E)$**
- 有向图、无向图
- **顶点的度**:在无向图中, **某个顶点的度**是与它相关联的边的数目。在有向图中, 一个顶点的**出度**是以它为起始的边的数目, **入度**是以它为终止的边的数目。
- **简单路径**:顶点不重复的路径。
- **自环**:从某个顶点出发连向它自身的边。
- **环**:从某个顶点出发再回到自身的路径, 又称回路。
- **重边**:从一个顶点到另一个顶点有两条边直接相连。

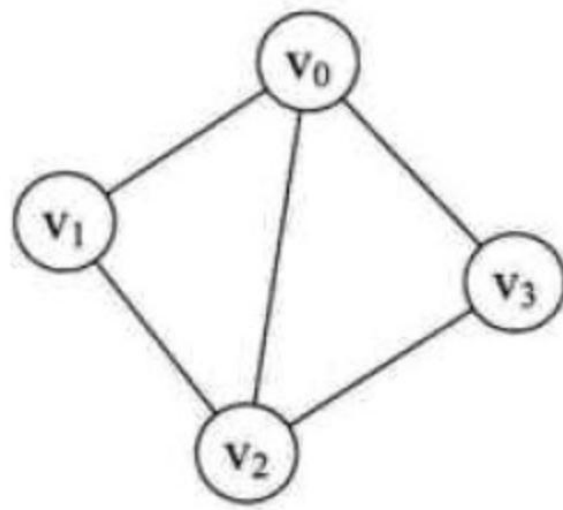
- 在无向图中, 若从顶点 u 到 v 存在路径, 那么称顶点 u 和 v 是**连通**的。 如果无向图中任意一对顶点都是连通的, 那么称此图为**连通图**。 如果一个无向图不是连通的, 则称它的一个极大连通子图为**连通分量**。 这里的极大是指顶点个数极大。
- 在有向图中, 如果每一对顶点 u 和 v , 既存在从 u 到 v 的路径, 又存在从 v 到 u 的路径, 那么称此图为**强连通图**。 对于非强连通图, 其极大强连通子图成为其**强连通分量**。
- 在有向图中, 若不考虑边的方向时图才为连通图, 那么称原有向图为**弱连通**。

- 生成树: 无向连通图 G 的一个子图如果是包含 G 的所有顶点的树, 那么就称这个子图为 G 的**生成树**。
- 我们称生成树各边权值和为该树的权。对于无向连通图来说, 权最小的生成树被成为**最小生成树**。
- 在一棵树上, 两个结点的**最近公共祖先(LCA)** 是它们的公共祖先中深度最大的那个顶点。
- 如果一个有向图无法从某个顶点出发经过若干条边回到该点, 则这个图是一个**有向无环图 (DAG)**

图的存储

邻接矩阵

$$arc[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ 或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{反之} \end{cases}$$



顶点数组:

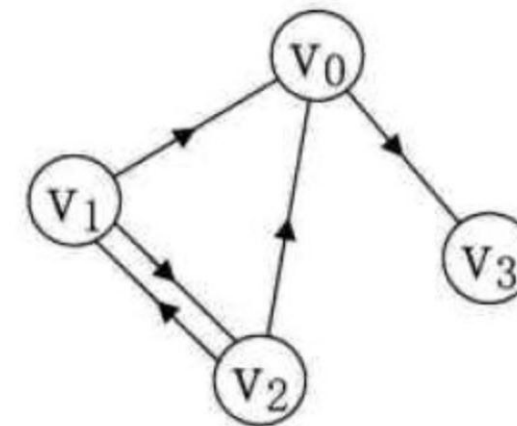
v ₀	v ₁	v ₂	v ₃
----------------	----------------	----------------	----------------

边数组:

	v ₀	v ₁	v ₂	v ₃
v ₀	0	1	1	1
v ₁	1	0	1	0
v ₂	1	1	0	1
v ₃	1	0	1	0

主对角线

v₁的度为2



顶点数组:

v ₀	v ₁	v ₂	v ₃
----------------	----------------	----------------	----------------

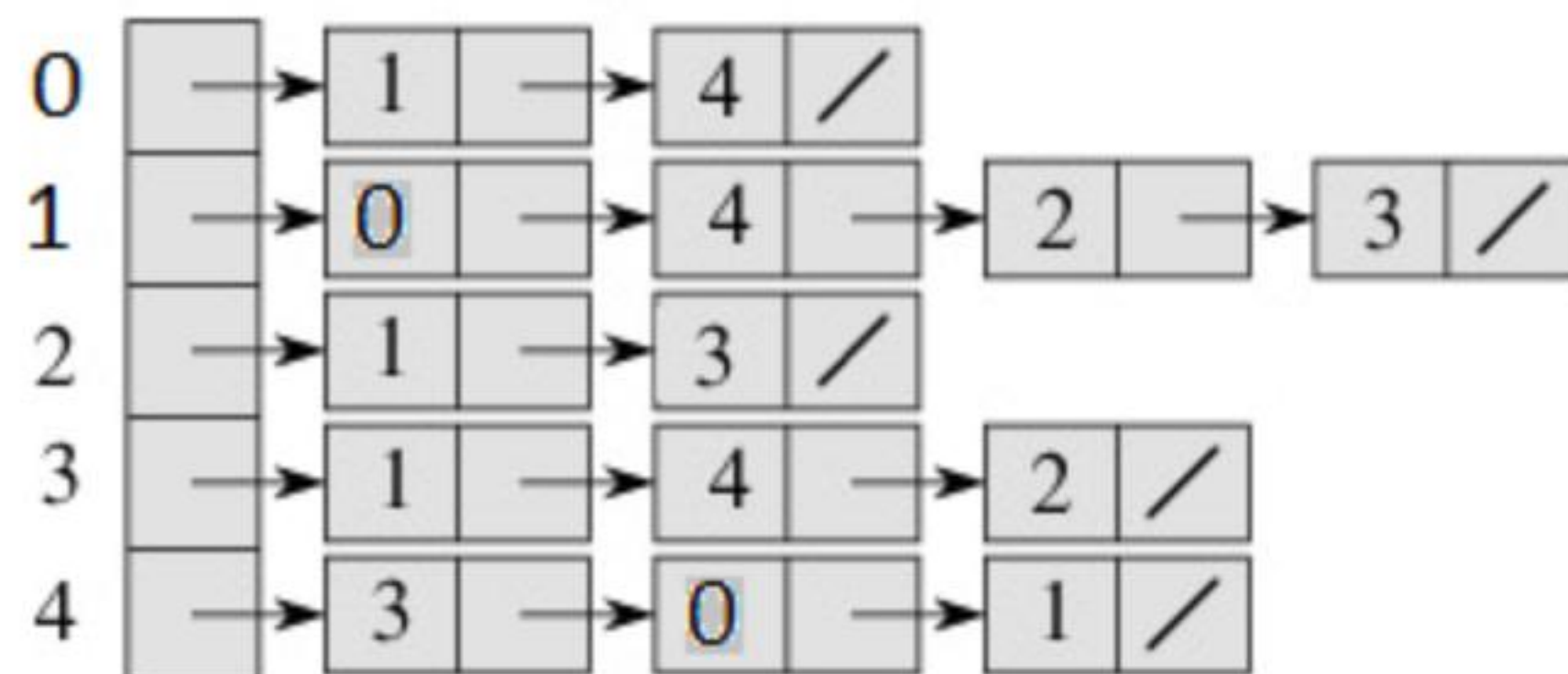
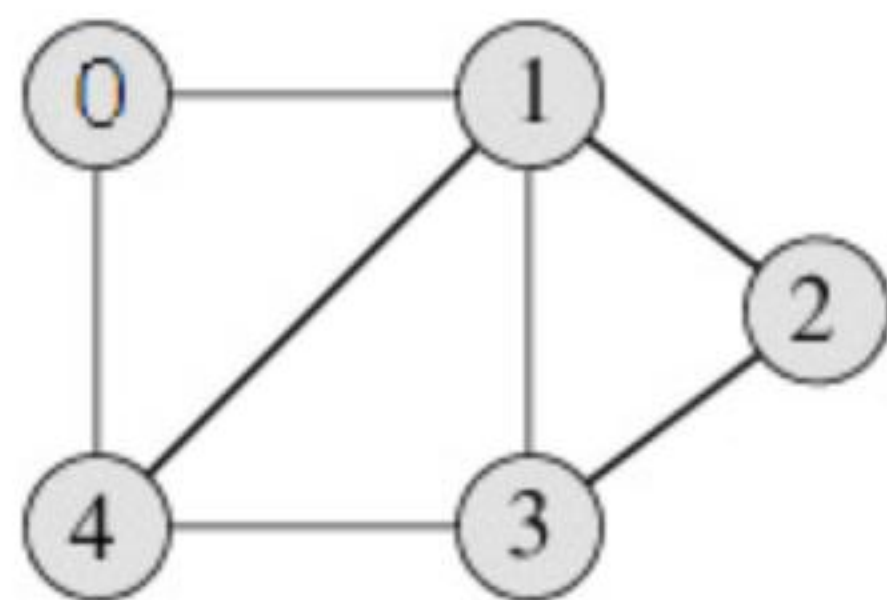
边数组:

