No.
Date

计算方法复习

1. 算法

(1). 设计高效可靠的算法 $\begin{cases}\text{串行、并行}\\ \text{数值型、非数值型}\end{cases}$ ⇒ +、−、×、÷、逻辑运算

(2). 算法可靠性

① 收敛性 ② 稳定性 ③ 误差估计

(3). 优劣

① 效果 ② 时间复杂度 ③ 空间复杂度 ④ 逻辑复杂度

(4). 数值实验验证

2. 误差

(1). 模型误差：研究对象、数学模型之间

(2) 观测误差：观察测量得到的具体数据

(以上)不作详细分析

(3) 截断误差(方法误差)：将极限/无穷有限化，求近似解时带来

(4) 舍入误差：无穷小数四舍五入(计算机机器字长的限制)

3. 误差的基本概念 (x为准确值，x^*为x的一个近似值)

(1) 绝对误差：$e^* = x^* - x$ $\begin{cases}>0 & \text{强}\\ <0 & \text{弱}\end{cases}$ >近似值

(2)(绝对)误差限：$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$

(3) 相对误差 $e_r^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$，实际计算中取 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$

(4). 相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$

(3)(4) ⇒ 考虑"精度"

4. 有效数字：

(1). 判断规则 ① 近似值的误差限 ≤ 某一位的半个单位，从该位到第一个非零数共 n 位，就有 n 个有效数字

(2). 例：① $x^* = \sqrt{3} = 1.732050808$

数值	有效位数	原因
1.73	3	$\lvert\sqrt{3} - 1.73\rvert < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$
1.7321	5	$\lvert\sqrt{3} - 1.7321\rvert < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$
1.7320	4	$\lvert\sqrt{3} - 1.7320\rvert > \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 且 $\lvert\sqrt{3} - 1.7320\rvert < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$
② 0.00200	3	0 到 2 一共 3 位

KOKUYO

Date

(3). 相对误差限：对 $x^*=\pm 0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m$

① x^* 有n位有效数字，$\varepsilon_r^*\le \frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}$

② 反之若 x 的相对误差限 $\varepsilon_r^*\le \frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{1-n}$，$x$ 至少有n位有效数字

(4). 例：使 $\sqrt{20}$ 相对误差不超过0.1%，取几位有效数字？

$\because \varepsilon_r^*\le \frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}=\frac{1}{2\times 4}\times 10^{1-n}\le 0.001$ （$\sqrt{20}$ 首位为4）

$\therefore$ 解得 $n\ge 3.097$，即取4位有效数字

5. 误差传播

(1). $\varepsilon(y^*)\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$　　$\varepsilon_r(y^*)\approx\frac{|x^*f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\varepsilon_r(x^*)$　　单变量

(2). $\varepsilon(z^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^*\varepsilon(x_k^*)$　　$\varepsilon_r^*=\varepsilon_r(z^*)=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^*\frac{\varepsilon(x_k^*)}{|z^*|}$　　多元

(3). $\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)$

$\varepsilon(x_1^*x_2^*)=|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)$

$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)=\frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)-|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}$

6. 误差分析

(1). 避免除数绝对值远小于被除数

(2). 避免两个相近数相减

(3). 防止大数与小数相加减而大数吃小数

(4) 减少运算次数，简化计算步骤

(5). 选数值稳定性好的算法（舍入误差不增长，例如P12 /11）

7. 高斯消去法

(1). 消元化为上三角矩阵，回代

(2). A为n阶非奇异矩阵，可用Gauss消去法

(3). 约化的主元素 $a_{ii}^{(i)}\ne 0\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的充要条件是A的顺序主子式 $D_i\ne 0\ (i=1,2,\cdots,k)$

8. 列主元Gauss消去法

(1). 每步消元前先选取列主元素再消去，防止大数吃小数

9. 完全主元素Gauss消去法

(1). 每步消元前选择绝对值最大的行、列主元换行换列

No.

