

学校代码: 10246  
学 号: 15110240008

復旦大學

博 士 学 位 论 文  
(学术学位)

带噪声复杂网络的一致性

**Consensus in Noisy Complex Networks**

院 系: 计算机科学技术学院

专 业: 计算机软件与理论

姓 名: 易宇豪

指导教师: 章忠志 副研究员

完成日期: 2018 年 12 月 18 日

## 指导小组成员名单

陈关荣	教 授	香港城市大学
Stacy Patterson	助理教授	伦斯勒理工学院
章忠志	副研究员	复旦大学

## 摘要

一致性问题是在分布式系统和网络控制系统中一个重要的问题。在传统分布式系统中，很多分布式算法或协议都假设知道系统的某些全局信息如节点数、成员编号等，并且假设具有某种全局通信机制，使得任意一个节点可以与所有其他节点通信。然而在很多大规模网络控制系统中，网络成员经常变化，连接经常失效或切换，由于网络资源限制或隐私等方面的原因，节点被限制获得网络的全局信息，这时平均一致性算法（简称一致性算法）成为了网络系统达成共识的一种重要的方式，并被广泛运用于时钟同步、编队控制、传感器网络、分布式优化和学习等领域。与此同时，在社交网络中，一致性问题刻画了个体的观点通过不断交流趋同的过程，因此可以用来研究个体（或群体）之间的观点差异，社团演化等问题。

在一致性网络中，如果节点或者边（代表测量或通信）受到外加扰动或测量误差的影响，各节点状态将无法达到一致。作为一个随机变量，各节点偏移量的大小可以反映一致性算法在该网络中抵抗噪声的能力。具体地，网络抗噪性和网络熵的大小反映了整个系统在噪声干扰下的鲁棒性。本文研究带噪声复杂网络中的平均一致性问题，特别是一致性算法受随机扰动影响的鲁棒性的度量和优化问题，具体研究内容与结果如下：

**揭示了结构对带噪声网络的一阶一致性过程的影响。** 本文通过研究两种确定性的复杂网络模型，揭示了小世界和无标度特性对带噪声网络中一致性过程的期望平均稳态方差（定义为抗噪性）的影响。研究的两种网络模型分别是法雷网络和科赫网络，两种网络分别具有小世界、度分布为指数分布的网络和小世界、度分布为幂律分布的结构特性。利用系统平均稳态方差与网络的拉普拉斯矩阵的谱以及基尔霍夫系数的关系，可以给出这两种确定性网络模型的一阶抗噪性的精确解和渐近行为，并与规则格点网络的抗噪性进行比较。结果显示，平均度相同的规则格点网络的一阶抗噪性随网络规模线性增长，而这两种确定性复杂网络模型的一阶抗噪性为以网络规模的对数速度增长。通过分析能够发现小世界和无标度特性对网络抗噪性具有显著的影响。

**发现富环的无标度网络具有几乎最优的一阶网络抗噪性。** 本文论证了富环的无标度网络对一致性网络中的噪声具有很强的抵抗性。首先给出了系统抗噪性的一些界，包括用网络的平均度给出的一个下界和用网络平均距离给出的一

个上界。接着对现实网络的抗噪性做了实证研究，观察发现：现实无标度网络都具有接近下界的抗噪性。接着本文研究了随机无标度网络模型的抗噪性，并分析了两个确定性无标度网络模型中的渐近行为。结果表明，一阶一致性算法在富环的无标度网络中对噪声具有很强的抵抗性。确切地，在大规模富环无标度网络中，一阶一致性算法的期望平均稳态方差收敛到一个常数，不会随网络变大不断增长。因此，富环的无标度网络具有几乎最优的一阶网络抗噪性。

提出了量化相对测量误差对网络一致性影响的几乎线性时间近似算法。本文接下来研究了基于相对状态测量进行无偏估计的一致性算法。可以用白噪声对测量误差进行建模，研究一个测量（边）的改善对系统整体的影响。具体定义为系统稳态方差随一条边噪声的功率谱密度改变的变化率。这样定义的边中心性等价于在加权图中通过一条边的电阻变化引起的基尔霍夫系数的变化率。对于图中的任意一条边，给出了这个中心性指标的显示表达式，这个量可以用一条边的边权和端点间的双调和距离表示，因此称之为双调和距离相关边中心性（BDRC）。本文发现和其他常用的边中心性指标相比，BDRC可以有效区分加权网络中不同边的重要性，因此可以用作很多现实网络的边中心性度量。本文还给出了双调和距离的快速近似算法，能够用几乎线性的运行时间给出图中所有边的BDRC的准确近似。本文在上百万个节点的网络中验证了算法的实际效率和准确性。

给出了带噪声一致性网络中一类领导者选择问题的近似算法及近似比保证。在一致性网络中可以选择若干节点作为领导者，通过控制这些节点使其他节点达到预定的状态。因此可以通过选择领导者节点的位置来优化一个一致性系统的抗噪性。对于带噪声的领导者，其 $k$ -领导者选择问题可以转化为增广图上的结构优化问题。具体来说，可将带倔强系数的 $k$ -领导者选择问题转化为一个虚拟节点到候选点加边最小化电阻距离的问题。本文证明了该问题的目标函数的超模性，并基于此证明了贪心算法的近似比。我们还将贪心策略应用于加边最大化一个特定点的信息中心性这一等价问题。本文提出了两个有效的贪心算法。包括一个精确的贪心算法和一个快速贪心算法。从实际效果上看，两种算法都可以给出近似比很高的优化结果；从运行时间上看，后者具有明显的优势，可以应用于大规模网络的带噪声领导者选择问题，或加边最大化节点信息中心性的问题。

证明了一阶带噪声一致性网络的结构设计的近似困难性。在带噪声的网络中，网络熵可以刻画一致性过程的不确定状态的大小。本文证明了存在一个确定的常数 $c$ ，使得对于通过加边（基数限制）最小化网络熵这个问题，近似到最优

解的  $(1 - c)$  倍以内是 **NP**-困难的。由于网络熵和网络的加权生成树数目有直接的联系，因此本文通过证明加边最大化一个连通图的生成树数目的指数近似困难性，从而证明了加边最小化网络熵的近似困难性。加边最大化连通图生成树数目问题可以由最小路径覆盖问题规约得到；最小路径覆盖问题的困难性又由距离为 1 和 2 的旅行商问题的近似困难性得到。

建立了衡量二阶一致性算法受随机噪声影响的抗噪性分析框架。编队控制问题中常常用二阶一致性算法调整节点的状态。和一阶系统相似，二阶系统也会受到加性随机扰动的影响。因此，本文提出了衡量整个网络和网络各个节点间状态偏移的一组抗噪性指标，包括（稳态期望）点对方差、节点偏移方差和系统总方差。所有这些二阶共识网络中的抗噪性指标可以用图上的双调和距离及与之相关的中心性指标给出，本文给出了这些指标关于网络拉普拉斯矩阵的精确表达式，计算了一些常见网络上的二阶抗噪性，并与一阶抗噪性的结果进行了比较。本文通过建立二阶一致性网络抗噪性与双调和距离的联系，为研究网络结构如何影响带噪声网络的二阶一致性提供了理论分析的框架。

**关键词：**复杂网络，网络控制，分布式算法，平均一致性，随机噪声，抗噪性，网络熵，算法，复杂性，**NP**-困难，结构优化，领导者选择，谱图论，拉普拉斯矩阵，中心性

**中图分类号：**TP393



# Abstract

Consensus is a fundamental problem in distributed systems and networked control systems. In traditional distributed algorithms, some global information of the system, such as the number of nodes and member identities, is assumed to be available. These algorithms also often rely on global communication mechanisms that enable each node to communicate with every other node in the network. However, in many massive networked control systems, membership changes frequently; links fail and restore constantly due to mobility; and global information may not be known because of privacy concerns or resource limits of each node. The averaging consensus algorithms, or referred to as consensus algorithms when context is clear, are profound on reaching agreements in such systems, and have been widely applied to clock synchronization, distributed control, distributed optimization and learning. Moreover, consensus process describes the opinion dynamics of reaching agreements in social networks. Therefore it can be used to study the opinion differences between individuals or groups, and the evolution of social communities.

In consensus systems, if nodes or edges (representing measurements or communications) are subject to stochastic noises, the state of nodes will not reach an equilibrium. As a random variable, the deviation from average of each vertex indicates the impact of disturbance on the node. Specifically, the coherence and entropy of a network reflects the robustness of the noisy consensus dynamics of the network. In this thesis we study the problem of averaging consensus in complex networks, especially the problem of measuring and optimizing the robustness of consensus under stochastic disturbances. The main contributions of this thesis are summarized as follows.

**The impact of complex network structures on the noisy first-order consensus dynamics is unveiled.** We study the first-order consensus dynamics in two family of deterministic networks to unveil the impact of small-world and scale-free structures on the mean steady-state variance (defined as coherence) of the noisy consensus system. The considered network models are Farey graphs as representatives of small-world networks and Koch networks as representatives of scale-free networks. Applying the relations between network coherence and the spectra of Laplacian matrix, as well as the

Kirchhoff index, we analyze the network coherence of these networks by deducing their exact expressions and asymptotic behaviors. We also compare the results with those of regular-ring lattices. The results show that while the regular-ring lattices with the same average degrees have network coherence of  $\Theta(n)$ , both Farey graphs and Koch graphs have small network coherence of  $\Theta(\log n)$ , where  $n$  is the number of nodes. The results show that small-world and scale-free structures significantly improve the first-order coherence of networks.

**Almost optimal network coherence of scale-free loopy structure in first-order consensus dynamics is discovered.** We show that scale-free networks with loopy structure are resistant to noise in first-order consensus dynamics. We first carry out some bounds for first-order network coherence, including a lower bound given in terms of the average degree and an upper bound given in terms of the average distance. Then we conduct empirical study for real network data. We observe that real networks have coherence that is close to the lower bounds. Then we also conduct empirical study for stochastic scale-free models. Subsequently, we derive exact expressions as well as asymptotic behaviors of the first-order network coherence for two deterministic scale-free network models with loopy structure. Results show that the first-order consensus algorithm is resistant to noise in scale-free loopy networks. Specifically, in large-scale networks, network coherence converges to constants instead of growing with network size. Therefore we argue that scale-free networks with loopy structure have almost optimal first-order network coherence.

**The impact of the relative measurement errors on network coherence is quantified and a nearly-linear time approximation algorithm is proposed.** We investigate a consensus algorithm that calculates unbiased estimation based on relative measurements. We use white noise to model the errors, and investigate the impact of the improvement of a measurement (edge) on the performance of the system. Specifically, we define an edge centrality by the rate at which the steady-state variance of the system changes with respect to the change of the power spectral density of the white noise on that edge. This in turn is equivalent to the rate at which the Kirchhoff index changes with respect to the resistance of an edge. We express explicitly the centrality measure for any edge by its weight and biharmonic distance between its end vertices. Therefore we refer to it as biharmonic distance related centrality (BDRC). We show that the BDRC



is more discriminating than other frequently used centrality measures. We propose an approximation algorithm which calculates an approximation of BDRC for all edges in nearly-linear time. We further evaluate the efficiency and accuracy of the algorithm by running it in large-scale networks with more than one million vertices.

**Approximation algorithms with provable bounds are proposed for a type of leader-selection problem in noisy consensus.** In a consensus network, we can select some nodes in the network as leaders and drive the network to a particular state by controlling the leaders. For the noise-corrupted leaders, we recast the problem of  $k$ -leader selection into a structural optimization problem in an augmented graph. In this paper we focus on the problem of selecting  $k$  stubborn leaders. We study an equivalent problem of adding edges to a virtual node to minimize its resistance distance. We further prove the submodularity of the leader selection problem and show the approximation ratio of a greedy algorithm. We also apply the greedy strategy to an equivalent problem of centrality maximization. We propose two greedy approximation algorithms, including an exact greedy algorithm and a fast greedy algorithm. We show the effectiveness and efficiency of the algorithm by running experiments on real networks. Results show that both algorithms produce good approximation while the second one is much faster. Our fast approximation algorithm can be easily applied to large-scale networks of more than a million vertices for both leader selection problem and information centrality maximization problem.

**Hardness of approximation of structure design in first order noisy consensus networks is proved.** In a consensus network with additive noises, network entropy describes the volume of uncertainty states. We show that there is a absolute constant  $c$  such that it is **NP**-hard to minimize network entropy within a  $(1 - c)$  multiplicative factor. We prove the hardness of approximation of network entropy by proving the exponential inapproximability of maximizing the number of spanning trees of a connected graph. The hardness of maximizing the number of spanning tree is reduced from the minimum path cover problem, whose hardness again follows by the inapproximability of the Traveling Salesman Problem with distance 1 and 2.

**The analytical framework for the coherence of the second-order consensus algorithm with stochastic disturbances is established.** The second-order consensus

algorithm is often used in formation control problems to adjust the state of vehicles. Similar to first-order consensus systems, second-order systems are also subject to stochastic disturbances. Therefore we propose a set of measures to describe the deviations of states of nodes and the whole network, including (the expected steady-state) pairwise variance, vertex (deviation) variance, and system variance. We find that all these consensus measures are naturally related to the biharmonic distance and its derived centrality indices and (generalized) Kirchhoff index. We explicitly express these measures in terms of the Laplacian matrix of the graph, and calculate the exact expressions for some typical network structures. We also compare the results of first- and second-order systems to show their differences. Our work provides a graph-theoretical framework for the analysis of noisy second-order consensus systems.

**Keywords:** Complex Networks, Networked Control, Distributed Algorithm, Averaging Consensus, Stochastic Noise, Coherence, Network Entropy, Algorithm, Complexity, NP-Hardness, Structural Optimization, Leader Selection, Spectral Graph Theory, Laplacian Matrix, Centrality

**Chinese Library Classification:** TP393

# 主要符号表

## 标量、向量和矩阵

标量用小写细斜体表示，向量用小写粗体表示，矩阵用大写粗体表示。注意向量和矩阵元素的表示方式： $\mathbf{x}_i$  表示编号为  $i$  的向量， $\mathbf{x}_{[i]}$  表示向量  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个元素。

$x$	标量
$f(\cdot)$	标量函数
$\mathbf{x}$	向量
$\mathbf{X}$	矩阵
$\mathbf{x}_{[i]}$	向量元素
$\mathbf{X}_{[i,j]}$	矩阵元素
$\mathbf{x}^\top$	向量转置
$\mathbf{X}^\top$	矩阵转置
$\mathbf{X}^{-1}$	矩阵的逆
$\mathbf{X}^\dagger$	Moore-Penrose 逆
$\text{Tr}(\mathbf{X})$	矩阵的迹
$\det(\mathbf{X})$	矩阵行列式
$\ \mathbf{x}\ $	$\ell_2$ 范数
$\ \mathbf{x}\ _A$	$A$ 范数
$\ \mathbf{X}\ $	谱范数
$\ \mathbf{X}\ _F$	Frobenius 范数

## 图及矩阵表示

$G = (V, E, w)$	无向图
$\vec{G} = (V, \vec{E}, w)$	有向图
$n, m$	点数、边数
$w(e), w(u, v)$	边 $e = (u, v)$ 的权重
$\mathbf{L}$	拉普拉斯矩阵
$\mathbf{B}$	边-点关联矩阵
$\mathbf{W}$	边权对角矩阵
$\mathbf{A}$	邻接矩阵
$\mathbf{D}$	度对角矩阵
$u \sim v$	$u, v$ 相邻
$\mathcal{N}_u$	$u$ 的所有邻居的集合
$\mathcal{T}(G)$	生成树数目

## 网络结构及电阻相关

$\gamma$	幂律分布的幂指数
$\rho$	网络平均度
$\mu$	平均距离
$G_R = (V, E, r)$	电路（电阻网络）
$r_e$	一条边的电阻
$R_{\text{eff}}(u, v), d_R(u, v)$	等效电阻（电阻距离）
$R(G)$	基尔霍夫系数
$\mathcal{R}_v(G)$	点 $v$ 的电阻距离
$I_v$	点 $v$ 的信息中心性
$d_B(u, v)$	双调和距离

## 网络控制系统

$\mathbf{x}$	状态向量
$\dot{\mathbf{x}}$	$\mathbf{x}$ 对时间的一阶导数
$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$	状态空间方程中的矩阵
$\xi, \xi$	高斯白噪声及向量
$\mathbf{W}, \mathbf{W}$	维纳过程及向量
$\delta(t_1 - t_2)$	狄拉克函数
$\mathfrak{G}$	传递函数
$\ \mathfrak{G}\ _2, \ \mathfrak{G}\ _\infty$	$\mathcal{H}_2$ 范数、 $\mathcal{H}_\infty$ 范数
$\Sigma$	稳态协方差矩阵
$H_{\text{FO}}, H_{\text{SO}}$	一阶、二阶抗噪性
$\mathcal{S}$	网络熵

## 其他

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	实数集合、正实数集合
$\mathbb{E}(\cdot)$	期望
$\text{Var}(\cdot)$	方差
$\text{Re}(\cdot)$	复数的实部
$\log(\cdot)$	以 2 为底的对数
$e$	常数 $e$ ，注意和边 $e$ 区别
$\approx_\epsilon$	$\epsilon$ 近似
$O(\cdot), \Theta(\cdot), \Omega(\cdot), o(\cdot)$	渐近行为记号
$\tilde{O}(\cdot)$	忽略 $\text{Poly}(\log n)$ 因子的大 $O$ 符号

# 目录

摘要	III
Abstract	VII
主要符号表	XI
目录	XIII
<b>1 绪论</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景及意义	1
1.2 研究历史和现状	2
1.3 平均一致性算法的应用	5
1.4 本文的主要贡献	7
1.5 论文组织结构	9
<b>2 基础知识</b>	<b>11</b>
2.1 图及其矩阵表示	11
2.2 等效电阻和生成树数目	12
2.3 基尔霍夫系数和信息中心性	14
2.4 双调和距离	14
2.5 平均一致性算法	16
2.5.1 一阶算法	16
2.5.2 二阶算法	17
2.6 白噪声和随机微分方程	18
2.7 带噪声网络的一致性	19
2.8 $\mathcal{H}_2$ 范数	20
2.9 抗噪性和网络熵	21
2.10 次模函数和超模函数	22
<b>3 网络结构对一致性的影响</b>	<b>23</b>
3.1 引言	23
3.2 网络抗噪性	24
3.3 法雷图的抗噪性	25
3.3.1 构造方法和结构特性	26
3.3.2 抗噪性解析	28
3.4 科赫图的抗噪性	35

3.4.1	构造方法和结构性性质	35
3.4.2	抗噪性解析	36
3.5	与规则格点网络的比较	36
3.6	本章小结	40
<b>4</b>	<b>富环无标度网络的一阶抗噪性</b>	<b>41</b>
4.1	引言	41
4.2	一阶网络抗噪性的上下界	44
4.3	真实网络的一阶抗噪性	46
4.4	随机无标度网络模型中的一阶抗噪性	48
4.4.1	Barabási-Albert 网络的抗噪性	48
4.4.2	高维随机阿波罗网络的抗噪性	49
4.5	确定性网络的一阶抗噪性	50
4.5.1	伪分形无标度网络的抗噪性	51
4.5.2	4-团模体网络的抗噪性	52
4.6	结果分析	55
4.7	本章小结	56
<b>5</b>	<b>相对测量误差对一致性的影响</b>	<b>57</b>
5.1	引言	57
5.2	基于相对测量误差的一致性估计	59
5.3	测量误差对稳态方差的影响	61
5.4	双调和距离相关中心性	62
5.5	快速近似算法	64
5.6	实验评估	67
5.7	本章小结	70
<b>6</b>	<b>一阶一致性系统的领导者选择</b>	<b>71</b>
6.1	引言	71
6.2	系统模型和问题形式化	73
6.3	转化为电阻距离优化	74
6.4	目标函数的超模性	76
6.5	贪心算法及近似比例	78
6.6	提高网络中节点的信息中心性	80
6.6.1	简单贪心算法	80
6.6.2	快速贪心算法	82
6.7	实验评估	85
6.7.1	贪心算法的有效性	85
6.7.2	贪心算法的效率比较	87
6.8	本章小结	88

