

带噪声复杂网络的一致性

复旦大学博士论文答辩

答辩人： 易宇豪

15110240008

导师：章忠志 副研究员

计算机科学与技术学院

计算机软件与理论

2018 年 12 月 15 日

- ① 绪论：背景、应用和基础知识
- ② 一致性稳态性能与网络结构的关系
 - 网络结构对一阶抗噪性的影响
 - 富环无标度网络的抗噪性
- ③ 一致性的计算和优化：算法和复杂性
 - 相对测量误差对一致性的影响：边中心性的计算
 - 领导者选择问题的近似算法
 - 最小化网络熵的复杂性
- ④ 带噪声的二阶一致性网络
 - 二阶抗噪性与双调和距离
- ⑤ 总结与展望

- ① 绪论：背景、应用和基础知识
- ② 一致性稳态性能与网络结构的关系
 - 网络结构对一阶抗噪性的影响
 - 富环无标度网络的抗噪性
- ③ 一致性的计算和优化：算法和复杂性
 - 相对测量误差对一致性的影响：边中心性的计算
 - 领导者选择问题的近似算法
 - 最小化网络熵的复杂性
- ④ 带噪声的二阶一致性网络
 - 二阶抗噪性与双调和距离
- ⑤ 总结与展望

一致性算法：背景和应用

- 一致性问题 (Consensus) 是指设计策略，使网络中的节点根据其当前状态和邻近节点的状态进行局部调整，使得所有节点状态达到或趋于一致。

一致性算法：背景和应用

- 一致性问题 (Consensus) 是指设计策略，使网络中的节点根据其当前状态和邻近节点的状态进行局部调整，使得所有节点状态达到或趋于一致。
- 平均一致性算法广泛应用于分布式控制系统中
 - ① 状态估计
 - ② 时钟同步
 - ③ 负载均衡
 - ④ 编队、覆盖控制
 - ⑤ 电力系统同步
 - ⑥ 传感器网络
 - ⑦ 分布式优化和学习
 - ...

一致性算法：背景和应用

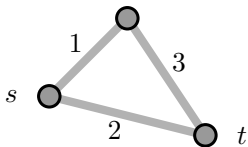
- 一致性问题 (Consensus) 是指设计策略，使网络中的节点根据其当前状态和邻近节点的状态进行局部调整，使得所有节点状态达到或趋于一致。
- 平均一致性算法广泛应用于分布式控制系统中
 - ① 状态估计
 - ② 时钟同步
 - ③ 负载均衡
 - ④ 编队、覆盖控制
 - ⑤ 电力系统同步
 - ⑥ 传感器网络
 - ⑦ 分布式优化和学习

...

* 区别于传统分布式系统中的一致性算法，如 2PC, 3PC, Paxos 等

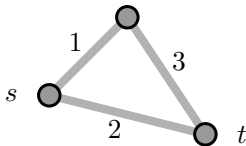
拉普拉斯矩阵

对于图 $\mathcal{G} = (V, E, w)$,



拉普拉斯矩阵

对于图 $\mathcal{G} = (V, E, w)$,



其拉普拉斯矩阵定义为:

$$\begin{aligned} L = D - A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = BWB^\top \\ &= \sum_{e \in E} w(e) b_e b_e^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $b_e = b_{u,v} = e_u - e_v, e = (u, v) \in E$.

- 一阶一致性

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{[i]}(t) = - \sum_j a_{ij} [\boldsymbol{x}_{[i]}(t) - \boldsymbol{x}_{[j]}(t)] + \boldsymbol{\xi}_{[i]}(t),$$

$\boldsymbol{\xi}_{[i]}(t)$ 表示一个白噪声过程.

带噪声的一致性过程

- 一阶一致性

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{[i]}(t) = - \sum_j a_{ij} [\boldsymbol{x}_{[i]}(t) - \boldsymbol{x}_{[j]}(t)] + \boldsymbol{\xi}_{[i]}(t),$$

$\boldsymbol{\xi}_{[i]}(t)$ 表示一个白噪声过程.

- 表达为矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t).$$

- 二阶一致性

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{L} & -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

带噪声的一致性过程

- 二阶一致性

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 一阶领导者-跟随者过程

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_l(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_f(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{L}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l(t) \\ \mathbf{x}_f(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t).$$

带噪声的一致性过程

- 二阶一致性

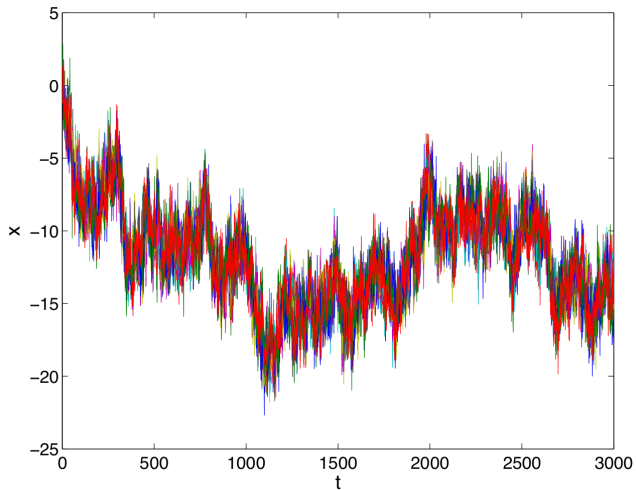
$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 一阶领导者-跟随者过程

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_l(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_f(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{L}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l(t) \\ \mathbf{x}_f(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t).$$

- 相对测量误差引入的噪声
- 受噪声侵扰的领导者
- 二阶领导者-跟随者过程

带噪声的一致性过程



以一阶一致性算法为例：

以一阶一致性算法为例：

- 稳态性能度量

- ① 点对方差： $H_{\text{FO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[k]}(t))^2]$.

以一阶一致性算法为例：

- 稳态性能度量

- ① 点对方差： $H_{\text{FO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[k]}(t))^2]$.
- ② 节点偏移方差： $H_{\text{FO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2]$.

以一阶一致性算法为例：

- 稳态性能度量

- ① 点对方差： $H_{\text{FO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[k]}(t))^2]$.

- ② 节点偏移方差： $H_{\text{FO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2]$.

- ③ 平均方差：抗噪性 (Network Coherence)

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2].$$

以一阶一致性算法为例：

- 稳态性能度量

- ① 点对方差： $H_{\text{FO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[k]}(t))^2]$.

- ② 节点偏移方差： $H_{\text{FO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2]$.

