

# 往年题选讲

李昊

蚯蚓 (earthworm)

【问题描述】

本题中，我们将用符号  $\lfloor c \rfloor$  表示对  $c$  向下取整，例如： $\lfloor 3.0 \rfloor = \lfloor 3.1 \rfloor = \lfloor 3.9 \rfloor = 3$ 。

蛐蛐国最近蚯蚓成灾了！隔壁跳蚤国的跳蚤也拿蚯蚓们没办法，蛐蛐国王只好去请神刀手来帮他们消灭蚯蚓。

蛐蛐国里现在共有  $n$  只蚯蚓（ $n$  为正整数）。每只蚯蚓拥有长度，我们设第  $i$  只蚯蚓的长度为  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，并保证所有的长度都是非负整数（即：可能存在长度为 0 的蚯蚓）。

每一秒，神刀手会在所有的蚯蚓中，准确地找到最长的那一只（如有多个则任选一个）将其切成两半。神刀手切开蚯蚓的位置由常数  $p$ （是满足  $0 < p < 1$  的有理数）决定，设这只蚯蚓长度为  $x$ ，神刀手会将其切成两只长度分别为  $\lfloor px \rfloor$  和  $x - \lfloor px \rfloor$  的蚯蚓。特殊地，如果这两个数的其中一个等于 0，则这个长度为 0 的蚯蚓也会被保留。此外，除了刚刚产生的两只新蚯蚓，其余蚯蚓的长度都会增加  $q$ （是一个非负整常数）。

蛐蛐国王知道这样不是长久之计，因为蚯蚓不仅会越来越多，还会越来越长。蛐蛐国王决定求助于一位有着洪荒之力的神秘人物，但是救兵还需要  $m$  秒才能到来……（ $m$  为非负整数）蛐蛐国王希望知道这  $m$  秒内的战况。

具体来说，他希望知道：

- $m$  秒内，每一秒被切断的蚯蚓被切断前的长度（有  $m$  个数）；
- $m$  秒后，所有蚯蚓的长度（有  $n + m$  个数）。

蛐蛐国王当然知道怎么做啦！但是他想考考你……

【子任务】

- 测试点 1~3 满足  $m = 0$ 。
- 测试点 4~7 满足  $n, m \leq 1,000$ 。
- 测试点 8~14 满足  $q = 0$ ，其中测试点 8~9 还满足  $m \leq 10^5$ 。
- 测试点 15~18 满足  $m \leq 3 \times 10^5$ 。
- 测试点 19~20 没有特殊的约定，参见原始的数据范围。
- 测试点 1~12，15~16 还满足  $\nu \leq 2$ ，这意味着  $u, \nu$  的唯一可能的取值是  $u = 1, \nu = 2$ ，即  $p = 0.5$ 。这可能会对解决问题有特殊的帮助。

每个测试点的详细数据范围见下表。

测试点	$n$	$m$	$t$	$a_i$	$\nu$	$q$	
1	$= 1$	$= 0$	$= 1$	$\leq 10^6$		$= 0$	
2	$= 10^3$						
3	$= 10^5$						
4	$= 1$	$= 10^3$				$\leq 2$	$\leq 200$
5	$= 10^3$						
6	$= 1$						
7	$= 10^3$						
8	$= 5 \times 10^4$	$= 5 \times 10^4$					$= 0$
9	$= 10^5$	$= 10^5$	$= 2$				
10		$= 2 \times 10^6$	$= 21$				
11		$= 2.5 \times 10^6$	$= 26$				
12		$= 3.5 \times 10^6$	$= 36$	$\leq 10^7$	$\leq 10^9$	$= 0$	
13		$= 5 \times 10^6$	$= 51$				
14		$= 7 \times 10^6$	$= 71$	$\leq 10^8$	$\leq 2$		$\leq 200$
15	$= 5 \times 10^4$	$= 5 \times 10^6$	$= 1$				
16		$= 1.5 \times 10^6$	$= 2$				
17	$= 10^5$	$= 10^5$	$= 3$		$\leq 10^9$	$\leq 200$	
18		$= 3 \times 10^5$	$= 4$				
19		$= 3.5 \times 10^6$	$= 36$				
20		$= 7 \times 10^6$	$= 71$				

# 1. 积木大赛

(**block.cpp/c/pas**)