<b>7</b>	<b>最小化网络熵的复杂性</b>	<b>89</b>
7.1	引言 . . . . .	89
7.2	主要结果 . . . . .	92
7.3	证明概要 . . . . .	94
7.4	近似困难性 . . . . .	95
7.4.1	最小路径覆盖的近似困难性 . . . . .	96
7.4.2	最大化生成树数目的指数近似困难性 . . . . .	97
7.5	本章小结 . . . . .	102
<b>8</b>	<b>二阶一致性的抗噪性研究框架</b>	<b>103</b>
8.1	引言 . . . . .	103
8.2	二阶一致性系统的抗噪性 . . . . .	104
8.2.1	系统模型 . . . . .	104
8.2.2	性能指标 . . . . .	105
8.2.3	双调和距离相关系数 . . . . .	106
8.3	带扰动的二阶共识系统分析 . . . . .	107
8.3.1	点对方差 . . . . .	108
8.3.2	节点偏移方差 . . . . .	110
8.3.3	系统总方差 . . . . .	113
8.4	解析示例 . . . . .	113
8.5	与一阶共识网络抗噪性的比较 . . . . .	125
8.6	本章小结 . . . . .	126
<b>9</b>	<b>总结与展望</b>	<b>127</b>
9.1	全文总结 . . . . .	127
9.2	未来工作展望 . . . . .	129
	参考文献	<b>131</b>
	科研成果	<b>148</b>
	致谢	<b>149</b>





# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

复杂网络 [1–7] 是研究现实世界复杂系统的一个重要的工具。通过对复杂系统的合理抽象，可以将其分解为大量相互关联的组成部分，而系统的整体行为特征则由各部分之间的相互作用决定。研究表明，大量的复杂系统都可以用适当的方式建模成网络，包括生物网络（基因网络、蛋白质网络和代谢网络）、神经网络、社交网络、通信网络、交易网络、基础设施网络（电网、道路网）等等。而系统的行为往往与网络的连接方式密切相关。大量的研究发现，许多现实网络具有相似的结构特征，如无标度 [8]、小世界 [9]、模块性 [10] 等等，而这些结构特征也导致了它们一些共同的行为特征，如网络渗流、级联失效、疾病传播等过程中的行为受到网络拓扑的显著影响。网络科学的研究范畴包括网络的结构和动力学。其中，网络结构如何对系统的动力学行为产生影响，一直是复杂网络的研究重点。如何利用网络的一些特性，高效地控制网络整体的行为，最近几年也成为了网络科学研究的一大热点。

网络上的一致性（Consensus，又称共识）问题 [11–13] 一直是复杂网络重点关注的一个问题，其原因是一致性问题具有深厚的工程学和社会学背景，被应用到大量的分布式系统场景中 [12, 14]，同时和社交网络分析也有紧密的联系。与传统分布式系统中使用的一致性 [15, 16] 算法不同，本文研究的平均一致性算法 [11, 13, 17–21] 是一种渐近一致性算法，通常在大规模的网络系统中被用于估计一些状态量，使得网络节点间就该状态达成共识。由于其具有良好的扩展性和容错性 [17, 18]，该算法被广泛应用于时钟同步 [22–24]、负载均衡 [25–27]、汽车编队 [28]、传感器网络 [29]、分布式优化 [30]、分布式学习 [31, 32] 等领域。在渐近一致性算法的作用下，网络节点状态的变化过程可以用相关的动力学方程刻画，而这一过程受到网络拓扑结构的显著影响 [33]，因此该过程成为了网络科学和分布式控制领域的一个重要的研究课题。不仅如此，平均一致性过程最初是由社会学学者提出 [34]，用于描述人群中个体观点的变化，刻画了个体之间通过交流使得观点逐渐趋于一致的过程。通过近期的一些研究，以及本文的分析可以发现，一致性过程还与社交网络中一些广泛使用的概念有重要的联系，如信息中心性 [35]、稀疏割 [36] 等等。因此，一致性问题在社交网络分析中也具有深厚的背景和广泛的应用前景。与此同时，由于一致性网络的性能与网络结构密切相

关 [33], 优化一致性网络的性能往往可以转化为优化网络结构的一个等价的问题 [37–40]。因此一致性问题与很多其他工程应用有密切的联系, 比如, 根据网络熵和生成树数目之间的联系 [40], 网络一致性的优化还可以用于即时定位与地图构建等工程应用中 [41]。

由于一致性问题广泛的应用背景, 理解一致性过程具有重要的科学意义, 优化一致性网络的性能也具有重要的应用价值。目前已有大量的研究对网络上的平均一致性问题, 特别是不受外界扰动影响的一致性问题进行了深入研究, 包括稳定性分析、收敛条件、收敛速度等等。然而许多实际系统都受到外界环境中的随机扰动影响, 同时, 传感器对实际状态的测量值也存在一定的随机误差。这些扰动或测量误差可以通过噪声进行建模。在附加噪声的影响下节点状态将不能达到精确的一致, 而会在共识状态附近涨落。节点状态的协方差矩阵的期望会趋向一个稳态。噪声对系统的影响大小体现了一致性网络的鲁棒性, 以及网络各个部分之间关联的程度。

在研究带随机扰动的一致性问题时系统的状态可由一个随机过程描述, 通常关注相应过程的一些统计量的期望值, 特别是这些值的稳态。本文关注的一些指标包括稳态方差与协方差、网络熵等等。这些指标从不同角度描述了系统整体和各个部分受到噪声影响的程度和网络的连接情况。

## 1.2 研究历史和现状

DeGroot 关于社会中个体一致性问题的研究 [34] 是研究网络一致性问题的第一个工作。DeGroot 研究了  $n$  个人的观点互相影响趋于一致的过程。假设个体  $i$  的观点是随机变量  $\theta$  的一个离散概率分布  $F_i$ ,  $\theta$  的取值定义在一个有限的集合  $\Omega$  上。这些个体通过信息交互更新自己对概率分布的估计, 节点  $i$  根据规则  $F_i(t+1) = \sum_j p_{i,j} F_j(t)$  更新自己分布,  $p_{i,j}$  是节点自己确定的连接强度, 代表了节点  $j$  对  $i$  的影响程度,  $\sum_j p_{i,j} = 1$ 。DeGroot 给出了该过程收敛的条件和最后收敛到的分布。Chatterjee 和 Seneta [42] 随后研究了  $p_{i,j}$  随时间变换的情况, 给出了系统收敛对  $p_{i,j}(t)$  的要求。

Tsitsiklis 和 Bertsekas 等人研究了并行计算中的一个类似的问题 [11, 12, 43], 即如何让  $n$  个处理器就某个数值达成共识。节点  $i$  迭代使用算法  $x_i(t+1) = \sum_j a_{ij} x_j(t)$  更新状态  $x_i$ 。这个算法是一些并行优化程序中的一个子程序 [11]。这些工作给出了本质上和 [42] 等价的一些收敛条件, 并直接表达为图序列  $G(t)$  须

满足的一些条件。Cybenko [25] 研究了一个负载均衡中的类似的问题，即  $n$  个处理节点都想要尽量均匀地分配任务，按照  $x_i(t+1) = x_i(t) + \alpha(x_j(t) - x_i(t))$  更新任务数。

Reynolds [44] 研究了模拟鸟群运动的分布式规则。Vicsek 等人 [45] 研究了一个群体运动的模型，该模型假设有很多速度相同的粒子，初始时向不同的方向运动，不同的粒子根据一定范围内的其他粒子的运动方向调整自己的运动方向，最终达到共识。该模型可以看做是 [11, 42, 43] 中的问题的一种特殊情况。

Jadbabaie 等人 [46] 为 Vicsek 模型 [45] 的收敛性提供了理论证明，给出了该模型的收敛条件。该论文同时掀起了研究网络共识的一股新热潮。因为一致性算法的表现与网络的连接情况联系紧密，所以很多研究通过通信的图的结构来分析一致性算法的表现。在该领域中，众所周知，图的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  对一致性算法的表现有重要的影响。

因为自治系统通常用在开放的环境里面，因此必须要对不确定的外部环境具有良好的鲁棒性。外部的干扰可以有不同的表现形式，如节点或连接的失效，节点或通讯连接受到不确定的外界信号的干扰等等。此外，在传感器网络等应用场景中，算法依赖于节点对状态的测量值，测量值包含一些随机误差。外界扰动和测量误差可以用随机噪声进行建模，而根据具体情况，噪声可以作用到图的节点或边上，从而影响整个网络中算法的运行结果。因此图的结构如何影响一致性算法的表现是相关工作的研究重点。

一系列工作 [46–50] 研究了切换拓扑的情况下系统的收敛条件。大致来说，在一个无限的图序列中，如果一个有界的时间区间内的图的并集是连通的，而且连通的次数是无限的，那么系统可以达到渐近的收敛。[51] 研究了带噪声切换拓扑系统的稳态性能，并给出了其均方差的的一个凸的下界。[52, 53] 研究了切换拓扑系统的收敛速度并给出了收敛速度的一些界。[54] 通过谱图论研究了不带噪声和带噪声的切换拓扑系统的收敛速度。近期的工作 [55] 研究了复合网络构成的切换拓扑系统的收敛速度。

在鲁棒控制 [56] 中，控制系统受外部输入信号扰动的影响常用系统的  $\mathcal{H}_\infty$  和  $\mathcal{H}_2$  范数衡量。 $\mathcal{H}_\infty$  范数常被用来衡量控制系统的鲁棒稳定性，[57–59] 研究了一致性系统的  $\mathcal{H}_\infty$  范数。 $\mathcal{H}_2$  范数刻画了系统在白噪声影响下的方差的放大倍数。在白噪声的干扰下，一致性网络的协方差矩阵（关于时间的期望）会趋于一个与拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  相关的稳态 [40, 60]，从而表现了网络的结构对其上的一致性过

程的深刻影响。这也带来了很有趣的、值得研究的问题，因此人们对于一致性网络的  $\mathcal{H}_2$  范数或白噪声干扰下的其他鲁棒性度量有更多的关注，开展了更为深入的研究工作 [40, 61–65]。相关工作又包括几个不同的方面，接下来选择一些重要的，且与本文相关的问题，做简要的介绍。

**一致性网络在随机噪声影响下的鲁棒性度量：** Xiao 等人 [61] 提出用稳态方差来衡量受噪声影响的离散一致性网络的鲁棒性。Korniss 等人 [66] 研究了带噪声环境中的复杂网络同步行为，并揭示了该过程与随机游走、电阻网络间的重要联系。Bamieh 等人 [65] 提出了一个宏观的鲁棒性度量，抗噪性 (Coherence)，用来解释一致性网络的  $\mathcal{H}_2$  范数。后续的研究发现 [64, 67] 网络的抗噪性与网络的基尔霍夫指数以及图上的等效电阻以及随机游走的通勤时间联系紧密。[65] 在  $d$  维圆环面上定义了一些微观衡量指标，并给出了网络抗噪性在  $d$  维圆环面上的渐进行为。在最近的研究中，Siami 和 Motee [40] 以及 de Badyn 等人 [68] 先后定义了网络的熵，[40] 用一致性系统不确定状态体积的对数来衡量系统对随机噪声的稳定性。[40] 中还阐明了系统不确定状态的体积与图上的加权生成树数目的紧密联系。

**网络结构优化：** 研究表明，网络拓扑结构对网络抗噪性行为有重要的影响，因此通过优化网络结构来优化一致性算法的表现成为了一个重要的研究方向。这方面的工作包括通过调整网络的结构加快一致性算法的收敛速度，或者优化网络的抗噪性。大部分的工作通过调整边权优化网络的结构，把问题转化为半定规划 (Semidefinite Programming, SDP) 求解 [61, 69]。近期的一些工作考虑了通过加边 [39, 70–72] 加强网络连通性，从而优化算法的表现。现有工作一般通过松弛为 SDP 求解。相比 SDP，组合方法可能会具有更快的速度和更强的可解释性，然而这方面的工作还比较欠缺，部分已有的尝试 [73] 被证明是不可靠的 [74, 75]。另一方面，尽管网络控制系统优化的复杂性（困难性）是一个重要的课题，近期引起了一些学者的关注 [76]，目前对一致性网络结构优化的复杂性还缺乏深入研究。

**领导者选择问题：** 在一致性网络中，可以选取所有节点的一个子集，让子集中的节点跟踪一个外部信号，从而通过控制部分节点达到控制整个网络的目的。这样的一致性被称为领导者-跟随者一致性 (leader-follower consensus) [37, 38, 63, 77–83]。领导者-跟随者一致性在网络控制 [84]、社交网络观点共识 [85]、传感器网络 [86] 等领域有广泛的应用。在领导者选择问题中，一般考虑两种情况：领导者不受噪声影响 (noise-free leaders) [63, 77, 78, 81]，或领导者也受到

噪声干扰 (noise-corrupted leaders) [37, 38, 80, 87]。文献 [77, 78] 证明了第一类问题的超模性 (supermodularity)，并据此提出了时间复杂度为  $O(n^3)$  的， $(1 - 1/e)$  倍近似的贪心算法。文献 [80, 88] 给出了解决问题第二类问题的算法，包括内点法 [88] 和贪心算法 [80, 88]，其中贪心算法的时间复杂度为  $O(n^3)$ ，内点法具有多项式的运行时间。此外，文献 [80, 88] 并没有给出这些算法的近似比，而是以一种启发式的方式提出。

谱图理论 [36] 和算法源于利用矩阵的特征值和特征向量分析一个图的性质，相关算法在机器学习、图像处理和网络科学中具有广泛的应用。谱图论早期的一个研究课题是基于特征向量的图分割 [89, 90] 或谱聚类 [91, 92]，即首先计算图的拉普拉斯矩阵的特征向量，再用几何、组合的方法对节点进行聚类。除此之外，还包含各种基于随机游走的网络数据挖掘研究。

Spielman 和滕尚华开创性地提出了第一个接近线性时间的拉普拉斯求解器 (Laplacian solver) [93] 并因此荣膺 2015 年的哥德尔奖。最近几年，接近线性时间拉普拉斯求解器算法取得了长足的进步 [94, 95] 并开始走向实际应用。谱算法和科学计算以及组合图论的结合导致了设计图论算法的“拉普拉斯范例” (Laplacian paradigm)。很多图上的经典问题当前最快的算法都与谱算法的新进展密切相关，包括最小费用流、最大流、随机游走的稳态分布和带负权的最短路的当前最快算法。这些算法的设计常常得益于对拉普拉斯范例中已有的一些概念的更深入的理解，比如电阻距离、舒尔补和图稀疏化等等。此外，很多线性系统、优化、数值计算和数据挖掘问题都能够与谱算法建立联系并得到提高。本文研究的平均一致性算法与图的拉普拉斯矩阵具有天然的联系，因此在本文中我们也将利用谱算法的最新成果设计快速算法，用于解决带噪声网络一致性的计算和优化问题。

### 1.3 平均一致性算法的应用

本节列举平均一致性算法的部分应用。

1. 参数的分布式估计：一个传感器网络需要对一系列参数达成共识。每个传感器可以测量一组数据，这组数据是参数的一个线性函数加上噪声以后的值。传感器需要合并这些测量值，并对参数进行（分布式的）最大似然估计。传统的广播方法或基于生成树的方法在大规模的移动场景中受制于存储、通信复杂度和连边失效 [29, 48, 96]。

2. 线性系统的分布式估计：在分布式控制场景中，有时需要对一个线性系统的内部状态进行估计。每一个传感器都可以观察线性系统的输出。传感器需要合并这些测量值，并对系统进行（分布式的）卡尔曼滤波估计。将一致性算法应用于此类问题需要克服一系列挑战，包括解决延时等问题，具体可参考 [30,97]。
3. 覆盖控制：覆盖控制要解决的问题是给定一个区域和若干机器人，要求对这片区域进行监控。一个典型的任务是把整个区域分割成若干多边形，让每个机器人负责监控其中的一个，从而最小化监控整个区域的损失函数。研究者们发现一致性算法可以用来设计这类问题的控制器 [98,99]。
4. 编队控制：编队控制问题是一个经典的控制问题。编队控制要求一群车辆或飞行器按照一个给定的编队模式行驶或飞行。节点通过测量与临近节点之间的距离或共享信息来调整自己的速度，使得编队得以保持。一致性算法在编队控制问题中有重要的应用，具体可参考 [13,100]。
5. 任务分配：任务分配即把一系列任务分配给若干节点完成。比如把一系列任务分配给服务器完成或者把需要监控的地点分配给一些飞行器。在相关研究中，各种拍卖机制被用于分配任务给各个节点。一致性算法提供了分布式地实现拍卖的一种机制。具体可见 [101]。
6. 时钟同步：由于时钟漂移的问题，网络中各个节点的时钟如果不进行校准，时间会相差越来越远。因此在网络中通常需要一个时钟同步协议来同步网络的时间。不同的应用场景对时钟同步协议有一些具体的要求。一般来说，需要根据节点的时间和邻居的时间差来调整自己的时钟频率，从而逐渐达到时钟同步。相关文献可参考 [22,24,102]。
7. 输电网络同步：在交流输电网络中需要同步频率和相位，在直流输电网络中需要同步电压，否则会导致不必要的能量损耗，甚至会损坏输电设备。在现代电网中，由于负载的频繁变化、可再生能源设备的增多等原因，需要设计分布式的控制器对以上参数进行同步 [103,104]。
8. 分布式学习：在大数据时代，由于实时处理数据的需求不断增多，很多机器学习算法需要分布式地实时处理到来的数据。各个计算节点之间可以通过一致性算法同步一些参数或中间变量，从而高效地利用所有数据来完善模型。分布式优化和学习问题中常常用到一致性算法作为其子程序，并且相关算法的分析也有相通之处 [30,32,105]。

9. 社交网络分析：前面已经提到过 DeGroot [34] 用一致性过程对个体观点变化建模的工作。一些近期的工作关注了社交网络中结构对类似信息聚合过程的影响。[106] 研究了图上的各种割对信息传播的影响。[107] 研究了“顽固的”节点抵抗他节点影响的行为。[108] 从传播路径和生成树的角度研究了如何控制部分节点来抑制错误信息的传播。

## 1.4 本文的主要贡献

一、揭示了网络结构特性对一阶一致性稳态性能指标的影响。本文研究了两种确定性复杂网络模型中受噪声干扰的一阶一致性算法的平均稳态方差。这两种复杂网络模型分别是法雷网络和科赫网络，分别作为小世界、度分布为指数分布和幂律分布的复杂网络模型的代表。给出了研究的两种网络的抗噪性的精确解和渐近行为，并与规则格点网络的两种指标进行了比较。结果显示，法雷网络和科赫网络都具有  $\Theta(\log n)$  的一阶网络抗噪性，而平均度相同的两个规则格点网络都具有  $\Theta(n)$  的一阶网络抗噪性。分析结果揭示了小世界和无标度特性对网络抗噪性的显著影响。

二、给出了一阶网络抗噪性的一些界，并且论证了富环的无标度稀疏网络具有几乎最优的一阶网络抗噪性。本文用网络的简单结构特征给出了一阶系统抗噪性的上界和下界。其中上界由平均距离给出，下界由网络的平均度给出。接着计算了一些现实网络的一阶抗噪性，结果显示真实无标度网络都具有接近下界的抗噪性。接着本文研究了随机无标度网络的抗噪性，并分析了两个确定性无标度网络模型的一阶抗噪性。结果表明，富环的无标度网络的一阶抗噪性通常为一个常数，因此一阶一致性算法可以被应用到大规模富环无标度网络中，而不会损失平均偏差。因此一阶一致性算法在一般的无标度网络中具有几乎最优的抗噪性。