Date

10. Gauss-Jordan 消去法

(1). 对矩阵按列选主元，然后消去第k行上下，同时第k行变为1

(2). 用于求矩阵的逆矩阵

11. 直接三角分解法 $Ax=LUx=b \Rightarrow Ly=b$　A的各阶顺序主子式 $\neq 0 \Leftrightarrow a_{kk}^{(k)} \neq 0 \rightarrow A=LU$ (P175)

(1). 不选主元的三角分解法

① $\begin{cases} u_{1i}=a_{1i} & (i=1,2,\cdots,n) \\ l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{u_{11}} & (i=2,3,\cdots,n) \end{cases}$

② $\begin{cases} u_{ri}=a_{ri}-\sum\limits_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki} & (i=r,r+1,\cdots,n) \\ l_{ir}=(a_{ir}-\sum\limits_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr})/u_{rr} & (i=r+1,\cdots,n,\ r\neq n) \end{cases}$

} Doolittle分解法
解系数矩阵相同而右端向量不同的方程组很好

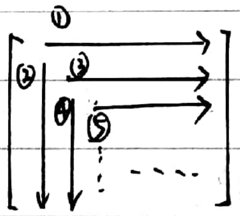
③ $Ly=b$ 求 y

④ $Ux=y$ 求 x

⇒ 以4阶为例　考试时画这个帮助理解!

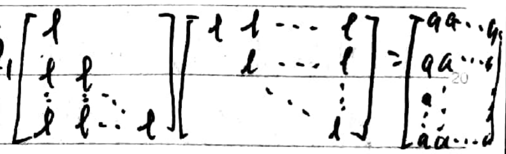
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

⇒ 计算顺序：



12. 平方根法 Cholesky分解法

(1). 对称正定矩阵 $A=LL^T$，其中L为下三角矩阵，同样，画



(2) ① $l_{jj}=(a_{jj}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}}$

② $l_{ij}=(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj}$　$(i=j+1,\cdots,n)$

好办!

13. 追赶法　把矩阵画出来就会了!

(1). 用于三对角矩阵，应满足 $|b_1|>|c_1|>0$, $|b_n|>|a_n|>0$, $|b_i|>|c_i|+|a_i|$, $a_i,c_i\neq 0$　$i\in[2,3,\cdots,n-1]$

(2). $\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & a_2 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \gamma_n\ \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \beta_2 & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

① $\gamma_i=a_i$，$i=2,3,\cdots,n$

② $\alpha_1=b_1$，

③ $\beta_i=\dfrac{c_i}{\alpha_i}$，$i=1,2,\cdots,n-1$

④ $\alpha_i=b_i-\gamma_i\beta_{i-1}$，$i=2,3,\cdots,n$

往同一方向行算后，可算出所有 α,β.

KOKUYO

No.

Date

14. 向量的范数 $\|x\|\geq 0$; $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ 技巧:

(1). $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ ∞-范数 $\infty\leq 2\leq 1$, 故可记住

(2). $\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 1-范数 ∞范, $\max|x_i|$, 1-范 $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

(3). $\|x\|_2 = (|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 开根! 2-范数 2范: $\sqrt{\sum x_i^2}$

(4). $\|x\|_p = (|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n}x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ p-范数

(5) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

(6). R^n上任意两种范数等价 ($\exists C_1, C_2>0$, s.t. $C_1\|x\|_s\leq\|x\|_t\leq C_2\|x\|_s$ for all $x\in R^n$)

15. 矩阵的范数 $\|A\|\geq 0$ 且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$, $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$, $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$, $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

(1). $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ A的列范数 每列和的最大值

(2). $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ A的行范数, 每行和的最大值

(3). $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ $\lambda_{max}(A^TA)$是A^TA特征值绝对值的max, A的2-范数

(4). $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ 平方!别漏! A的Frobenius范数

16. 谱半径

(1). $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$

(2). $\rho(A)\leq\|A\|_v$

(3). if A对称 then $\|A\|_2=\rho(A)$

17. 矩阵的条件数

(1). 设A非奇异, $cond(A)_v = \|A\|_v\|A^{-1}\|_v$ 为A的条件数

(2). $cond(A)>>1$, 病态; $cond<1$, 良态

(3) ① $cond(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$

② $cond(A)_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

if A对称 then $cond(A)_2 = \frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$

(4). 判断矩阵是否病态

① 行列式过大或过小(如某些行、列近似相关)

② 元素间数量级相差过大且无一定规则

③ 主元素消去过程中出现小主元

No.
Date

④. 最大和最小特征值之间相差很大数量级

18. 迭代法解线性方程组

(1). $A=D-L-U$，其中 $D=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$，$L=-\begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$，$U=-\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 符号!

