概率 ① $P(A)\ge 0$ ② $P(\Omega)=1$ (3). $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P_n(A_i)$

(1). 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$；if $B\subset A$, $P(A-B)=P(A)-P(B)$

(2). 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

古典概型：区分"有放回"、"无放回"… 高中内容

条件概率 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

(1). 条件概率的定义 $\Leftrightarrow$ 乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$

(2). 全概率公式 $P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$

(3). 贝叶斯公式 $P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$

独立性

(1). 定义：$P(AB)=P(A)P(B)$

(2) A与B相互独立 $\begin{cases} P(B)>0, & P(A)=P(A|B) \\ P(A)>0, & P(B)=P(B|A) \end{cases}$

(3) A与B相互独立 $\Leftrightarrow$ A与$\bar{B}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与B $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与$\bar{B}$ 均相互独立

(4) 小概率事件

<1> if $P(A)\le 0.01$，则称A为小概率事件.

<2> 一次试验中若发生小概率事件，则可怀疑该事件并非小概率事件.

(5). 可靠性 (P21/例 1.26)

<1> 串联：$P(B)=\prod_{i=1}^{n} p_i$　　并联：$P(B)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$

独立重复试验

(1). n重伯努利试验 $\begin{cases} \text{each time 2 results, } P(A)=p,\ P(\bar{A})=1-P(A)=1-p=q \\ \text{相同条件独立重复n次} \end{cases}$

(2) n重伯努利试验，A发生k次的概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,\cdots,n)$

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+q)^n=1$$

离散型随机变量及其分布

(1) 分布律，表示：① $P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\cdots$ ②

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

③ $X\sim\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_n\\p_1,\cdots,p_n\end{pmatrix}$

<1> 解题步骤：① 确定X可取的值　　e.g. ① $X=0,1,2,3$

② $P(X=\cdot\cdot)=\cdots\cdots$　　② $P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{9}$，$P(X=2)=\frac{4}{27}\cdots$

③ 列表　　③ X的分布律为：

X	0	1	2	3
P	..	..	..	..

离散型

(2) 0-1分布 ① $X\sim B(1,p)$：② $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$

③ 只有两种结果的随机试验，$X\sim B(1,p)$

二项分布 ① $X\sim B(n,p)$：② $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$

③ n重伯努利试验中A发生的次数为X，A发生概率p，则 $X\sim B(n,p)$

泊松分布 ① $X\sim P(\lambda)$：② $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$

③ 大量试验中稀有事件出现频数的概率模型；λ：事件的平均发生次数

(3) 随机变量的分布函数：$F(x)=P(X\le x)\ (-\infty<X<+\infty)$

① 性质：<1> $F(x)$ 单调不减，$\forall x_1,x_2\in R$，$x_2>x_1$，我们有 $F(x_2)\ge F(x_1)$

<2> $0\le F(x)\le 1$，$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$

<3> $F(x)$ 右连续，$F(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0)$

② $F(x)=\begin{cases}0; & x<\cdots\\ \cdots; & \cdots\\ 1; & x\ge\cdots\end{cases}$，分布函数求密度函数可能需要调整边界

连续型随机变量及其分布

(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$

① 性质：<1> $p(x)\ge 0$　<2> $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$　<3> $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)=\int_a^b p(x)dx$

<4> $p(x)$ 可积，$F(x)$ 连续　<5> $p(x)$ 在x连续，则 $F(x)$ 在x可导.

<6> $P(a<X<b)=P(\ <\ \le\ )=P(\ \le\ <\ )=P(\ \le\ \le\ )$

(2) 均匀分布：① $X\sim U(a,b)$ ② $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$ ③ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$

指数分布：① $X\sim E(\lambda)$ $(\lambda>0)$ ② $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ ③ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$

④ 无记忆性，$P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$ => 几何分布也有"无记忆性"

⑤ $\frac{1}{\lambda}$是X取值的平均值

正态分布：① $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ② $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$

③ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

④ μ：X取值的平均值；σ^2：X取值的离散程度

⑤ 可求 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2a}}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2a}}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$ $(a>0)$

⑥ 标准正态分布 $X\sim N(0,1)$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

<1> $\forall x$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

☆ ⑦ 将一般正态分布化为标准正态分布：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

⑧ 3σ准则，$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\ge 0.997$

随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量的函数，$P(Y=y_k)=\sum_{i:y_k=g(x_i)}P(X=x_i)$

(2) 连续型随机变量的函数

① 分布函数法：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{x:g(x)\le y}p_X(x)dx$

$p_Y(y)=F_Y'(y)$

格式：<1> Y的取值范围 <2> Y的分布函数 <3> $p_Y(y)$ <4> 答题

例：$X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度

① 当 $y<0$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=0$，$p_Y(y)=0$

② 当 $y\ge 0$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$

$\therefore p_Y(y) = (F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}))'$

$= p(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - p(-\sqrt{y}) \cdot (-\frac{1}{2}) y^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{y}} p(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} p(-\sqrt{y})$

$= \frac{2}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$

$\therefore p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$ 此处微调了等号！因为 $y=0$ 在 $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$ 不是良定义的.