三、提出几乎线性时间近似算法，用于计算相对测量误差变化对网络一致性的影响。本文研究了在基于相对状态测量的一致性网络中，某条边的测量误差改变对系统稳态方差的影响。可以用白噪声建模这种误差，并用系统稳态方差随白噪声功率谱密度改变的变化率衡量一个测量的重要性。这样定义的边中心性等价于在图中通过一条边的电阻变化引起的基尔霍夫系数的变化率。对于图中的任意一条边，本文给出了该中心性基于双调和距离的显示表达式，并称之为双调和距离相关中心性 (BDRC)。相比很多常用的边中心性，BDRC 对网络中的边有更好的区分能力。在此基础上，本文给出了近似计算 BDRC 的几乎线性时间

算法。对于任意给定的精度  $\epsilon$ ，算法都可以（以高概率）返回相关指标的  $(1 \pm \epsilon)$  近似。算法的时间复杂度为  $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ 。本文还在大规模真实网络中验证了算法的效率和准确性。

**四、将带噪声的领导者选择问题转化为图结构优化问题，提出快速近似算法并给出近似比例。**本文建立了带噪声领导者选择问题到一个图结构优化问题的规约。即任何一个带噪声的领导者选择问题都可以转化为在一个增广图上加关联边最小化虚拟节点到其他所有节点的电阻距离的问题。本文证明了该问题的目标函数的超模性，并基于此证明了贪心算法的近似比为  $(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e})$ 。同时，由于问题的等价性，还可以将算法用于加关联边最大化给定点的信息中心性。本文给出了两种基于贪心策略的算法。精确的贪心算法的运行时间为  $O(n^3)$ ，近似比为  $(1 - \frac{1}{e})$ 。快速贪心算法的运行时间为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ ，近似比为  $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$ 。本文在大量真实网络中检验了算法的效果和效率。实验表明两种算法都有非常好的实际优化效果，并且快速算法在效率上有巨大的优势，可以解决大规模网络上的这类带噪声领导者选择问题或者最大化给定节点信息中心性的问题。

**五、证明了加边最小化网络熵的近似困难性。**在带噪声的网络中，网络熵可以描述一阶一致性算法的稳态不确定体积的大小。本文证明了存在一个常数  $c$ ，使得通过加边最小化网络熵到最优解的  $(1 - c)$  倍以内是 **NP**-困难的。网络熵和加权生成树数目具有紧密联系。证明思路是：将距离为 1 和 2 的旅行商问题规约到最小路径覆盖问题，然后规约到加边最大化生成树数目问题。本文证明了以最小化网络熵为目标的一致性结构优化问题的近似困难性，同时也证明了加边最大化生成树数目的指数近似困难性。这项工作给出了图上通过加边最小化网络熵的复杂性下界。

**六、建立了带噪声网络中二阶一致性算法的稳态性能的衡量标准和分析框架。**本文提出了带噪声网络中一致性算法的稳态性能的一组指标，包括稳态的点对方差、节点偏移方差和系统总方差，并将这类指标称为二阶一致性系统的抗噪性指标。基于此，发现了二阶共识网络中的抗噪性指标可以用图上的双调和距离及与之相关的一些中心性指标给出，本文给出了这些指标关于网络拉普拉斯矩阵的精确表达式，计算了一些常见网络上的二阶抗噪性，并与一阶一致性算法的抗噪性结果进行了比较。这项作为理解网络结构如何影响网络中的二阶一致性算法的稳态性能提供了理论分析的框架。



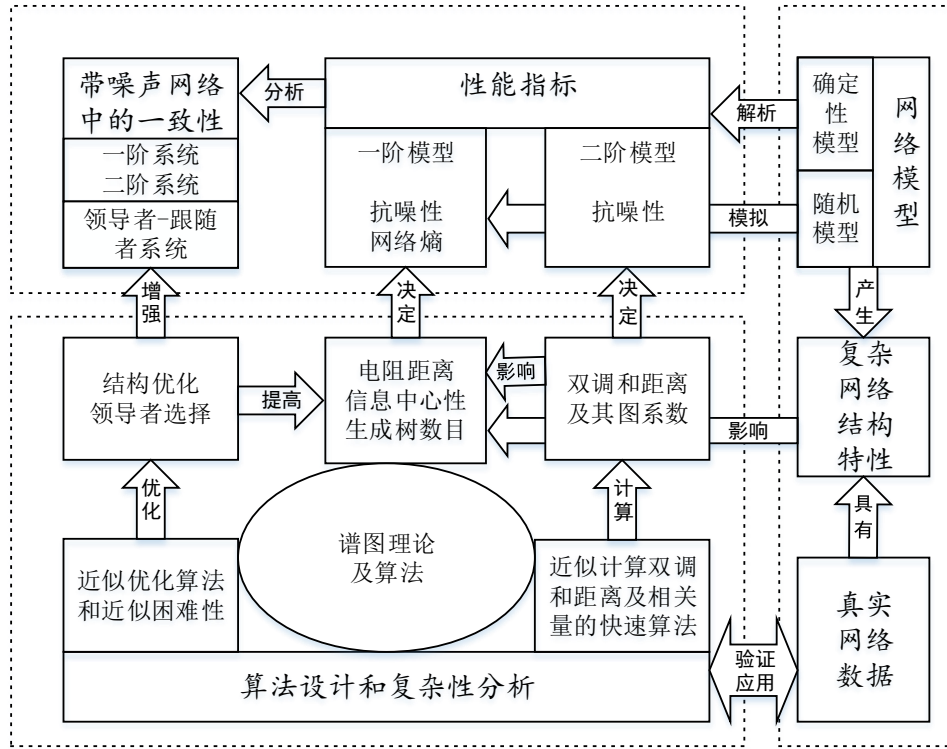


图 1.1: 本文研究内容之间的联系.

## 1.5 论文组织结构

图 1.1 展示了本文研究内容之间的联系。三个虚线框代表了联系相对紧密的部分，分别为鲁棒控制、谱图理论及算法、以及复杂网络模型。

本文后续章节安排如下：

第二章介绍一些基础知识，主要是平均一致性的定义，以及一些重要的概念和符号。内容包括图和矩阵的符号表示、等效电阻和加权生成树数目的定义、代数连通性和基尔霍夫系数、次模函数和超模函数、平均一致性算法的描述和定义、带噪声的网络中的一致性算法鲁棒性（包括白噪声和稳态的定义）、 $\mathcal{H}_2$  范数及网络熵的定义。

第三章研究了确定性网络模型中带噪声的一致性过程的稳态行为，给出了两种具有代表性的复杂网络模型的一阶抗噪性的解析结果。分别是法雷网络和科赫网络，分别作为小世界和无标度网络的确定性网络模型。文中给出了相关量的精确解和渐近行为，并和规则格点网络的结果进行了比较分析，揭示了小世界和无标度结构对一阶网络抗噪性的影响。

第四章论证了富环的无标度稀疏网络具有几乎最优的一阶网络抗噪性。本文通过网络的平均距离和平均度给出了一阶抗噪性的上下界。对真实网络的抗噪性进行了实证研究，模拟了随机无标度网络的相干性、并给出了两种富环的确定性无标度网络模型的一阶抗噪性的解析结果。实验和解析结果显示在富环的无标度网络中，抗噪性接近下界，并且不会随网络规模增长而变大。

第五章提出了双调和距离相关中心性 (BDRC)，用于衡量基于相对测量状态的一致性网络中边的误差变化对系统性能的影响。同时提出了计算 BDRC 的几乎线性时间算法，算法可以用  ${}^1\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$  的运行时间给出相关量的  $(1 \pm \epsilon)$  倍近似。本文还通过大量现实网络上的实验，验证了算法的效率和准确性。

第六章建立了带噪声领导者选择问题和一个图结构设计问题的联系，并且提出了最优领导者选择的近似算法。其中较快的算法可以用  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$  的运行时间给出最优领导者选择问题的  $(1 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e} - \epsilon)$  倍近似。由于问题的等价性，本文还将该算法应用于社交网络中，用于最大化一个点的信息中心性，并将算法加速到  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ 。本文使用大规模真实网络进行了实验，实验验证了算法的效果和效率。

第七章证明了加边最小化连通图网络熵的近似困难性。本文通过恰当的规约，证明了加边最大化连通图网络熵的近似困难性，换言之证明了加边最大化连通图加权生成树数目的指数近似困难性。

第八章提出了一组二阶一致性网络的抗噪性衡量指标，并建立了这些指标和网络上的双调和距离及其相关图系数的联系，为通过研究图结构分析二阶网络抗噪性提供了工具。除建立分析框架意外，本文还研究了一些简单网络结构的二阶抗噪性的解析结果，并与一阶抗噪性的解析结果做了比较。

第九章对全文进行总结，并展望未来的研究方向。

---

<sup>1</sup> $\tilde{O}(\cdot)$  忽略了大  $O$  符号中的  $\text{Poly}(\log n)$  因子。

## 第二章 基础知识

本章介绍文中将使用的一些符号、概念和定义。包括图及其矩阵表示、等效电阻和生成树数目、基尔霍夫系数和信息中心性、双调和距离及性质、平均一致性算法、白噪声和随机微分方程、带噪声网络一致性状态方程、 $\mathcal{H}_2$  范数、网络抗噪性和网络熵的定义以及次模函数和超模函数的定义。

### 2.1 图及其矩阵表示

令  $G = (V, E, w)$  为加权无向图。 $V$  和  $E$  分别是图的点集和边集,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  是边的权重函数, 把一条边  $e$  的权重记为  $w(e)$  或  $w_e$ . 令  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ . 图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  由以下方式给出:

$$\mathbf{L}_{[u,v]}^G = \begin{cases} -w(u, v) & u \sim v, \\ \deg(u) & u = v, \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases}$$

其中  $\deg(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \sim v} w(u, v)$ , 有时为了方便也记为  $d_u$ . 记  $u \sim v$  当且仅当  $u, v$  相邻, 即  $(u, v) \in E$ . 如果上下文清楚, 在本文中将交替使用  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{L}^G$ . 令  $w_{\max}$  为图中的最大的边权,  $w_{\min}$  为图中的最小边权. 同时, 记节点  $u$  的所有邻居组成的集合为  $\mathcal{N}_u$ .

如果给图  $G$  的边任意分配一个方向, 即给每条边分配一个头和尾, 这样就得到了一个  $G$  的一个  $m \times n$  的带符号的边-点关联矩阵  $\mathbf{B}$ , 定义如下:

$$\mathbf{B}_{[e,u]} = \begin{cases} 1 & u \text{ 是 } e \text{ 的头,} \\ -1 & u \text{ 是 } e \text{ 的尾,} \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

设  $\mathbf{W}$  是一个  $m \times m$  的对角阵, 对角线上的元素  $\mathbf{W}_{[e,e]} = w(e)$  为边  $e$  的权重. 然后可以把  $\mathbf{L}$  表达为  $\mathbf{L} = \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$ . 因此关于  $\mathbf{L}$  的一个二次型可以被写成以下形式:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \sum_{u \sim v} w(u, v) (\mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[v]})^2.$$

根据以上形式容易观察出  $\mathbf{L}$  是一个半正定矩阵, 并且如果图  $G$  是一个连通图,  $\mathbf{L}$  只有一个零特征值, 即  $\mathbf{L} \mathbf{1}_n = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{1}_n$  为阶数为  $n$  的全 1 向量. 如果令  $\mathbf{b}_e$  为矩阵  $\mathbf{B}^T$  的第  $e$  列, 那么可以把  $\mathbf{L}$  写为  $m$  个秩为 1 的矩阵的和, 即  $\mathbf{L} = \sum_{e \in E} w(e) \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^T$ .

用  $\lambda_i$  和  $\mathbf{u}_i$  表示连通的无向图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  的第  $i$  个特征值和对应的特征向量（任意的一个排列）， $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . 为了描述方便，不失一般性地，令  $\lambda_0$  为唯一的零特征值，这样  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$  代表了  $\mathbf{L}$  的所有非零特征值。令  $\lambda_{(i)}$  表示所有  $\lambda_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  的第  $i$  个顺序统计量（order statistic），从 1 开始编号，满足  $0 = \lambda_{(1)} < \lambda_{(2)} \leq \dots \leq \lambda_{(n)}$ 。

因此， $\mathbf{L}$  可以通过谱分解表示为

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top.$$

用  $\mathbf{A}^\dagger$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的 Moore-Penrose 逆。显然对于  $\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{L}^\dagger = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top.$$

并且  $\mathbf{L}^\dagger = (\mathbf{L} + \frac{1}{n} \mathbf{J})^{-1} - \frac{1}{n} \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}$  为全 1 矩阵。

对两个方阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ ，用  $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$  来表示  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$  对任意的向量  $\mathbf{x}$  成立。如果对两个连通图  $G$  和  $H$ ，满足  $\mathbf{L}^G \preceq \mathbf{L}^H$ ，那么显然有  $(\mathbf{L}^H)^\dagger \preceq (\mathbf{L}^G)^\dagger$ .  $\mathbf{A} \geq 0$  表示  $\mathbf{A}$  的所有元素大于等于 0， $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  表示  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq 0$ 。另外，用  $\|\mathbf{A}\|$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的谱范数，用  $\|\mathbf{A}\|_F$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的 Frobenius 范数。用  $\|\mathbf{v}\|$  表示向量  $\mathbf{v}$  的  $\ell_2$  范数，用  $\|\mathbf{v}\|_A$  表示向量  $\mathbf{v}$  关于矩阵  $\mathbf{A}$  的  $A$ -范数。用  $\mathbf{e}_i$  代表欧式空间  $\mathbb{R}^n$  的第  $i$  个标准正交基。

## 2.2 等效电阻和生成树数目

可以用图  $G = (V, E, w)$  定义一个电阻网络（electrical network） $G_R = (V, E, r)$ 。原图中的每条边都对应电阻网络中的一个电阻，阻值为  $r_e = w_e^{-1}$ ，原图中的点对应电路的连接点。 $u, v$  两点间的等效电阻定义为  $u$  和  $v$  之间通单位电流时两点间的电势差。令  $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^m$  为每条边上的电流、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  为每个节点上的电压、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  为每个点上净流入的电流。根据基尔霍夫定律  $\mathbf{B}^\top \mathbf{i} = \mathbf{c}$  和欧姆定律  $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{i} = \mathbf{B} \mathbf{v}$ ，得到  $\mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{c}$ 。因此，任意两个点对间的等效电阻定义为拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}^\dagger$  的 Moore-Penrose 逆  $\mathbf{L}^\dagger$  的一个二次型 [109]。

**定义 2.1 (等效电阻)** 给定一个连通图  $G = (V, E, w)$ ，其拉普拉斯矩阵为  $\mathbf{L}$ ，节点  $u$  和  $v$  之间的等效电阻定义为

$$R_{\text{eff}}(u, v) = (\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)^\top \mathbf{L}^\dagger (\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v). \quad (2.1)$$

[109] 证明了等效电阻是一种距离函数 (**metric**), 即电阻距离满足非负性、同时性、对称性和三角不等式。因此有时又称等效电阻  $R_{\text{eff}}(u, v)$  为电阻距离, 记为  $d_R(u, v)$ . 在不引起混淆的情况下, 本文中有时交替使用这两个等价概念。

用  $\Gamma$  表示图  $G$  的生成树的集合,  $T \in \Gamma$  表示  $G$  的任意一棵生成树。生成树  $T$  的权重  $w(T)$  定义为:

$$w(T) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{e \in T} w(e),$$

而图  $G$  的加权生成树数目为

$$\mathcal{T}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \Gamma} w(T).$$

拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}^G$  和图  $G$  的生成树数目  $\mathcal{T}(G)$  之间由基尔霍夫矩阵树定理联系起来 [110]。该定理表明  $\mathbf{L}$  的任意一个  $(n-1) \times (n-1)$  阶主子式等于  $G$  的生成树的数目。用  $\mathbf{L}_{-u}$  表示由  $\mathbf{L}$  去掉节点  $u$  对应的行列得到的主子矩阵。因为随便去掉哪一个点对应的行列都能得到同样的生成树数目的结果, 通常去掉索引为  $n$  的节点对应的行列。因此把基尔霍夫矩阵树定理 (*Kirchhoff matrix-tree theorem*) 写为

$$\mathcal{T}(G) = \det(\mathbf{L}_{-n}^G). \quad (2.2)$$

根据矩阵行列式引理 (*matrix determinant lemma*) 容易证明对于任意一条边  $e = u \sim v$  满足

$$\mathcal{T}(G \setminus e) = (1 - w_e R_{\text{eff}}(u, v)) \mathcal{T}(G).$$

因此, 一条边两端的等效电阻和图的生成树数目之间有以下联系:

**事实 2.2** 一条边  $e = u \sim v$  的边权  $w_e$  乘以其两端  $u, v$  间的等效电阻等于通过  $e$  的加权生成树生成树数目占总加权生成树数目的比例, 即

$$w_e R_{\text{eff}}(u, v) = \left( \sum_{e \in T, T \in \Gamma} w(T) \right) / \mathcal{T}(G).$$

这个值代表了边  $e$  出现在按权重采样的生成树  $T$  中的概率。

## 2.3 基尔霍夫系数和信息中心性

基尔霍夫系数定义为一个图的所有点对间的等效电阻的和。

**定义 2.3 (基尔霍夫系数)** 给定一个连通图  $G = (V, E, w)$ ，其拉普拉斯矩阵为  $\mathbf{L}$ ，网络的基尔霍夫指数定义为：

$$R(G) = \sum_{\substack{i, j \in V \\ i < j}} R_{\text{eff}}(i, j),$$

根据 2.3 和 2.1，再加上  $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{1}_n = 0$ ，容易得到：

$$R(G) = \frac{1}{2} \sum_{i, j \in V} R_{\text{eff}}(i, j) = n \cdot \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}. \quad (2.3)$$

Stephenson 和 Zelen 在 [35] 中提出用

$$I_{uv} = (\mathcal{L}^{-1}(u, u) + \mathcal{L}^{-1}(v, v) - 2\mathcal{L}^{-1}(u, v))^{-1},$$

衡量节点  $u, v$  之间传输的信息，其中  $\mathcal{L} = \mathbf{L} + \mathbf{J}$ 。点  $v$  的信息中心性定义为  $I_{uv}$  对所有  $u \in V$  的调和平均。

**定义 2.4 (信息中心性)** 对于一个连通图  $G = (V, E, w)$ ，一个点  $v$  的信息中心性  $I_v$  定义为

$$I_v = \frac{n}{\sum_{u \in V} 1/I_{uv}}.$$

[111] 给出了以下结论：

$$I_v = \frac{n}{\sum_{u \in V} R_{\text{eff}}(u, v)}.$$

## 2.4 双调和距离

相关文献提出了几种不同的双调和距离的定义 [38, 112, 113]，本文采用了 [112] 和 [113] 使用的定义。

**定义 2.5 (双调和距离)** 图  $G$  中节点  $j$ 、 $k$  间的双调和距离  $d_B(j, k)$  定义为：

$$d_B^2(j, k) = (\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[j,j]} + (\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[k,k]} - 2(\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[j,k]} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{\lambda_i^2}.$$

注意到这个定义等于 Fitch 和 Leonard 在 [38] 中定义的双调和距离的平方根。

如以下定理所示，双调和距离是一个度量。虽然这个结果的连续版本已经在 [112] 中给出，为了读者的方便在此给出（图上的）证明。

**定理 2.6** 图  $G$  中的双调和距离  $d_B(j, k)$  是一个  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  的度量，满足以下的四条性质：

- 非负性： $d_B(j, k) \geq 0$ ,
- 同一性： $d_B(j, k) = 0$  当且仅当  $j = k$ ,
- 对称性： $d_B(j, k) = d_B(k, j)$ , 以及
- 三角不等式： $d_B(j, r) + d_B(r, k) \geq d_B(j, k)$ .