(2). 目标：构造 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

19. Jacobi迭代法 $Ax=b \Rightarrow (D-L-U)x=b \Rightarrow Dx=(L+U)x+b \Rightarrow x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$

(1). 矩阵形式：$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$，迭代矩阵 $B_J=D^{-1}(L+U)$，$f=D^{-1}b$

(2). 分量形式：$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad i=1,2,\cdots,n. \end{cases}$

20. Gauss-Seidel 迭代法 $Ax=b \Rightarrow Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b \Rightarrow (D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$

$\Rightarrow x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$

(1). 矩阵形式：$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$

迭代矩阵 $G=(D-L)^{-1}U$，$f=(D-L)^{-1}b$

(2). 分量形式：$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$

3个其实一般相似

21. 逐次超松弛法(SOR方法) ω为松弛因子

(1). 矩阵形式：$x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$

迭代矩阵 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$，$f=\omega(D-\omega L)^{-1}b$

(2). 分量形式：$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$

易错点

22. 迭代法收敛

(1). $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0$ （任意 $\|A_k-A\|$ 范数均可）

(2). $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A \Leftrightarrow \forall x\in R^n,\ \lim\limits_{k\to\infty}A_kx=Ax$

(3). $\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=B^k\varepsilon^{(0)}\to 0\ (k\to\infty)$，设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $B^k\to 0\ (k\to\infty) \Leftrightarrow \rho(B)<1$

23. 迭代法基本定理：$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛 $\Leftrightarrow \rho(B)<1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$

(1). $Ax=b$，$A=D-L-U$ 为非奇异阵且 D 非奇异，则

Jacobi迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(J)<1$，其中 $J=D^{-1}(L+U)$

No.

Date

Gauss-Seidel迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(G)<1$，其中 $G=(D-L)^{-1}U$

SOR方法收敛 $\Leftrightarrow \rho(L_\omega)<1$，其中 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$

(2). $\because \rho(A)\le\|A\|_v$

$\therefore x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列 $x^{(k+1)}$ 收敛的充分条件：$\|B\|_v<1$ $(\rho(B)\le\|B\|_v<1)$

(3). $\rho\downarrow$，收敛速度 $-\ln\rho(B)\uparrow$ 越快 $(\rho<1)$

(4). $\|B\|_v<1$ 可推收敛，但 $\|B\|_v>1$ 不可推发散，应由 $\rho(B)>1$ 推发散!

24. 迭代法收敛充分条件

(1). 设 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$，有B的某种算子范数 $\|B\|=q<1$，则

① 迭代法收敛，即 $\forall x^{(0)}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$，且 $x^*=Bx^*+f$

② $\|x^*-x^{(k)}\|\le q^{(k)}\|x^*-x^{(0)}\|$

③ $\|x^*-x^{(k)}\|\le\frac{q}{1-q}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$

④ $\|x^*-x^{(k)}\|\le\frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

25. 特殊方程组迭代法收敛性

(1) 严格对角占优阵：$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2). 弱对角占优阵：$|a_{ii}|\ge\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且至少有一个不等式成立

(3). 可约阵：$\exists P$, s.t. $P^TAP=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{bmatrix}$ 即对A行列重排，交换行列或摆的地方这样

(4). 不可约阵：$\nexists P$, s.t. $P^TAP=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{bmatrix}$

(5). if $\forall a_{ij}\in A$, $a_{ij}\ne0$ 则A为不可约阵 $\rightarrow\begin{bmatrix}\times\times\times\\\times\times\times\\&&\times\times\times\\&&\times\times\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}\times\times\times0\\\times\times0\times\\\times0\times\times\\0\times\times\times\end{bmatrix}$ 均不可约

(6). if A 严格对角占优 or A 不可约弱对角占优，then A 非奇异

A对称正定矩阵判定条件：①特征值全正或各阶主子式均大于0。 then Jacobi、Gauss-Seidel法均收敛

(7). if A对称正定，则 $Ax=b$ 的Gauss-Seidel迭代法收敛

(8). if $0<\omega<2$，且A为对称正定矩阵，则 $Ax=b$ 的SOR方法收敛（SOR收敛充分条件）

或：if A对称正定矩阵，则 $0<\omega<2\Leftrightarrow Ax=b$ 的SOR方法收敛（SOR收敛充要条件）

26. 线性插值与抛物插值. $R_1(x)\le\frac{f''(\xi)}{8}h^2$

(1). 线性插值：$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$，$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$，$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)$ $\le\frac{1}{8}f''(\xi)h^2$

(2). 抛物插值：$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$，$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$，$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$，$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$

$R_2(x)\le$

$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

No.