- ③ 平均方差：抗噪性 (Network Coherence)

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2].$$

- ④ 不确定状态体积和网络熵 (Network Entropy):

$$\mathcal{S}(G) = -\log \mathcal{T}(G),$$

其中 $\mathcal{T}(G)$ 表示网络的加权生成树数目。

\mathcal{H}_2 范数和李雅普诺夫方程

以一阶一致性系统为例：

- \mathcal{H}_2 范数

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \mathcal{H}_2^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\int_0^\infty e^{-L^T t} \mathbf{P}^T \mathbf{P} e^{-L t} dt \right) .$$

\mathcal{H}_2 范数和李雅普诺夫方程

以一阶一致性系统为例：

- \mathcal{H}_2 范数

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \mathcal{H}_2^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\int_0^\infty e^{-L^T t} \mathbf{P}^T \mathbf{P} e^{-L t} dt \right) .$$

- \mathcal{H}_2^2 能够用 Σ 的迹表示，其中 Σ 是以下李雅普诺夫方程的解：

$$\mathbf{M}^\top \Sigma + \Sigma \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \mathbf{0} .$$

\mathcal{H}_2 范数和李雅普诺夫方程

以一阶一致性系统为例：

- \mathcal{H}_2 范数

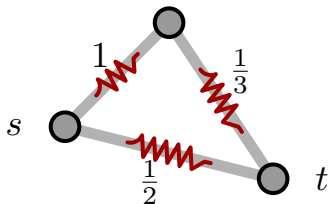
$$H_{\text{FO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \mathcal{H}_2^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\int_0^\infty e^{-L^T t} \mathbf{P}^T \mathbf{P} e^{-L t} dt \right) .$$

- \mathcal{H}_2^2 能够用 Σ 的迹表示，其中 Σ 是以下李雅普诺夫方程的解：

$$\mathbf{M}^\top \Sigma + \Sigma \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \mathbf{0} .$$

- 在最简单的设定中 $\Sigma = (1/2) \mathbf{L}^\dagger$, 在领导者-跟随者系统中,
 $\Sigma = (1/2) \mathbf{L}_S^{-1}$, 等等.

电阻距离和基尔霍夫系数

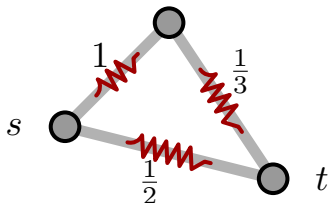


$$d_R(s, t) = \frac{1}{\frac{3}{4} + 2} = \frac{4}{11} \Omega$$

- s, t 两点间的电阻距离 $d_R(s, t)$ 定义为电阻网络中两点间的等效电阻。

$$d_R(s, t) = \mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_{s,t}.$$

电阻距离和基尔霍夫系数



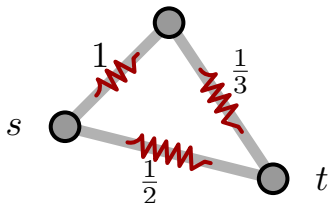
$$d_R(s, t) = \frac{1}{\frac{3}{4} + 2} = \frac{4}{11} \Omega$$

- s, t 两点间的电阻距离 $d_R(s, t)$ 定义为电阻网络中两点间的等效电阻。

$$d_R(s, t) = \mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_{s,t}.$$

- 与随机游走的通勤时间有密切联系。 $\kappa(s, t) = \text{vol}(G) d_R(s, t)$.

电阻距离和基尔霍夫系数



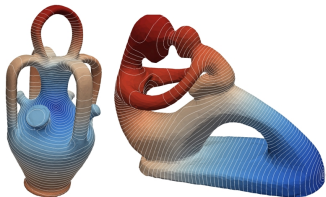
$$d_R(s, t) = \frac{1}{\frac{3}{4} + 2} = \frac{4}{11} \Omega$$

- s, t 两点间的电阻距离 $d_R(s, t)$ 定义为电阻网络中两点间的等效电阻。

$$d_R(s, t) = \mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_{s,t}.$$

- 与随机游走的通勤时间有密切联系。 $\kappa(s, t) = \text{vol}(G) d_R(s, t)$.
- 基尔霍夫系数：所有点对的电阻距离的和：

$$R(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u,v} d_R(s, t) = n \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger).$$



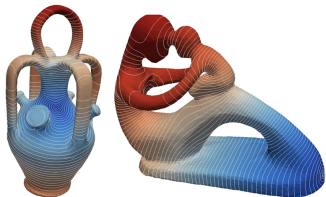
对于任意的点对 (s, t) [LRF10]:

$$d_B(s, t) = \left(\mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_{s,t} \right)^{1/2}.$$

图: 到一个源点的双调和距离

[LRF10]

- 最初在计算机图形学中提出，用于度量曲面上两点之间的距离 [LRF10].



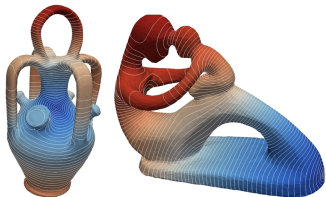
对于任意的点对 (s, t) [LRF10]:

$$d_B(s, t) = \left(\mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^{2\ddagger} \mathbf{b}_{s,t} \right)^{1/2}.$$

图: 到一个源点的双调和距离

[LRF10]

- 最初在计算机图形学中提出，用于度量曲面上两点之间的距离 [LRF10].
- 满足非负性、同时性、对称性和三角不等式。



对于任意的点对 (s, t) [LRF10]:

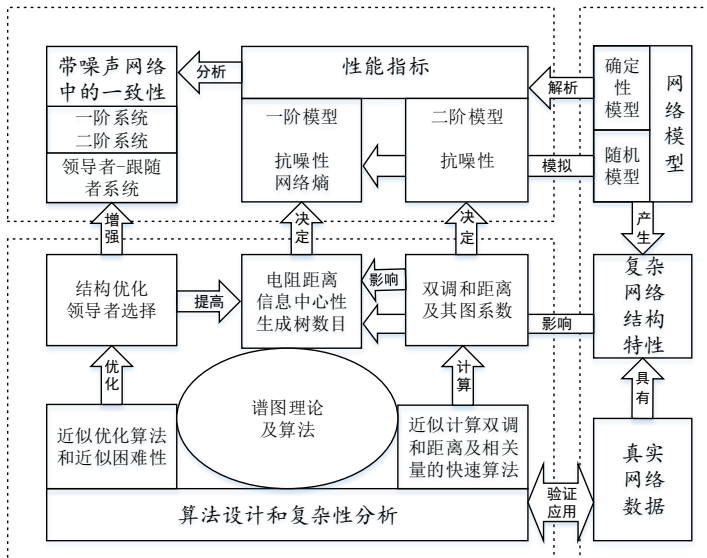
$$d_B(s, t) = \left(\mathbf{b}_{s,t}^\top \mathbf{L}^{2\ddagger} \mathbf{b}_{s,t} \right)^{1/2}.$$

图: 到一个源点的双调和距离

[LRF10]

- 最初在计算机图形学中提出，用于度量曲面上两点之间的距离 [LRF10].
- 满足非负性、同时性、对称性和三角不等式。
- 可用于描述二阶一致性网络的稳态性能。

本文各部分之间的联系



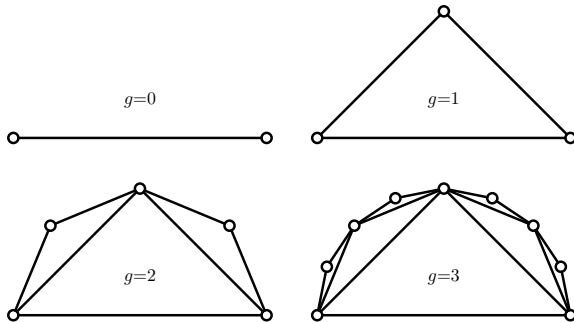
- ① 绪论：背景、应用和基础知识
- ② 一致性稳态性能与网络结构的关系
 - 网络结构对一阶抗噪性的影响
 - 富环无标度网络的抗噪性
- ③ 一致性的计算和优化：算法和复杂性
 - 相对测量误差对一致性的影响：边中心性的计算
 - 领导者选择问题的近似算法
 - 最小化网络熵的复杂性
- ④ 带噪声的二阶一致性网络
 - 二阶抗噪性与双调和距离
- ⑤ 总结与展望