## 【题目描述】

春春幼儿园举办了一年一度的“积木大赛”。今年比赛的内容是搭建一座宽度为 $n$ 的大厦，大厦可以看成由 $n$ 块宽度为1的积木组成，第 $i$ 块积木的最终高度需要是 $h_i$ 。

在搭建开始之前，没有任何积木（可以看成 $n$ 块高度为 0 的积木）。接下来每次操作，小朋友们可以选择一段连续区间 $[L,R]$ ，然后将第 $L$ 块到第 $R$ 块之间（含第 $L$ 块和第 $R$ 块）所有积木的高度分别增加1。

小 $M$ 是个聪明的小朋友，她很快想出了建造大厦的最佳策略，使得建造所需的操作次数最少。但她不是一个勤于动手的孩子，所以想请你帮忙实现这个策略，并求出最少的操作次数。

## 【输入】

输入文件为 block.in

输入包含两行，第一行包含一个整数 $n$ ，表示大厦的宽度。

第二行包含 $n$ 个整数，第 $i$ 个整数为 $h_i$ 。

## 【输出】

输出文件为 block.out

仅一行，即建造所需的最少操作数。

## 【输入输出样例】

block.in	block.out
5 2 3 4 1 2	5

## 【样例解释】

其中一种可行的最佳方案，依次选择  
[1,5] [1,3] [2,3] [3,3] [5,5]

## 【数据范围】

对于 30%的数据，有 $1 \leq n \leq 10$ ；

对于 70%的数据，有 $1 \leq n \leq 1000$ ；

对于 100%的数据，有 $1 \leq n \leq 100000$ ， $0 \leq h_i \leq 10000$ 。

## 2. 联合权值

(link.cpp/c/pas)

### 【问题描述】

无向连通图  $G$  有  $n$  个点， $n-1$  条边。点从 1 到  $n$  依次编号，编号为  $i$  的点的权值为  $W_i$ ，每条边的长度均为 1。图上两点  $(u, v)$  的距离定义为  $u$  点到  $v$  点的最短距离。对于图  $G$  上的点对  $(u, v)$ ，若它们的距离为 2，则它们之间会产生  $W_u \times W_v$  的联合权值。

请问图  $G$  上所有可产生联合权值的有序点对中，联合权值最大的是多少？所有联合权值之和是多少？

### 【输入】

输入文件名为 link.in。

第一行包含 1 个整数  $n$ 。

接下来  $n-1$  行，每行包含 2 个用空格隔开的正整数  $u, v$ ，表示编号为  $u$  和编号为  $v$  的点之间有边相连。

最后 1 行，包含  $n$  个正整数，每两个正整数之间用一个空格隔开，其中第  $i$  个整数表示图  $G$  上编号为  $i$  的点的权值为  $W_i$ 。