	v ₀	v ₁	v ₂	v ₃
v ₀	0	0	0	1
v ₁	1	0	1	0
v ₂	1	1	0	0
v ₃	0	0	0	0

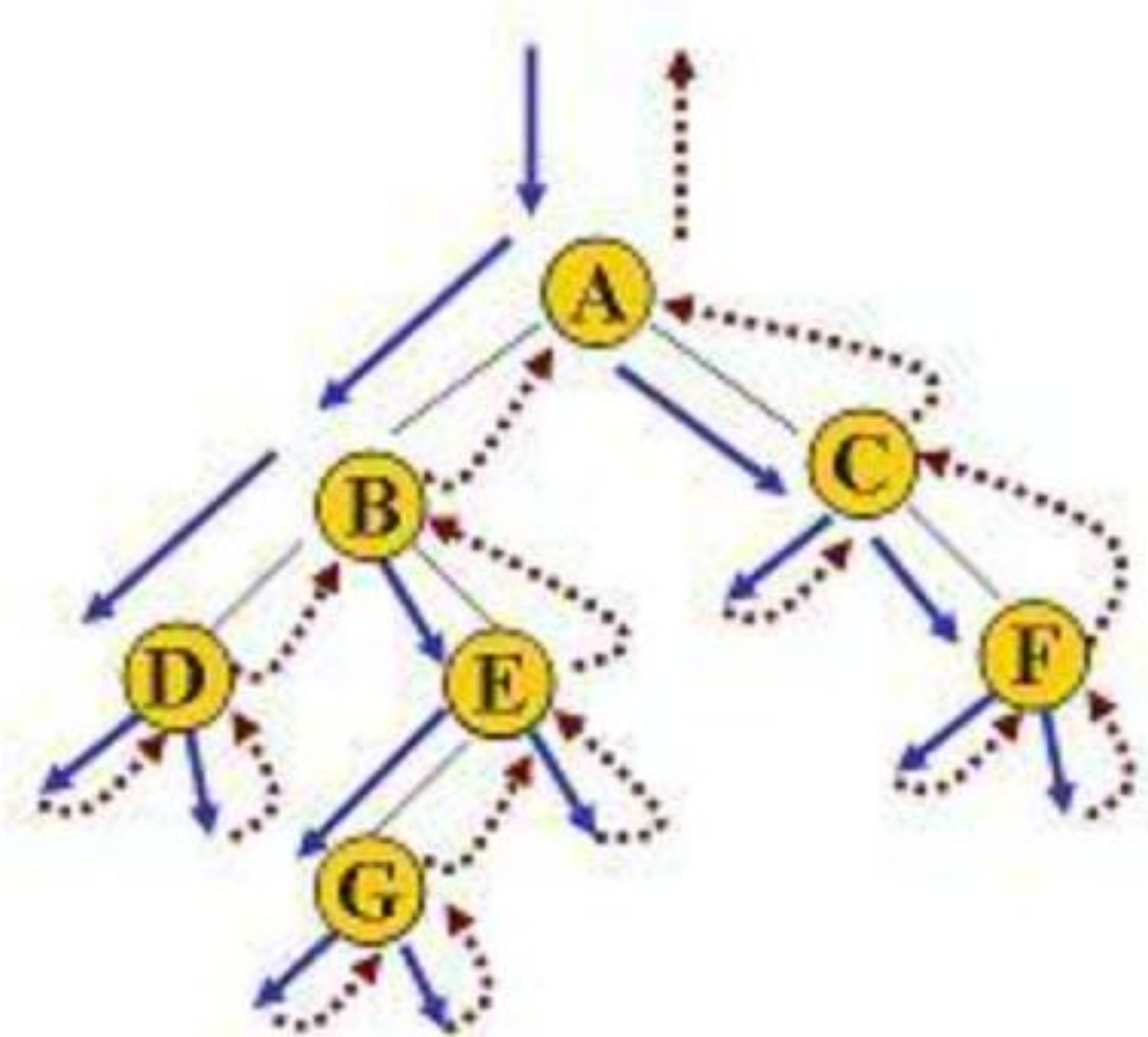
v₁的出度为2

v₁的入度为1

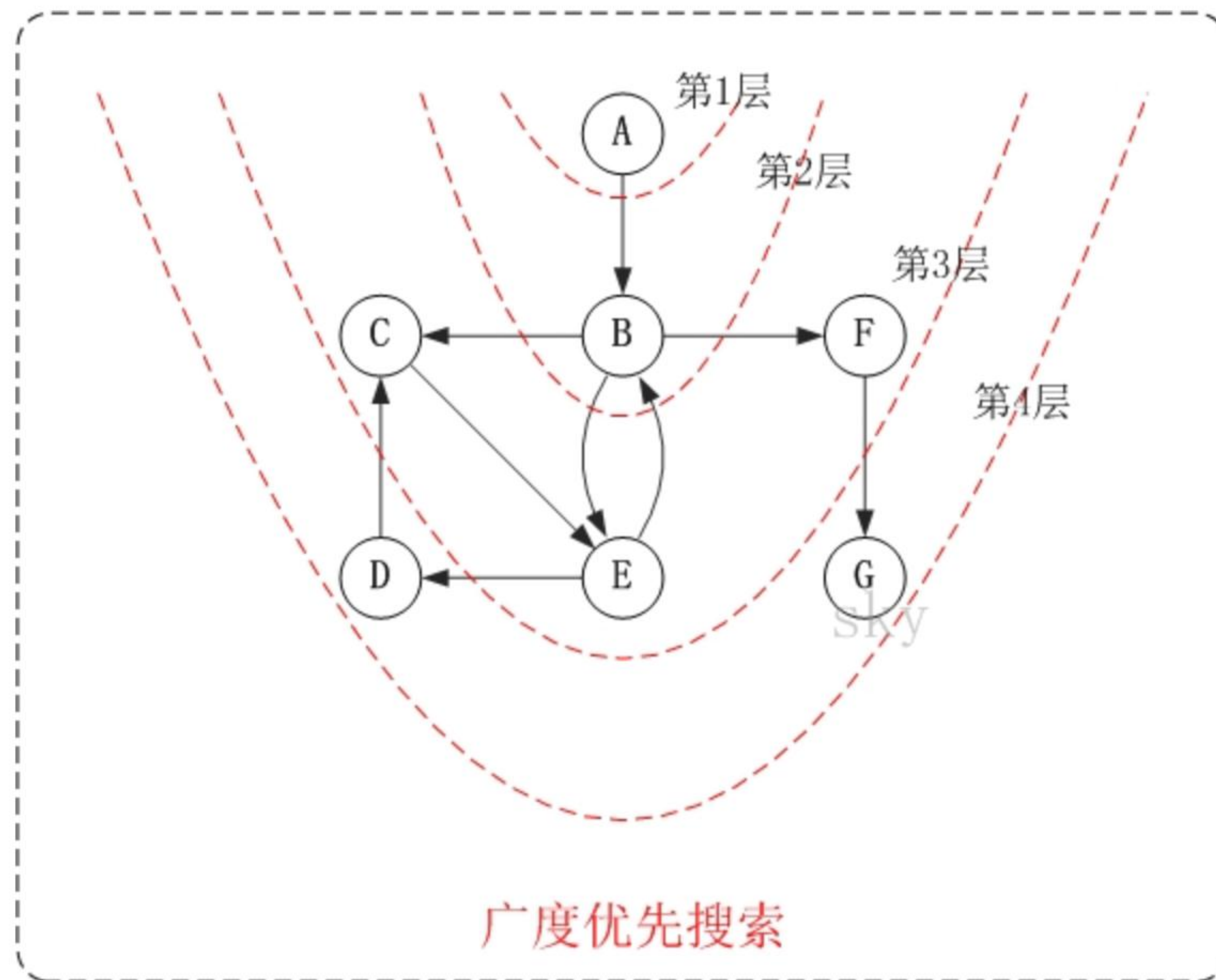
邻接表



深度优先搜索 (DFS)



广度优先搜索 (BFS)



最短路问题

单源最短路