② 公式法：使用条件：$y = g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$ / $g'(x) < 0$

二维随机向量及其分布函数

(1) 联合分布函数：$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

(2). 分布函数的性质：① $F(x,y)$ 是 x, y 的不减函数

② $0 \leq F(x,y) \leq 1$，固定 y，$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$

固定 x，$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$

$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0$

$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$

③ $F(x,y)$ 对 x, y 右连续，即 $F(x,y) = \lim_{z \to x^+} F(z, y)$，$F(x,y) = \lim_{z \to y^+} F(x,z)$

④ $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$，$x_1 \leq x_2$，$y_1 \leq y_2$，有 $\to P > 0$

(3) 二维离散型的联合分布律：$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$，$i, j = 1, 2, 3, \cdots$

① 性质 <1> $p_{ij} \geq 0$，$i, j = 1, 2, \cdots$；<2> $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$

② 概率分布表

X \ Y	y_1 ···	y_n
x_1	p_{11} ···	p_{1n}
⋮	⋮	
x_n	p_{n1} ···	p_{nn}

③ $F(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

(4) 二维连续型随机变量

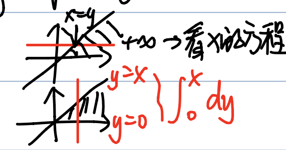
① $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(x,y)\,dxdy$

② 性质：<1> $p(x,y)\ge 0$ <2> $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dxdy=1$ <3> $P((X,Y)\in G)=\iint_G p(x,y)\,dxdy$

<4> 若 $p(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $\left.\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=p(x_0,y_0)$

③. eg. $P(Y\le X)=\iint_{y\le x} f(x,y)\,dxdy \overset{先dx}{=\!=} \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} f(x,y)\,dxdy$

$\overset{先dy}{=\!=}\int_0^{+\infty}\int_0^{x} f(x,y)\,dydx$



(5) 边缘分布

① 定义：$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=\lim_{y\to+\infty}P(X\le x,Y\le y)\equiv F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$

② 边缘分布律：$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$，$P(Y=x_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$

③ 边缘概率密度：$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy$，$p_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx$

$f(x,y)=\begin{cases}6xy & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\\ 0 & o.t.\end{cases}$，$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}6xy\,dy, & 0<x<1\\ 0, & o.t.\end{cases}$

$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}6xy\,dx, & 0<y<2\\ 0, & o.t.\end{cases}$

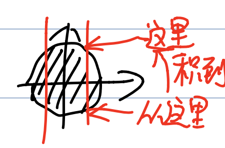
(6). 常见的二维连续型随机变量的分布

① 二维均匀分布：$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)} & (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\\ 0 & (x,y)\notin[a,b]\times[c,d]\end{cases}$

eg. 设 (X,Y) 在 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求 $p_X(x)$

$\because p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & (x,y)\in G\\ 0, & o.t.\end{cases}$ 其中设 $G: x^2+y^2\le 1$

$\therefore p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{下面的y}}^{\overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{上面的y}}\frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & o.t.\end{cases}$



② 二维正态分布.

<1> 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

随机变量的独立性 → 去整理.

(1). 定义 ① $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\Longleftrightarrow$ X和Y相互独立（任意）

② $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ 对 $\forall i,j$ 成立 $\Leftrightarrow$ X和Y相互独立（离散型）

③ (X,Y) —— 二维连续型r.v. X与Y相互独立

$\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ a.e (almost everywhere) 除去面积为0的区域（连续型）

(2) 对二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，X, Y相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

(3) X, Y相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $Z=aX+bY+c$，则 $Z\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c, a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2)$

二维随机向量函数的分布.