### 【输出】

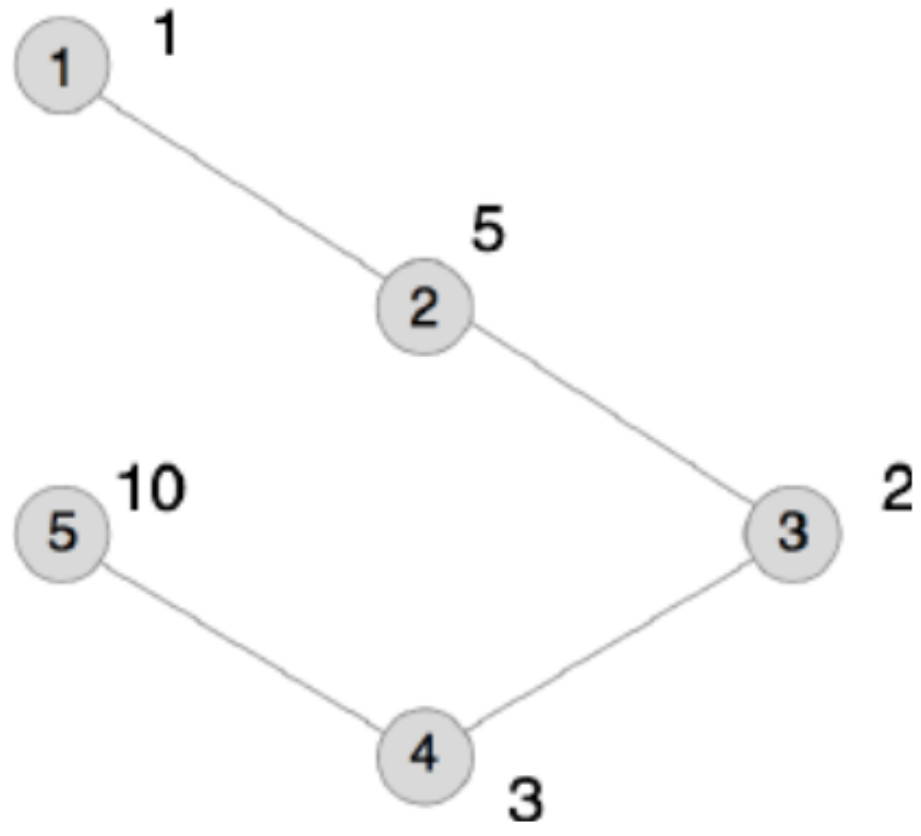
输出文件名为 link.out。

输出共 1 行，包含 2 个整数，之间用一个空格隔开，依次为图  $G$  上联合权值的最大值和所有联合权值之和。由于所有联合权值之和可能很大，输出它时要对  $10007$  取余。

### 【输入输出样例】

link.in	link.out
5 1 2 2 3 3 4 4 5 1 5 2 3 10	20 74

### 【样例说明】



本例输入的图如上所示，距离为 2 的有序点对有  $(1,3)$ 、 $(2,4)$ 、 $(3,1)$ 、 $(3,5)$ 、 $(4,2)$ 、 $(5,3)$ 。其联合权值分别为 2、15、2、20、15、20。其中最大的是 20，总和为 74。

### 【数据说明】

对于 30% 的数据， $1 < n \leq 100$ ;

对于 60% 的数据， $1 < n \leq 2000$ ;

对于 100% 的数据， $1 < n \leq 200000$ ,  $0 < W_i \leq 10,000$ 。



2. 信息传递  
(message.cpp/c/pas)

【问题描述】

有 $n$ 个同学（编号为1到 $n$ ）正在玩一个信息传递的游戏。在游戏里每人都有一个固定的信息传递对象，其中，编号为 $i$ 的同学的信息传递对象是编号为 $Ti$ 的同学。游戏开始时，每人都只知道自己的生日。之后每一轮中，所有人会同时将自己当前所知的生日信息告诉各自的信息传递对象（注意：可能有人可以从若干人那里获取信息，但是每人只会把信息告诉一个人，即自己的信息传递对象）。当有人从别人口中得知自己的生日时，游戏结束。请问该游戏一共可以进行几轮？

【输入格式】

输入文件名为message.in。  
输入共2行。  
第 1 行包含 1 个正整数 $n$ ，表示 $n$ 个人。  
第 2 行包含 $n$ 个用空格隔开的正整数 $T1, T2, \dots, Tn$ ，其中第 $Ti$ 个整数表示编号为 $i$  的同学的信息传递对象是编号为 $Ti$ 的同学， $Ti \leq n$ 且 $Ti \neq i$ 。  
数据保证游戏一定会结束。