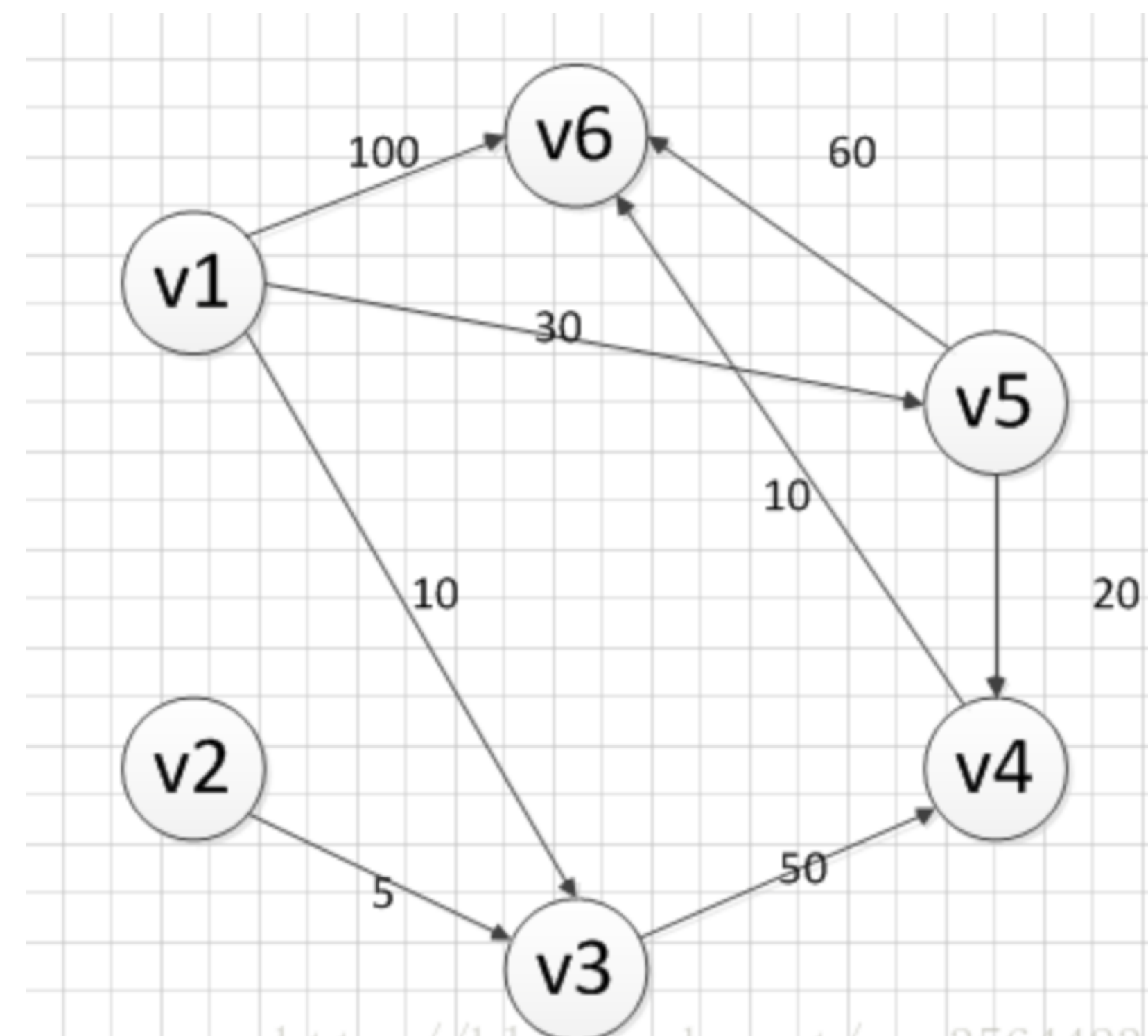
- 给定了一个边带有权值(可以为负数)的有向图(不包含负环)和一个指定的顶点 s 。要求求出从 s 到其余各点的最短路径长度。

例题

- 题目大意
 - 给定无向图，求1到n的最短路。
- 样例输入
 - 5 5
 - 1 2 20
 - 2 3 30
 - 3 4 20
 - 4 5 20
 - 1 5 100
- 样例输出
 - 90
- 链接: <http://poj.org/problem?id=2387>