一些典型网络结构的一阶抗噪性渐近行为

网络结构	μ	H_{FO}
路径 [YSL10]	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
一维圆环面 (环) [BJMP12, YSL10]	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
规则格点网格 [YZLC15]	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Vicsek 分形 [PB14]	$\Theta(n^{\log 3 / \log 5})$	$\Theta(n^{\log 3 / \log 5})$
T-分形 [PB14]	$\Theta(n^{\log 2 / \log 3})$	$\Theta(n^{\log 2 / \log 3})$
Peano Basin 分形 [PB14]	$\Theta(n^{1/2})$	$\Theta(n^{1/2})$
二维圆环面 [BJMP12]	$\Theta(n^{1/2})$	$\Theta(\log n)$
法雷图 [YZLC15]	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
科赫图 [YZSC17]	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
d 维圆环面 ($d \geq 3$) [BJMP12]	$\Theta(n^{1/d})$	$\Theta(1)$
星状图 [YSL10]	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
完全图 [YSL10]	$\Theta(1)$	$\Theta(n^{-1})$

小世界、无标度结构对一阶抗噪性的影响

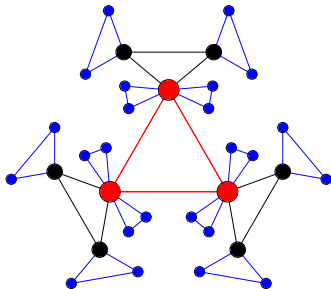
- 确定性小世界网络模型：法雷图



- $H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_n) = \frac{\log n_g}{24} + o(\log n_g).$
- 渐近行为：网络规模的对数速度增长

小世界、无标度结构对一阶抗噪性的影响

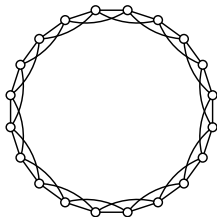
- 确定性无标度网络模型：科赫图



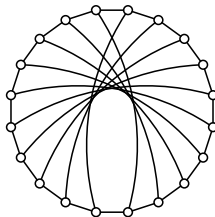
- $H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_n) = \frac{\log n_g}{12} + o(\log n_g).$
- 渐近行为：网络规模的对数速度增长

小世界、无标度结构对一阶抗噪性的影响

- 规则格点网络（作为比较）



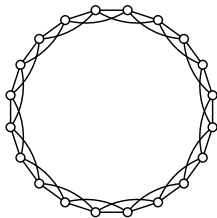
(a) $C_{20,4}$



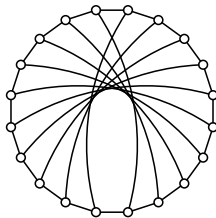
(b) $C_{20,3}$

小世界、无标度结构对一阶抗噪性的影响

- 规则格点网络（作为比较）



(a) $\mathcal{C}_{20,4}$

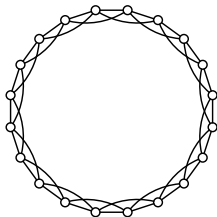


(b) $\mathcal{C}_{20,3}$

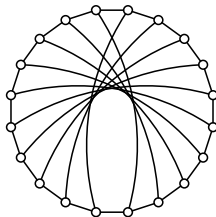
- $H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,4}) = \frac{n}{24} + o(n)$. $H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_n) = \frac{\log n_g}{24} + o(\log n_g)$.

小世界、无标度结构对一阶抗噪性的影响

- 规则格点网络（作为比较）



(a) $C_{20,4}$



(b) $C_{20,3}$

- $H_{\text{FO}}(C_{n,4}) = \frac{n}{24} + o(n)$. $H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_n) = \frac{\log n_g}{24} + o(\log n_g)$.
- $H_{\text{FO}}(C_{n,3}) = \frac{n}{24} + o(n)$. $H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_n) = \frac{\log n_g}{12} + o(\log n_g)$.

一阶抗噪性的上下界

- 用平均度给出下界

定理

对一个 n 个点, m 条边的 (无权) 连通图 G , 其平均度为 $\rho = \frac{2m}{n}$, 一阶网络抗噪性满足 $H_{\text{FO}} \geq \frac{n}{4m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mn}$, 等号当且仅当 G 是完全图时成立; 当 n 很大时, $H_{\text{FO}} \geq \frac{1}{2\rho}$.

一阶抗噪性的上下界

- 用平均度给出下界

定理

对一个 n 个点, m 条边的 (无权) 连通图 G , 其平均度为 $\rho = \frac{2m}{n}$, 一阶网络抗噪性满足 $H_{\text{FO}} \geq \frac{n}{4m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mn}$, 等号当且仅当 G 是完全图时成立; 当 n 很大时, $H_{\text{FO}} \geq \frac{1}{2\rho}$.

- 用平均距离给出上界

定理

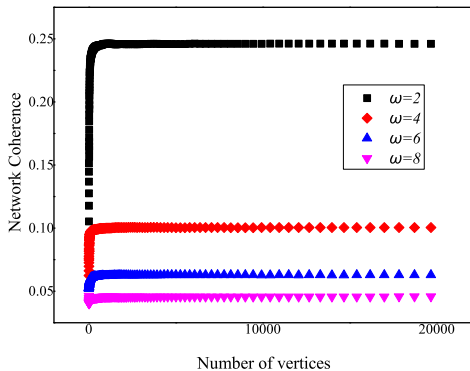
对于一个 n 个点的 (无权) 连通图 G , 如果它的图平均距离是 μ , 其一阶网络抗噪性满足 $H_{\text{FO}} \leq \frac{n-1}{4n}\mu$, 等号当且仅当 G 是一棵树时成立。当 n 很大时, $H_{\text{FO}} \leq \frac{\mu}{4}$.