【输出格式】

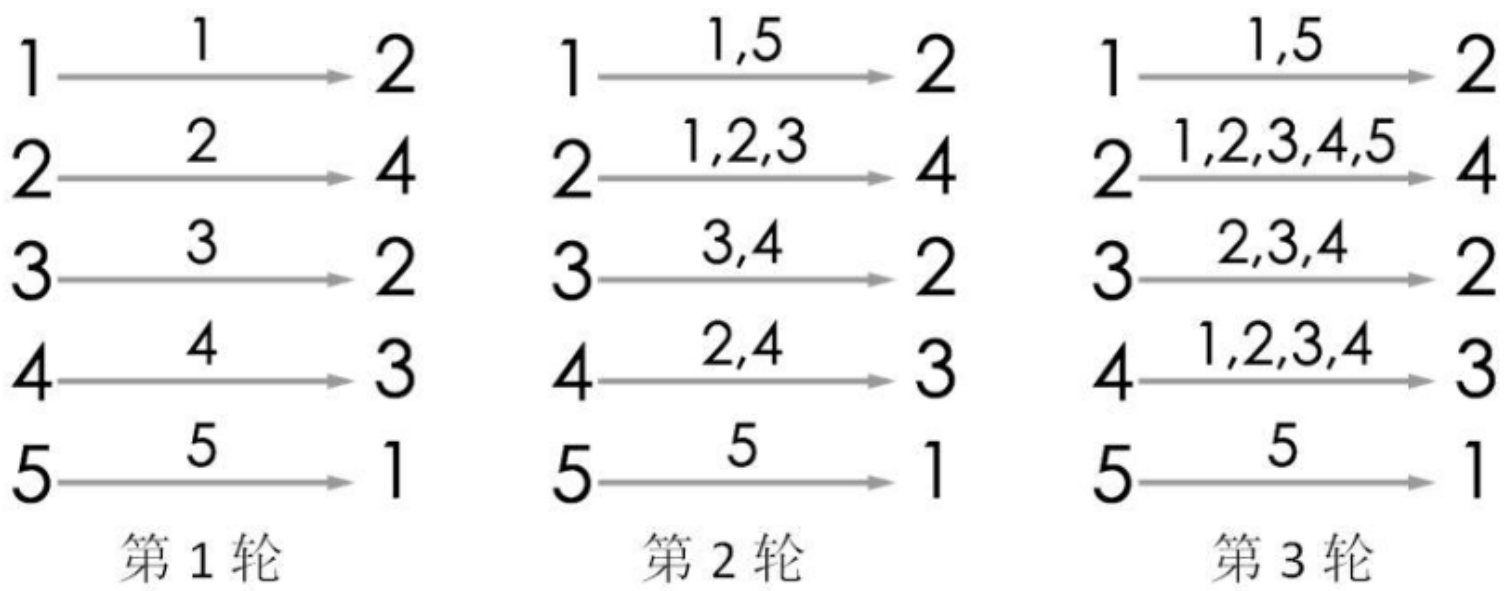
输出文件名为message.out。  
输出共1行，包含1个整数，表示游戏一共可以进行多少轮。

【输入输出样例1】

message.in	message.out
5 24 2 3 1	3

见选手目录下的message/message1.in与message/message1.ans。

【输入输出样例1说明】



游戏的流程如图所示。当进行完第3轮游戏后，4号玩家会听到2号玩家告诉他自己生日，所以答案为3。当然，第3轮游戏后，2号玩家、3号玩家都能从自己的消息来源得知自己的生日，同样符合游戏结束的条件。

【样例输入输出2】

见选手目录下的message/message2.in与message/message2.ans。

【数据规模与约定】

- 对于 30%的数据  $n \leq 200$ ;
- 对于 60%的数据， $n \leq 2500$ ;
- 对于 100%的数据， $n \leq 200000$ 。

## 2. 寻找道路

(road.cpp/c/pas)