**证明：** 非负性和对称性很容易由定义 2.5 以及  $\mathbf{L}$  是半正定矩阵的事实得到。假设  $d_B(j, k) = 0$  对  $j \neq k$  成立，那么  $\mathbf{u}_{i[j]} = \mathbf{u}_{i[k]}$  对所有的  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  成立。因为  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top$ ，所以  $\mathbf{L}_{[j,j]} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{u}_{i[j]} \mathbf{u}_{i[j]}$ ，并且  $\mathbf{L}_{[j,k]} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{u}_{i[j]} \mathbf{u}_{i[k]}$ 。因此可以得出  $\mathbf{L}_{[j,j]} = \mathbf{L}_{[j,k]}$  对  $j \neq k$  成立。这与拉普拉斯矩阵的定义矛盾。因此同一性成立。

三角不等式可以按照以下方式证明。定义一个向量

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_{i[j]}}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n \text{ for } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

注意到  $\mathbf{u}_i$  是第  $i$  个特征向量， $\mathbf{u}_{i[j]}$  是特征向量  $\mathbf{u}_i$  的第  $j$  个元素。所以  $\mathbf{v}_j$  和  $\mathbf{v}_k$  之间的欧几里得距离  $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k\|$  为

$$\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{\lambda_i^2}},$$

这意味着  $d_B(j, k)$  等于  $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k\|$ 。因为  $\mathbb{R}^n$  中的欧几里得距离是一个度量，因此它满足三角不等式， $d_B(j, k)$  也满足三角不等式。  $\square$

观察到  $\mathbf{v}_j, j \in \{1, \dots, n\}$  分配给节点  $j$  一个  $\mathbb{R}^n$  中的位置, 并且保持了节点之间的双调和距离。

**定义 2.7** 定义图  $G$  中的节点到  $n$ -维欧式空间中的映射  $\mathcal{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。对于任意的节点  $j$ ,  $\mathcal{F}(j) = \mathbf{v}_j = L^\dagger \mathbf{e}_j$ .  $\mathbf{v}_j$  是在  $\mathbb{R}^n$  中的一个图  $G$  的双调和嵌入。

## 2.5 平均一致性算法

本节介绍常见的一致性算法。值得注意的是, 尽管平均一致性算法本身是一种分布式的规则, 为了分析需要, 在本文中常常用微分方程组或差分方程组来描述算法运行的过程。在方程中加入扰动项或考虑不确定因素时, 这些因素并不是由算法主动引入的, 而是外界环境造成的。因此又将这些微分方程组或差分方程组称为系统状态方程或系统动力学方程。注意这些方程和平均一致性算法本身的区别和联系。

常见的一致性算法分为连续时间和离散时间两种。离散时间一致性算法可以直接应用到计算机系统中, 连续时间算法是一种控制律 (control law), 通过离散化可以在计算机系统中实现。本文主要讨论连续时间算法, 因此只在介绍一阶一致性算法时介绍它的离散时间版本。通过本节的介绍可以发现, 连续时间系统和离散时间系统的设计和分析有诸多共性。他们之间的联系可以在相关文献中找到 [13]。

### 2.5.1 一阶算法

在一个  $n$  个节点组成的一致性网络中, 各节点需要就某个状态 (标量) 达成共识, 用向量  $\mathbf{x}$  表示所有节点的状态, 一种最常见的连续时间一致性算法可以用以下微分方程表述:

$$\dot{\mathbf{x}}_{[i]}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[i]}(t)). \quad (2.4)$$

用矩阵形式可以写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t).$$

因为对于任意的连通图  $G$ ,  $-\mathbf{L}$  只有一个零特征值, 其他特征值都小于零, 系统收敛到唯一的稳态均衡点。又因为  $\mathbf{L}\mathbf{1} = 0$  且

$$\sum_{i \in V} \dot{\mathbf{x}}_{[i]}(t) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[i]}(t)) = \sum_{e \in E} w(e) \cdot 0 = 0,$$



易得这个均衡点为  $\mathbf{x}^* = \frac{\sum_{i \in V} \mathbf{x}_{[i]}(0)}{n} \mathbf{1}$ ，即系统收敛到初始状态的平均值。

最常见的离散时间一致性算法由以下差分方程给出：

$$\mathbf{x}_{[i]}(t+1) = \mathbf{x}_{[i]}(t) + \epsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[i]}(t)) . \quad (2.5)$$

用矩阵形式可以写成

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{L}) \mathbf{x}(t) .$$

令  $\epsilon > 0$  且  $\epsilon < 1/\max_{u \in V} \{\deg(u)\}$ 。如果  $G$  联通，根据 Gershgorin 圆盘定理并利用  $\mathbf{L}$  的性质， $\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{L}$  只有一个特征值等于 1，其他特征值都在单位圆以内。通过和连续时间系统类似的分析容易知道，系统同样收敛到唯一的稳定点  $\mathbf{x}^* = \frac{\sum_{i \in V} \mathbf{x}_{[i]}(0)}{n} \mathbf{1}$ 。

应该指出的是，除了以上介绍的算法以外，一阶一致性算法还可以有很多不同的定义。对耦合系数不变（反映在图上即边权不变）的系统而言，只要对应的矩阵满足一定的条件，使得各节点状态收敛到某一个相同的值，就可以给出对应的一致性算法。如果节点知道（或者能够分布式地获得）与自己相关的耦合系数，也就能够得到对应的分布式一致性算法。

比如对于耦合系数不变的离散系统而言，任意一个不可约的概率转移矩阵  $\mathbf{P}$  都可以由  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$  定义出一个共识算法，最后各个节点的状态收敛到用  $\mathbf{P}$  的稳态分布加权初始状态的平均。例如，一个典型的分布式一致性算法可以定义为：

$$\mathbf{x}_{[i]}(t+1) = \mathbf{x}_{[i]}(t) + \frac{\epsilon}{\deg(i)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[j]}(t) - \mathbf{x}_{[i]}(t)) ,$$

其中， $0 < \epsilon < 1$ 。各个节点只需要知道与之关联的边权即可。不考虑其他环境因素，该算法使得系统各节点状态最终收敛到用随机游走矩阵  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}$  的稳态分布加权的均值

$$\alpha = \left( \sum_{i \in V} \deg(i) \mathbf{x}_{[i]}(0) \right) / \left( \sum_{i \in V} \deg(i) \right) .$$

### 2.5.2 二阶算法

在编队问题等应用中，由于物理因素（需要加速过程），无法直接设定汽车或飞行器的速度，因此采用二阶一致性算法。

$\mathbf{x}_1(t)$  表示所有节点的状态； $\mathbf{x}_{1[j]}(t)$  表示节点  $j$  的状态， $\mathbf{x}_2(t)$  表示  $\mathbf{x}_1(t)$  对时间  $t$  的一阶导数，即  $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t)$ 。节点  $i$  根据它和它的邻居的状态 ( $\mathbf{x}_{1[j]}(t)$  和  $\mathbf{x}_{2[j]}(t)$ ) 来设定  $\dot{\mathbf{x}}_{2[i]}(t)$ ，确切地，

$$\dot{\mathbf{x}}_{2[i]} = \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[i]}(t)) + \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{2[j]}(t) - \mathbf{x}_{2[i]}(t)) .$$

可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\alpha \mathbf{L} & -\beta \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

[100] 证明了系统会渐近地达成共识，即系统收敛到以下状态：对所有的  $i, j \in V$ ， $|\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[i]}(t)| = 0$ ，并且  $|\mathbf{x}_{2[j]}(t) - \mathbf{x}_{2[i]}(t)| = 0$ 。

## 2.6 白噪声和随机微分方程

在控制理论和很多其他科学或工程领域中，高斯白噪声过程 (*Gaussian white noise process*) 是一种理想的噪声模型 [114, 115]。高斯白噪声过程  $\xi(t)$  是一个标量平稳高斯过程，该过程的均值为 0，功率谱密度是一个常数。理想高斯白噪声的自相关函数 (autocorrelation function) 为狄拉克函数  $\delta(t_1 - t_2)$ ，某个特定时刻的取值没有良好的定义，且功率为无穷大。

在本文中，将高斯白噪声加入描述算法执行过程的状态方程，得到形如

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t) + \hat{\mathbf{B}}\xi(t) \quad (2.6)$$

的状态方程， $\xi(t)$  为一列相互独立的高斯白噪声。有了关于高斯白噪声的理想定义，已经足够处理以上状态方程并得到本文分析所需要的大部分结果。

为了更好地理解以上状态方程，并利用一些已有的结果，在此引入维纳过程 (Wiener process)<sup>1</sup>  $W(t)$ 。具体定义参见 [114, 2.3 节] 和 [115, 3.8.1 节]。直观上，维纳过程  $W(t)$  是一个连续马尔可夫过程，从  $W(0) = 0$  出发， $W(t)$  符合高斯分布  $\mathcal{N}(0, t)$ 。

通过对白噪声的分析可以得到 [114]

$$\int_0^t \xi(\tau) d\tau = W(t) .$$

<sup>1</sup>为了方便也记为  $W$

因此定义

$$dW(t) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t)dt.$$

注意  $W(t)$  是不可微的，定义  $dW$  的意义是方便表示白噪声对时间的积分。这样一来可以将 2.6 写为随机微分方程 (*stochastic differential equation*)

$$d\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{a}(t)dt + \hat{\mathbf{B}}d\mathbf{W}(t). \quad (2.7)$$

$\mathbf{W}(t)$  是一列相互独立的维纳过程。需要引入伊藤积分 (*Itô calculus*) 以便处理形如 (2.7) 的随机微分方程。具体分析见 [116] 和 [20] 中的内容，这里只回顾一些有用的结果。

随机过程 (2.7) 每次运行都会得到不同的结果。因此，通常研究  $\mathbf{x}(t)$  的一些统计性质，而非  $\mathbf{x}(t)$  的一个采样。一般研究  $x(t)$  的概率密度函数  $p(\mathbf{x}, t)$ 。当  $\mathbf{x}(0)$  是常数或符合高斯分布时， $\mathbf{x}(t)$  是一个高斯过程，见 [114] 中的定理 8.2.10，其概率密度函数可以用均值和协方差描述。

用  $\mathbb{E}(\cdot)$  表示期望值。定义  $\boldsymbol{\mu}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbf{x}(t))$  为  $\mathbf{x}(t)$  的均值，

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))(\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))^{\top})$$

为  $\mathbf{x}(t)$  的方差。根据 [114] 中的定理 8.2.6， $\boldsymbol{\mu}(t)$  和  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$  是满足以下微分方程的确定性函数：

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{a}(t) \quad (2.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Sigma}(t) + \boldsymbol{\Sigma}(t)\hat{\mathbf{A}}^{\top} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^{\top}. \quad (2.9)$$

所以对于形如 (2.7) 的随机微分方程，(2.8) 和 (2.9) 可以完全刻画其统计性质。

## 2.7 带噪声网络的一致性

在复杂网络中，噪声可以通过多种方式影响一致性算法的执行。节点状态会受到外界因素的干扰，比如飞行器位置和速度受随机因素的干扰，时钟频率会产生随机漂移等等。传感器的测量的状态值会带有一定的随机误差，这个误差也可以用外加的噪声描述。此外，节点间的距离、方位等相对状态的测量误差、节点的一些无法建模的随机行为、以及部分信道噪声（取决于信息编码和传输的方式）也可以用随机噪声描述。通常用随机噪声对这些外界扰动或测量误差进行建模，有的噪声直接作用在网络节点状态上，有的噪声作用在网络连边上。施加

在点上和边上的随机噪声对网络一致性造成的影响可以用相似的方法分析。而且在很多相关问题中，它们恰好导致等价的结果 [63, 77]。因此，在本文的大部分章节中，假设随机噪声施加在点上。本节只介绍噪声施加在点上的状态方程，第 5 将讨论噪声施加在边上的情形。

带噪声的一阶一致性系统的状态可以用以下方程描述：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t). \quad (2.10)$$

或者等价地，可以写为：

$$d\mathbf{x}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t)dt + d\mathbf{W}(t). \quad (2.11)$$

带噪声的二阶一致性系统的状态可以用以下方程描述：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\alpha\mathbf{L} & -\beta\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.12)$$

所有的矩阵和向量取合理的阶数。

## 2.8 $\mathcal{H}_2$ 范数

考虑一个控制系统的状态空间系统 (*state-space system*)  $\mathfrak{S}$ ：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{A}}$  是一个赫尔维茨 (Hurwitz) 矩阵。系统的  $\mathcal{H}_2$  范数的标准定义为 [56]：

$$\|\mathfrak{S}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left( \text{Tr} \left( \hat{\mathbf{C}}\mathbf{X}_c\hat{\mathbf{C}}^\top \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

或者

$$\|\mathfrak{S}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left( \text{Tr} \left( \hat{\mathbf{B}}^\top \mathbf{X}_o \hat{\mathbf{B}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 可控性格莱姆矩阵 (*controllability Gramian*)  $\mathbf{X}_c$  是以下李雅普诺夫方程 (*Lyapunov equation*) 的唯一的正定解：

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{X}_c + \mathbf{X}_c\hat{\mathbf{A}}^\top + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^\top = \mathbf{0}; \quad (2.13)$$

可观性格莱姆矩阵 (*observability Gramian*)  $\mathbf{X}_o$  是以下李雅普诺夫方程的唯一的正定解:

$$\hat{\mathbf{A}}^\top \mathbf{X}_o + \mathbf{X}_o \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{C}}^\top \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{0}.$$

如果  $\mathbf{A}$  不是赫尔维茨矩阵, 则  $\|\mathbf{G}\|_2 = \infty$ .  $\|\mathbf{G}\|_2^2$  可以解释为白噪声作为输入时的系统期望的稳态方差 (*steady-state variance*) [56, 第 6 章]. 可以看出 (2.13) 表达了 (2.9) 在系统趋于稳态时的情况。

## 2.9 抗噪性和网络熵

抗噪性 [65] 描述了一致性网络的稳态方差; 网络熵则描述了一致性网络中不确定状态的体积大小 [40].

在 [65] 中, Bamieh 等人定义了一阶一致性网络的抗噪性

**定义 2.8 (一阶抗噪性)** 一阶网络抗噪性 (*first-order network coherence*) 定义为系统偏离当前平均值的平均稳态方差:

$$H_{\text{FO}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var} \left( \mathbf{x}_{[i]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{[j]}(t) \right).$$

其中  $\text{Var}(\cdot)$  表示方差。后续章节将给出一阶抗噪性的具体分析。

[40] 和 [68] 提出了网络熵的概念。本文中, 为了描述方便, 采用一个略为不同的定义:

**定义 2.9 (网络熵)** 一个加权无向网络  $G = (V, E, w)$  的网络熵定义为

$$\mathcal{S}(G) = -\log \mathcal{T}(G).$$

由基尔霍夫矩阵树定理可知

$$\mathcal{S}(G) = -\sum_{i=1}^{n-1} \log \lambda_i + \log n.$$

在 [40] 中 Siami 和 Motec 把网络熵定义为

$$\mathcal{S}'(G) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n} \log(n 2^{n-1} \mathcal{T}(G)) = -\frac{(n-1)}{n} \cdot (\log n + \log \mathcal{T}(G)).$$

在 [68] 中 de Badyn 等人把网络熵定义为  $\log(n\mathcal{T}(G))$ 。可见，本文中的定义方式和 [68]（[40]）中的定义只相差一个加法项  $\log n$ （和一个乘法因子  $-\frac{n-1}{n}$ ）。在点数确定时，这些项与网络结构无关，可以认为是常数项。因此，本文中的定义与 [40,68] 中的定义本质上并无区别。用本文中的定义方便从加权生成树数目的角度描述，而用 [40,68] 中的定义方便从特征值的角度描述。

本文中所有不加说明的  $\log$  都以 2 为底，以 10 为底的记为  $\log_{10}$ ，以  $e$  为底的记为  $\ln$ 。

## 2.10 次模函数和超模函数

首先给出单调超模集合函数的定义。为了简洁记  $S \cup \{u\}$  为  $S + u$ ，记  $S \setminus \{u\}$  为  $S - u$ 。

**定义 2.10 (单调性 (递增))** 一个集合函数  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  是单调的如果  $f(S) \leq f(T)$  对所有的  $S \subseteq T \subseteq V$  都成立。

**定义 2.11 (单调性 (递减))** 一个集合函数  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  是单调的如果  $f(S) \geq f(T)$  对所有的  $S \subseteq T \subseteq V$  都成立。

**定义 2.12 (次模性)** 一个集合函数  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  是次模的如果  $f(S + u) - f(S) \geq f(T + u) - f(T)$  对所有的  $S \subseteq T \subseteq V$ ， $u \in V \setminus T$  都成立。

**定义 2.13 (超模性)** 一个集合函数  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  是超模的如果  $f(S) - f(S + u) \geq f(T) - f(T + u)$  对所有的  $S \subseteq T \subseteq V$ ， $u \in V \setminus T$  都成立。

容易发现，如果函数  $f(S)$  是一个次模函数，那么  $-f(S)$  是一个超模函数。

## 第三章 网络结构对一致性的影响

本章通过两种确定性的复杂网络模型，研究了小世界和无标度性质对带噪声网络中的一阶一致性过程稳态行为的影响。利用一阶一致性过程稳态行为和网络的拉普拉斯谱之间的联系，研究了法雷网络和科赫网络中的一阶一致性过程。其中法雷网络是一类小世界、度分布为指数分布的网络模型；科赫网络是一类小世界、度分布为幂律分布的网络模型。本章给出了这两种确定性网络模型的一阶相干性的精确解和渐近行为，并与规则格点的结果进行了比较。结果显示，相比规则格点网络，这两种确定性复杂网络模型具有较小的抗噪性。

### 3.1 引言

前两章简要介绍了一致性算法的基本定义，背景和应用，带噪声网络中的一致性状态方程，以及分析这些方程所需要的工具。在实际应用中，由于外界扰动或测量误差带来的噪声，一致性系统 (2.10) 的状态  $\mathbf{x}$  并不能达到并保持一致，而是在（当前）平均状态附近波动 [63, 65]。因此一个理想的系统偏离一致的程度应当尽量小。相关研究表明，可以构造一个系统的  $\mathcal{H}_2$  范数并用它描述系统距离一致状态的稳态方差，本文沿用 [62, 63, 65] 中提出的系统抗噪性这一概念，描述节点的平均稳态方差。实际上很多工作 [37, 61, 64, 67, 77, 117] 提出或沿用了与网络抗噪性等价的概念。由于一致性算法在通信图上执行，因此一系列工作研究了特定的网络拓扑结构对一致性的影响，包括环 [64]、路径 [64]、星状图 [64]、圆环面 [65]、以及树状分形网络 [67]。这些工作发现了一阶网络抗噪性和网络拓扑结构的一些联系。

大量的实证研究显示 [1, 118] 大部分的真实网络都表现出小世界性质 [9]。小世界网络同时满足以下两个性质：具有较小的平均距离（average distance）；具有较大的聚类系数（clustering coefficient）。现实中观察到的很多小世界网络能用 Watts-Strogatz (WS) 模型 [9] 及其变种 [119–121] 进行描述。小世界现象对网络上发生的很多动力学过程都会产生显著的影响，包括囚徒困境博弈 [9] 和同步 [122, 123] 等等。对小世界网络上的一致性问题的研究，其收敛速度已经被研究过 [124, 125]。尽管小世界性质可能对带噪声网络中的一致性稳态行为产生根本的影响，然而关于带噪声网络中一致性算法的抗噪性的研究还比较欠缺。

另一方面，大量的现实网络还具有幂律度分布  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ，其中  $2 < \gamma \leq 3$  [1, 118, 126]。具有这样度分布的网络被称为无标度网络 [8]，无标度网络常常

同时具有小世界性质，其平均距离按网络规模的对数速度增长 [9]，甚至以更慢的素的增长 [126]。无标度性质与网络的一些其他结构性性质具有联系，比如生成树 [127] 和匹配 [128]，并且对网络上的各种动力学过程产生影响，比如定向和随机攻击 [129]、疾病传播 [130] 和博弈 [131] 等等。然而，对于无标度网络中的一致性过程，特别是带噪声网络的抗噪性，相关研究工作还很少。