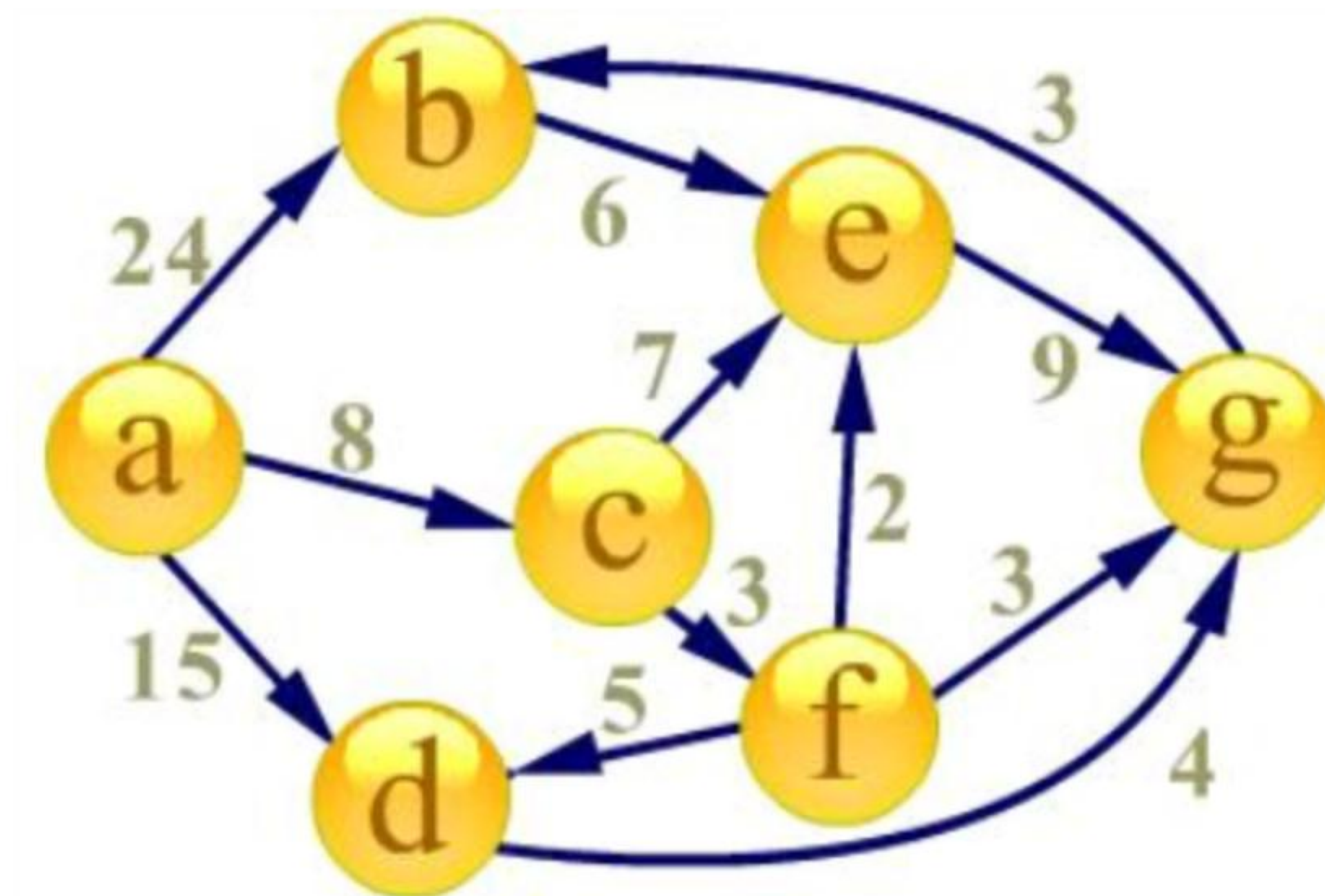
dijkstra算法

- 流程演示
- 代码演示



SPFA算法

- 流程演示
- 代码演示



多源最短路

- 给定了一个边带有权值(可以为负数)的有向图(不包含负环)。要求求出从每一个点到其余各点的最短路径长度。

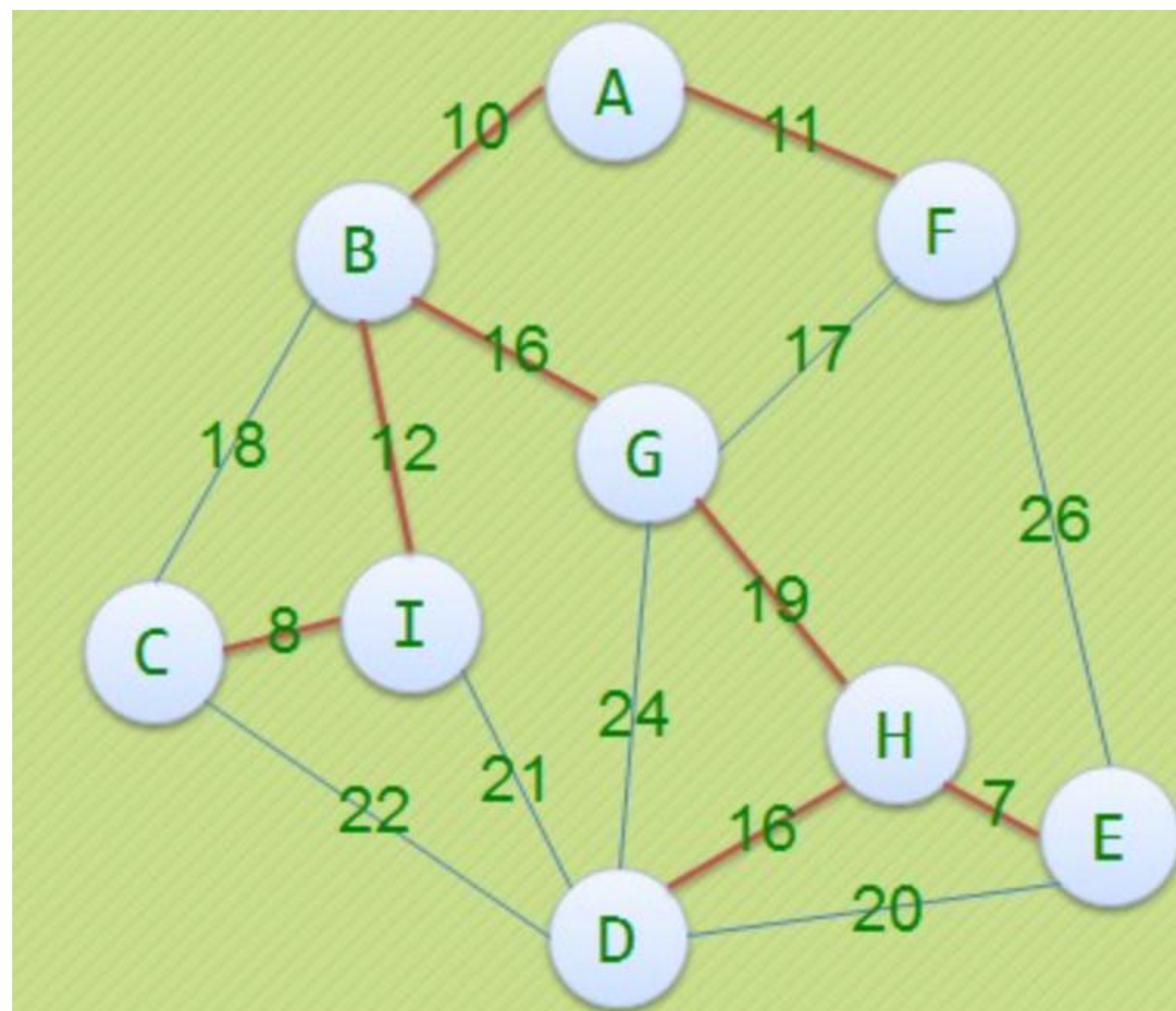
例题

- 题目大意：股票经纪人要在一群人中散布一个谣言，而谣言只能在亲密的人中传递，题目各处了人与人之间的关系及传递谣言所用的时间，要求程序给出应以那个人为起点，可以在最短的时间内让所有的人都得知这个谣言。
- 链接：<http://poj.org/problem?id=1125>