### 【问题描述】

在有向图  $G$  中，每条边的长度均为 1，现给定起点和终点，请你在图中找一条从起点到终点的路径，该路径满足以下条件：

1. 路径上的所有点的出边所指向的点都直接或间接与终点连通。
2. 在满足条件 1 的情况下使路径最短。

注意：图  $G$  中可能存在重边和自环，题目保证终点没有出边。

请你输出符合条件的路径的长度。

### 【输入】

输入文件名为 road.in。

第一行有两个用一个空格隔开的整数  $n$  和  $m$ ，表示图有  $n$  个点和  $m$  条边。

接下来的  $m$  行每行 2 个整数  $x$ 、 $y$ ，之间用一个空格隔开，表示有一条边从点  $x$  指向点  $y$ 。

最后一行有两个用一个空格隔开的整数  $s$ 、 $t$ ，表示起点为  $s$ ，终点为  $t$ 。

### 【输出】

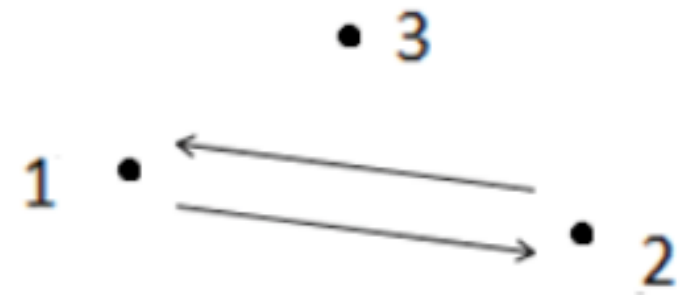
输出文件名为 road.out。

输出只有一行，包含一个整数，表示满足题目描述的最短路径的长度。如果这样的路径不存在，输出 -1。

### 【输入输出样例 1】

road.in	road.out
3 2 1 2 2 1 1 3	-1

### 【输入输出样例说明】

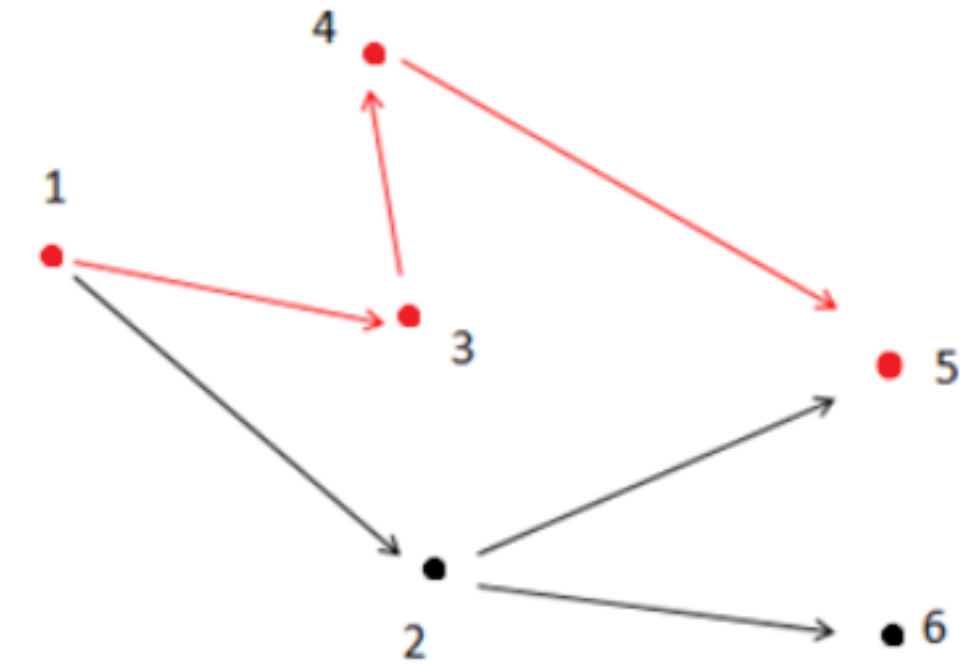


如上图所示，箭头表示有向道路，圆点表示城市。起点 1 与终点 3 不连通，所以满足题目描述的路径不存在，故输出 -1。

### 【输入输出样例 2】

road.in	road.out
6 6 1 2 1 3 2 6 2 5 4 5 3 4 1 5	3

### 【输入输出样例说明】



如上图所示，满足条件的路径为 1->3->4->5。注意点 2 不能在答案路径中，因为点 2 连了一条边到点 6，而点 6 不与终点 5 连通。

### 【数据说明】

对于 30% 的数据， $0 < n \leq 10$ ， $0 < m \leq 20$ ；

对于 60% 的数据， $0 < n \leq 100$ ， $0 < m \leq 2000$ ；

对于 100% 的数据， $0 < n \leq 10,000$ ， $0 < m \leq 200,000$ ， $0 < x, y, s, t \leq n$ ， $x \neq t$ 。



# 1. 跳石头

(stone.cpp/c/pas)

【问题描述】

一年一度的“跳石头”比赛又要开始了！

这项比赛将在一条笔直的河道中进行，河道中分布着一些巨大岩石。组委会已经选择好了两块岩石作为比赛起点和终点。在起点和终点之间，有 N 块岩石（不含起点和终点的岩石）。在比赛过程中，选手们将从起点出发，每一步跳向相邻的岩石，直至到达终点。

为了提高比赛难度，组委会计划移走一些岩石，使得选手们在比赛过程中的最短跳跃距离尽可能长。由于预算限制，组委会至多从起点和终点之间移走 M 块岩石（不能移走起点和终点的岩石）。

【输入格式】

输入文件名为 stone.in。

输入文件第一行包含三个整数 L，N，M，分别表示起点到终点的距离，起点和终点之间的岩石数，以及组委会至多移走的岩石数。

接下来 N 行，每行一个整数，第 i 行的整数 Di（0 < Di < L）表示第 i 块岩石与起点的距离。这些岩石按与起点距离从小到大的顺序给出，且不会有两个岩石出现在同一个位置。