Date

27. 拉格朗日插值多项式（n次插值需n+1个插值节点）

(1). 基函数：$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

(2). 多项式：$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)$

(3). 插值余项：$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|=\frac{\max_{a\leq x\leq b}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\max_{a\leq x\leq b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$

$\Rightarrow \omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

28. 牛顿插值

(1). 差商

① 一阶差商：$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

② 二阶差商：$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_2]}{x_0-x_2}$

③ k阶差商：$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_n]}{x_0-x_n}$

(2). 差商的性质：

① 对称性：$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_1,x_0,\cdots,x_k]=\cdots=f[x_1,x_2,\cdots,x_k,x_0]$

② 若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数，且$x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，则$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$，$\xi\in[a,b]$

eg. $f(x)=-6x^8+7x^5-10$，则$f^{(8)}(x)=-6\cdot8!$，$f[1,\cdots,9]=\frac{-6\cdot8!}{8!}=-6$

$f^{(9)}(x)=0$，$f[1,\cdots,10]=0$

要记 (3). 列差商表计算

⇒ 忘

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$			

(4). $N(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\cdots x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

$|R(x)|=|f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)|=|f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$

$\approx|f[x_0,\cdots,x_n,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$

$=|f[x_0,\cdots,x_n,x_{n+1}]\omega_{n+1}(x)|$

eg. $|R_3(x)|\approx|f[x_0,\cdots,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|=\cdots$

29. 等距节点插值

(1). 差分

① 一阶向前差分：$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$　　一阶向后差分：$\nabla f_i=f_i-f_{i-1}$

② m阶向前差分：$\Delta^m f_i=\Delta^{m-1}f_{i+1}-\Delta^{m-1}f_i$　m阶向后差分：$\nabla^m f_i=\nabla^{m-1}f_i-\nabla^{m-1}f_{i-1}$

No.

Date

(2). 向前差分表(向后差分表) 画

函数值	一阶差分	二阶差分	三阶差分
$f(x_0)$			
	$\Delta f_0(\nabla f_1)$		
$f(x_1)$		$\Delta^2 f_0(\nabla^2 f_2)$	
	$\Delta f_1(\nabla f_2)$		$\Delta^3 f_0(\nabla^3 f_3)$
$f(x_2)$		$\Delta^2 f_1(\nabla^2 f_3)$	
	$\Delta f_2(\nabla f_3)$		
$f(x_3)$			

前插是"-"

(3). 牛顿前插公式：$N_n(x)=N_n(x_0+th)$ $\Rightarrow h$：步长，是 $x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2$ 的值.

$$=f_0+\Delta f_0 t+\frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1)+\cdots+\frac{\Delta^n f_0}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

余项 $R_n(x)=R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$ $\xi\in(x_0,x_n)$

后插是"+"

(4). 牛顿后插公式：$N_n(x)=N_n(x_n+th)$

$$=f_n+\nabla f_n t+\frac{\nabla^2 f_n}{2!}t(t+1)+\cdots+\frac{\nabla^n f_n}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

余项：$R_n(x)=R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$ $\xi\in(x_0,x_n)$

30. Hermite插值(埃尔米特插值)：(导数也插值)

(1). 插值多项式 $H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}y_i'\beta_i(x)$

其中 $\alpha_i(x)=[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)$

$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$

$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$ $\Rightarrow$ 拉格朗日插值基函数.

(2). 三次埃尔米特插值多项式为：

$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$ $(m_i=f'(x_i))$

$=y_0[1+2l_1(x)]l_0^2(x)+y_1[1+2l_0(x)]l_1^2(x)+m_0(x-x_0)l_0^2(x)+m_1(x-x_1)l_1^2(x)$

$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)^2(x-x_1)^2\leq\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{(x_1-x_0)^4}{16}\leq\frac{M^4}{384}h^4$

$|R_3(x)|\leq\frac{M_4}{384}h^4=\frac{\max_{x_0\leq x\leq x_1}|f^{(4)}(x)|}{384}h^4$

31. 分段低次插值

(1). 分段线性插值. $L_h(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f_{k+1}$

$f(x)-L_h(x)\leq\frac{h_i^2}{8}\max_{a\leq x\leq b}|f''(\xi)|=\frac{h^2}{8}M_2$

$\frac{h^2}{8}:\frac{1}{2!}\cdot\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}=\frac{1}{8}h^2$ 是这么来的!