Floyd算法

- 流程演示
- 代码演示

最小生成树

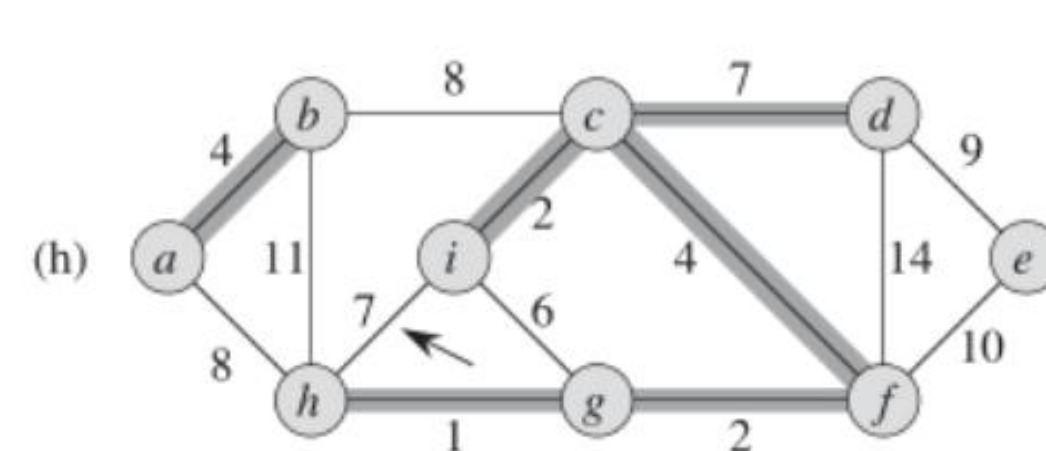
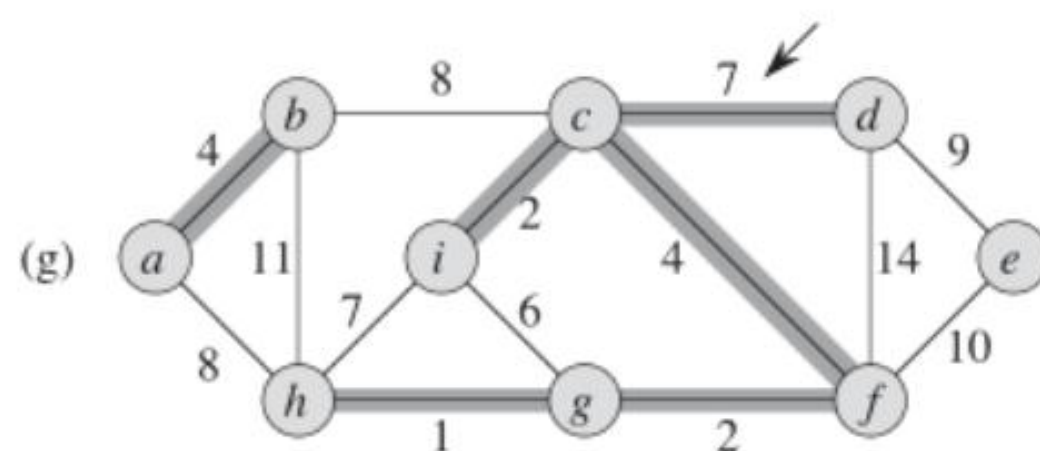
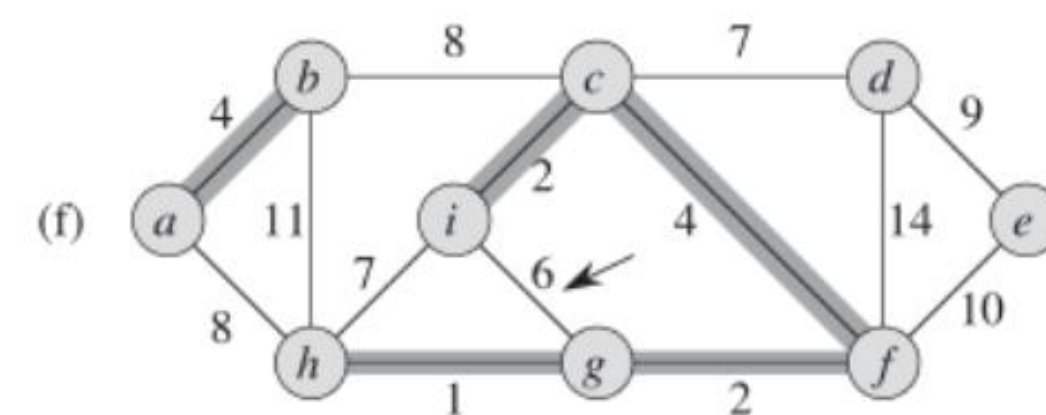
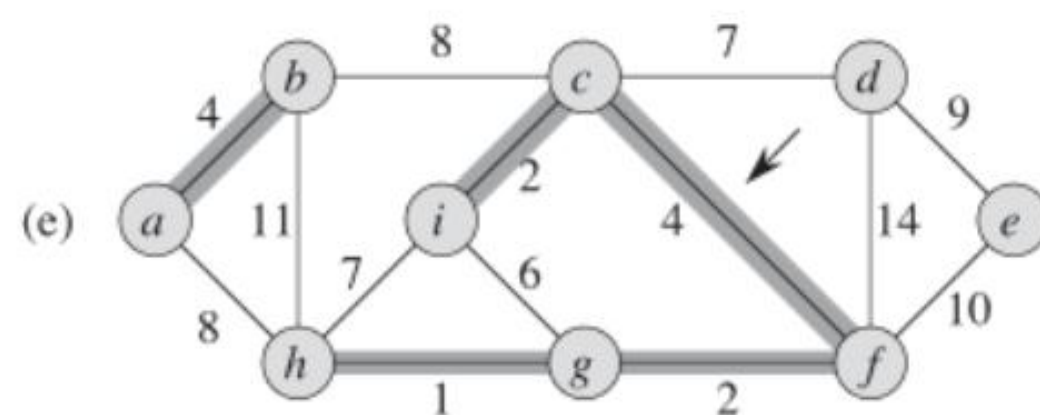