【输出格式】

输出文件名为 stone.out。

输出文件只包含一个整数，即最短跳跃距离的最大值。

【输入输出样例 1】

stone.in	stone.out
25 5 2 2 11 14 17 21	4

见选手目录下的 stone/stone1.in 和 stone/stone1.ans。

【输入输出样例 1 说明】

将与起点距离为 2 和 14 的两个岩石移走后，最短的跳跃距离为 4（从与起点距离 17 的岩石跳到距离 21 的岩石，或者从距离 21 的岩石跳到终点）。

【输入输出样例 2】

见选手目录下的 stone/stone2.in 和 stone/stone2.ans。

【数据规模与约定】

对于 20%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 10$ 。

对于 50%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 100$ 。

对于 100%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 50,000$ ， $1 \leq L \leq 1,000,000,000$ 。

## 2. 子串

(**substring.cpp/c/pas**)

### 【问题描述】

有两个仅包含小写英文字母的字符串 A 和 B。现在要从字符串 A 中取出 k 个互不重叠的非空子串,然后把这 k 个子串按照其在字符串 A 中出现的顺序依次连接起来得到一个新的字符串,请问有多少种方案可以使得这个新串与字符串 B 相等? 注意:子串取出的位置不同也认为是不同的方案。

### 【输入格式】

输入文件名为 substring.in。

第一行是三个正整数 n, m, k, 分别表示字符串 A 的长度, 字符串 B 的长度, 以及问题描述中所提到的 k, 每两个整数之间用一个空格隔开。

第二行包含一个长度为 n 的字符串, 表示字符串 A。

第三行包含一个长度为 m 的字符串, 表示字符串 B。

### 【输出格式】

输出文件名为 substring.out。

输出共一行, 包含一个整数, 表示所求方案数。由于答案可能很大, 所以这里要求输出答案对 **1,000,000,007** 取模的结果。

### 【输入输出样例 1】

substring.in	substring.out
6 3 1 aabaab aab	2

见选手目录下 substring/substring1.in 与 substring/substring1.ans。

### 【输入输出样例 2】

substring.in	substring.out
6 3 2 aabaab aab	7

### 【数据规模与约定】

对于第 1 组数据:  $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq 50, k=1$ ;

对于第 2 组至第 3 组数据:  $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq 50, k=2$ ;

对于第 4 组至第 5 组数据:  $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq 50, k=m$ ;

对于第 1 组至第 7 组数据:  $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq 50, 1 \leq k \leq m$ ;

对于第 1 组至第 9 组数据:  $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 100, 1 \leq k \leq m$ ;

对于所有 10 组数据:  $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 200, 1 \leq k \leq m$ 。



组合数问题 ( problem)

【问题描述】

组合数  $C_n^m$  表示的是从  $n$  个物品中选出  $m$  个物品的方案数。举个例子，从(1, 2, 3) 三个物品中选择两个物品可以有(1, 2),(1, 3),(2, 3)这三种选择方法。根据组合数的定义，我们可以给出计算组合数  $C_n^m$  的一般公式：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

其中  $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 。

小葱想知道如果给定  $n, m$  和  $k$ ，对于所有的  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \min(i, m)$  有多少对  $(i, j)$  满足  $C_i^j$  是  $k$  的倍数。

【输入格式】

从文件 *problem.in* 中读入数据。

第一行有两个整数  $t, k$ ，其中  $t$  代表该测试点总共有多少组测试数据， $k$  的意义见

【问题描述】。

接下来  $t$  行每行两个整数  $n, m$ ，其中  $n, m$  的意义见【问题描述】。

【输出格式】

输出到文件 *problem.out* 中。

$t$  行，每行一个整数代表所有的  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \min(i, m)$  中有多少对  $(i, j)$  满足  $C_i^j$  是  $k$  的倍数。

【子任务】

测试点	$n$	$m$	$k$	$t$
1	$\leq 3$	$\leq 3$	$= 2$	$= 1$
2			$= 3$	$\leq 10^4$
3	$\leq 7$	$\leq 7$	$= 4$	$= 1$
4			$= 5$	$\leq 10^4$
5	$\leq 10$	$\leq 10$	$= 6$	$= 1$
6			$= 7$	$\leq 10^4$
7	$\leq 20$	$\leq 100$	$= 8$	$= 1$
8			$= 9$	$\leq 10^4$
9	$\leq 25$	$\leq 2000$	$= 10$	$= 1$
10			$= 11$	$\leq 10^4$
11	$\leq 60$	$\leq 20$	$= 12$	$= 1$
12			$= 13$	$\leq 10^4$
13	$\leq 100$	$\leq 25$	$= 14$	$= 1$
14			$= 15$	$\leq 10^4$
15		$\leq 60$	$= 16$	$= 1$
16			$= 17$	$\leq 10^4$
17	$\leq 2000$	$\leq 100$	$= 18$	$= 1$
18			$= 19$	$\leq 10^4$
19		$\leq 2000$	$= 20$	$= 1$
20			$= 21$	$\leq 10^4$