(1). 二维离散型随机向量函数的分布：设 $Z=g(X,Y)$, $P(Z=z_k)=P(g(X,Y)=z_k)=\sum\limits_{g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij}$

① 随机变量和的分布

<1> 三种分布满足可加性：(目前)

· 泊松分布：$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$, X, Y相互独立 $\Rightarrow X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

二项分布：$X\sim B(n_1,p)$, $Y\sim B(n_2,p)$, X, Y相互独立 $\Rightarrow X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$

正态分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, X, Y相互独立 $\Rightarrow X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$\Rightarrow$ 另：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow aX\sim N(a\mu,a^2\sigma^2)$, $\sum\limits_{i=1}^n X_i\sim N(\sum\limits_{i=1}^n\mu_i,\sum\limits_{i=1}^n\sigma_i^2)$

(2) 二维连续型随机向量函数的分布（①②③分布函数法，④扩张维数）

① $Z=X+Y$：（从联合密度函数到新随机变量Z的分布函数）

<1> $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y,z-y)\,dy$

<2> 若X, Y相互独立，$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p_X(z-y)\,dy$

$\Rightarrow$ 即为 $p_X(x)$, $p_Y(y)$ 的卷积公式.

② $M=\max(X,Y)$ 或 $N=\min(X,Y)$ 　　注意是"z"!关于z的函数.

<1> $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$，对有限个相互独立的 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, $F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$

<2> $F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$，有限个：$F_N(z)=1-\prod\limits_{i=1}^n[1-F_{X_i}(z)]$

$\Rightarrow$ 串联：$\min(X,Y)$，并联：$\max(X,Y)$，备用：$X+Y$

*③ $Z=\dfrac{X}{Y}$ $(Y\neq0)$

$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(zy,y)\,dy$

④ $Z=g(X,Y)$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

独立的

若 $\begin{cases} U=g(X,Y) \\ V=g(X,Y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$，且 $J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$，则 $f(u,v)=\underbrace{p(x(u,v),y(u,v))}\,|J(u,v)|$

用 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 替换 x,y 的联合密度函数

最后联合密度函数 $\xRightarrow{求}$ $p_Z(z)$

数学期望(Expectation)

(1) ① 离散型，若 $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k<+\infty$，则 $EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 称为 X 的数学期望.

② 连续型 …，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx<+\infty$，则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx$ 收敛

(2) 随机变量函数的期望

① $Y=g(X)$ 为连续函数 (一维)

<1> X 离散型：$\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k<+\infty$，则 $E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

<2> X 连续型：$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|p(x)<+\infty$，则 $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)dx$

② $Z=g(X,Y)$ 且期望存在 (二维)

<1> (X,Y) 离散型，$EZ=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$

<2> (X,Y) 连续型，$EZ=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)p(x,y)dxdy$

1. $g(X,Y)=X$，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=E(X)$，

2. 同理对 $g(X,Y)=Y$，$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=E(Y)$

(3) 数学期望的性质

① $E(C)=C$，C 为常数

② 齐次性：$E(CX)=CE(X)$，C 为常数

③ 线性性：$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

④ 若相互独立，then $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

(③④) 对有限个亦成立

⇒ 将 X 分解为若干个子事件，用数学期望的性质可解题

方差(Variation)

(1). 定义：$D(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(E(X))^2 \geq 0$

① 均方差/标准差：$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

② 离散型：$D(X)=E(X-EX)^2=\sum_{k=1}^{+\infty}(x_k-EX)^2 p_k$

③ 连续型：$D(X)=E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 p(x)dx$

(2) 方差的性质：

① $D(C)=0$，C为常数

② $D(CX)=C^2D(X)$，C为常数

③ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]$

<1> 若X,Y独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$，$E[(X-EX)(Y-EY)]=0$

$\Rightarrow$ 反之则不成立！即协方差为0不代表X,Y独立

<2> 推广至n个随机变量，$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}E[(X_i-EX_i)(Y-EY)]$

④ $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=E(X))=1$

⑤ 切比雪夫不等式 $P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$，对 $\forall\varepsilon>0$ 成立

$$P(|X-EX|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

(3) 常见分布的期望与方差(背!)

① $X\sim B(p)$，则 $E(X)=p$，$D(X)=p(1-p)$

② $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$

③ $X\sim P(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$ $\Rightarrow$ HZNT：$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^\lambda$

④ $X\sim U[a,b]$，则 $E(X)=\frac{a+b}{2}$，$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ $E(X^2)=E[X(X-1)+X]$

⑤ $X\sim e(\lambda)$，则 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

⑥ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$ $\Rightarrow$ HZNT：正态分布善用 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$ 积分变换

<1> $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，且 X_i 相互独立，则 $\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}C_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma_i^2)$

证明：$E(C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n)=\sum_{i=1}^{n}C_i\mu_i$，$D(C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n)=\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma_i^2$