本章研究两种确定性复杂网络模型的一阶一致性过程的抗噪性。其中法雷网络 [132,133] 像 WS 小世界网络模型一样具有较小的平均距离和较大的聚类系数，同时具有指数形式的度分布。首先，给出了法雷网络一阶抗噪性的精确表达式和渐近行为，推导过程利用了已经建立的法雷网络拉普拉斯矩阵特征多项式的递推关系。科赫网络 [134] 具有典型的无标度特性，同时也是一种小世界网络。利用科赫网络的特殊结构，通过已知的平均距离的结果可以得到科赫网络的平均电阻距离和基尔霍夫系数的结果，从而得到其一阶抗噪性的精确表达式和渐近结果。本章还给出了规则格点网络的抗噪性的渐近行为，以便与两种复杂网络模型的抗噪性结果进行比较。结果显示，两种复杂网络模型都具有很小的一阶抗噪性，其值随网络规模的对数速度增长，而规则格点网络的一阶抗噪性则随网络规模线性增长。虽然规则节点网络和两种复杂网络模型具有一些类似的性质，比如可以具有相同的平均度和较高的聚集系数，然而它们的一阶抗噪性展现出巨大的差别。通过比较发现，在这两种模型网络中，长程连接（long range connections）和枢纽节点（hub vertex）为增强网络连接对噪声的鲁棒性起到了关键作用。

### 3.2 网络抗噪性

首先回顾一下 2.5 节和 2.7 节中给出的算法和系统状态方程。系统状态由一列向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  给出，其中第  $i$  个元素  $\mathbf{x}_{[i]} \in \mathbb{R}$  表示节点  $i$  的状态。令  $\mathbf{x}(t)$  代表系统在  $t$  时刻的状态，每个节点按照 (2.4) 所示的规则更新自身的状态。该算法只用到了节点  $i$  和它的邻居的状态（或通过测量得到的状态差）。由于节点状态会受到随机扰动的影响，一阶一致性系统中节点  $i$  的状态变化可以由以下过程描述：

$$d\mathbf{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[i]}(t) - \mathbf{x}_{[j]}(t)) dt + dW_{[i]}(t), \quad (3.1)$$

其中  $W_{[i]}(t)$  表示一个维纳过程。令  $\mathbf{W}(t)$  为  $n$  个相互独立的维纳过程组成的向量，那么可以将 (3.1) 写成如 (2.11) 所示的矩阵形式：

$$d\mathbf{x}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t)dt + d\mathbf{W}(t). \quad (3.2)$$



相关研究发现,在外加扰动的影响下,系统状态围绕其当前平均值波动。通常用网络的一致性 (Coherence) 来刻画状态波动的平均稳态方差 [65, 67, 117]。

**定义 2.8 (一阶抗噪性)** 一阶网络抗噪性 (first-order network coherence) 定义为系统偏离当前平均值的平均稳态方差:

$$H_{\text{FO}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar} \left( \mathbf{x}_{[i]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{[j]}(t) \right).$$

定义系统的输出为系统状态距离当前均值的偏差, 即

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{x}(t), \quad (3.3)$$

这里  $\mathbf{\Pi}$  是投影算子, 定义为  $\mathbf{\Pi} := \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$ 。这里  $\mathbf{I}_n$  代表  $n$  阶单位阵,  $\mathbf{1}_n$  是  $n$  维全 1 向量。用方程 (3.2) 和 (3.3) 描述的系统的  $\mathcal{H}_2$  范数与一阶网络抗噪性  $H_{\text{FO}}$  有以下关系:

$$H_{\text{FO}} = \frac{(\mathcal{H}_2)^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \text{Tr} \left( \int_0^\infty e^{-\mathbf{L}^\top t} \mathbf{\Pi}^\top \mathbf{\Pi} e^{-\mathbf{L} t} dt \right) = \frac{1}{2n} \text{Tr} (\mathbf{L}^\dagger). \quad (3.4)$$

可以看出,  $H_{\text{FO}}$  决定于  $\mathbf{L}$  的  $n-1$  个非零特征值。根据 (2.3),  $H_{\text{FO}}$  和基尔霍夫系数  $R(G)$  有以下联系:

$$H_{\text{FO}}(G) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{R(G)}{2n^2}. \quad (3.5)$$

$R(G)$  的定义见定义 2.3。(3.4) 和 (3.5) 给出了从谱图论的角度研究网络一阶抗噪性的基本方法: 即网络一阶抗噪性可以表示为网络的拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose 逆的迹, 因此也可以用网络拉普拉斯矩阵的特征值或等效电阻表示。为了方便后面的计算, 定义

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}.$$

### 3.3 法雷图的抗噪性

大多数真实网络都表现出小世界现象, 为此研究人员提出了很多网络模型, 用来描述这一现象产生的机理, 比如 WS 模型 [9] 及其变种 [119]。然而, 这些网络的随机性对分析网络结构和动力学性质带来了一定的困难。这里采用法雷图 [132, 133] 作为小世界网络的模型, 因为它和 WS 模型具有相似的结构, 并且利用其确定性的构造方式和自相似的结构, 能够解析其结构和动力学性质。

### 3.3.1 构造方法和结构特性

有两种构造法雷图的方法，第一种方法是一种迭代的方法 [132, 133].

**定义 3.1** 第  $g$  代的法雷图  $\mathcal{W}_g$  ( $g \geq 0$ ) 按照以下方式构造

- 对  $g = 0$ ,  $\mathcal{W}_0$  是一条边连接的两个节点。
- 对于任意的  $g \geq 1$ ,  $\mathcal{W}_g$  由  $\mathcal{W}_{g-1}$  得到，构造方式是对  $\mathcal{W}_{g-1}$  中第  $g-1$  代生成的边，添加一个新的点，并将该点与这条边的两个端点相连。

图 3.1 展示了产生法雷图的前三个循环。因为图中的每个点都能被一个法雷序列 [133] 中的不可约分数标记，因此称这种方式构造的图为法雷图。

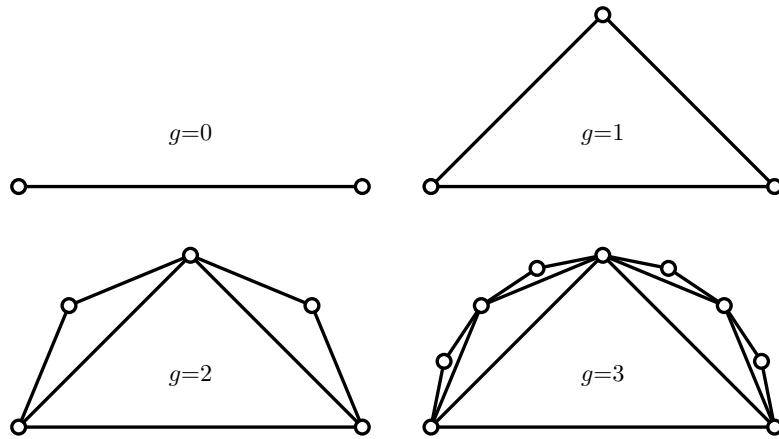


图 3.1: 前四代法雷图及其迭代构造.

法雷图具有明显的自相似结构，由此可以得到其第二种构造方式 [133]: 令  $X_g$  和  $Y_g$  分别表示  $\mathcal{W}_g$  中第 0 个循环中就存在的两个点，称之为初始点。第 1 个循环产生的节点称为枢纽节点，用  $Z_g$  表示。那么法雷图可以由图 3.2 所示的方法构造。

**定义 3.2** 给定  $\mathcal{W}_g$ ,  $\mathcal{W}_{g+1}$  由可以通过执行以下操作得到。

- (i) 合并  $\mathcal{W}_g$  的两个副本  $\mathcal{W}_g^\eta$  ( $\eta = 1, 2$ ), 它们的初始点分别记为  $X_g^\eta$  和  $Y_g^\eta$ .
- (ii) 合并两个初始点  $Y_g^1$  和  $X_g^2$ , 将其作为  $\mathcal{W}_{g+1}$  的枢纽节点  $Z_{g+1}$ .

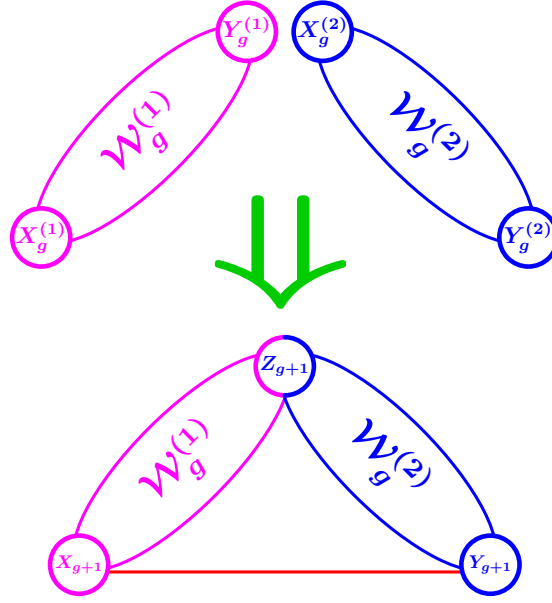


图 3.2: 法雷图的第二种构造方式.

- (iii) 引入一条新的边, 连接另外两个初始节点  $X_g^1$  和  $Y_g^2$ , 这两个节点成为  $\mathcal{W}_{g+1}$  的  $X_{g+1}$  和  $Y_{g+1}$ .

令  $V(\mathcal{W}_g)$  和  $E(\mathcal{W}_g)$  分别为  $\mathcal{W}_g$  点集和边集。根据 [133],  $\mathcal{W}_g$  的点数和边数分别为  $n_g = |V(\mathcal{W}_g)| = 2^g + 1$  和  $m_g = |E(\mathcal{W}_g)| = 2^{g+1} - 1$ . 因此  $\mathcal{W}_g$  的平均度等于  $2|E(\mathcal{W}_g)|/|V(\mathcal{W}_g)|$ , 当网络规模较大时平均度趋于 4.

利用以上介绍的两种构造方式, 可以解析地确定法雷图的结构性质。首先, 法雷图表现出典型的小世界现象, 由较小的平均距离和较大的聚集系数刻画。

**命题 3.3** [133] 图  $\mathcal{W}_g$  的聚集系数  $c(\mathcal{W}_g)$  为

$$c(\mathcal{W}_g) = \frac{1}{2^g + 1} \left[ 2^g \ln 2 - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{1}{2}, 1, 1 + g\right) + \frac{4}{g + 1} \right],$$

其中  $\Phi$  表示勒其超越函数 (Lerch transcendent function)。

当  $g$  很大时,  $c(\mathcal{W}_g)$  趋向一个较大的常数  $\ln 2$ .

**命题 3.4** [133] 图  $\mathcal{W}_g$  的平均距离为

$$\mu(\mathcal{W}_g) = \frac{2^{2g}(6g - 5) + 2^g(6g + 17) + 5 + (-1)^g}{9 \cdot 2^{2g} + 9 \cdot 2^g}.$$

[133] 给出了 3.4 的一种证明, [135] 给出了另一种证明。

### 3.3.2 抗噪性解析

本节研究小世界法雷图的一阶抗噪性。

令  $\mathbf{L}_g$  表示法雷图  $\mathcal{W}_g$  的拉普拉斯矩阵，其  $n_g - 1$  个非零特征值记为  $\lambda_i(g)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_g - 1$ . 用  $H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g)$  表示  $\mathcal{W}_g$  的一阶抗噪性，根据 (3.5) 易得，

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g) = \frac{1}{2n_g} \sum_{i=1}^{n_g-1} \frac{1}{\lambda_i(g)}, \quad (3.6)$$

因此，为了确定  $\mathcal{W}_g$  的一阶抗噪性，需要计算  $\mathbf{L}_g$  的所有非零特征值的倒数和。

#### 3.3.2.1 相关多项式系数的递推式

本节使用的解析技巧基于此前已经建立的法雷图的拉普拉斯矩阵及其子矩阵特征多项式之间的递归关系 [136]，这种递推关系是根据网络的自相似结构建立的。根据特征多项式的关系，可以进一步得到其各个系数之间的递推关系，从而给出网络的一阶抗噪性的精确表达式及其渐近行为。

令  $P_g(\lambda)$  代表矩阵  $\mathbf{L}_g$  的特征多项式，即，

$$P_g(\lambda) = \det(\mathbf{L}_g - \lambda \mathbf{I}_g), \quad (3.7)$$

其中  $\mathbf{I}_g$  是一个  $n_g \times n_g$  的单位矩阵。矩阵  $\mathbf{L}_g$  的  $n_g - 1$  个非零特征值就是方程  $P_g(\lambda) = 0$  的  $n_g - 1$  个非零根。

为了得到  $H(g)$ ，首先定义一些其他的量。令  $\mathbf{Q}_g$  ( $\mathbf{R}_g$ ) 表示矩阵  $(\mathbf{L}_g - \lambda \mathbf{I}_g)$  的一个子矩阵，分别由  $(\mathbf{L}_g - \lambda \mathbf{I}_g)$  去掉与一个（两个）初始点对应的行列得到。另外，用  $Q_g(\lambda)$  和  $R_g(\lambda)$  分别表示  $\mathbf{Q}_g$  和  $\mathbf{R}_g$  的行列式。因为  $H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g)$  只和  $\mathbf{L}_g$  的非零特征值相关，而  $\mathbf{L}_g$  只有唯一的零特征值。因此定义一个与  $P_g(\lambda)$  相关的多项式  $\bar{P}_g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda} P_g(\lambda)$ . 令  $\bar{\lambda}_i(g)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_g - 1$  为  $\bar{P}_g(\lambda)$  的  $n_g - 1$  个根，显然满足  $\bar{\lambda}_i = \lambda_i(g)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n_g - 1\}$ 。那么  $H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g)$  可以表达为

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g) = \frac{1}{2n_g} \sum_{i=1}^{n_g-1} \frac{1}{\bar{\lambda}_i(g)} = \frac{1}{2n_g} H_g, \quad (3.8)$$

其中  $H_g$  定义为

$$H_g = \sum_{i=1}^{n_g-1} \frac{1}{\bar{\lambda}_i(g)}. \quad (3.9)$$

对于多项式  $\bar{P}_g(\lambda)$ , 令  $\bar{p}_g(0)$  和  $\bar{p}_g(1)$  分别表示常数项和 1 次项的系数。根据韦达定理,

$$H_g = \sum_{i=1}^{N_g-1} \frac{1}{\bar{\lambda}_i(g)} = -\frac{\bar{p}_g(1)}{\bar{p}_g(0)}. \quad (3.10)$$

因此只需要计算  $\bar{p}_g(1)$  和  $\bar{p}_g(0)$  的比值。

为了计算  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  在此引入更多的变量。令  $q_g(0)$  和  $r_g(0)$  分别是  $Q_g(\lambda)$  和  $R_g(\lambda)$  的常数项, 并且  $q_g(1)$  和  $r_g(1)$  分别为  $Q_g(\lambda)$  和  $R_g(\lambda)$  的 1 次项系数。

接下来需要建立定义的这些量之间的递推关系。注意到三个多项式  $\bar{P}_{g+1}(\lambda)$ ,  $Q_g(\lambda)$  和  $R_g(\lambda)$  满足以下关系 [136]。

**引理 3.5** 对于任意的正整数  $g$ ,

$$\bar{P}_{g+1}(\lambda) = 2\bar{P}_g(\lambda)Q_g(\lambda) + 4\bar{P}_g(\lambda)R_g(\lambda) + [Q_g(\lambda)]^2 + 2Q_g(\lambda)R_g(\lambda), \quad (3.11)$$

$$Q_{g+1}(\lambda) = [Q_g(\lambda)]^2 + 2Q_g(\lambda)R_g(\lambda) + \lambda[\bar{P}_g(\lambda)R_g(\lambda) + Q_g(\lambda)R_g(\lambda) + [R_g(\lambda)]^2], \quad (3.12)$$

$$R_{g+1}(\lambda) = 2Q_g(\lambda)R_g(\lambda) + \lambda[R_g(\lambda)]^2. \quad (3.13)$$

根据引理 3.5, 容易得到以下递推关系。

**引理 3.6** 对于任意的正整数  $g$ ,

$$\bar{p}_{g+1}(0) = 2\bar{p}_g(0)q_g(0) + 4\bar{p}_g(0)r_g(0) + [q_g(0)]^2 + 2q_g(0)r_g(0), \quad (3.14)$$

$$q_{g+1}(0) = [q_g(0)]^2 + 2q_g(0)r_g(0), \quad (3.15)$$

$$r_{g+1}(0) = 2q_g(0)r_g(0), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{g+1}(1) &= 2[\bar{p}_g(1)q_g(0) + \bar{p}_g(0)q_g(1)] + 4[\bar{p}_g(0)r_g(1) + \bar{p}_g(1)r_g(0)] \\ &\quad + 2[q_g(0)r_g(1) + q_g(1)r_g(0)] + 2q_g(1)q_g(0), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} q_{g+1}(1) &= 2q_g(1)q_g(0) + 2[q_g(0)r_g(1) + q_g(1)r_g(0)] \\ &\quad + r_g(0)\bar{p}_g(0) + q_g(0)r_g(0) + [r_g(0)]^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$r_{g+1}(1) = 2[q_g(1)r_g(0) + r_g(1)q_g(0)] + [r_g(0)]^2. \quad (3.19)$$

接下来利用引理 3.6 推导  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  的表达式。

### 3.3.2.2 相关量的解析解

$\bar{p}_g(0)$  的表达式已在 [136] 中给出。由于一些中间量对推导  $H_{FO}(G_g)$  有用，因此简要回顾其推导过程。

将 (3.16) 代入 (3.15) 得到

$$q_{g+1}(0) = [q_g(0)]^2 + r_{g+1}(0), \quad (3.20)$$

将 (3.20) 中的  $r_{g+1}(0)$  代入 (3.16) 得到

$$q_{g+1}(0) = 3[q_g(0)]^2 - 2q_g(0)[q_{g-1}(0)]^2, \quad (3.21)$$

给出了  $q_{g+1}(0)$ ,  $q_g(0)$  和  $q_{g-1}(0)$  之间的递推式。

为了求解 (3.21)，引入一个变量

$$k_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_g(0)}{[q_{g-1}(0)]^2}, \quad (3.22)$$

接着，(3.21) 能够重新表达为

$$k_{g+1} = 3 - \frac{2}{k_g}. \quad (3.23)$$

代入初始状态  $k_1 = q_1(0)/[q_0(0)]^2 = 3$ , (3.23) 能够归纳地解出

$$k_g = \frac{2 - 2^{-g}}{1 - 2^{-g}}. \quad (3.24)$$

为了计算  $q_g(0)$ ，把 (3.22) 两边同时取对数得到

$$\ln q_g(0) = 2 \ln q_{g-1}(0) + \ln k_g = 2 \ln q_{g-1}(0) + \ln \frac{2 - 2^{-g}}{1 - 2^{-g}}. \quad (3.25)$$

利用初值  $\ln q_g(0) = \ln 3$ ，求解 (3.25) 得到

$$\ln q_g(0) = 2^g \cdot \sum_{i=1}^g 2^{-i} \ln \frac{2^{i+1} - 1}{2^i - 1}, \quad (3.26)$$

然后可以得到  $q(0)$  的显示表达式：

$$q_g(0) = (2^{g+1} - 1) \prod_{i=2}^g (2^i - 1)^{2^{g-i}}. \quad (3.27)$$

在得到  $q(0)$  以后, 继续计算  $r_g(0)$ ,  $r_g(0)$  也是求解  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  所需要的。将 (3.15), (3.16), (3.22), and (3.24) 合并, 得到

$$\begin{aligned}\frac{r_g(0)}{q_g(0)} &= \frac{2q_{g-1}(0)r_{g-1}(0)}{q_g(0)} = \frac{q_g(0) - [q_{g-1}(0)]^2}{q_g(0)} \\ &= 1 - \frac{[q_{g-1}(0)]^2}{q_g(0)} = 1 - \frac{1}{k_g} = \frac{1}{2 - 2^{-g}}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