表: 一些现实网络的一阶抗噪性和基础统计量

Network	n	m	γ	$\frac{1}{2\rho}$	H_{FO}	$\frac{\mu}{4}$
Zachary karate club	34	78	2.161	0.109	0.203	0.602
David Copperfield	112	425	3.621	0.066	0.151	0.634
Jazz musicians	198	2,742	5.271	0.018	0.051	0.559
Haggle	274	2,124	1.673	0.219	0.236	0.606
Caenorhabditis elegans	453	2,025	1.566	0.056	0.135	0.666
U. Rovira i Virgili	1,133	5,451	1.561	0.052	0.170	0.902
Hamsterster friendships	1,858	12,534	2.461	0.037	0.176	0.863
Protein	1,870	2,203	2.879	0.212	0.730	1.703
Hamster full	2,426	16,631	2.421	0.037	0.142	0.897
Facebook (NIPS)	2,888	2,981	4.521	0.242	0.675	0.967
Human protein (Vidal)	3,133	6,149	2.132	0.127	0.388	1.210
Reactome	6,327	146,160	1.363	0.011	0.138	1.053
Route views	6,474	12,572	2.462	0.129	0.365	0.926
Pretty Good Privacy	10,680	24,316	4.261	0.110	0.721	1.871
arXiv astro-ph	18,771	198,050	2.861	0.024	0.128	1.049
CAIDA	26,475	53,381	2.509	0.124	0.361	0.969
Internet topology	34,761	107,720	2.233	0.081	0.319	1.229
Brightkite	58,228	214,078	2.481	0.068	0.359	0.942

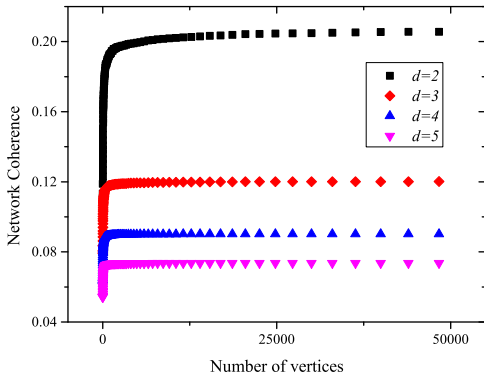
富环无标度网络模型

- 一阶抗噪性不随网络规模增长
- Barabási-Albert (BA) 网络



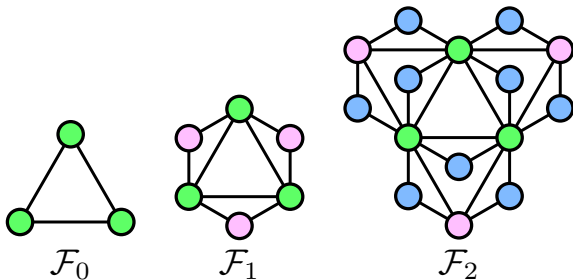
富环无标度网络模型

- 一阶抗噪性不随网络规模增长
- 高维随机阿波罗网络



确定性富环无标度网络模型

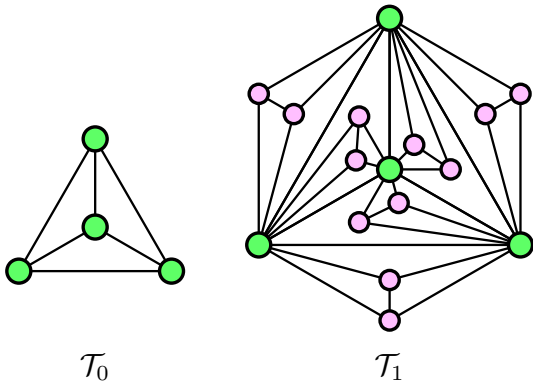
- H_{FO} 在伪分形网络和 4-团模体网络中，一阶抗噪性趋于一个常数。
- 伪分形网络：典型的确定性无标度网络模型。



- $H_{FO}(\mathcal{F}_g) = \frac{25}{84} + o(1)$.

确定性富环无标度网络模型

- H_{FO} 在伪分形网络和 4-团模体网络中，一阶抗噪性趋于一个常数。
- 伪分形网络：典型的确定性无标度网络模型。



- 4-团模体网络: $H_{FO}(\mathcal{T}_g) = \frac{39}{176} + o(1)$.

- ① 绪论：背景、应用和基础知识
- ② 一致性稳态性能与网络结构的关系
 - 网络结构对一阶抗噪性的影响
 - 富环无标度网络的抗噪性
- ③ 一致性的计算和优化：算法和复杂性
 - 相对测量误差对一致性的影响：边中心性的计算
 - 领导者选择问题的近似算法
 - 最小化网络熵的复杂性
- ④ 带噪声的二阶一致性网络
 - 二阶抗噪性与双调和距离
- ⑤ 总结与展望

基于相对状态测量的一致性网络

- 系统的最佳线性无偏估计由以下方程给出 [BH06]

$$\dot{\mathbf{x}}_{[u]} = D_u^{-1} \sum_{v \in \mathcal{N}_u} r_{u,v}^{-1} (y_{u,v} - \sigma_{u,v}) .$$

其中 $y_{u,v} = \mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[v]} + \xi_{u,v} \cdot r_{u,v}$ 为 $\xi_{u,v}$ 的功谱密度。

基于相对状态测量的一致性网络

- 系统的最佳线性无偏估计由以下方程给出 [BH06]

$$\dot{\mathbf{x}}_{[u]} = D_u^{-1} \sum_{v \in \mathcal{N}_u} r_{u,v}^{-1} (y_{u,v} - \sigma_{u,v}) .$$

其中 $y_{u,v} = \mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[v]} + \xi_{u,v} \cdot r_{u,v}$ 为 $\xi_{u,v}$ 的功谱密度。

- 如果将 $r_{u,v}$ 理解为一条边的电阻，那么系统总（稳态）方差为

$$R_{RM} = \frac{1}{2n} R(G) ,$$

$R(G)$ 为基尔霍夫系数。

双调和距离相关中心性

- 一条边 e 的重要性表现为 $R(G)$ 关于边 e 的电阻的倒数。
 - $\mathcal{C}(e) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial R(G)}{\partial r_e}$.

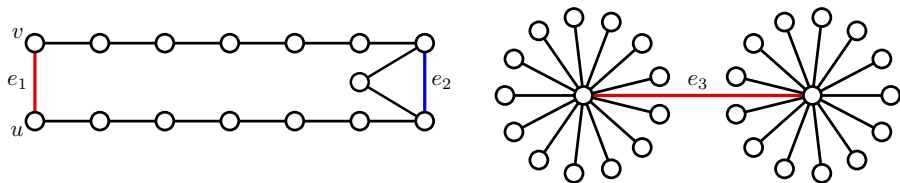
双调和距离相关中心性

- 一条边 e 的重要性表现为 $R(G)$ 关于边 e 的电阻的倒数。
 - $\mathcal{C}(e) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial R(G)}{\partial r_e}$.
- 对于一条边 $e = (u, v)$, $\mathcal{C}(e)$ 和两个端点间的双调和距离 $d_B(u, v)$ 相关。

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(e) &= \frac{\partial R(\mathcal{G})}{\partial r(e)} = n \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger)}{\partial w_e} \frac{dw_e}{dr_e} = n \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger + \mathbf{J})}{\partial w_e} \frac{dw_e}{dr_e} \\ &= n w_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = n w_e^2 d_B^2(u, v).\end{aligned}$$