Campus

No.

Date

(2) 分段三次抛物线插值：其实一样道理

(3) 分段三次Hermite插值：也一样的.

32. 三次样条插值

(1) ① $n-1$ 个内节点满足条件 $S(x_i-0)=S(x_i+0)$
$S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$
$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$ } $3\times(n-1)=3n-3$ 个

② 边界条件，通常有3种，选其中一种

<1> 固支条件：$S'(x_0)=f'_0$，$S'(x_n)=f'_n$

<2> 二阶导数已知：$S''(x_0)=f''_0$，$S''(x_n)=f''_n$　　2个.

自然边界条件：$S''(x_0)=S''(x_n)=0$

<3> 周期性条件：$S(x_0+0)=S(x_n-0)$，$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$，$S''(x_0+0)=S''(x_0-0)$

③ 插值条件 $S(x_i)=f_i$　　$n+1$ 个

共需 $3n-3+n+1+2=4n$ 个条件才可解 n 个小区间上的共 $4n$ 个系数.

33. 逼近的度量标准

(1). 一致逼近/均匀逼近：$\|f(x)-P(x)\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|$

(2). 均方逼近/平方逼近：$\|f(x)-P(x)\|_2=\sqrt{\int_a^b[f(x)-P(x)]^2dx}$　平方、平方、平方！

34. 连续函数空间几种范数：$\|f\|\ge0 \Leftrightarrow f=0$ 时 $\|f\|=0$；$\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|$，$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$

(1). ∞-范数：$\|f\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$

(2). 1-范数：$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$ ⟹ 相当于全部加起来的意思.

(3). 2-范数：$\|f\|_2=(\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$　(4). Euclid范数：$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx}$

35. 函数的内积

(1). $(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx$，$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数

36. 正交多项式

(1). 定义：$(f(x),g(x))=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx=0$

(2). 正交函数族：$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\ne k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$

No.
Date

Gram-schmidt 正交化方法：

(3). 构造正交多项式：$\varphi_0(x)=1,\cdots,\varphi_n(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x^n,\varphi_j(x))}{(\varphi_j(x),\varphi_j(x))}\varphi_j(x)\quad(n=1,2,\cdots)$

(4). 构造的正交多项式性质：

① $\varphi_n(x)$ 最高次项系数为1

② $\forall P_n\in H_n$，$P_n=\varphi_0(x),\varphi_1(x)\cdots,\varphi_n(x)$ 的线性组合

③ $k\neq j$，$(\varphi_k,\varphi_j)=0$ 且 $\varphi_k(x)$ 与任意次数 $<k$ 的多项式正交

④ $\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x)\quad\Rightarrow$ 递推关系

其中 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=0$，$\alpha_n=\frac{(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))}$，$\beta_n=\frac{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))}$，

$(x\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b x\varphi_n^2(x)\rho(x)dx$

⑤ $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 是在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，则 $\varphi_n(x)\,(n\geq1)$ 的 n 个根均为单重实根且 $\in(a,b)$

(5). 常用的正交多项式：

① 勒让德(Legendre)多项式：区间 $[-1,1]$，$\rho(x)=1$ 另还有细节！

$P_0(x)=1$，$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=(3x^2-1)/2$，$P_3(x)=(5x^3-3x)/2$，$P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8$

② 切比雪夫(Chebyshev)多项式：区间 $[-1,1]$，$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_2(x)=2x^2-1$，$T_3(x)=4x^3-3x$，$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$

3. 最佳逼近

(1). 最佳一致逼近：$\|f-P^*\|_\infty=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-P_n^*(x)|=\min_{P_n\in H_n}\|f-P_n\|$

(2). 最佳平方逼近：$\|f-S^*\|_2^2=\min_{S(x)\in\varphi}\|f(x)-S(x)\|_2^2=\min_{S(x)\in\varphi}\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2dx$