因此,

$$r_g(0) = \frac{q_g(0)}{2 - 2^{-g}} = \frac{2^{g+1} - 1}{2 - 2^{-g}} \prod_{i=2}^g (2^i - 1)^{2^{g-i}}. \quad (3.29)$$

接下来推导  $\bar{p}_g(0)$ . (3.14) 能够被重新表达为

$$\bar{p}_{g+1}(0) = [2\bar{p}_g(0) + q_g(0)][2r_g(0) + q_g(0)]. \quad (3.30)$$

用 (3.15) 除 (3.30), 得到

$$\bar{p}_{g+1}(0)/q_{g+1}(0) = 2\bar{p}_g(0)/q_g(0) + 1. \quad (3.31)$$

考虑初值  $\bar{p}_1(0)/q_1(0) = -3$ , 求解 (3.31) 得到

$$\bar{p}_g(0)/q_g(0) = -(2^g + 1), \quad (3.32)$$

根据上式和 (3.27) 可以得出。

$$\bar{p}_g(0) = -(2^g + 1) (2^{g+1} - 1) \prod_{i=2}^g (2^i - 1)^{2^{g-i}}. \quad (3.33)$$

注意实际上几个系数  $\bar{p}_g(0)$ ,  $q_g(0)$  和  $r_g(0)$  有各自的组合意义。根据基尔霍夫矩阵树定理容易知道  $\mathcal{T}(\mathcal{W}_g) = q_g(0) = \bar{p}_g(0)/n_g$ ;  $r_g(0)$  为图中两个初始点分别属于不同连通分量的 2-生成森林个数。

### 3.3.2.3 精确表达式和渐近行为

在得到了所需要的中间量以后, 利用递推式计算关键量  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$ . 根据 (3.18), 可以将  $\bar{p}_{g+1}(1)$  重新表达为

$$\begin{aligned}\bar{p}_{g+1}(1) &= [2\bar{p}_g(1) + q_g(1)][2r_g(0) + q_g(0)] \\ &\quad + [2\bar{p}_g(0) + q_g(0)][2r_g(1) + q_g(1)].\end{aligned}\quad (3.34)$$

接下来, 用 (3.30) 除 (3.34) 得到

$$\frac{\bar{p}_{g+1}(1)}{\bar{p}_{g+1}(0)} = \frac{2\bar{p}_g(1)}{2\bar{p}_g(0) + q_g(0)} + \frac{q_g(1)}{2\bar{p}_g(0) + q_g(0)} + \frac{q_g(1)}{q_g(0) + 2r_g(0)} + \frac{2r_g(1)}{q_g(0) + 2r_g(0)}, \quad (3.35)$$

该方程可以表述为

$$\frac{\bar{p}_{g+1}(1)}{\bar{p}_{g+1}(0)} = \frac{2}{2 + \frac{q_g(0)}{\bar{p}_g(0)}} \frac{\bar{p}_g(1)}{\bar{p}_g(0)} + \frac{1}{1 + 2\frac{\bar{p}_g(0)}{q_g(0)}} \frac{q_g(1)}{q_g(0)} + \frac{1}{1 + 2\frac{r_g(0)}{q_g(0)}} \left( \frac{q_g(1)}{q_g(0)} + 2\frac{r_g(1)}{q_g(0)} \right). \quad (3.36)$$

将 (3.28) 中的  $r_g(0)/q_g(0)$  和 (3.32) 中的  $\bar{p}_g(0)/q_g(0)$  代入 (3.36), 得到

$$\frac{\bar{p}_{g+1}(1)}{\bar{p}_{g+1}(0)} = \frac{2^{g+1} + 2}{2^{g+1} + 1} \frac{\bar{p}_g(1)}{\bar{p}_g(0)} + \left( \frac{2^{g+1} - 1}{2^{g+2} - 1} - \frac{2}{2^{g+1} + 1} \right) \frac{q_g(1)}{q_g(0)} + 2 \cdot \frac{2^{g+1} - 1}{2^{g+2} - 1} \frac{r_g(1)}{q_g(0)}. \quad (3.37)$$

因此, 一旦知道了  $p_g(1)/q_g(0)$  和  $r_g(1)/q_g(0)$ , 就可以通过 (3.37) 得到  $\bar{p}_{g+1}(1)/\bar{p}_{g+1}(0)$  的递推关系。

接下来计算  $p_g(1)/q_g(0)$  和  $r_g(1)/q_g(0)$ . 首先计算  $r_g(1)/q_g(0)$ . 由 (3.19) 发现

$$q_g(1) = -\frac{q_g(0)r_g(1)}{r_g(0)} - \frac{1}{2}r_g(0) + \frac{r_{g+1}(1)}{2r_g(0)}. \quad (3.38)$$

将 (3.38) 代入 (3.18) 并且使用 (3.22), (3.24) 和 (3.28) 的结果, 可以得到以下关于  $r_g(1)/q_g(0)$  的递推式:

$$\begin{aligned} & (-3 \times 2^{-g} + 2^{-2(g+1)} + 8) r_{g+2}(1)/q_{g+2}(0) \\ & + (-3 \times 2^{-2g-1} + 11 \times 2^{-g} - 20) r_{g+1}(1)/q_{g+1}(0) \\ & + (2^{-2g+1} - 2^{-g+3} + 8) r_g(1)/q_g(0) = -2^g. \end{aligned} \quad (3.39)$$

为了求解  $r_g(1)/q_g(0)$ , 定义

$$s_g = (2^{g+1} - 1) r_g(1)/q_g(0), \quad (3.40)$$

初值为  $s_1 = -1$  和  $s_2 = -6$ . 接着, (3.39) 能被表达为

$$\begin{aligned} & (2^{-g} - 2^{-2g-2}) s_{g+2} + (3 \times 2^{-2g-1} - 5 \times 2^{-g}) s_{g+1} \\ & + (2^{2-g} - 2^{-2g+1}) s_g = -2^g. \end{aligned} \quad (3.41)$$

注意到不考虑初值  $s_1 = -1$  和  $s_2 = -6$ , (3.41) 有很多解。实际上可以找到并验证

$$s_g^* = -\frac{1}{3}(g + c) 2^{2g-2} + \frac{2^{g-2}}{3} \quad (3.42)$$



是满足方程 (3.41) 的一组特解, 其中  $c$  是一个常数。对于这组特解, 假设  $s_1^* = s_1 = -1$ , 那么  $c = 5/2$ . 因此,

$$s_g^* = -\left(\frac{2}{3}g + \frac{5}{3}\right)2^{2g-3} + \frac{1}{3}2^{g-2} \quad (3.43)$$

是 (3.41) 的一个特解, 并且满足  $s_2^* = -17/3$ 。

接下来求解满足 (3.41) 的  $s_g$ , 同时满足初始条件  $s_1 = -1$  和  $s_2 = -6$ . 为了达到这个目的, 引入一个新的中间量

$$t_g \stackrel{\text{def}}{=} s_g - s_g^*, \quad (3.44)$$

满足  $(2^{-g} - 2^{-2g-2})t_{g+2} + (3 \times 2^{-2g-1} - 5 \times 2^{-g})t_{g+1} (2^{2-g} - 2^{-2g+1})t_g = 0$  显然有  $t_1 = s_1 - s_1^* = 0$  和  $t_2 = s_2 - s_2^* = -1/3$ . 在这些初始条件下, 可以解得

$$t_g = -\frac{2^{g-3}}{\ln 2} \left\{ 2^g \left[ 2\psi_2(g+1) + (-2\ln 2)g - 2\psi_2(2) + \ln 2 \right] + 2\ln 2 \right\}, \quad (3.45)$$

其中  $\psi_q(x)$  是一个  $q$ -双伽马函数 [137]。

将 (3.43) 和 (3.45) 代入 (3.44) 得到

$$s_g = -\frac{2^{g-3}}{3\ln 2} (2^g (6\psi_2(g+1) - 4(\ln 2)g - 6\psi_2(2) + 8\ln 2) + 4\ln 2), \quad (3.46)$$

满足  $s_1 = -1$  和  $s_2 = -6$ 。因此, 由 (3.40) 可以得到

$$\begin{aligned} r_g(1)/q_g(0) &= s_g / (2^{g+1} - 1) \\ &= -\frac{2^{g-3}}{3\ln 2 (2^{g+1} - 1)} \left\{ 2^g \left[ 6\psi_2(g+1) - 4(\ln 2)g - 6\psi_2(2) + 8\ln 2 \right] + 4\ln 2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

现在已经得到了  $r_g(1)/q_g(0)$ , 接下来要确定  $q_g(1)/q_g(0)$  以得到  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  的表达式。将等式 (3.38) 两边除以  $q_g(0)$  得到

$$\begin{aligned} \frac{q_g(1)}{q_g(0)} &= -\frac{r_g(1)}{r_g(0)} - \frac{1}{2} \frac{r_g(0)}{q_g(0)} + \frac{r_{g+1}(1)}{2r_g(0)q_g(0)} \frac{r_{g+1}(1)}{r_{g+1}(0)} - \frac{r_g(1)}{r_g(0)} - \frac{1}{2} \frac{r_g(0)}{q_g(0)} \\ &= \frac{q_{g+1}(0)}{r_{g+1}(0)} \frac{r_{g+1}(1)}{q_{g+1}(0)} - \frac{q_g(0)}{r_g(0)} \frac{r_g(1)}{q_g(0)} - \frac{1}{2} \frac{r_g(0)}{q_g(0)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

将 (3.28) 和 (3.47) 代入 (3.48), 得到以下关于  $q_g(1)/q_g(0)$  的表达式:

$$\frac{q_g(1)}{q_g(0)} = \frac{1}{24 \ln 2 (1 - 2^{-g-1})} \left[ -3 (2^{g+1} - 1) \psi_2(g+1) + 3 (2^{g+1} - 1) \psi_2(2) + g (2^{g+1} - 1) \ln 4 - 6 (2^{g+1} + 1) \ln 2 \right]. \quad (3.49)$$

将 (3.47) 和 (3.49) 的结果代入 (3.37), 得到关于  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  的递归式, 考虑初始值  $\bar{p}_1(1)/\bar{p}_1(0) = 2/3$ , 可以得到  $\bar{p}_g(1)/\bar{p}_g(0)$  和  $H_g$  的解析表达式:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{p}_g(1)}{\bar{p}_g(0)} &= \sum_{i=1}^{N_g-1} \frac{1}{\bar{\lambda}_i(g)} = S_g \\ &= \frac{-2^{g-2}}{(2^g + 1)} \left\{ -4 + \sum_{i=1}^{g-1} \left[ \frac{1}{3(2^{i+1} - 1)(2^{i+2} - 1) \ln 2} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left[ 2^{3i+3} \left( -3\psi_2(i+1) + 2i \ln 2 + 3\psi_2(2) - 5 \ln 2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2^i \left( -3\psi_2(i+1) + 2i \ln 2 + 3\psi_2(2) + 16 \ln 2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + 2^{2i+1} \left( 9\psi_2(i+1) - 6i \ln 2 - 9\psi_2(2) + 2 \ln 2 \right) + 2 \ln 2 \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

把这个结果再除以  $2n_g$  就可以得到法雷网络的一阶抗噪性。

根据  $q$ -双伽马函数 [137] 的性质能够推出

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{H_g}{2^g \cdot g} = \frac{1}{12}.$$

因此  $H_g$  的渐近行为可以表达为:

$$H_g = \frac{1}{12} n_g \log n_g + o(n_g \log n_g). \quad (3.51)$$

根据以上结果和 (3.8), 带噪声的法雷网络中的一阶一致性算法的抗噪性关于点数  $n_g$  的渐近行为可以由以下定理给出,

**定理 3.7** 对于  $n_g$  个点的法雷图  $\mathcal{W}_g$ , 其一阶抗噪性满足

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g) = \frac{H_g}{2n_g} = \frac{\log n_g}{24} + o(\log n_g). \quad (3.52)$$

定理 3.7 显示, 当  $n_g$  很大时, 法雷网络的一阶抗噪性按照网络规模的对数速度增长。

### 3.4 科赫图的抗噪性

科赫网络是一种常用的确定性无标度网络模型。本节通过解析科赫网络的抗噪性探究无标度结构如何对带噪声网络的一致性过程产生影响。首先介绍科赫网络的构造方法和一些结构性性质。

#### 3.4.1 构造方法和结构性性质

科赫网络是迭代构造的 [134]。令  $\mathcal{K}_g$  表示第  $g$  代生成的科赫网络。对  $g = 0$ ,  $\mathcal{K}_0$  包含 3 个节点, 构成一个三角形。对  $g > 0$ ,  $\mathcal{K}_g$  可以在  $\mathcal{K}_{g-1}$  的基础上构造, 构造方法是把  $\mathcal{K}_{g-1}$  中每一个已经存在的三角形用图 3.3 右侧的结构替换。图 3.4 给出了第 2 个循环生成的网络  $\mathcal{K}_2$  作为示例。

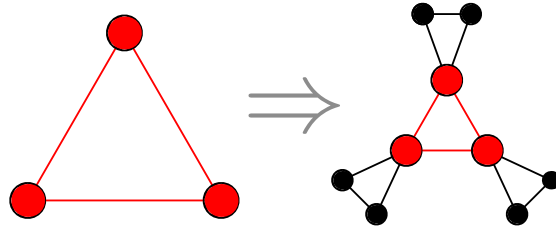


图 3.3: 科赫网络的迭代构造方法.

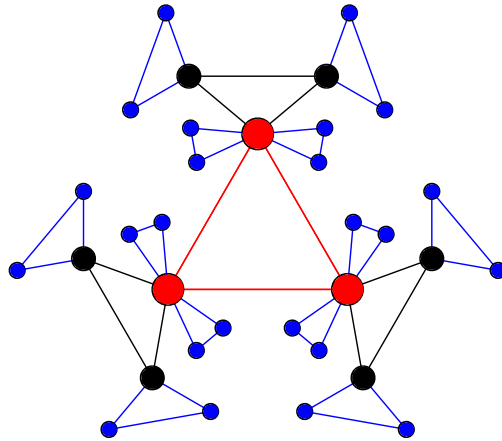


图 3.4: 科赫网络示例,  $\mathcal{K}_2$ .

用  $L_{\Delta}(g)$  表示图  $\mathcal{K}_g$  中的三角形数目。根据前面介绍的构造方法,  $L_{\Delta}(g) = 4L_{\Delta}(g-1)$ , 根据初值  $L_{\Delta}(0) = 1$  可以得到  $L_{\Delta}g = 4^g$ 。令  $L_v(g)$  和  $L_e(g)$  分别是第  $g$  个迭代中新生成的点数和边数。显然有  $L_v(g) = 6L_{\Delta}(g-1) = 6 \times 4^{g-1}$  和

$L_e(g) = 9 L_\Delta(g-1) = 9 \times 4^{g-1}$ . 令  $n_g$  和  $m_g$  分别表示网络  $\mathcal{K}_g$  的点数和边数。那么容易得到  $n_g = \sum_{g_i=0}^g L_v(g_i) = 2 \times 4^g + 1$  和  $m_g = \sum_{g_i=0}^g L_e(g_i) = 3 \times 4^g$ 。所以  $\mathcal{K}_g$  的平均度为  $\rho_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2m_g}{n_g} = \frac{6 \times 4^g}{2 \times 4^g + 1}$ , 当网络规模很大时平均度收敛到 3.

科赫网络作为一种复杂网络模型, 表现出典型的无标度和小世界特性。其度分布  $P(d)$  符合幂律分布  $P(d) \sim d^{-3}$ , 和 Barabási-Albert (BA) 模型的度分布具有一样的幂指数 [8]; 其平均距离随节点数目的对数规模增长 [134], 聚集系数随网络演化趋于一个较大的常数 [134]。另外, 因为  $\mathcal{K}_g, \forall g \geq 0$ , 用皮尔森系数 (Pearson correlation) 衡量的度相关性为 0, 所以科赫网络是度不相关的网络 [134]。

### 3.4.2 抗噪性解析

实际上, 可以采用与计算法雷图的一阶抗噪性类似的方法来计算科赫网络的一阶抗噪性和二阶抗噪性 (二阶抗噪性的概念将在本文第 8.1 中给出) [138]。然而, 本章只讨论一阶抗噪性, 由于科赫网络特殊的结构, 可以简单地由  $\mathcal{K}_g$  的平均距离 [134] 推出其平均等效电阻和基尔霍夫系数。又根据一阶抗噪性和基尔霍夫系数的联系, 容易得到科赫网络的一阶抗噪性的解析结果。这里直接给出结论:

**定理 3.8** 对于科赫图  $\mathcal{K}_g$ , 其一阶抗噪性的精确解为

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_g) = \frac{2^{4g}(6g+7) + 2^{2g+1}}{9(2^{2g+1} + 1)^2}. \quad (3.53)$$

$H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_g)$  关于点数  $n_g$  的渐近行为由以下定理给出:

**定理 3.9** 对于  $n_g$  个点的科赫图  $\mathcal{K}_g$ , 其一阶抗噪性满足

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_g) = \frac{\log n_g}{12} + o(\log n_g). \quad (3.54)$$

## 3.5 与规则格点网络的比较

为了进一步揭示小世界和无标度性质对带噪声的复杂网络上的一阶一致性过程的影响, 作为比较, 本节研究了两种规则格点网络的一阶抗噪性。两种规则格点图分别为  $\mathcal{C}_{n,4}$  和  $\mathcal{C}_{n,3}$ 。  $\mathcal{C}_{n,4}$  和  $\mathcal{C}_{n,3}$  都可以在一个  $n$  个点的圆环的基础上构造出来。假设环上的所有节点从 0 开始编号为  $0, 1, \dots, n-1$ , 那么在  $\mathcal{C}_{n,4}$  中, 任意

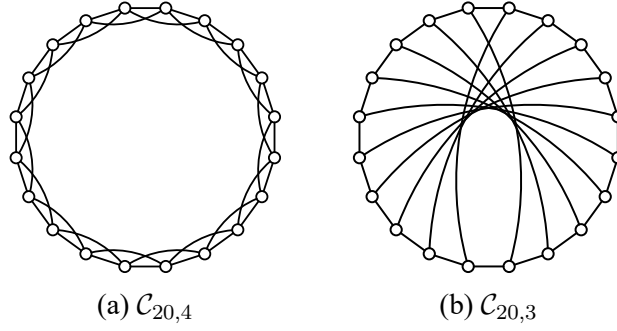


图 3.5: 规则格点图示例.

的节点与其临近的 4 个节点相连;  $C_{n,4}$  只在  $n$  为偶数时有定义, 任意的节点除了与相邻的两个节点相连以外,  $\forall i < n/2, i \sim (i + n/2)$  也是图中的边。

由于  $C_{n,3}$  和  $C_{n,4}$  的拉普拉斯矩阵都是循环矩阵, 其谱分解可以由离散傅里叶变换得到, 所有特征值也可以显示地表达出来 [139], 因此可以分析  $H_{\text{FO}}(C_{n,3})$  和  $H_{\text{FO}}(C_{n,4})$  关于点数的渐近行为。

**定理 3.10** 对于  $n$  个点的规则格点图  $C_{n,4}$ , 其一阶抗噪性满足

$$H_{\text{FO}}(C_{n,4}) = \frac{n}{24} + o(n). \quad (3.55)$$

**证明:** 由 [139] 可知  $C_{n,4}$  的拉普拉斯矩阵的特征值  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) 为

$$\lambda_k = 4 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} - 2 \cos \frac{4k\pi}{n}. \quad (3.56)$$

显然  $\lambda_0 = 0$ , 其他特征值都大于 0, 因此

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( 4 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} - 2 \cos \frac{4k\pi}{n} \right)^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( 6 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} - 4 \cos^2 \frac{2k\pi}{n} \right)^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( 3 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

记 (3.57) 中的两个求和项分别为  $H^{(1)}$  和  $H^{(2)}$ , 下面分别对它们展开分析。

首先估计  $H^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H^{(1)} \cdot \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left( 3 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 (3 + 2 \cos 2\pi x)^{-1} dx = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

因此,  $H^{(1)} = \frac{\sqrt{5}}{5}n + o(n)$ .