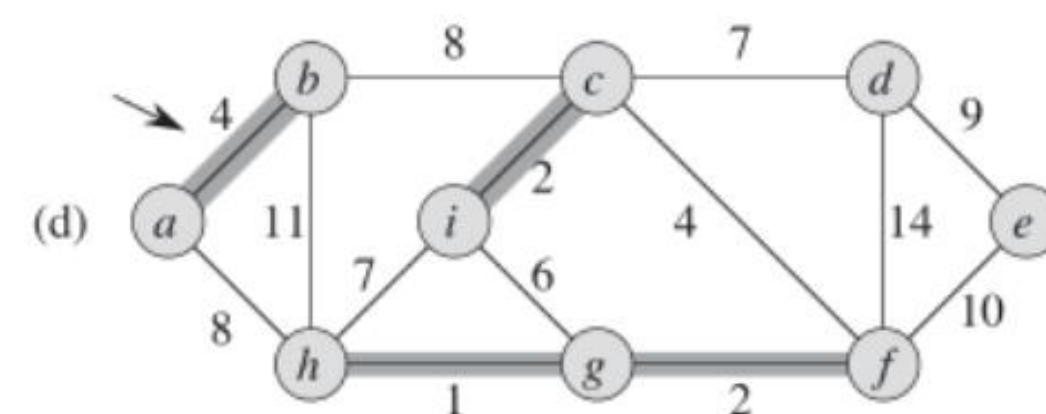
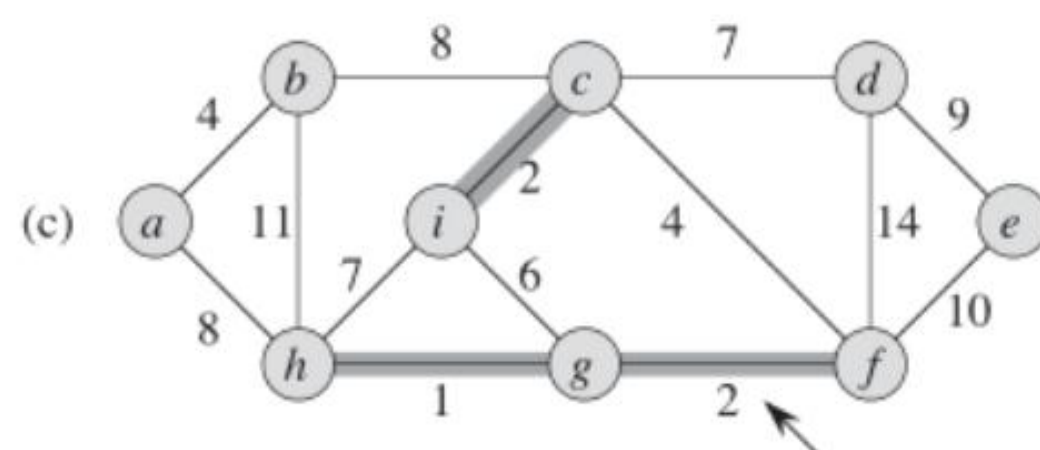
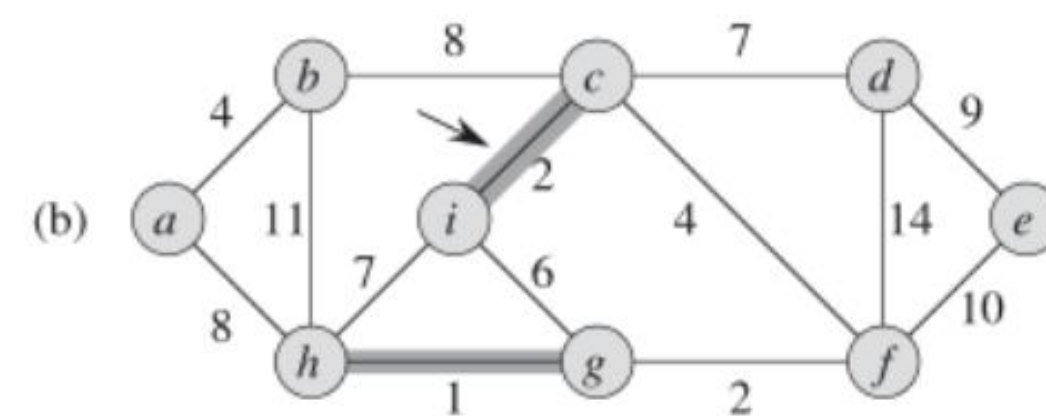
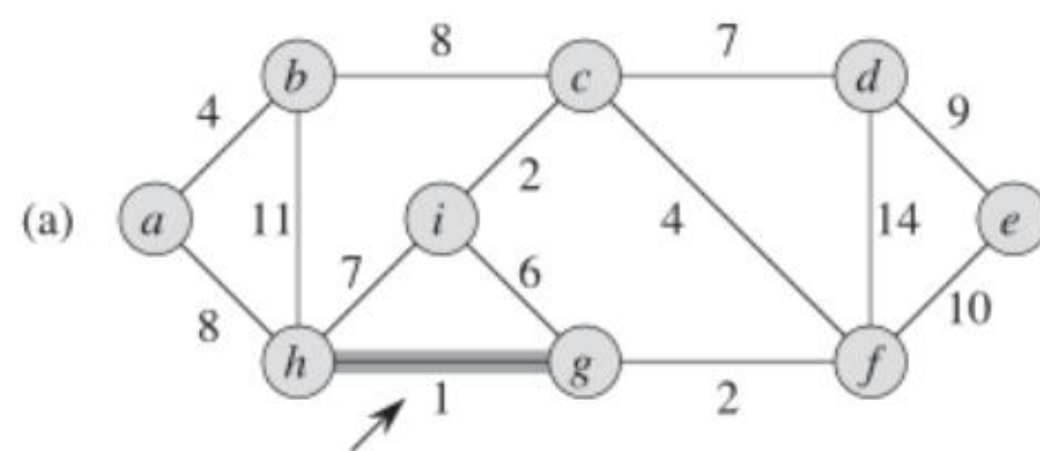