① $Ha=d$ 的解 $a_k=a_k^*\,(k=0,1,2,\cdots,n)$ 即为所求，$S_1^*(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

H：Hilbert 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1}\end{bmatrix}$ 病态！Not Good，$d=\begin{pmatrix}d_0\\d_1\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$，$d_k=(f,x^k)$

② 平方误差 $\|\delta\|_2^2=(f,f)-(S_1^*,f)$

最大误差 $\|\delta\|_\infty=\max_{0\leq x\leq1}|f(x)-S_1^*(x)|$

均方误差 $\|\delta\|_2=\sqrt{\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,g_k)}{(g_k,g_k)}(f,g_k)}$

No.
Date

③ $f(x)\in[-1,1]$ 按Lengendre多项式展开求最佳平方逼近 $S_n^*(x)=a_0^*p_0(x)+\cdots+a_n^*p_n(x)$

式中有：$a_k^*=\frac{(f(x),P_k(x))}{(P_k(x),P_k(x))}=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx$ 系数！

平方误差 $\|\delta_n\|_2^2=\int_{-1}^{1}f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^{*2}$

④ $f(x)\in[a,b]$？取 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$ $(-1\le t\le 1)$

看清是否是 $[-1,1]$！从而 $t=\frac{2x-a-b}{b-a}$，求 $S_n^*(\frac{2x-a-b}{b-a})$

eg. $f(x)=e^x,\ x\in[-2,0]$？ $\Rightarrow g(t)=f(x)=f(t-1)=e^{t-1}$

$\Rightarrow G(t)=\cdots t^3+\cdots t^2+\cdots t+\cdots$

$=\cdots(x+1)^3+\cdots(x+1)^2+\cdots(x+1)+\cdots$

$=S(x)$

38. 最小二乘法.

(1). 求 $Ga=d$ 即
$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_1,\varphi_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\varphi_n,\varphi_0)&(\varphi_n,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\\vdots\\(f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

x_i
y_i
w_i

其中 $(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$，$(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega(x_i)f(x_i)\varphi_k(x_i)\equiv d_k$

是 $\sum$！ φ：基函数 f：即为表中 y_i

(2). $\|\delta\|_\infty=\max|\delta_i|$，$\|\delta\|_2=\sqrt{\sum_{i=0}^{m}(\delta_i)^2}$

(3). 解题步骤：①描点 ②取基函数系 ③构成方程求解 ④误差分析(可能涉及选最优，一般来说用最大误差和均方误差选优 $\sqrt{\sum\delta_i^2}$ $\max|\delta_i|$)

39. 数值求积公式

(1). 左矩公式：$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=f(x_0)(x_1-x_0)$

(2). 右矩公式：$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=f(x_1)(x_1-x_0)$

(3). 中矩公式：$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=f(\frac{x_0+x_1}{2})(x_1-x_0)$

(4). 梯形公式：$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=\frac{1}{2}(x_1-x_0)[f(x_0)+f(x_1)]$

40. 代数精度：$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 对 $\forall f(x)=x^i\ (i=0,1,\cdots,m)$ 精确成立，对 x^{m+1} 不精确成立，则该数值积分公式有m次代数精度 即令 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^i$ 一直判定 $\int$ 和右边 $\sum$ 是否相同.

41. 插值型求积公式：

(1). 表达式：$I_n=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx$ $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$.

(2) 余项 $R(f)=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)dx$，$|R(f)|\le\frac{M}{(n+1)!}\int_a^b|\omega_{n+1}(x)|dx$

$M=\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(\xi)|$，$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

KOKUYO

No.

Date

(3). n+1个节点的求积公式为插值型⇔该求积公式至少有n次代数精度

⇒求有n次代数精度时，务必往n+1, n+2 … 一直往上验证 ⇒易错

42. Newton-Cotes公式

(1). Cotes系数：

n	$C_k^{(n)}$				
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$		
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

(2). n阶 Newton-Cotes公式至少有n次代数精度

n为偶数时，Newton-Cotes公式至少有n+1阶代数精度

(3). 梯形公式：$T=I_1(f)=\frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$

$R(T)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$，$|R(T)|\le\frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le x\le b}f''(\eta)$

1次代数精度

Simpson公式：$S=I_2(f)=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

$R(S)=-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4f^{(4)}(\eta)$

3次代数精度

Cotes公式：$C=I_4(f)=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$

$R(C)=-\frac{2(b-a)}{945}(\frac{b-a}{4})^6f^{(6)}(\eta)$

5次代数精度

43. 复化求积公式　　1次 2次 … 1次

(1). 复化梯形公式：$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]=T_n$，其中$h=\frac{b-a}{n}$

余项 $R[f]=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$　　1次 2次 … 1次

(2). 复化Simpson公式：$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})+f(b)]=S_n$

余项 $R[f]=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4f^{(4)}(\xi)$　　实际应用中3点为一次复化Simpson.