<2> HINT $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = t(-e^{-\frac{t^2}{2}})\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

<3> $X \sim N(720, 30^2)$, $Y \sim N(640, 25^2)$，求 $Z_1 = 2X+Y$, $Z_2 = X-Y$ 的分布，并求 $P(X>Y)$ 和 $P(X+Y>1400)$

Hint: $E(Z_1) = 2\cdot 720 + 640 = \cdots$, $D(Z_1) = 4\cdot 30^2 + 25^2$, $\cdots$

易错! $D(Z_2) = D(X-Y) = D(X) + D(Y)$

协方差

(1). 定义：$cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$

① $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2cov(X,Y)$

② $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(2). 性质：

① 若 X 和 Y 独立，则 $cov(X,Y) = 0$

② 方差是特殊的协方差. $cov(X,X) = D(X)$

③ 对称性. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

④ 齐次性：$cov(aX+c_1, bY+c_2) = ab\,cov(X,Y)$，$cov(C,Y) = 0$

记：$cov(aX,Y) = a\,cov(X,Y)$, $cov(X,aY) = cov(aY,X) = a\,cov(Y,X) = a\,cov(X,Y)$, $\cdots$

⑤ 线性性：$cov(X_1+X_2, Y) = cov(X_1,Y) + cov(X_2,Y)$

$cov(X, Y_1+Y_2) = cov(X,Y_1) + cov(X,Y_2)$

$cov(X_1+X_2, Y_1+Y_2) = cov(X_1, Y_1+Y_2) + cov(X_2, Y_1+Y_2)$

$= cov(X_1,Y_1) + cov(X_1,Y_2) + cov(X_2,Y_1) + cov(X_2,Y_2)$

⑥ $X \geq 0$, $E(X) \geq 0$；⑦ $X \geq Y$, $E(X) \geq E(Y)$；⑧ $a \leq X \leq b$, $a \leq E(X) \leq b$

(3). Cauchy-Schwarz 不等式：$[cov(X,Y)]^2 \leq D(X)D(Y)$

$\Rightarrow [E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y)^2$；$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$；$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$

$(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x)| dx)^2 \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx)(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx)$

均为柯西-施瓦兹不等式.

⇒要会记

证明：构造 $f(t) = at^2 + bt + c\ (a>0)$，则 $\Delta < 0 \Leftrightarrow f(t) > 0$

$\because E(X^2)t^2 - 2E(XY)t + EY^2 = E[(Xt-Y)^2] \geq 0$

相关系数 | 解题技巧：欲求 ρ_{XY}，先求 $cov(X,Y)$，再求 $\sqrt{D(X)D(Y)}$，

(1). 定义：$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

① 若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 不相关（线性无关）

② 不相关：X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不存在线性关系

(2). 性质：

① $|\rho_{XY}| \le 1$，即 $0 \le \rho_{XY} \le 1$：

$$D\left(\frac{X}{\sqrt{D(X)}} \pm \frac{Y}{\sqrt{D(Y)}}\right) = D\left(\frac{X}{\sqrt{D(X)}}\right) + D\left(\frac{Y}{\sqrt{D(Y)}}\right) \pm 2cov\left(\frac{X}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y}{\sqrt{D(Y)}}\right) = 1+1 \pm 2\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = 2 \pm 2\rho_{XY} \ge 0$$

② $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow$ X 和 Y 以概率 1 具有线性关系（充要条件）

$\Leftrightarrow$ 存在常数 a, b，使 $P\{Y=aX+b\}=1$

③ X 和 Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

$\Leftrightarrow cov(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

(3). 相关和相互独立的区别，联系？

① 是否相关：ρ_{XY}，是否独立：$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

② 相关是线性的，独立是“□”区域可能相关

③ X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y) \Rightarrow$ X 与 Y 不相关

但反之不相关 $\not\Rightarrow$ 相互独立

④ 但对 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关

证明：① $\rho=0 \Leftrightarrow f(x,y)=f(x)f(y)$，

② $\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_1\cdot\sigma_2}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy}{\sigma_1\cdot\sigma_2}$

$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho=0$

$\therefore$ X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow$ X 与 Y 相互独立

* 随机变量的协方差矩阵

(1) 定义：$C_{11}=E[(X_1-EX_1)^2]$，$C_{22}=E[(X_2-EX_2)^2]$

$C_{12}=E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$，$C_{21}=E[(X_2-EX_2)(X_1-EX_1)]$

则 X_1, X_2 的协方差矩阵为 $C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$

(2). 性质：① 对称性，$C_{21}=C_{12}$

② 半正定，$\exists A\in R^{n\times n}$, s.t. $C=A^2$

③ 对角线元素 ≥ 0

n维正态变量的重要性质

(1) n维正态变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则 $\forall i\in n$, $X_i\sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

反之，若 $\forall i\in n$，$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 且 X_i 相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是n维正态变量

(2)

条件分布

(1). 离散型随机变量：已知 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$，有

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \forall i,j$$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \forall i,j$$

注意有"·"！

(2). 连续型随机变量：$p_{Y|X=x}(y)=\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}$

$p_{X|Y=y}(x)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

*不考.