和其他中心性指标的比较

例子



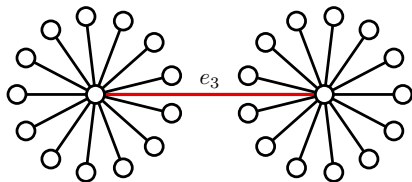
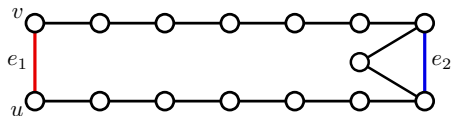
- 介数中心性不能区分 e_1 和 e_2

$$\mathcal{B}(e_1) = \mathcal{B}(e_2) = 24.5$$

$$\mathcal{C}(e_1) = 1.1327, \mathcal{C}(e_2) = 0.5413$$

和其他中心性指标的比较

例子



- 介数中心性不能区分 e_1 和 e_2

$$\mathcal{B}(e_1) = \mathcal{B}(e_2) = 24.5$$

$$\mathcal{C}(e_1) = 1.1327, \mathcal{C}(e_2) = 0.5413$$

- 生成树中心性不能区分 e_3 和其他边

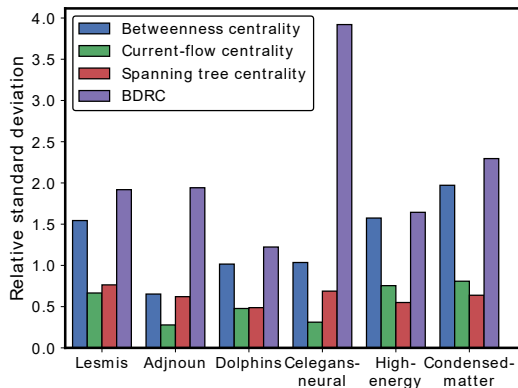
$$\mathcal{S}(e_3) = \mathcal{S}(e_4) = 1$$

$$\mathcal{C}(e_3) = 7, \mathcal{C}(e_4) = 0.9643$$

和其他中心性指标的比较

实验

Network name	$ V $	$ E $
Lesmis	77	254
Adjnoun	112	425
Dolphins	62	159
Celegansneural	297	2148
High-energy	5835	13815
Condensed matter	13861	44619



$$\text{相对标准差} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{标准差}}{\text{平均值}}$$

- $\mathcal{C}(e) = nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = nw_e^2 \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e\|^2.$

快速近似算法的要素

- $\mathcal{C}(e) = nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = nw_e^2 \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e\|^2.$
- 避免计算伪逆：
 - 接近线性时间拉普拉斯求解器 [ST14, KS16]

快速近似算法的要素

- $\mathcal{C}(e) = nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = nw_e^2 \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e\|^2.$
- 避免计算伪逆：
 - 接近线性时间拉普拉斯求解器 [ST14, KS16]
- 在低维空间中近似距离：
 - 随机投影. (Johnson-Linerauss 引理)

快速近似算法的要素

- $\mathcal{C}(e) = nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = nw_e^2 \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e\|^2.$
- 避免计算伪逆：
 - 接近线性时间拉普拉斯求解器 [ST14, KS16]
- 在低维空间中近似距离：
 - 随机投影. (Johnson-Linerauss 引理)
- 算法以高概率返回 $(1 \pm \epsilon)$ 倍近似。
- 时间复杂度为 $\tilde{O}(m(\log c)/\epsilon^2)$, 其中 $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}.$
- 通过一些技巧, 空间复杂度可以降为 $O(m).$

- 算法概要

- 算法以高概率返回 $(1 \pm \epsilon)$ 倍近似。
- 时间复杂度为 $\tilde{O}(m(\log c)/\epsilon^2)$, 其中 $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}$.
- 通过一些技巧, 空间复杂度可以降为 $O(m)$.

- 算法概要

- 构造一个元素为随机 $\pm 1/\sqrt{k}$ 的矩阵 Q , 大小为 $k \times n$, 其中 $k = \lceil 24 \log n / \epsilon^2 \rceil$.

- 算法以高概率返回 $(1 \pm \epsilon)$ 倍近似。

- 时间复杂度为 $\tilde{O}(m(\log c)/\epsilon^2)$, 其中 $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}$.

- 通过一些技巧, 空间复杂度可以降为 $O(m)$.

快速近似算法

- 算法概要

- 构造一个元素为随机 $\pm 1/\sqrt{k}$ 的矩阵 Q , 大小为 $k \times n$, 其中 $k = \lceil 24 \log n / \epsilon^2 \rceil$.
- 令 q_i^\top 为 Q 的第 i 行, 我们可以用拉普拉斯求解器近似 $z_i = L^\dagger q_i$.
令 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^\top$.

- 算法以高概率返回 $(1 \pm \epsilon)$ 倍近似。

- 时间复杂度为 $\tilde{O}(m(\log c)/\epsilon^2)$, 其中 $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}$.

- 通过一些技巧, 空间复杂度可以降为 $O(m)$.

快速近似算法

- 算法概要

- 构造一个元素为随机 $\pm 1/\sqrt{k}$ 的矩阵 Q , 大小为 $k \times n$, 其中 $k = \lceil 24 \log n / \epsilon^2 \rceil$.
 - 令 q_i^\top 为 Q 的第 i 行, 我们可以用拉普拉斯求解器近似 $z_i = L^\dagger q_i$.
令 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^\top$.
 - 对于每一条边 $e \in E$, 设其端点为 u, v , 计算 $\|Z(e_u - e_v)\|^2$, 用于近似边 e 的双调和距离。
-
- 算法以高概率返回 $(1 \pm \epsilon)$ 倍近似。
 - 时间复杂度为 $\tilde{O}(m(\log c)/\epsilon^2)$, 其中 $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}$.
 - 通过一些技巧, 空间复杂度可以降为 $O(m)$.

实验：效率

表: 算法ExactBDRC 和AppExactBDRC 的运行时间, 包含不同精度 ϵ 的取值.

Network	# nodes	# edges	ExactBDRC (s)	AppxBDRC (s) with various ϵ		
				0.3	0.2	0.1
Chicago	823	822	0.1655	0.0496	0.1067	0.4184
Facebook (NIPS)	2888	2981	6.9439	0.6099	1.4355	5.4581
Vidal	2783	6007	6.2797	1.5683	3.4950	13.950
Powergrid	4941	6594	34.851	3.8330	9.0637	40.202
Reactome	5973	145778	61.673	18.916	44.870	176.13
Route views	6474	12572	78.039	3.1174	6.9604	27.826
Pretty Good Privacy	10680	24316	272.87	10.622	23.832	90.053
Astro-ph	17903	196972	1648.6	51.266	116.55	457.30
CAIDA	26475	53381	7396.0	19.173	43.78	158.43
Brightkite	56739	212945	35063	103.27	226.34	935.14
Livemocha*	104103	2193083	-	3078.2	3558.8	6114.4
WordNet*	145145	656230	-	294.80	493.66	1818.4
Gowalla*	196591	950327	-	612.67	1005.7	3029.5
Amazon*	334863	925872	-	1307.5	2570.3	10517
Pennsylvania*	1087562	1541514	-	5314.5	11404	45560

实验：精度

表: 不同 ϵ 时, 算法AppxBDRC 给出结果的平均相对误差.