44. 变步长复化梯形公式 $T_1=\frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$

$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$　($h=\frac{b-a}{n}$代表二分前的步长)

45. Romberg积分　　重点!!!!是!!!

(1). $\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}=S_n$，$\frac{4^2S_{2n}-S_n}{4^2-1}=C_n$，$\frac{4^3C_{2n}-C_n}{4^3-1}=R_n$

(2). Romberg算法：$\left(T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})\right)$ ⟹ h代表二分前的步长

$$
\begin{array}{llll}
T_1=T_0^{(0)} & <\varepsilon? & & \\
T_2=T_0^{(1)} & \to S_1=T_1^{(0)} & <\varepsilon? & \\
T_4=T_0^{(2)} & \to S_2=T_1^{(1)} & \to C_1=T_2^{(0)} & <\varepsilon? \\
T_8=T_0^{(3)} & \to S_4=T_1^{(2)} & \to C_2=T_2^{(1)} & \to R_1=T_3^{(0)}
\end{array}
$$

停止准则：$|T_m^{(0)}-T_{m-1}^{(0)}|<\varepsilon$

46(1)欧拉(Euler)格式：$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$　$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$　h是步长

(2)后退欧拉格式：$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$，$y_{i+1}$由显式方法先计算一个初值，后迭代求解可得

(3).梯形格式：$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})]$，$y_{i+1}$由欧拉显式算初值，后用该式迭代

(4).改进的Euler格式：①显欧拉 ②梯形格式校正一次 ⟹ 就这么记！先显欧再梯.

①.显式欧拉格式预测 $y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$

②将y_{i+1}代入梯形格式右边校正一次 $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})]$

⟹或写成
$$
\begin{cases}
y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(K_1+K_2)\\
K_1=f(x_i,y_i)\\
K_2=f(x_i+h,y_i+hK_1)\\
y_0=\alpha_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n-1
\end{cases}
$$

47. Runge-Kutta方法

(1).二阶龙格-库塔方法：
$$
\begin{cases}
y_{i+1}=y_n+h(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)\\
K_1=f(x_n,y_n)\\
K_2=f(x_n+ph,y_n+phK_1)
\end{cases}
\quad 满足\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1\\ \lambda_2p=\frac{1}{2}\end{cases}
$$

(2).三阶龙格-库塔方法：
$$
\begin{cases}
y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(K_1+4K_2+K_3)\\
K_1=f(x_i,y_i)\\
K_2=f(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}K_1)\\
K_3=f(x_i+h,y_i-hK_1+2hK_2)
\end{cases}
$$

No.

Date

(3). 四阶龙格-库塔方法(经典龙格-库塔方法)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \end{cases}$$

不要把系数背错了！求求你

48. 单步法的收敛性和稳定性

(1). 收敛性：$h \to 0$ 时 $y_i \to y(x_i)$

(2). 稳定性：设初值产生误差 $\varepsilon_0 = y_0 - \bar{y}_0$，若此误差此后逐步衰减 → 绝对稳定

(3). 隐式欧拉法绝对稳定性比同阶的显式欧拉法好。

49. 亚当姆斯方法

(1). 亚当姆斯显式公式：$y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 N_k(x_i + th)dt$ // $N_k(x_i+th)$ 是 $f_i, f_{i-1}, \cdots, f_{i-k}$ 构造的 k 阶牛顿后插多项式.