条件期望

(1). 定义：①. 离散型 (X,Y)：$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$，有

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X=x_i|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x_i p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

称 X 关于 $Y=y_j$ 的条件数学期望

② 连续型 (X,Y)：$E(X|Y=y_j)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,p(x,y)}{p_Y(y)}dx$

期中考：一．6×6

二．64，10~12分/题，证明，计算，开放（是否独立）

前提假设：随机变量分布未知，形式已知，含有未知参数.

大数定律(Large Number Theory)

(1) 定义1：$\forall \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$，则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 X，记 $X_n \xrightarrow{P} X$

(2) 定义2：$\{X_n\}$，$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}EX_k\right|\geq\varepsilon\right)=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}EX_k\right|<\varepsilon\right)=1$
则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律

X_k方差一致有界

(3) 定理：设 $\{X_n\}$ 为两两互不相关的随机变量序列，$\exists C>0$，$\forall X_k$，$D(X_k)\leq C$，$k=1,2,\cdots$
则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$ (Chebyshev大数定律) 用切比雪夫不等式+夹逼定理证

(4) 定理：设 $\{X_n\}$ 为一列独立同分布的随机变量，设其满足 $EX_n=\mu<+\infty$，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu(=EX_k)$ (Khinchin大数定律)

(5) 定理：设 μ_n 为 n 重贝努利试验中事件A发生的次数，p 为A在某次试验中发生的概率，
则 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0$，即事件A发生的频率 $\frac{\mu_n}{n}$ 依概率收敛到A发生的概率 p (Bernoulli大数定律) $\Rightarrow$ 频率将依概率收敛到概率 p，$\frac{N_A}{n} \xrightarrow{P} p$

(6) 区分：① 数列收敛：$x_n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \alpha \iff \forall\varepsilon>0, \exists N, s.t.\ n>N, |x_n-\alpha|<\varepsilon$
② 依概率收敛：$\{X_n\}$，$X_n \xrightarrow{P} \underbrace{\alpha}_{一个数} \iff \forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-\alpha|\geq\varepsilon)=0 \,/\, \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-\alpha|<\varepsilon)=1$
③. ②比①弱

中心极限定理→大题!

(1) 设 $\{X_n\}$，$EX_k=\mu_k$，$DX_k=\sigma_k^2$ 均存在，记 $Y_n^* = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\sum\limits_{k=1}^{n}EX_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$，$n=1,2,\cdots$
则 $\forall x\in R$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n^*\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$，$\{X_n\}$ 服从中心极限定理.

$$\left.\begin{array}{l} ① \sum\limits_{i=1}^{n}X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \\ ② \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \sim N(0,1) \end{array}\right\} \longrightarrow$$ 列维-林德伯格中心极限定理

(2) $\eta_n \sim B(n,p) \xrightarrow[分布]{近似} \eta_n \sim N(np, np(1-p)) \xrightarrow[分布]{近似} \frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$
$\xrightarrow[限]{取极} \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x) \Rightarrow$ 德莫佛-拉普拉斯中心极限定理

① F_n在某一点的分布函数值(不连续),可用正态分布在该点的分布函数值近似计算.

↳只有分布函数信息,而非其它信息.

(分布未知,形式已知,含有未知因素

总体与样本

<1>概念:总体:数量指标+取值的分布 $\xleftrightarrow{1-1对应}$ 随机变量

- 个体:总体中每个成员
- 容量 $\begin{cases}有限:有限总体\\ 无限:无限总体\end{cases}$
- 样本(简单随机样本):

  <1> 应同时满足?

  ① 样本可代表总体($X_1,X_2,\cdots,X_n$与总体X有相同的分布)

  ② $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立

  <2> 样本往往看成一组随机变量
- 样本观察值:样本观察后得到的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$这一组数据

(2) 总体X的分布函数$F(x)$,样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$

⇒ 若X是连续型随机变量,$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)$

统计量与抽样分布

(1) 统计量:$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不含任参数,$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为统计量.