Network	Mean relative error with various ϵ		
	0.3	0.2	0.1
Chicago	2.75×10^{-2}	1.80×10^{-2}	9.01×10^{-3}
Facebook (NIPS)	2.46×10^{-2}	1.62×10^{-2}	8.14×10^{-3}
Vidal	2.42×10^{-2}	1.64×10^{-2}	7.97×10^{-3}
Powergrid	2.35×10^{-2}	1.57×10^{-2}	8.00×10^{-3}
Reactome	2.36×10^{-2}	1.58×10^{-2}	7.75×10^{-3}
Route views	2.27×10^{-2}	1.54×10^{-2}	7.93×10^{-3}
Pretty Good Privacy	2.26×10^{-2}	1.52×10^{-2}	7.50×10^{-3}
Astro-ph	2.18×10^{-2}	1.47×10^{-2}	7.36×10^{-3}
CAIDA	2.17×10^{-2}	1.45×10^{-2}	7.24×10^{-3}
Brightkite	2.08×10^{-2}	1.39×10^{-2}	6.97×10^{-3}

领导者选择问题

- 系统模型: $\dot{\mathbf{x}}_{[i]} = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[i]} - \mathbf{x}_{[j]}) - \kappa_i \mathbf{x}_{[i]} + \xi_i$,
 κ_i 是倔强系数, 领导者: $\kappa_i > 0$, 跟随者: $\kappa_i = 0$. 或者说,

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S) \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

\mathbf{D}_S 为 0, 1 对角矩阵, 用于选择 k 个节点作为领导者集合。

领导者选择问题

- 系统模型: $\dot{\mathbf{x}}_{[i]} = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[i]} - \mathbf{x}_{[j]}) - \kappa_i \mathbf{x}_{[i]} + \xi_i$,
 κ_i 是倔强系数, 领导者: $\kappa_i > 0$, 跟随者: $\kappa_i = 0$. 或者说,

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S) \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

\mathbf{D}_S 为 0, 1 对角矩阵, 用于选择 k 个节点作为领导者集合。

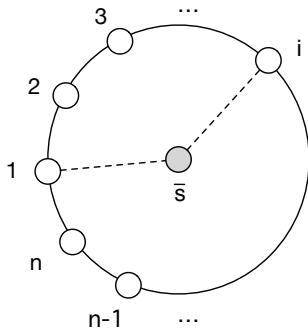
问题 (带噪声领导者选择问题)

给定一个网络 $G = (V, E, w)$, 要求找到大小至多为 k 的领导者集合 $S \subset V$, 使得系统 (1) 的抗噪性尽可能地好, 即

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && R_{\text{NC}}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}((\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S)^{-1}) \\ & \text{subject to} && |S| \leq k. \end{aligned}$$

转化为结构优化问题

- 我们证明了该问题等价于：在增广图 G 中添加虚拟节点 \bar{s} 到其他 k 个节点的连边，使得所有节点到 \bar{s} 的电阻距离之和最小。



超模性和单调性

定理 (单调性 [DoSn00])

在问题 3 中, 对于任意满足 $S \subset T \subset V$ 的非空子集 S 和 T ,

$$R_{\text{NC}}(T) < R_{\text{NC}}(S).$$

定理 (超模性)

在问题 3 中, 对于任意满足 $S \subset T \subset V$ 的非空子集 S 和 T , 以及任意满足 $u \in V \setminus T$ 的点 u ,

$$R_{\text{NC}}(T) - R_{\text{NC}}(T \cup \{u\}) \leq R_{\text{NC}}(S) - R_{\text{NC}}(S \cup \{u\}).$$

贪心算法的近似比例

定理

贪心算法 $S = \text{LeadSel}(G, \mathbf{D}_\kappa, k)$ 输入一个图 $G = (V, E, w)$ 及其拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} , 倔强系数矩阵 \mathbf{D}_κ 和一个整数 $2 \leq k \leq n$, 返回一个 k 个点的集合 S , S 满足

$$R_{\text{NC}}(\{v^*\}) - R_{\text{NC}}(S) \geq \left(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e}\right) (R_{\text{NC}}(\{v^*\}) - R_{\text{NC}}(S^*)) ,$$

其中, $S^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{|Q| \leq k} R_{\text{NC}}(Q)$, $v^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{u \in V} R_{\text{NC}}(\{u\})$

最大化节点的信息中心性

- 节点 v 的信息中心性 \mathcal{C}_v [SZ89] 与该点的电阻距离 \mathcal{R}_v (所有节点到该点的电阻距离的和) 成反比。

最大化节点的信息中心性

- 节点 v 的信息中心性 \mathcal{C}_v [SZ89] 与该点的电阻距离 \mathcal{R}_v (所有节点到该点的电阻距离的和) 成反比。
- 最大化 \mathcal{C}_v 和最小化 \mathcal{R}_v 或 $R_{\text{NC}}(S)$ 等价。

最大化节点的信息中心性

- 节点 v 的信息中心性 \mathcal{C}_v [SZ89] 与该点的电阻距离 \mathcal{R}_v (所有节点到该点的电阻距离的和) 成反比。
- 最大化 \mathcal{C}_v 和最小化 \mathcal{R}_v 或 $R_{\text{NC}}(S)$ 等价。
- 相似的贪心算法适用于最大化节点的信息中心性。

最大化节点的信息中心性

- 节点 v 的信息中心性 \mathcal{C}_v [SZ89] 与该点的电阻距离 \mathcal{R}_v (所有节点到该点的电阻距离的和) 成反比。
- 最大化 \mathcal{C}_v 和最小化 \mathcal{R}_v 或 $R_{\text{NC}}(S)$ 等价。
- 相似的贪心算法适用于最大化节点的信息中心性。
- 在连通图中, 选择与 v 关联的 k 条边添加到图中, 最小化点 v 的电阻距离, 贪心算法的近似比为 $(1 - \frac{1}{e})$.

根据 Sherman-Morrison 公式可得

$$(\mathbf{L}(\{e\}))^\dagger = \left(\mathbf{L} + w(e) \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \right)^\dagger = \mathbf{L}^\dagger - \frac{w(e) \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}.$$

根据 Sherman-Morrison 公式可得

$$(\mathbf{L}(\{e\}))^\dagger = \left(\mathbf{L} + w(e) \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \right)^\dagger = \mathbf{L}^\dagger - \frac{w(e) \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}.$$

点 v 的电阻距离 \mathcal{R}_v 可以表示为

$$\mathcal{R}_v = n \mathbf{L}^\dagger_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \right).$$

简单贪心算法

根据 Sherman-Morrison 公式可得

$$(\mathbf{L}(\{e\}))^\dagger = \left(\mathbf{L} + w(e) \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \right)^\dagger = \mathbf{L}^\dagger - \frac{w(e) \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}.$$

点 v 的电阻距离 \mathcal{R}_v 可以表示为

$$\mathcal{R}_v = n \mathbf{L}^\dagger_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \right).$$

令 $\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \mathcal{R}_v(S) - \mathcal{R}_v(S \cup \{e\})$, 那么

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left(n \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}.$$

简单贪心算法

- 计算拉普拉斯矩阵的伪逆 L^\dagger

简单贪心算法

- 计算拉普拉斯矩阵的伪逆 L^\dagger
- 贪心地选择 k 条边
 - 对所有的候选边计算增量 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$
 - 将增量最大的边对应的节点加入集合 S ，并从候选边中删除
 - 用 Sherman-Morrison 公式更新 L^\dagger .

简单贪心算法

- 计算拉普拉斯矩阵的伪逆 L^\dagger
- 贪心地选择 k 条边
 - 对所有的候选边计算增量 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$
 - 将增量最大的边对应的节点加入集合 S ，并从候选边中删除
 - 用 Sherman-Morrison 公式更新 L^\dagger .
- 总运行时间 $O(n^3)$.