再背1. ① Adams 的局部截断误差 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = h\int_0^1 R_k(x_i + th)dt$

(2). 二阶(两步)显式 Adams 方法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$

* 三阶(三步)显式 Adams 方法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$

√ 四阶(四步)显式 Adams 方法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

(3). 二阶(两步)隐式 Adams 方法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$ ⇒ 即梯形格式

√ 四阶(四步)隐式 Adams 方法：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$ 三阶：$\frac{h}{12}(5\ \ 8\ \ -1)$

(4). k 步显式 Adams：k 阶精度；k 步隐式 Adams：$k+1$ 阶精度

50. 亚当姆斯预测-校正

Step1 Runge-Kutta 法算前 k 个初值

Step2 Adams 显式算预测值. $y(x_{i+1}) - \bar{y}_{i+1} = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(\xi_i)$

Step3 Adams 隐式算校正值. $y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\eta_i)$

No.

Date . .

51. 二分法

(1). 每次取中点 $\frac{a+b}{2}$ 作为根的近似值，误差估计式 $|x^*-x_n| \le \frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

(2) 终止条件为 $x_n=x^*$ 或 $|x^*-x_n| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)<\varepsilon$

52. 不动点的存在性与迭代法的收敛性：

(1). 定理：若 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 且满足① $\forall x\in[a,b]$，$a\le\varphi(x)\le b$ 且② $\exists\, 0<L<1$，$\forall x,y\in[a,b]$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一不动点 x^* 且迭代序列收敛

(2). 误差估计式 $|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$ →与初始点选取无关

$|x^*-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$

(3). ☆ if $\varphi(x)\in C[a,b]$ 且 $\forall x\in[a,b]$，$|\varphi'(x)|\le L<1$，then 迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛

53. 局部收敛性：if $\varphi'(x)$ 在 x^* 某邻域内连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则局部收敛 →要选在 x^* 的邻域

54. 收敛阶：设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，且迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 当 $k\to\infty$ 时成立 $\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to C$（$C\ne0$），称该迭代法 p阶收敛

(1). $p=1$：线性收敛；$p>1$：超线性收敛；$p=2$：平方收敛

(2). 定理：对 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，if $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 附近连续，且 $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，$\varphi^{(p)}(x^*)\ne0$，则称该迭代过程在 x^* 附近 p 阶收敛

55. 埃特金加速方法

(1). 格式：
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)}=\varphi(x_k) \\ x_{k+1}^{(2)}=\varphi(x_{k+1}^{(1)}) \\ x_{k+1}=x_{k+1}^{(2)}-\dfrac{(x_{k+1}^{(2)}-x_{k+1}^{(1)})^2}{x_{k+1}^{(2)}-2x_{k+1}^{(1)}+x_k} \end{cases}$$

(2) 若 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 线性收敛，则 Aitken 方法平方收敛

若 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ p阶收敛($p>1$)，$\varphi(x)$ p阶导连续，则 Aitken 方法 $2p-1$ 阶收敛

56. 斯蒂芬森(Steffensen)迭代法

(1). 格式：
$$\begin{cases} y_k=\varphi(x_k) \\ z_k=\varphi(y_k) \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \end{cases}$$

No.

Date

57. 牛顿(Newton)法

(1). Newton公式：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，$x^*$单根时在$x^*$附近平方收敛

(2). 牛顿法收敛的充分条件：① 有根 ② 根唯一 ③ 产生序列单调有界

58. 简化牛顿法：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$，简化计算量，但只能线性收敛

59. 牛顿下山法：$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

(1). 选择λ：令λ=1，逐次将λ减半试验，直至下山条件$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$成立为止，否则"下山失败"。

60. 牛顿法重根情形：$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x)}{f'(x)}$，其中$m=\frac{1}{1-\lambda_k}$，$\lambda_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}$ 重根加速收敛技巧，需选x_0重算

61. 弦截法(割线法)：

(1). 用双点割线法 → 用到前面2点x_{k-1}和x_k的值：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$，本质是将导数$f'(x_k)$用差商取代，1.618阶收敛

(2). 单点割线法：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)$

62. 抛物线法(Müller法)

(1). 格式：$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$，其中$\omega=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$ 背了！

(2). 1.840阶收敛，但计算量更大了

63. 解非线性方程组的牛顿迭代法 → 考察方程组 $\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\\vdots\\f_n(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}$

(1). 格式：$x^{(k+1)}=x^{(k)}-F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})$ $(k=0,1,\cdots)$

其中 $F'(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}&\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$ 称为$F(x)$的雅可比矩阵

$F(x)=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{pmatrix}$

64. 二项式定理 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$

65. 二阶泰勒展开：$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+O(h^3)$