## 2. 火柴排队

(match.cpp/c/pas)

### 【问题描述】

涵涵有两盒火柴，每盒装有  $n$  根火柴，每根火柴都有一个高度。现在将每盒中的火柴各自排成一行，同一列火柴的高度互不相同，两列火柴之间的距离定义为： $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$ ，其中  $a_i$  表示第一列火柴中第  $i$  个火柴的高度， $b_i$  表示第二列火柴中第  $i$  个火柴的高度。

每列火柴中相邻两根火柴的位置都可以交换，请你通过交换使得两列火柴之间的距离最小。请问得到这个最小的距离，最少需要交换多少次？如果这个数字太大，请输出这个最小交换次数对 **99,999,997** 取模的结果。

### 【输入输出样例 1】

match.in	match.out
4 2 3 1 4 3 2 1 4	1

### 【输入输出样例说明】

最小距离是 0，最少需要交换 1 次，比如：交换第 1 列的前 2 根火柴或者交换第 2 列的前 2 根火柴。

### 【输入输出样例 2】

match.in	match.out
4 1 3 4 2 1 7 2 4	2

### 【输入输出样例说明】

最小距离是 10，最少需要交换 2 次，比如：交换第 1 列的中间 2 根火柴的位置，再交换第 2 列中后 2 根火柴的位置。

### 【数据范围】

- 对于 10% 的数据， $1 \leq n \leq 10$ ；
- 对于 30% 的数据， $1 \leq n \leq 100$ ；
- 对于 60% 的数据， $1 \leq n \leq 1,000$ ；
- 对于 100% 的数据， $1 \leq n \leq 100,000$ ， $0 \leq \text{火柴高度} \leq 2^{31} - 1$ 。

## 2. 花匠

(flower.cpp/c/pas)

### 【问题描述】

花匠栋栋种了一排花，每株花都有自己的高度。花儿越长越大，也越来越挤。栋栋决定把这排中的一部分花移走，将剩下的留在原地，使得剩下的花能有空间长大，同时，栋栋希望剩下的花排列得比较别致。

具体而言，栋栋的花的高度可以看成一列整数  $h_1, h_2, \dots, h_n$ 。设当一部分花被移走后，剩下的花的高度依次为  $g_1, g_2, \dots, g_m$ ，则栋栋希望下面两个条件中至少有一个满足：

条件 A：对于所有的  $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$ ，有  $g_{2i} > g_{2i-1}$ ，同时对于所有的  $1 \leq i < \frac{m}{2}$ ，有  $g_{2i} > g_{2i+1}$ ；

条件 B：对于所有的  $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$ ，有  $g_{2i} < g_{2i-1}$ ，同时对于所有的  $1 \leq i < \frac{m}{2}$ ，有  $g_{2i} < g_{2i+1}$ 。

注意上面两个条件在  $m = 1$  时同时满足，当  $m > 1$  时最多有一个能满足。

请问，栋栋最多能将多少株花留在原地。

### 【输入】

输入文件为 flower.in。

输入的第一行包含一个整数  $n$ ，表示开始时花的株数。

第二行包含  $n$  个整数，依次为  $h_1, h_2, \dots, h_n$ ，表示每株花的高度。

### 【输出】

输出文件为 flower.out。

输出一行，包含一个整数  $m$ ，表示最多能留在原地的花的株数。

### 【输入输出样例】

flower.in	flower.out
5	3
5 3 2 1 2	

### 【输入输出样例说明】

有多种方法可以正好保留 3 株花，例如，留下第 1、4、5 株，高度分别为 5、1、2，满足条件 B。

### 【数据范围】

对于 20% 的数据， $n \leq 10$ ；

对于 30% 的数据， $n \leq 25$ ；

对于 70% 的数据， $n \leq 1000$ ， $0 \leq h_i \leq 1000$ ；

对于 100% 的数据， $1 \leq n \leq 100,000$ ， $0 \leq h_i \leq 1,000,000$ ，所有的  $h_i$  随机生成，所有随机数服从某区间内的均匀分布。