近似 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left(n \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}$$

近似 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left(n \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}$$

- 对于分子，根据 Hutchinson's 蒙特卡罗方法，

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{x}_i. \text{ 并且,} \\ \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} &= \mathbf{e}_v^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v. \end{aligned}$$

近似 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left(n \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}$$

- 对于分子，根据 Hutchinson's 蒙特卡罗方法，

$$\text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{x}_i. \text{ 并且,}$$
$$\left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} = \mathbf{e}_v^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v.$$

- 用接近线性时间拉普拉斯求解器近似计算分子，时间复杂度为 $\tilde{O}(m)$.

近似 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left(n \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} + \text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}$$

- 对于分子，根据 Hutchinson's 蒙特卡罗方法，

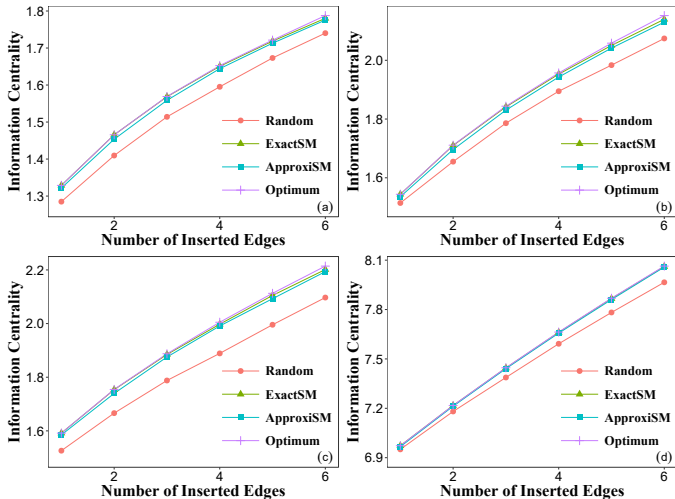
$$\text{Tr} \left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{x}_i. \text{ 并且,}$$
$$\left(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \right)_{[v,v]} = \mathbf{e}_v^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v.$$

- 用接近线性时间拉普拉斯求解器近似计算分子，时间复杂度为 $\tilde{O}(m)$.
- 分母中 $d_R(u, v) = \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e$ 是边 e 两个端点 (u, v) 间的电阻距离，存在算法可用 $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ 的时间近似 [SS11].

- 用以下方式贪心地选择 k 条边
 - 用 $\tilde{O}(m)$ 的时间近似所有候选边的增量 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$ 。
 - 将增量最大的边对应的点加入集合 S ，并从候选边中删除
 - 更新拉普拉斯矩阵 L

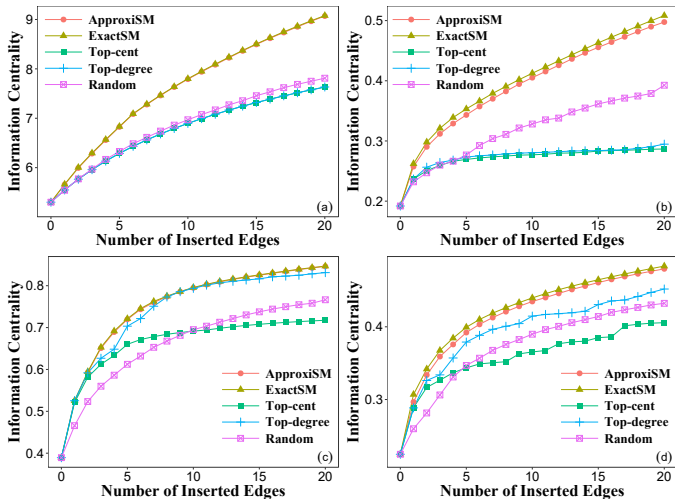
- 用以下方式贪心地选择 k 条边
 - 用 $\tilde{O}(m)$ 的时间近似所有候选边的增量 $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$ 。
 - 将增量最大的边对应的点加入集合 S ，并从候选边中删除
 - 更新拉普拉斯矩阵 L
- 算法的近似比为 $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$ 。
- 总运行时间为 $\tilde{O}(mk\epsilon^{-2})$ 。

实验：优化结果



图：两种贪心算法、随机加边与最优解的优化效果比较。

实验：优化结果



图：贪心算法和启发式基准算法的优化效果比较。

表: 两种贪心算法的优化效果和运行时间的比较.

Network	Time (seconds)			Information centrality		
	ASM	ESM	Ratio	ASM	ESM	Ratio
Virgili	1.3996	0.9172	1.5259	2.5005	2.5037	0.9987
Euroroad	0.6563	0.7593	0.8643	0.4003	0.4069	0.9838
Hamster full	3.0785	4.8528	0.6344	2.9904	2.9944	0.9987
Facebook	1.7151	12.9203	0.1327	0.7937	0.7947	0.9987
Powergrid	5.8727	58.3359	0.1006	0.4327	0.4369	0.9904
ca-GrQc	5.3023	34.0228	0.1558	1.2118	1.2136	0.9985
ca-HepPh	28.7462	620.4557	0.0463	2.2569	2.2592	0.9990
com-DBLP	697.1835	-	-	1.1327	-	-
roadNet-TX	1569.5059	-	-	0.0556	-	-

- 通过添加连接优化网络的性能。

- 通过添加连接优化网络的性能。
- 基于网络抗噪性的一阶一致性网络的结构优化（基数限制）：
 - 复杂性：未知
 - 算法：1) 贪心：非次模，启发式；2) 凸松弛：有额外要求、较慢

- 通过添加连接优化网络的性能。
- 基于网络抗噪性的一阶一致性网络的结构优化 (基数限制):
 - 复杂性: 未知
 - 算法: 1) 贪心: 非次模, 启发式; 2) 凸松弛: 有额外要求、较慢
- 基于网络熵的一致性网络的结构优化 (基数限制):
 - 复杂性
 - 算法: 1) 贪心: 次模 (超模); 2) 凸松弛: 有额外要求、较慢

- 定义: $\mathcal{S}(G) = -\log \mathcal{T}(G)$,
 $\mathcal{T}(G)$ 是一个网络的 (加权生成树数目).

- 定义: $\mathcal{S}(G) = -\log \mathcal{T}(G)$,
 $\mathcal{T}(G)$ 是一个网络的 (加权生成树数目).
- $\mathcal{T}(G)$ 和一致性网络的不确定状态体积成反比.