接下来估计  $H^{(2)}$ , 首先可以得到

$$\begin{aligned} H^{(2)} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2 (1 - \cos \frac{2k\pi}{n})} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + \cot^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2} = \frac{n-1}{4n^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cot^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

这意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^{(2)} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cot^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2}. \quad (3.60)$$

因为  $\tan x \geq x \geq \sin x$  对所有的  $x \in (0, \pi/2)$  都成立, 可以得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cot^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{n^2 \tan^2 \frac{k\pi}{n}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{n^2 (\frac{k\pi}{n})^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2} \quad (3.61)$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cot^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}{n^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}} \\ &\geq 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1 - (\frac{k\pi}{n})^2}{n^2 (\frac{k\pi}{n})^2} = -\frac{2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

因此得到以下两个关系:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^{(2)} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2}, \quad (3.63)$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^{(2)} \cdot \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2}. \quad (3.64)$$

因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H^{(2)} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12}. \quad (3.65)$$

也就是说

$$H^{(2)} = \frac{1}{12} n^2 + o(n^2). \quad (3.66)$$

因此, 根据(3.8)和(3.58), 规则格点网络  $\mathcal{C}_{N,4}$  的一阶抗噪性满足 (3.55)。证毕。  $\square$

**定理 3.11** 对于  $n$  个点的规则格点图  $\mathcal{C}_{n,3}$ , 其一阶抗噪性满足

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,3}) = \frac{n}{24} + o(n). \quad (3.67)$$

这里省略掉定理 3.11 的证明, 因为其证明与定理 3.10 的证明类似。

定理 3.11 和定理 3.10 说明  $H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,3})$  和  $H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,4})$  都随  $n$  增大线性增长。虽然  $\mathcal{C}_{n,3}$  具有一些远距离连接, 但是  $\mathcal{C}_{n,4}$  具有更大的平均度, 两者具有一样的渐近行为。

法雷图与  $\mathcal{C}_{N,4}$  拥有很多共同的特征, 比如具有相同的平均度、聚类系数比较大。它们之间的主要区别在于法雷图具有较小的平均距离, 其平均距离为  $\Theta(\log n)$ , 而  $\mathcal{C}_{N,4}$  的平均距离为  $\Theta(n)$ . 比较其一阶抗噪性,  $H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g) = \Theta(\log n_g)$ , 而  $H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,4}) = \Theta(n)$ . 因此, 法雷图中的长程连接以及由此造成的小世界现象对其保持较小的一阶抗噪性起到了重要的作用。

科赫图与  $\mathcal{C}_{n,3}$  拥有很多共同的特征, 它们也具有相同的平均度, 而且具有较大的聚类系数。然而, 科赫网络作为一种无标度网络, 其枢纽节点增强网络的连接起到了重要的作用。比较其一阶抗噪性,  $H_{\text{FO}}(\mathcal{K}_g) = \Theta(\log n_g)$ , 而  $H_{\text{FO}}(\mathcal{C}_{n,3}) = \Theta(n)$ . 因此科赫图的无标度特性对其保持较小的一阶抗噪性起到了关键作用。值得注意的是, 由于科赫图的特殊结构, 其无标度特性影响一阶抗噪性的方式和其影响网络平均距离的方式实际是相同的。

### 3.6 本章小结

大部分的现实世界的网络都具有一些共有的性质，如小世界性质和无标度性质。这些性质又对网络上多种多样的动力学行为产生了深刻的影响。为了深入探讨这些性质产生的原理和结构对动力学产生影响的机制，通常通过建立模型来研究复杂网络。本章研究了小世界和无标度性质对网络一阶抗噪性的影响。本章首先解析地研究了两种确定性的复杂网络模型的一阶抗噪性。其中，法雷网络作为小世界、度分布为指数的复杂网络模型、科赫网络作为无标度小世界网络模型。通过不同的方法，分别计算了法雷图和科赫图的一阶抗噪性的精确解，并分析了它们的渐近行为。另外，本章还分析了平均度相同的一些规则格点网络的一阶抗噪性渐近行为。结果显示，法雷图和科赫图都具有较小的一阶抗噪性。其抗噪性以网络点数的对数规模增长。与之相对的是，规则格点网络的一阶抗噪性以网络的点数规模增长。分析表明，小世界和无标度性质对网络的一阶抗噪性有重要的影响，直接或间接地导致网络具有很小的一阶抗噪性。

与此同时，注意到在科赫网络中，无标度性质对一阶抗噪性的影响实际是通过影响网络的平均距离产生的。因此想知道在更广泛的无标度网络中，即在真实网络和更多的网络模型中，无标度性质如何影响网络上带噪声的抗噪性过程，特别是网络的一阶抗噪性。此外，本章研究的两种复杂网络模型的一阶抗噪性的渐近行为都是  $\Theta(\log n)$ 。现实网络和无标度模型能否表现出更好的一阶抗噪性也是大家关心的问题。这些问题促使本文开展了下一章的工作。



## 第四章 富环无标度网络的一阶抗噪性

一阶网络抗噪性定义为一致性系统在白噪声影响下的平均稳态方差，是描述带噪声的网络中一致性算法稳态表现的一个重要指标。第3章已经展示了如何利用网络的拉普拉斯矩阵的特征值或基尔霍夫系数研究网络一阶抗噪性，并初步研究了复杂网络结构对一阶网络抗噪性的影响。为了进一步研究网络结构对网络中的一致性过程的影响，在本章将给出一些网络抗噪性的界，对真实网络的一阶抗噪性开展实证研究。本章还将讨论不同网络模型生成的图的抗噪性，包括随机模型的模拟结果和一些确定性模型的解析结果。

### 4.1 引言

在现实应用中，一致性过程常常会受到环境扰动或测量误差的影响，比如在编队控制中，运动的车辆或飞行器总会受到摩擦、风力和坡度等因素的影响，汽车之间相对位置的测量也会有误差。在噪声影响下的一致性系统不能保持一致，而是在共识状态附近波动。因此作为一个一致性系统而言，总是希望节点状态偏离系统平均状态的距离尽量小，这个值通常被称为网络抗噪性 (coherence) [63,65]。因为其广泛的用途，受噪声影响的一致性过程受到了持续的关注 [61,62,64,67,117,135,138,140–142]。

按照传统，用系统的平均稳态方差来刻画所有节点偏离均值的程度。这个量被定义为一阶网络抗噪性，在本节中简称抗噪性。将系统输出定义为状态与平均一致性的残差，此时系统  $\mathcal{H}_2$  范数的平方除以节点数目就得到了网络的抗噪性的值。 $\mathcal{H}_2$  范数的平方等于图的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  的 Moore-Penrose 逆的迹，其中包含了包含网络拓扑的一些全局信息 [65,67,117]。注意到在没有扰动的一致性网络中，系统的收敛速度决定于网络的代数连通性，即  $\mathbf{L}$  的最小非零特征值。相比而言，网络的抗噪性与网络的整个谱相关。

一些前期工作研究了某些特殊结构的网络上的抗噪性 [61–65,67,117]。Young 等人 [64] 给出了路径、星形图、有向和无向的环的网络一致性。Patterson 等人 [67,117] 研究了一些分形树状网络上的抗噪性的渐进行为和分形维树之间的关系。他们还给出了圆环面的抗噪性的渐进行为分析。本文第3章研究了法雷图和科赫图的一阶抗噪性，并与两种规则格点图的抗噪性结果进行了比较，揭示了复杂网络结构对抗噪性的重要影响。法雷图是一种度分布为指数分布的小世界网络；科赫图是一种无标度网络模型，图中的所有环都是三角形短环。

以上的网络模型依然不能很好地模拟很多现实网络的特性 [118]。现实网络通常是稀疏的，并且常常具有以下几个重要的性质。首先，各种现实网络表现出无标度特性 [8] 和小世界现象 [9]。无标度性质 [8] 意味着网络的度分布  $P(d)$  符合一个幂律分布  $P(d) \sim d^{-\gamma}$ ；小世界现象 [9] 意味着网络的平均最短路长度的增长速度是  $O(\log n)$ ，甚至更小 [126]。同时，网络的集聚系数随网络增大趋于一个大于零的常数。除此之外，研究发现很多现实网络拥有数量巨大，长短各异的环（回路），且环的平均长度较大 [143, 144]。现实网络的这些常见的结构特性对网络上的其他结构性质和网络中的动力学过程产生了不可忽视的影响。比如，无标度结构对网络的结构性质（例如完美匹配 [128] 和最小支配集 [145]）和网络中的动力学过程（例如疾病传播 [130]、博弈 [131] 和可控性 [146]）都有重要的影响。而大量的环对网络上的结构性质和动力学过程也会产生重要的影响（一致性 [147] 和网络熵 [68]）。

正如前面提到的，对一致性网络而言，理想情况是各个节点偏离共识越小越好。很多现实网络是稀疏的，无标度的和小世界的，因此很自然地想到要对一阶一致性算法在这些网络上的表现进行研究。本文将研究对于这些网络而言，能达到的最好的网络抗噪性有多好？这个下界是否能够在现实网络中近似地达到？如果不能达到，在现实网络中和一些主要的网络模型上能够得到多好的网络抗噪性？

本章的主要贡献包含几个内容，从不同的角度论证了一致性算法在现实网络中通常具有很好的抗噪性，可以在不损失平均抗噪性的情况下应用到很大的现实网络中。首先利用网络的平均度  $\rho$  给出了网络抗噪性的一个下界  $1/(2\rho)$ ，接着用网络的平均距离给出了一个个上界。这两个界都通过图的结构特性给出，对理解和分析网络的抗噪性提供了新的角度。因为给出的上下界之间仍然有一定的差距，通过研究一系列常见的网络模型和现实数据发现，在一般的（带长环的）无标度网络中，网络一致性（即系统的平均稳态方差）通常是一个常数。在现实网络中，可以观察到网络的抗噪性一般是一个略大于下界  $1/(2\rho)$  的值。在一些经典的随机模型如 Barabási-Albert (BA) 和高维随机阿波罗网络中，数值模拟结果也显示网络抗噪性趋于一个常数。对于一些确定性的网络模型，利用网络的拉普拉斯矩阵的谱或基尔霍夫系数与抗噪性的关系，计算出了网络抗噪性的精确解，并分析了它们的渐进行为。结果显示，无论是在随机模型还是确定性模型中，带很多各种长度的环的无标度网络都具有良好的抗噪性，网络的平均稳态方差不会因网络规模增大而显著变大。

以下介绍一些相关工作。本章中沿用与上一章相同的系统模型和分析框架，具体定义见 3.2。

关于不同网络结构中的一阶线性一致性系统的抗噪性已经有较多的研究。表 4.1 给出了相关文献中已经给出的网络抗噪性的渐近行为。在表表 4.1 中， $\mu$  表示图的平均距离， $H_{\text{FO}}$  表示网络一阶抗噪性。

表 4.1: 一些网络的平均距离和一阶抗噪性渐进行为（省略了所有的  $\Theta(\cdot)$  记号）。

网络结构	$\mu$	$H_{\text{FO}}$
路径 [64]	$n$	$n$
一维圆环面（环） [64, 65]	$n$	$n$
一维 Cayley 图 [148]	$n$	$n$
规则格点网络 [135]	$n$	$n$
Vicsek 分形 [67]	$n^{\log 3 / \log 5}$	$n^{\log 3 / \log 5}$
T-分形 [67]	$n^{\log 2 / \log 3}$	$n^{\log 2 / \log 3}$
Peano Basin 分形 [67]	$n^{1/2}$	$n^{1/2}$
二维圆环面 [65]	$n^{1/2}$	$\log n$
二维 Cayley 图 [148]	$n^{1/2}$	$\log n$
法雷图 [135]	$\log n$	$\log n$
科赫图 [138]	$\log n$	$\log n$
$d$ 维圆环面 ( $d \geq 3$ ) [65]	$n^{1/d}$	1
$d$ 维 Cayley 图 ( $d \geq 3$ ) [148]	$n^{1/d}$	1
星状图 [64]	1	1
完全图 [64]	1	$n^{-1}$

从表 4.1 中可以看出，不同网络的  $H_{\text{FO}}$  具有丰富的渐近行为。对于一个  $n$  个点的网络， $H_{\text{FO}}$  的渐进行为可以是线性的，亚线性的，对数的，与  $n$  负相关的，或者与  $n$  无关的。比如，在路径图 [64]、一维圆环面 [64, 65]、一维 Cayley 图 [148] 和规则格点网络 [135] 中，一致性是  $\Theta(n)$  的；在一些树状分形网络 [67] 比如 Vicsek 分形, T 分形, 和 Peano Basin 分形中一致性是  $\Theta(n^\theta)$  的，其中  $0 < \theta < 1$ ；在二维圆环面 [65]、二维 Cayley 图 [148]、法雷图 [135]、科赫图 [138] 中网络抗噪性是  $\Theta(\log n)$  的；在完全图中  $H_{\text{FO}} = \Theta(1/n)$ ；在高维 ( $d \geq 3$ ) 圆环面 [65]、高维 ( $d \geq 3$ ) Cayley 图 [148] 和星状图中 [64]， $H_{\text{FO}} = \Theta(1)$ 。

根据电阻的 Rayleigh 单调性，能够证明在  $n$  个点的无权图中，完全图  $K_N$  具有最小的一阶网络抗噪性  $H_{\text{FO}}$ ，且  $H_{\text{FO}}(K_n) = \frac{n-1}{2n^2}$ 。当  $n \rightarrow \infty$  时， $H_{\text{FO}}(K_n) \rightarrow 0$ 。

在这种意义下，完全图具有最好的网络抗噪性。然而现实世界的网络通常不像完全图那样稠密，非常广泛的实证研究发现真实网络通常是稀疏的，具有一个常数的平均度 [118]；另外，现实网络通常还具有无标度 [8]、小世界等性质 [9]。表 4.1 显示  $H_{FO}$  决定于网络的结构，那么自然地会提出以下问题：对于稀疏图而言，什么是抗噪性的下界是多少？这个下界是不是可达的？现实中的网络的抗噪性一般是多少，距离最优值的差距有多大？

在本章余下的内容中，首先给出平均度为  $\rho$  的无权图的  $H_{FO}$  的一个下界  $1/(2\rho)$ 。同时还用平均距离给出了  $H_{FO}$  的一个上界。然后通过实证研究考察了真实网络的  $H_{FO}$ ，发现通常而言现实网络都具有很好的一致性。接着，研究了两种随机无标度网络的  $H_{FO}$ ，包括 BA 网络 [8] 和高维随机阿波罗网络 [149,150]，数值结果显示  $H_{FO}$  随着网络规模增长迅速地收敛到一个常数。最后，为了进一步理解网络结构对抗噪性的影响，研究了两种确定性的富环无标度网络模型，包括伪分形和 4-团模体图。给出了这两种模型的  $H_{FO}$  的精确解和渐进行为分析。

注意本章研究的所有网络都是无向无权的连通图。虽然本章的分析结果都可以通过合适的方式扩展到加权图上，但假设无权图使得结果更加简洁明了。

## 4.2 一阶网络抗噪性的上下界

本节给出了网络一阶抗噪性  $H_{FO}$  的一个下界和一个上界。首先回顾以下引理 [151]：

**引理 4.1** 令  $G = (V, E)$  是一个  $n$  个点的无向无权图，那么  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1}$  当且仅当  $G$  是一个完全图。

**定理 4.2** 对一个  $n$  个点， $m$  条边的（无权）连通图  $G$ ，其平均度为  $\rho = \frac{2m}{n}$ ，一阶网络抗噪性满足  $H_{FO} \geq \frac{n}{4m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mn}$ ，等号当且仅当  $G$  是完全图时成立；当  $n$  很大时， $H_{FO} \geq \frac{1}{2\rho}$ 。

**证明：** 应用 Cauchy-Schwarz 不等式，由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}
 H_{FO} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{2m} \\
 &\geq \frac{1}{4mn} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{\lambda_i} \cdot \lambda_i} \right)^2 = \frac{(n-1)^2}{4mn} \\
 &= \frac{n}{4m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mn}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

根据引理 4.1,  $H_{\text{FO}} = \frac{n}{4m} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4mn}$  当且仅当  $G$  是一个完全图。

因为  $\rho = \frac{2m}{n}$ , 并且  $2m = \rho n \geq 2(n-1)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\text{FO}} \geq \frac{1}{2\rho}. \quad (4.2)$$

证毕。  $\square$

除了下界, 还通过网络的平均距离  $\mu$  给出了  $G$  的一个一阶网络抗噪性的上界。

**定理 4.3** 对于一个  $n$  个点的 (无权) 连通图  $G$ , 如果它的图平均距离是  $\mu$ , 其一阶网络抗噪性满足  $H_{\text{FO}} \leq \frac{n-1}{4n}\mu$ , 等号当且仅当  $G$  是一棵树时成立。当  $n$  很大时,  $H_{\text{FO}} \leq \frac{\mu}{4}$ .