① e.g. 设$X\sim N(\mu,9)$,则$\bar{X}$、S^2均为统计量,$\bar{X}-\mu$则不是统计量.

(2). 样本均值:$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差:$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (*记住等价变形,以后不再推了)

样本标准差:$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)}$

样本k阶原点矩:$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$, $k=1,2,\cdots$ $\Rightarrow A_k\xrightarrow{P}E(X^k)$

样本k阶中心矩：$B_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k,\ k=1,2,\cdots \Rightarrow B_k \xrightarrow{P} E[(X-EX)^k]$

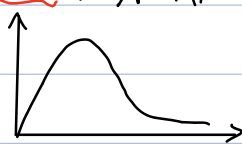
正态总体（常见统计量的分布）

1. χ^2分布：

(1) 定义：$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布$N(0,1)$，称$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$服从自由度n的$\chi^2$分布

(2). 记：① $\chi^2\sim\chi^2(n)$

② 密度函数：第一象限，大肚子



(3) 性质：① 可加性：$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，X, Y独立，则$X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$

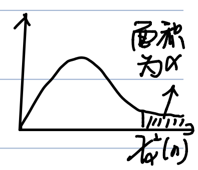
② 设$X\sim\chi^2(n)$，则$E(X)=n$，$D(X)=2n$

$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}\{D(X_i)+[E(X_i)]^2\}=n\cdot 1=n$

$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2\}=\cdots=n\cdot(3-1)=2n$

$E(X_i^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$

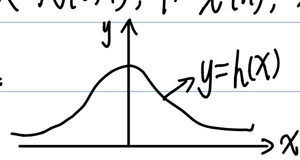
③ 上α分位点：对$0<\alpha<1$，称满足$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty}f(y)dy=\alpha$的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点



2. t分布

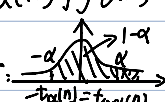
(1). 定义：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X, Y独立，则$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，记$t\sim t(n)$，服从自由度为n的t分布

(2). 形状：



(3). 上α分位点：对$0<\alpha<1$，称满足$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)dt=\alpha$的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点

① $-t_\alpha(n)=t_{1-\alpha}(n)$ 记：



$\Rightarrow$ 对正态分布Z，$-Z_\alpha=-Z_{1-\alpha}$

(4) $n\to\infty$时，$\lim_{n\to\infty}h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

3. F分布

(1). 定义：$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，X, Y独立，则$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$，记$F\sim F(n_1,n_2)$，服从自由度为(n_1,n_2)的F分布

(2) ① $t \sim t(n) \Rightarrow t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \Rightarrow X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, X, Y 独立 $\Rightarrow X^2 \sim \chi^2(1)$, X^2 与 Y 独立 $\Rightarrow t^2 \sim F(1,n)$

② $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$: $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$, $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, X, Y 独立 $\Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{Y/n_2}{X/n_1} \sim F(n_2, n_1)$

③ $F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$ (e.g. $F_{0.99}(2,3) = \frac{1}{F_{0.01}(3,2)}$)

证明: $\because \alpha = P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = P\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}\} = 1 - P\{\frac{1}{F} \ge \frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}\}$, $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

$\therefore P\{\frac{1}{F} \ge \frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}\} = 1-\alpha$ 即 $\frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)} = F_{1-\alpha}(n_2, n_1)$

乙态总体的样本均值与样本方差的分布

(1) 定理: 设总体 X 的均值为 μ, 方差为 σ^2, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则

① 样本均值的期望 = 总体的均值: $E(\bar{X}) = \mu$ (展开证)

② 样本均值的方差 = $\frac{\text{总体的方差}}{\text{样本容量}}$; $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (展开证)

建立样本与总体的关系

③ 样本方差的期望 = 总体的方差: $E(S^2) = \sigma^2$

证: $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right] = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}E(\bar{X}^2)\right) = \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \sigma^2$ (习题证过)

(2) Ex1. $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots X_n$ 样本, $\bar{X}, S^2$, $E(\bar{X}) = \mu = 1 \cdot p = p$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$, $E(S^2) = p(1-p)$

Ex2 $X \sim \chi^2(n)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$, $\bar{X}, S^2$, $E(\bar{X}) = n$, $D(\bar{X}) = \frac{2n}{20}$ → 注意不是"n"!, $E(S^2) = 2n$

(3) 定理: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自乙态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 则

① $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 或 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

④ $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$: $\left.\begin{array}{l}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)\end{array}\right\}$ → 独立 → $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 独立 $\Rightarrow \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / \frac{1}{n-1}}} \sim t(n-1)$

(4) 定理: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 相互独立, $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是样本均值, $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$, 则

① $F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

② 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

} 一定考!