- 定义: $\mathcal{S}(G) = -\log \mathcal{T}(G)$,
 $\mathcal{T}(G)$ 是一个网络的 (加权生成树数目).
- $\mathcal{T}(G)$ 和一致性网络的不确定状态体积成反比.
- 其他直接应用:
 - 机器人: 即使定位和地图构建 (SLAM)
 - 网络可靠性 (Reliability)
 - 社交网络: 信息传播

基尔霍夫矩阵树定理

- 矩阵树定理

$$\mathcal{T}(G) = \det(\mathbf{L}_{-n}^G).$$

基尔霍夫矩阵树定理

- 矩阵树定理

$$\mathcal{T}(G) = \det(\mathbf{L}_{-n}^G).$$

- 添加边 e 以后, 根据矩阵行列式引理 (matrix-determinant lemma):

$$\mathcal{T}(G + e) = (1 + w_e R_{\text{eff}}(u, v)) \mathcal{T}(G).$$

困难性的规约

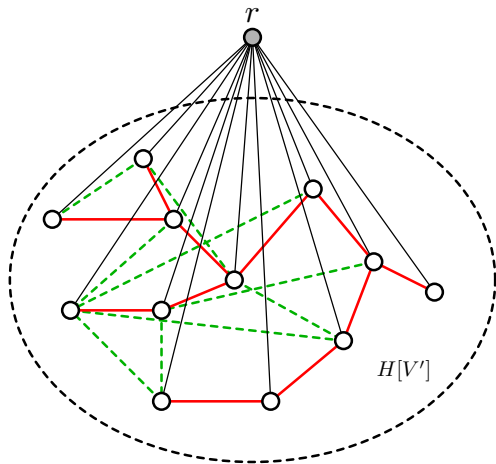


图: 用于问题规约的一个实例

近似最优的困难性

- 规约:

$(1, 2)\text{-TSP} \leq_p \text{最小路径覆盖} \leq_p \text{最大化生成树数目 (最小化网络熵)}.$

近似最优的困难性

- 规约:

$(1, 2)\text{-TSP} \leq_p \text{最小路径覆盖} \leq_p \text{最大化生成树数目 (最小化网络熵)}.$

- 通过路径覆盖以外的边两端的电阻距离给出生成树数目的上界.

近似最优的困难性

- 规约:

$(1, 2)$ -TSP \leq_p 最小路径覆盖 \leq_p 最大化生成树数目 (最小化网络熵)。

- 通过路径覆盖以外的边两端的电阻距离给出生成树数目的上界。

定理

存在一个常数 $c > 0$ 使得给定一个选边最小化网络熵问题的实例, 找到集合 $P \subseteq Q$, $|P| \leq k$, Q 是候选集, 满足

$$\mathcal{S}(G + P) - \mathcal{S}(G) < (1 - c) \cdot (\mathcal{S}(G + P^*) - \mathcal{S}(G)),$$

是 NP-难的。其中 $P^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{S}(G + S)$ 是该问题的一个最优解。

- ① 绪论：背景、应用和基础知识
- ② 一致性稳态性能与网络结构的关系
 - 网络结构对一阶抗噪性的影响
 - 富环无标度网络的抗噪性
- ③ 一致性的计算和优化：算法和复杂性
 - 相对测量误差对一致性的影响：边中心性的计算
 - 领导者选择问题的近似算法
 - 最小化网络熵的复杂性
- ④ 带噪声的二阶一致性网络
 - 二阶抗噪性与双调和距离
- ⑤ 总结与展望

- 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{L} & -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{L} & -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 抗噪性指标

- 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 抗噪性指标

- ① 点对方差: $H_{\text{SO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[k]}(t))^2]$.

- 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 抗噪性指标

- 点对方差: $H_{\text{SO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[k]}(t))^2]$.
- 节点偏移方差: $H_{\text{SO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{\mathbf{x}}_1(t))^2]$.

- 状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t),$$

- 抗噪性指标

① 点对方差: $H_{\text{SO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[k]}(t))^2]$.

② 节点偏移方差: $H_{\text{SO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{\mathbf{x}}_1(t))^2]$.

③ 平均方差:

$$H_{\text{SO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{n} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{\mathbf{x}}_1(t))^2].$$

二阶抗噪性与双调和距离

- 双调和距离 $d_B^2(u, v) = \mathbf{b}_{u,v}^T \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_{u,v}$ [LRF10]

二阶抗噪性与双调和距离

- 双调和距离 $d_B^2(u, v) = \mathbf{b}_{u,v}^T \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_{u,v}$ [LRF10]

- 与二阶抗噪性指标之间的关系

① $H_{\text{SO}}(j, k) = \frac{1}{2} d_B^2(j, k)$

② $H_{\text{SO}}(j) = \frac{1}{2n} \sum_i d_B^2(i, j) - \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$

③ $H_{\text{SO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$

二阶抗噪性与双调和距离

- 双调和距离 $d_B^2(u, v) = \mathbf{b}_{u,v}^T \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_{u,v}$ [LRF10]
- 与二阶抗噪性指标之间的关系
 - ① $H_{\text{SO}}(j, k) = \frac{1}{2} d_B^2(j, k)$
 - ② $H_{\text{SO}}(j) = \frac{1}{2n} \sum_i d_B^2(i, j) - \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$
 - ③ $H_{\text{SO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$
- 基于双调和距离的点指数、基尔霍夫指数

二阶抗噪性与双调和距离

- 双调和距离 $d_B^2(u, v) = \mathbf{b}_{u,v}^T \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_{u,v}$ [LRF10]
- 与二阶抗噪性指标之间的关系
 - ① $H_{\text{SO}}(j, k) = \frac{1}{2} d_B^2(j, k)$
 - ② $H_{\text{SO}}(j) = \frac{1}{2n} \sum_i d_B^2(i, j) - \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$
 - ③ $H_{\text{SO}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i,k} d_B^2(i, k).$
- 基于双调和距离的点指数、基尔霍夫指数
- 点中心性、图连通性

二阶一致性系统抗噪性渐近行为

- 无领导者

网络结构	$H_{FO}(\mathcal{G})$	$H_{SO}(\mathcal{G})$
完全图	$\Theta(1/n)$	$\Theta(1/n^2)$
星形图	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
环	$\Theta(n)$	$\Theta(n^3)$
路径	$\Theta(n)$	$\Theta(n^3)$
科赫网络	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$

- 领导者-跟随者：目前无法直接表达为双调和距离，但可以得到一个下界

- 揭示网络结构对一致性功能的影响

- 揭示网络结构对一致性功能的影响
- 提出误差量化和计算边中心性的算法

- 揭示网络结构对一致性功能的影响
- 提出误差量化和计算边中心性的算法
- 提出领导者选择问题优化算法

- 揭示网络结构对一致性功能的影响
- 提出误差量化和计算边中心性的算法
- 提出领导者选择问题优化算法
- 证明最小化网络熵的复杂性

- 揭示网络结构对一致性功能的影响
- 提出误差量化和计算边中心性的算法
- 提出领导者选择问题优化算法
- 证明最小化网络熵的复杂性
- 二阶一致性稳态性能研究框架、建立相关量与网络结构的联系

- 相关网络优化问题的近似算法和复杂性分析

- 相关网络优化问题的近似算法和复杂性分析
- 二阶领导者选择问题

- 相关网络优化问题的近似算法和复杂性分析
- 二阶领导者选择问题
- 有向网络上的一致性问题、带拓扑切换的系统等

- 相关网络优化问题的近似算法和复杂性分析
- 二阶领导者选择问题
- 有向网络上的一致性问题、带拓扑切换的系统等
- 相关应用的性能分析：如分布式优化等

谢谢！

致谢

章忠志老师

陈关荣老师、Stacy Patterson 老师

Richard Peng, Bassam Bamieh

林苑、齐轶、李寰、单立人、杨冰佳等合作者

复旦大学的老师和同学

家人与朋友

参与评审和答辩的专家