例题

- 给定图G，求最小生成树
- 链接：<http://poj.org/problem?id=1287>

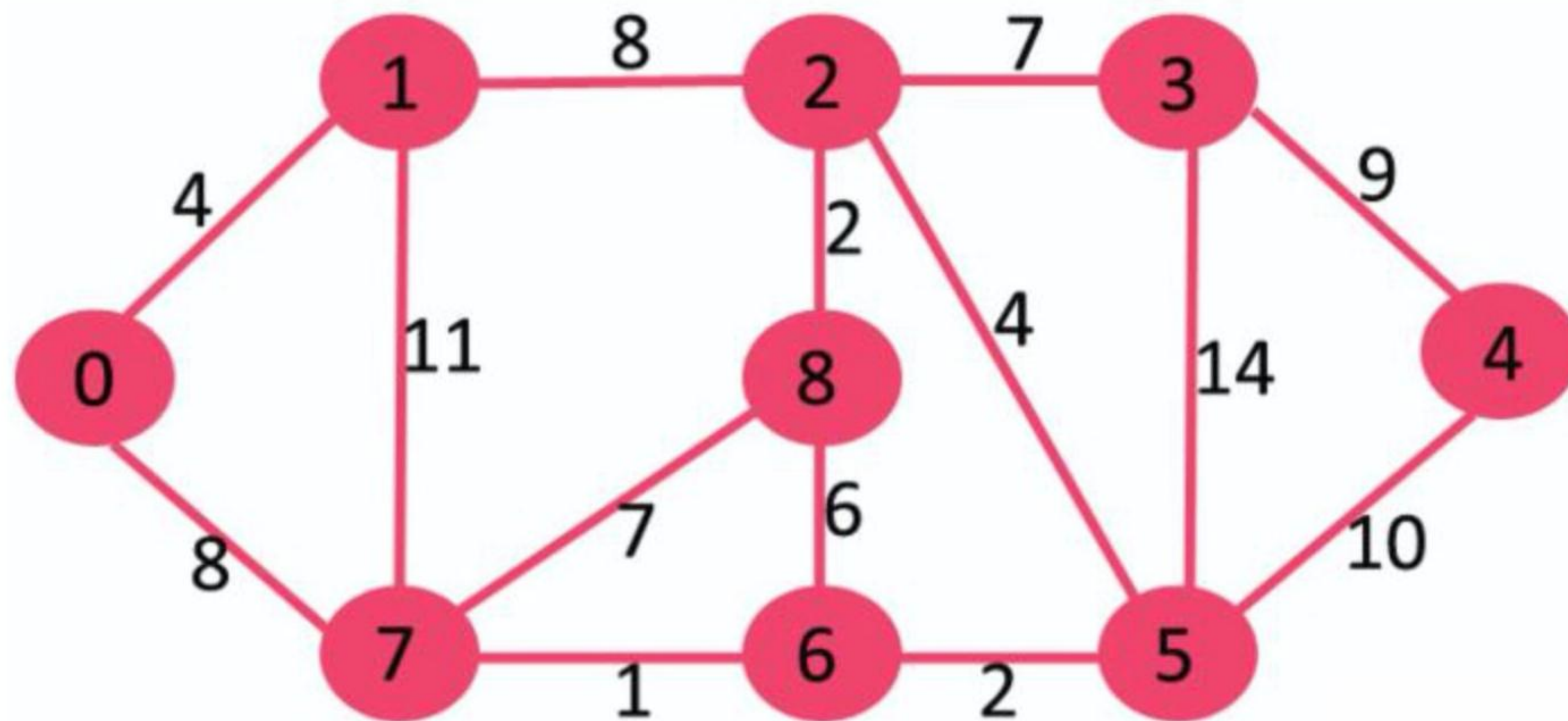
kruskal算法

- 前置技能：并查集
- 流程演示
- 代码演示



prim算法

- 流程演示
- 代码演示



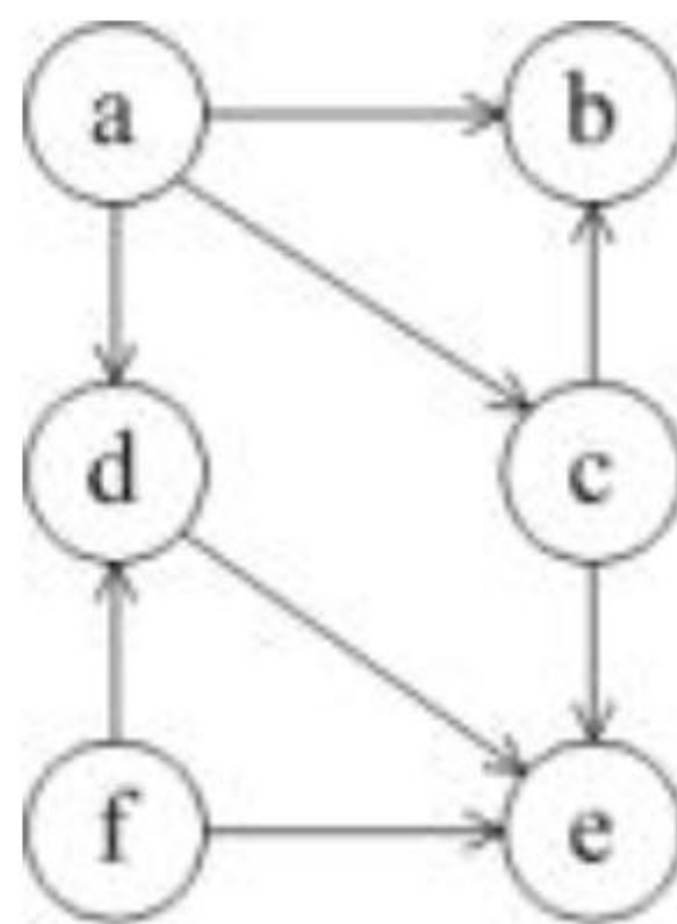
拓扑排序

例题

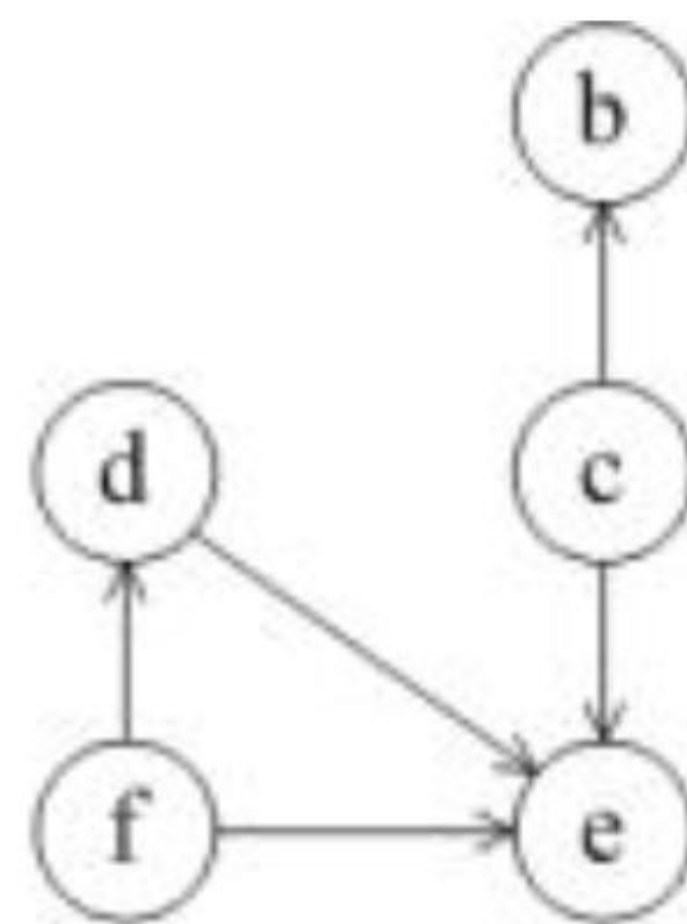
- 有N个比赛队 ($1 \leq N \leq 500$)，编号依次为1, 2, 3, ... , N进行比赛，比赛结束后，裁判委员会要将所有参赛队伍从前往后依次排名，但现在裁判委员会不能直接获得每个队的比赛成绩，只知道每场比赛的结果，即P1赢P2，用P1, P2表示，排名时P1在P2之前。现在请你编程序确定排名。
- 链接: <http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1285>