参数估计: 点估计: $\hat{\theta} \to \theta$; 区间估计: $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to \theta$; 估计量的评价标准.

点估计

(1)定义:①构造$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$(估计量)→样本的函数,用观察值$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(估计值)来估计参数$\theta$

(2)答题:若估p的矩估计/极大似然估计:估计量和估计值都要写

(3)矩估计:样本k阶原点矩$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$=总体的$k$阶原点矩$EX^k$,$k=1,2,\cdots$,几个参数就取前几个方程解

①. A_1: ②A_2: ③$A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

④缺陷:未利用总体分布信息

极大似然估计

(1).似然函数=>样本的联合密度函数

①θ:待估参数,Θ:参数θ的取值范围,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本,

$x_1,x_2,\cdots,x_n$是观测值,则有:

<1>总体X为离散型,分布律$P\{X=x\}=p(x;\theta)$,事件$\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}$的概率为$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$,$\theta\in\Theta$,称$L(\theta)$为似然函数

<2>总体X为连续型,概率密度$f(x;\theta)$,随机点落在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的邻域(边长分别为$dx_1,dx_2,\cdots,dx_n$的n维立方体)内的概率近似为$\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\,dx_i$,$\theta\in\Theta$

② <1> $L(\theta)=\begin{cases}离\\连\end{cases}$;<2> $\hat{\theta}\in\underset{\theta\in\Theta}{\mathrm{Argmax}}\,L(\theta)$;<3> $\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0 \Leftrightarrow \hat{\theta}$,$L(\theta)$在$\theta=\hat{\theta}$达到最大值

$\Leftrightarrow \ln(L(\theta))$在$\theta=\hat{\theta}$达到最大值

③定理:$u=u(\theta)$,有单值反函数$\theta=\theta(u)$,$\hat{\theta}$是X的概率分布中θ的最大似然估计,

则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计

④注意:最大似然估计一定先得到估计值,再得到估计量,矩估计是先估计量再估计值

=>方程无解时如何求解极大似然估计?求解步骤?

估计量的评价标准

(1)无偏性:

①定义:$E[\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\theta$,估计量的期望等于真值

②e.g.: $E(\bar{X})=\mu$,$E(S^2)=\sigma^2$

(2) 均方误差准则(有效性)

① 均方误差: $M(\hat{\theta}-\theta)=E(\hat{\theta}-\theta)^2$，越小越好，方差较小更加有效

② 计 $\hat{\theta}$ 是无偏估计，$M(\hat{\theta}-\theta)=D(\hat{\theta})+(E\hat{\theta}-\theta)^2=D(\hat{\theta})$ 就是方差

(3) 相合性/一致性 $\Rightarrow$ 考虑大数定理，只有大数定理能证

① $\forall \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

区间估计　　正向要会，逆向也要会，必须要真正会求解.

(1) 基本概念

① 对常数 $0<\alpha<1$，存在 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，s.t. $P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$，称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

② 置信下限: $\hat{\theta}_1$；置信上限: $\hat{\theta}_2$；置信度/系数: $1-\alpha$

③ 做 n 次试验，得出 n 个样本观测值，代入 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 中可得 n 个区间，此时约有 $n\cdot(1-\alpha)$ 个区间包含 θ，其余 $n\alpha$ 个区间不含 θ

④ 双侧置信区间，单侧置信区间、单侧置信下限、单侧置信上限

(2). X 为连续型总体时的置信区间步骤

① 找枢轴变量，使得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta$ 的函数分布不依赖 θ 及其它未知参数

② 给定置信水平 $1-\alpha$ 定 a,b，使得 $P\{a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)<b\}=1-\alpha$，求得 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 即可

(3). $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个样本，置信度 $1-\alpha$

<1> σ^2 已知，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间: $\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

<2> σ^2 未知，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间: $\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

<3> μ 未知，σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

<4>. μ 未知，σ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间: $\left(\frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

(4). 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的置信区间

<1> σ_1^2,σ_2^2 均已知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

背!

<2> $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但$\sigma^2$未知，$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$，其中$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

<3> μ_1,μ_2未知，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为（$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$）

$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

(5). 单侧置信区间，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

<1> σ^2未知，μ的$1-\alpha$的单侧置信区间$\left(\bar{X}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},+\infty\right)$或$\left(-\infty,\bar{X}+t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow P\{\mu\geq\underline{\mu}\}=1-\alpha$，$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\leq t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$ 得 $P\left\{\mu\geq\bar{X}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$

注意这里符号，为了得到"$\mu\geq$"，故应用"$\leq$"号才对.