拓扑排序

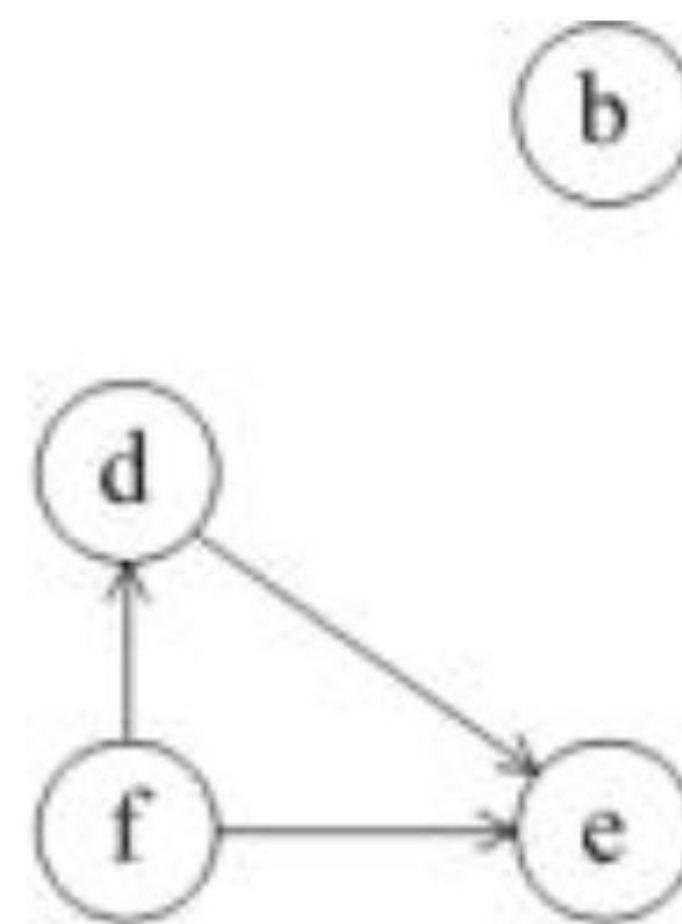
- 流程演示
- 代码演示



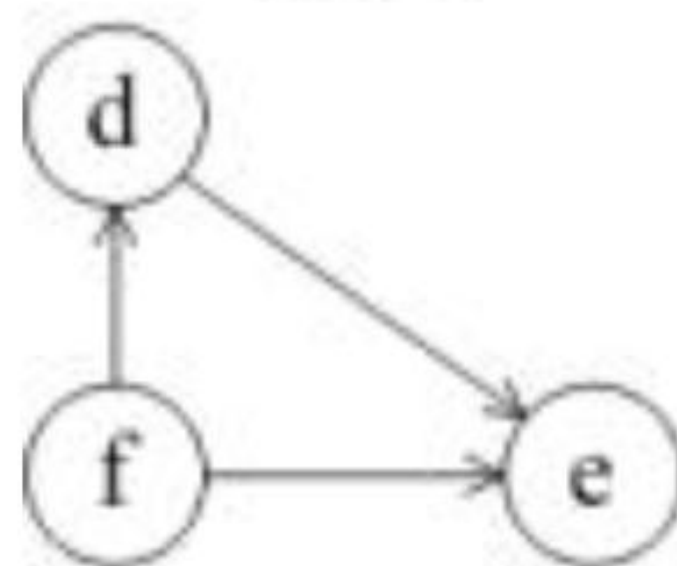
(a)图



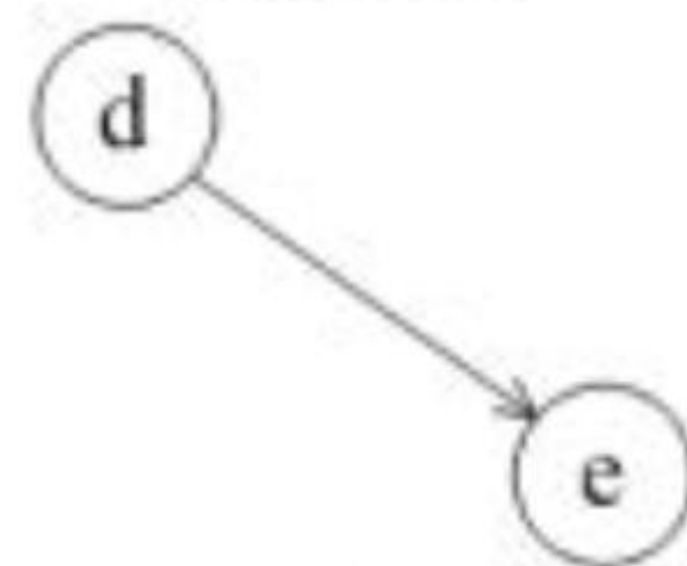
(b)输出a



(c)输出c



(d)输出b



(e)输出f



(f)输出d

(g)输出e

LCA问题

例题

- 给定树形图，给定两点，求两点的最近公共祖先。
- 链接：<http://poj.org/problem?id=1330>

树上倍增算法

- 流程演示
- 代码演示

树链剖分算法

- 流程演示
- 代码演示

LCA转RMQ问题

- ST表

最小生成树构图例题

HAOI2006 聪明的猴子

- 在一个热带雨林中生存着一群猴子，它们以树上的果子为生。昨天下了一场大雨，现在雨过天晴，但整个雨林的地表还是被大水淹没着，部分植物的树冠露在水面上。猴子不会游泳，但跳跃能力比较强，它们仍然可以在露出水面的不同树冠上来回穿梭，以找到喜欢吃的果实。
- 现在，在这个地区露出水面的有 N 棵树，假设每棵树本身的直径都很小，可以忽略不计。我们在这块区域上建立直角坐标系，则每一棵树的位置由其所对应的坐标表示(任意两棵树的坐标都不相同)。
- 在这个地区住着的猴子有 M 个，下雨时，它们都躲到了茂密高大的树冠中，没有被大水冲走。由于各个猴子的年龄不同、身体素质不同，它们跳跃的能力不同。有的猴子跳跃的距离比较远(当然也可以跳到较近的树上)，而有些猴子跳跃的距离就比较近。这些猴子非常聪明，它们通过目测就可以准确地判断出自己能否跳到对面的树上。
- 「问题」 现已知猴子的数量及每一个猴子的最大跳跃距离，还知道露出水面的每一棵树的坐标，你的任务是统计有多少个猴子可以在这个地区露出水面的所有树冠上觅食。

NOIP2013货车运输

题目描述 Description

A 国有 n 座城市，编号从 1 到 n ，城市之间有 m 条双向道路。每一条道路对车辆都有重量限制，简称限重。现在有 q 辆货车在运输货物，司机们想知道每辆车在不超过车辆限重的情况下，最多能运多重的货物。

输入描述 Input Description

第一行有两个用一个空格隔开的整数 n, m ，表示 A 国有 n 座城市和 m 条道路。

接下来 m 行每行 3 个整数 x, y, z ，每两个整数之间用一个空格隔开，表示从 x 号城市到 y 号城市有一条限重为 z 的道路。注意： x 不等于 y ，两座城市之间可能有多条道路。

接下来一行有一个整数 q ，表示有 q 辆货车需要运货。

接下来 q 行，每行两个整数 x, y ，之间用一个空格隔开，表示一辆货车需要从 x 城市运输货物到 y 城市，注意： x 不等于 y 。

数据范围及提示 Data Size & Hint

对于 30% 的数据， $0 < n < 1,000$ ， $0 < m < 10,000$ ， $0 < q < 1,000$ ；

对于 60% 的数据， $0 < n < 1,000$ ， $0 < m < 50,000$ ， $0 < q < 1,000$ ；

对于 100% 的数据， $0 < n < 10,000$ ， $0 < m < 50,000$ ， $0 < q < 30,000$ ， $0 \leq z \leq 100,000$ 。

Slim Span

- 题目大意：给定一个带权无向图，求该图的所有生成树（并不是最小生成树）中的最小的最大权值与最小权值之差。
- 链接：<http://poj.org/problem?id=3522>

Conscription

- 题目大意：有 $n+m$ 个人要征兵， n 女 m 男，征兵每人要花费10000元，第 x 个女生和第 y 个男生有关系，那么当两者任意一个已经被征兵时，另外一个就可以少花费 d 元，求安排一个征兵次序，使花费最少
- 链接： <http://poj.org/problem?id=3723>

Usaco2008 Oct 灌水

- Farmer John已经决定把水灌到他的 n ($1 \leq n \leq 300$)块农田，农田被数字1到 n 标记。把一块土地进行灌水有两种方法，从其他农田饮水，或者这块土地建造水库。建造一个水库需要花费 w_i ($1 \leq w_i \leq 100000$)，连接两块土地需要花费 P_{ij} ($1 \leq P_{ij} \leq 100000$, $P_{ij} = P_{ji}$, $P_{ii} = 0$)。计算Farmer John所需的最少代价。

次小生成树

最短路构图例题

NOIP2009最优贸易

题目描述 Description

「问题描述」

C 国有 n 个大城市和 m 条道路，每条道路连接这 n 个城市中的某两个城市。任意两个城市之间最多只有一条道路直接相连。这 m 条道路中有一部分为单向通行的道路，一部分为双向通行的道路，双向通行的道路在统计条数时也计为1 条。

C 国幅员辽阔，各地的资源分布情况各不相同，这就导致了同一种商品在不同城市的价格不一定相同。但是，同一种商品在同一个城市的买入价和卖出价始终是相同的。

商人阿龙来到 C 国旅游。当他得知同一种商品在不同城市的价格可能会不同这一信息之后，便决定在旅游的同时，利用商品在不同城市中的差价赚回一点旅费。设C 国 n 个城市的标号从1~ n ，阿龙决定从1 号城市出发，并最终在 n 号城市结束自己的旅行。在旅游的过程中，任何城市可以重复经过多次，但不要求经过所有 n 个城市。阿龙通过这样的贸易方式赚取旅费：他会选择一个经过的城市买入他最喜欢的商品——水晶球，并在之后经过的另一个城市卖出这个水晶球，用赚取的差价当做旅费。由于阿龙主要是来C 国旅游，他决定这个贸易只进行最多一次，当然，在赚不到差价的情况下他就无需进行贸易。

假设 C 国有5 个大城市，城市的编号和道路连接情况如下图，单向箭头表示这条道路为单向通行，双向箭头表示这条道路为双向通行。

假设 1~ n 号城市的水晶球价格分别为4, 3, 5, 6, 1。

阿龙可以选择如下一条线路：1->2->3->5，并在2 号城市以3 的价格买入水晶球，在3 号城市以5 的价格卖出水晶球，赚取的旅费数为2。

阿龙也可以选择如下一条线路 1->4->5->4->5，并在第1 次到达5 号城市时以1 的价格买入水晶球，在第2 次到达4 号城市时以6 的价格卖出水晶球，赚取的旅费数为5。

现在给出 n 个城市的水晶球价格， m 条道路的信息（每条道路所连接的两个城市的编号以及该条道路的通行情况）。请你告诉阿龙，他最多能赚取多少旅费。

Cow Hurdles

- 题意：奶牛们为了比赛要刻苦训练跳木桩。现在有 n 个木桩，并其中 m 对木桩之间可以跳跃，同时知道这 m 对木桩之间的高度差。问奶牛们能从木桩 u 跳到木桩 v ，最小的跳跃高度是多少？
- 链接：<http://poj.org/problem?id=3615>

Cow Contest

- 题意：给出许多牛之间的强弱关系，问可以确定多少牛的名次。
- 链接：<http://poj.org/problem?id=3660>

- 思路:用Floyd, 如果一头牛与其他 $N-1$ 头牛的关系确定, 即这头牛的名次就固定。