假设检验⇒决策，只考虑犯第一类错误的概率$\leq\alpha$，考试只考双边检验 一定活学活用.

(1) 步骤. ① 提出原假设 H_0，备择假设 H_1[1]；

② 给定显著性水平α以及样本容量n；

③ 确定检验统计量[2]以及拒绝域的形式；

④ 按$P\{$当H_0为真拒绝$H_0\}\leq\alpha$求出拒绝域[3]

⑤ 取样，根据样本观察值[4]决策接受H_0/拒绝H_0[5]

给分点

正态总体均值的假设检验

*(1). σ^2已知关于μ的检验(u检验)，统计量为$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

① $H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域为$\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

② $H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq u_\alpha\right\}$

③ $H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -u_\alpha\right\}$

④ $H_0:\mu\leq\mu_0$；$H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq u_\alpha\right\}$

⑤ $H_0:\mu\geq\mu_0$；$H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -u_\alpha\right\}$

*(2) σ^2未知关于μ的检验(t检验)，统计量为$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，$S^2$是$\sigma^2$的无偏估计

① $H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域为$\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

② $H_0:\mu\leq\mu_0$；$H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为$\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_\alpha(n-1)\right\}$

③ $H_0: \mu \geq \mu_0$; $H_1: \mu < \mu_0$, 拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)\right\}$

由题目"显著地大于10"，所以原假设是这样

格式：提出假设 $H_0: \mu \leq \mu_0 = 10$; $H_1: \mu > \mu_0 = 10$，统计量为 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(19)$，拒绝域为 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{0.05}(19) = 1.7291$，

经计算 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{10.2-10}{0.5099/\sqrt{20}} = 1.754 > 1.7291$ ∴ 拒绝原假设

(3) 两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的均值差的检验，$H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，

* ① σ_1^2, σ_2^2 均已知，取检验统计量 $U = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$，拒绝域为 $\{|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

* ② σ_1^2, σ_2^2 均未知但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，取检验统计量 $T = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$\bar{X}-\bar{Y}-\delta \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \to \frac{\cdots}{\cdots} = T$

拒绝域为 $\{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$

$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2] \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$

$S_W^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

正态总体方差的假设检验

* (1) 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 方差 σ^2 的假设检验（假定 μ 未知）⇒ χ^2 检验法，$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$，拒绝域为 $\{\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

* (2) 两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的假设检验（假定 μ_1, μ_2 未知）⇒ F 检验法

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，取检验统计量 $F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$，

when H_0 成立，$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$，拒绝域为 $\{F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\} \cup \{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\}$

	枢轴量	置信区间(置信度$1-\alpha$)
单正σ^2已知求μ	$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\Rightarrow \lvert U\rvert\le u_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow \bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
单正σ^2未知求μ	$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\Rightarrow \lvert T\rvert\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\Rightarrow \bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
单正μ未知求σ^2	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\Rightarrow \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\chi^2\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\Rightarrow\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$
双正σ_1^2,σ_2^2已知求$\mu_1-\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\Rightarrow \lvert U\rvert\le u_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{n_2^2}}\le\mu_1-\mu_2\le\bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{n_2^2}}$
双正$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知求$\mu_1-\mu_2$	$T=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\cdot\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\Rightarrow \lvert T\rvert\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-1)\Rightarrow\cdots$
双正μ_1,μ_2未知求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F=\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\Rightarrow F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\le F\le F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\Rightarrow\cdots$

	原	备	检验统计量	拒绝域(显著性水平α)
单正σ^2已知检μ	$H_0:\mu=\mu_0$	$H_1:\mu\ne\mu_0$	$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\{\lvert U\rvert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}\}$
单正σ^2未知检μ	$H_0:\mu=\mu_0$	$H_1:\mu\ne\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\{\lvert t\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}\}$
单正μ未知检σ^2	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}\cup\{\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$
双正$\sigma_1^2\sigma_2^2$已知求$\mu_1-\mu_2$	$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_0$	$H_1:\mu_1\ne\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{n_2^2}}}\sim N(0,1)$.	$\{\lvert u\rvert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}\}$
双正$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知求$\mu_1-\mu_2$	$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_0$,	$H_1:\mu_1\ne\mu_2$	$T=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\{\lvert t\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$
双正μ_1,μ_2未知求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_0^2$,	$H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}\cup\{F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}$