**证明:** 由电阻的 Rayleigh 单调性, 容易知道在任意的无权图  $G$  中, 任意点对  $u, v$  间的电阻  $R_{\text{eff}}(u, v)$  都小于等于  $u, v$  间的最短路径长度  $\delta(u, v)$ . 因此,

$$H_{\text{FO}} = \frac{R(G)}{2n^2} \leq \frac{\mu \frac{n(n-1)}{2}}{2n^2} = \frac{n-1}{4n}\mu. \quad (4.3)$$

当  $G$  是一棵树时,  $R_{\text{eff}}(u, v) = \delta(u, v)$ , 此时等式成立。对很大的  $n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\text{FO}} \leq \frac{\mu}{4}. \quad (4.4)$$

证毕。  $\square$

对于一个网络  $G$  而言, 理想情况下希望它的网络抗噪性的值较小。定理 4.2 意味着: 对于具有较小的平均度  $\rho$  的大规模稀疏图,  $\frac{1}{2\rho}$  是  $H_{\text{FO}}$  可能取到的最小值。因此如果  $H_{\text{FO}}$  取到这个下界, 称一阶抗噪性是最优的。如果一个稀疏图的  $H_{\text{FO}}$  随着网络规模增长收敛到一个常数, 称其一阶抗噪性是几乎最优的。

从表 4.1 中可以看到, 对于  $d$  维圆环面 ( $d \geq 3$ )、 $d$  维 Cayley 图 ( $d \geq 3$ ) 和星状图, 其一阶抗噪性都是一个常数。事实上容易证明, 在所有  $n$  个点的树中, 星状图  $S_n$  具有最小的一阶抗噪性。当  $n$  增大时, 抗噪性和平均距离 (决定  $H_{\text{FO}}$  的上界) 都收敛到一个常数。而在  $d$  维圆环面和  $d$  维 Cayley 图 ( $d \geq 3$ ) 中, 虽然平均距离随  $n$  增大呈现亚线性的增长,  $H_{\text{FO}}$  还是一个常数级别的值。

正如前面提到的, 大多数现实世界网络都是系数的, 并且表现出富环的无标度性质。然而现有的研究并没有对这类现实中常见的网络的一阶抗噪性进行分

析。在本章接下来的内容中，将研究一些真实网络的一阶抗噪性，以及随机和确定性无标度网络模型的一阶抗噪性。本文将会论证：对所有这些稀疏无标度网络，其一阶网络抗噪性不会随网络规模（节点数）增大而上升，而是渐近地收敛到一个很小的常数。因此得出结论：富环的无标度结构具有几乎最优的一阶网络抗噪性。

### 4.3 真实网络的一阶抗噪性

本节计算了一些现实世界（具有幂律度分布的）无标度网络的一阶抗噪性。这里选取了很多类型和大小各异的真实网络数据用于实证研究。

表 4.2 展示了一些现实世界无标度（无权无向）网络的一阶抗噪性的数值结果。所有的数据都来自 Koblenz 网络数据集 [152]。本节中，实验用到的数据集包括很多具有代表性的网络，包括一些社交网络、信息网络、技术网络和生物代谢网络。表 4.2 中所有的网络都按照节点数的增长顺序排列。最小的网络有大约  $3 \times 10^2$  个节点，最大的网络有大约  $6 \times 10^5$  个节点。

在表 4.2 中，对于每个网络，给出了它的节点数  $n$ ，边数  $m$ ，幂律指数  $\gamma$ ，抗噪性的下界  $1/(2\rho)$ ，抗噪性的真实值，以及抗噪性的上界  $\mu/4$ 。

表 4.2 表明，对于  $2 < \gamma \leq 3$  的真实无标度网络，其一阶抗噪性  $H_{FO}$  总体上都很小，介于本章前面给出的上下界之间。更重要的是，对于这些网络， $H_{FO}$  通常都远小于  $\mu/4$ 。事实上，如同现实网络中的一些其他的性质（比如聚集系数 [9]），这些数据支持了关于  $H_{FO}$  不随网络规模  $n$  增大的猜测。并且可以观察到，在现实无标度网络中， $H_{FO}$  是与网络大小无关的。

表 4.2: 一些现实网络的一阶抗噪性和基础统计量

Network	$n$	$m$	$\gamma$	$\frac{1}{2\rho}$	$H_{\text{FO}}$	$\frac{\mu}{4}$
Zachary karate club	34	78	2.161	0.109	0.203	0.602
David Copperfield	112	425	3.621	0.066	0.151	0.634
Hypertext 2009	113	2,196	1.284	0.013	0.021	0.414
Jazz musicians	198	2,742	5.271	0.018	0.051	0.559
PDZBase	212	242	3.034	0.109	0.707	1.332
Haggle	274	2,124	1.673	0.219	0.236	0.606
Caenorhabditis elegans	453	2,025	1.566	0.056	0.135	0.666
U. Rovira i Virgili	1,133	5,451	1.561	0.052	0.170	0.902
Hamsterster friendships	1,858	12,534	2.461	0.037	0.176	0.863
Protein	1,870	2,203	2.879	0.212	0.730	1.703
Hamster full	2,426	16,631	2.421	0.037	0.142	0.897
Facebook (NIPS)	2,888	2,981	4.521	0.242	0.675	0.967
Human protein (Vidal)	3,133	6,149	2.132	0.127	0.388	1.210
Reactome	6,327	146,160	1.363	0.011	0.138	1.053
Route views	6,474	12,572	2.462	0.129	0.365	0.926
Pretty Good Privacy	10,680	24,316	4.261	0.110	0.721	1.871
arXiv astro-ph	18,771	198,050	2.861	0.024	0.128	1.049
CAIDA	26,475	53,381	2.509	0.124	0.361	0.969
Internet topology	34,761	107,720	2.233	0.081	0.319	1.229
Brightkite	58,228	214,078	2.481	0.068	0.359	0.942

## 4.4 随机无标度网络模型中的一阶抗噪性

在本节中，为了进一步研究无标度网络的一阶抗噪性，对两种随机无标度网络的抗噪性进行了实证研究，包括 Barabási-Albert (BA) 网络 [8] 和随机阿波罗网络 (HDRAN) [149,150]。选取这两种随机模型的原因是这两种模型刻画了一些真实随机网络的生成机制。

### 4.4.1 Barabási-Albert 网络的抗噪性

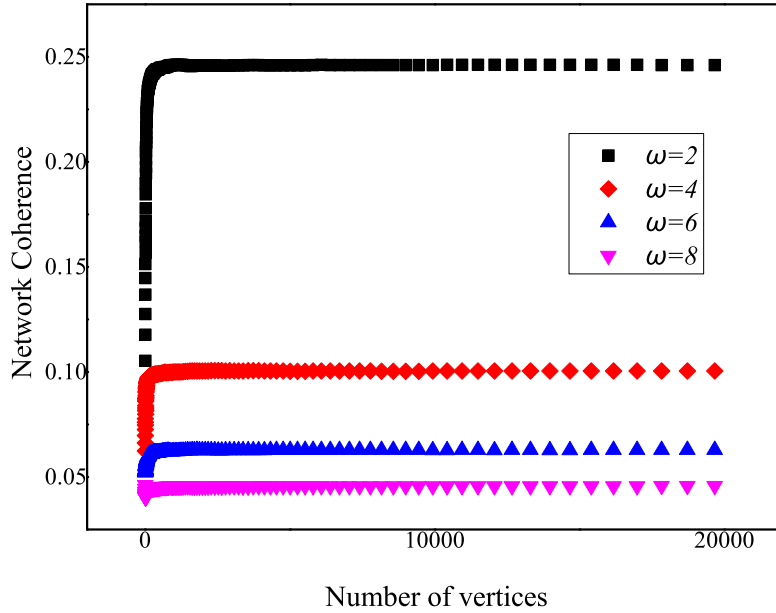


图 4.1: BA 网络抗噪性的模拟结果.

BA 网络模型 [8] 是最广为人知的随机无标度网络模型。生成 BA 模型的算法如下所示：从一个小的连通图开始，在每一轮中，增加一个新的节点，该节点与当前图中已经存在的  $\omega$  个不同的节点相连。新节点与已经存在的节点的连接的概率正比于每个点在此轮之前的度。重复这个偏好连接增长过程，直到节点数增长到  $n$ 。当  $n$  足够大时，BA 网络的平均度趋近  $2\omega$ 。BA 网络的度分布呈现幂律分布，幂律指数  $\gamma = 3$ ，与  $\omega$  的取值无关。BA 网络是小世界的，其平均距离的增长速度为  $\Theta\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$ 。BA 网络中有很多各种长度的环 [153]。

根据生成 BA 网络的算法，构造了不同大小的各种网络。对于所有这些生成的网络，都根据 (3.4) 计算了它的一阶抗噪性。图 4.1 展示了  $\omega = 2, 4, 6, 8$  的 BA 网



网络的抗噪性。所有的网络都从一个 8 个点的完全图开始构造。从图中可以观察到这些网络的抗噪性不会随网络规模  $n$  增大，而是收敛到一个由  $\omega$  决定的常数： $\omega$  越大，网络抗噪性越好。

#### 4.4.2 高维随机阿波罗网络的抗噪性

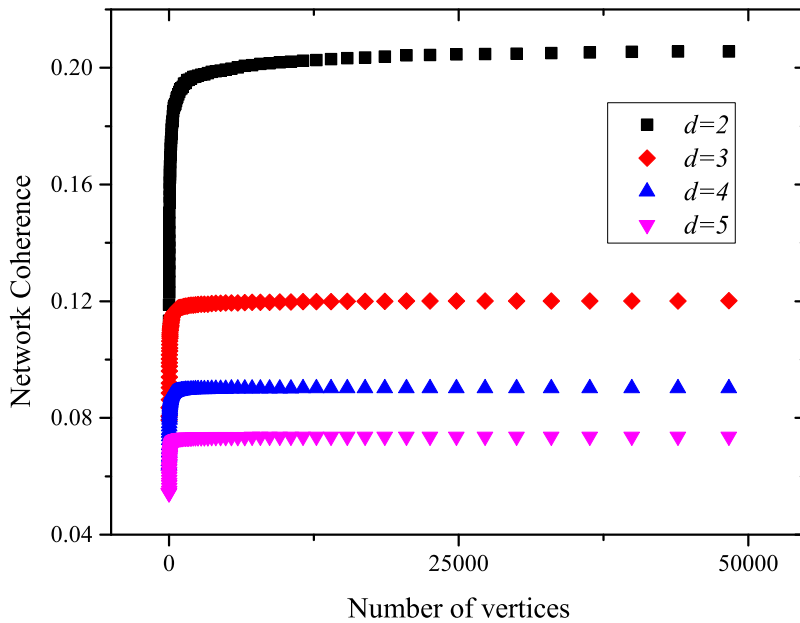


图 4.2:  $d$  维随机阿波罗网络的一致性.

接下来研究  $d$  维 ( $d \geq 2$ ) 随机阿波罗网络 (HDRAN)。结果显示 HDRAN 和 BA 网络展示出相似的抗噪性渐进行为。 $d$  维随机阿波罗网络按照以下方式进行构造：首先生成一个  $d+2$  个点的完全图，或称为  $d+2$  团。如果图中的一个  $d+1$  团从未被选取过，称其为活跃的。在每一步中，在图中随机地选取一个活跃的  $d+1$  团，给图中加入一个新点，并将新点与这个选取的  $d+1$  团中的每一个节点相连。重复这个选取活跃  $d+1$  团并加入新点的过程，直到图中有  $n$  个节点为止。对于很大的  $n$ ，HDRAN 的平均度趋近  $2(d+1)$ 。

HDRAN 展现出很多现实网络所具有的重要性质 [150]。首先，HDRAN 是无标度的，因为它的度分布服从幂律分布，其幂律指数为  $\gamma = 2 + \frac{1}{d-1}$ 。其次，它是小世界的，其平均距离随节点数  $n$  呈现对数速度的增长，并且它的聚集系数趋向一个由  $d$  决定的常数， $d$  越大聚集系数越大。HDRAN 也具有许多长短不同的环。

图 4.2 报告了不同  $d$  和  $n$  值的随机阿波罗网络的抗噪性数值结果。从图 4.2 中可以观察到, 随着 HDRAN 的增长, 网络抗噪性收敛到一个依赖于维数参数  $d$  的常数:  $d$  越大, 网络抗噪性越好。这个现象与直觉相一致。

## 4.5 确定性网络的一阶抗噪性

为了进一步揭示无标度网络的抗噪性, 本节给出了两种确定性网络模型的抗噪性的闭式表达式, 包括伪分形网络 [154] 和 4-团模体网络, 两种网络都通过对图中的边进行迭代操作生成。这两种网络是无标度网络的确定性模型的代表, 因为它们具有在大多数现实网络所观察到的一些经典性质。利用其特殊的构造方式, 能够推导出这两种网络的抗噪性的精确结果。

本节通过计算网络的基尔霍夫系数得到其网络抗噪性。因此会用到有关等效电阻的一些结论。

**引理 4.4** (*Foster 定理 [155]*) 在一个 (无向) 无权网络  $G = (V, E)$  中,

$$\sum_{\substack{i < j, \\ (i,j) \in E}} R_{\text{eff}}(i, j) = n - 1. \quad (4.5)$$

**引理 4.5** (*加法法则 [156]*) 对于一个 (无向) 无权网络  $G = (V, E)$  中的两个点  $i, j$  而言, 以下等式成立:

$$d_i R_{\text{eff}}(i, j) + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} (R_{\text{eff}}(i, k) - R_{\text{eff}}(j, k)) = 2. \quad (4.6)$$

关于一个无向无权网络  $G = (V, E)$ , 除了基尔霍夫系数 (2.3) 以外, 还可以定义一些其他的与电阻相关的系数。比如: 度乘法基尔霍夫系数 [157] 和度加法基尔霍夫系数 [158]。这些系数按照以下方式定义:

$$R^*(G) = \sum_{\substack{i, j \in V \\ i < j}} d_i d_j R_{\text{eff}}(i, j), \quad (4.7)$$

以及

$$R^+(G) = \sum_{\substack{i, j \in V \\ i < j}} (d_i + d_j) R_{\text{eff}}(i, j). \quad (4.8)$$

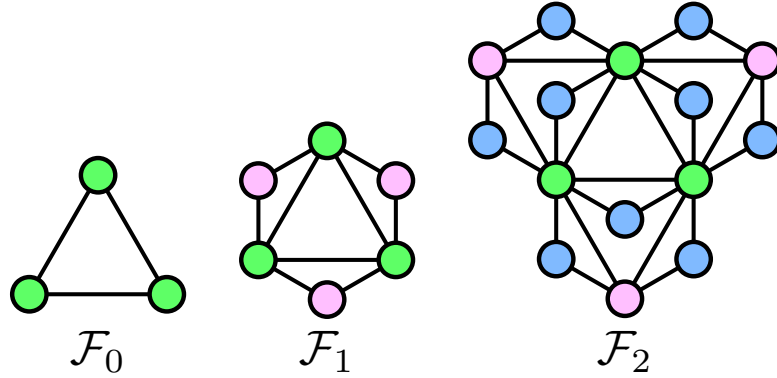


图 4.3: 最初几代的伪分形网络.

#### 4.5.1 伪分形无标度网络的抗噪性

经过  $g$  次迭代以后得到的伪分形网络记为  $\mathcal{F}_g$ . 通过以下方式构造  $\mathcal{F}_g$ : 初始状态 ( $g = 0$ ) 时, 网络  $\mathcal{F}_0$  是一个三个点的完全图. 在每一次迭代  $g$  ( $g \geq 1$ ) 中, 对于  $\mathcal{F}_{g-1}$  中已经存在的每一条边  $e$ , 都新增一个节点, 并且把它和  $e$  两端的节点相连. 图 4.3 展示了网络  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$  和  $\mathcal{F}_2$ . 根据以上介绍的构造方式, 很容易验证网络  $\mathcal{F}_g$  包含  $n_g = \frac{3^{g+1}+3}{2}$  个节点和  $m_g = 3^{g+1}$  条边. 因此, 该网络的平均度为  $\rho = \frac{4 \times 3^{g+1}}{3^{g+1}+3}$ , 随着  $g$  增大很快趋近常数 4.

伪分形网络既是无标度的, 同时也是小世界的 [154]. 它的度分布是一个幂律分布, 且幂指数为  $\gamma = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$ . 其平均距离与网络规模的关系为  $\mu = \Theta(\log n)$ . 同时, 当  $g$  足够大时, 伪分形的聚集系数趋向一个常数  $4/5$ . 除了以上提到的拓扑性质, 伪分形的很多其他性质也被很好地研究过, 比如最小支配集 [159]、生成树数目 [160], 以及环的个数、长短及其分布 [143].

**定理 4.6** 伪分形网络  $\mathcal{F}_g$  ( $g \geq 0$ ) 的一阶网络抗噪性的值为:

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_g) = \frac{1}{112 \cdot 3^{g+2}(3^{g+1} + 3)^2} \left( 50 \cdot 3^{3g+3} - 35 \cdot 3^{2g+2} 2^{g+1} + 48 \cdot 3^{2g+2} + 30 \cdot 3^{g+2} 2^{g+1} - 14 \cdot 3^{g+2} + 225 \cdot 2^{g+1} \right), \quad (4.9)$$

当  $g \rightarrow \infty$  时这个值渐进地收敛到一个常数:

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_g) = \frac{25}{84}. \quad (4.10)$$

**证明:** 根据 (3.5), 为了得到伪分形  $\mathcal{F}_g$  的抗噪性, 首先计算它的基尔霍夫指数。将初始条件  $\mathcal{F}_0$  带入 [161] 中定理 5.3 的初始条件图  $G$ , 可以得到图  $\mathcal{F}_g$  的基尔霍夫系数  $R(\mathcal{F}_g)$ , 如下所示:

$$R(\mathcal{F}_g) = \frac{1}{112} 3^{-(g+2)} \left( 50 \cdot 3^{3g+3} - 35 \cdot 3^{2g+2} 2^{g+1} + 48 \cdot 3^{2g+2} + 30 \cdot 3^{g+2} 2^{g+1} - 14 \cdot 3^{g+2} + 225 \cdot 2^{g+1} \right). \quad (4.11)$$

把 (4.11) 式代入 (3.5) 式可以得到 (4.9), 即给出了  $H_{FO}(\mathcal{F}_g)$  的闭式表达式。当  $g \rightarrow \infty$  时, 立刻可以由 (4.9) 得到 (4.10)。□

注意到由平均度  $\rho$  给出的  $H_{FO}(\mathcal{F}_g)$  的下界为  $\frac{1}{2\rho} = \frac{1}{8}$ . 因此, 实际的一阶网络抗噪性的值  $\frac{25}{84}$  约为这个下界的 2.38 倍。因此, 伪分形对带扰动的一阶一致性过程中具有几乎最优的结构。

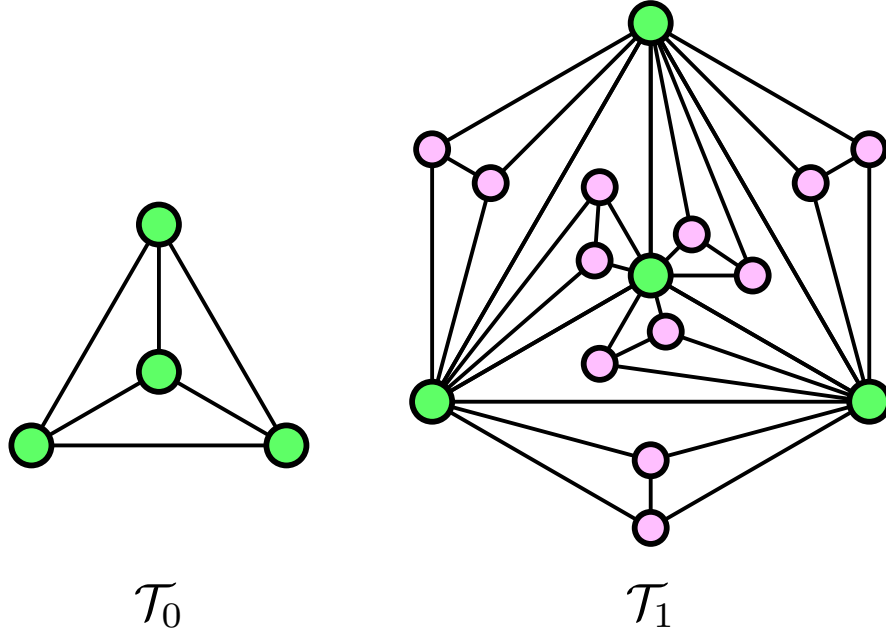
#### 4.5.2 4-团模体网络的抗噪性

这一小节提出了伪分形网的一个变种, 并且计算了它的网络抗噪性。这个变种也是迭代构造的并且是无标度的, 这个图由很多 4 个点的完全图组成, 因此称之为 4-团模体无标度网络。接下来简要介绍其构造方式和结构性质, 以及其带扰动的一阶一致性过程中的网络抗噪性。

用  $\mathcal{T}_g$  表示第  $g$  ( $g \geq 0$ ) 次迭代以后得到的 4-团模体网络。  $g = 0$  时,  $\mathcal{T}_0$  是一个四个点的完全图。对于所有的  $g \geq 1$ ,  $\mathcal{T}_g$  都可以在  $\mathcal{T}_{g-1}$  的基础上构造得到。确切地, 对  $\mathcal{T}_{g-1}$  中的每一条边  $e$ , 引入一条新的边  $e'$ , 并把  $e$  和  $e'$  的所有端点相连, 形成一个四个点的局部的团。对于网络  $\mathcal{T}_g$ , 令  $V_g$  为  $\mathcal{T}_g$  的点集,  $E_g$  为  $\mathcal{T}_g$  的边集。容易得出在网络  $\mathcal{T}_g$  的点数为  $n_g = |V_g| = \frac{2}{5} (6^{g+1} + 4)$ , 边数为  $m_g = 6^{g+1}$ . 因此  $\mathcal{T}_g$  的平均度为  $\rho = \frac{5 \times 6^{g+1}}{6^{g+1} + 4}$ , 当  $g$  很大时平均度收敛到 5. 图 4.4 展示了  $\mathcal{T}_0$  和  $\mathcal{T}_1$ .

4-团模体无标度网络展示出了一些现实网络的共同性质。和伪分形网络一样, 该网络也具有幂律度分布, 其幂指数  $\gamma = 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ . 该网络也具有小世界性质, 其平均距离随网络节点数呈对数速度增长。其聚集系数趋于一个常数  $\frac{265}{306}$ . 可以看出,  $\mathcal{T}_g$  和  $\mathcal{F}_g$  表现出相似的结构性质, 因此可以预计它们的很多动力学性质 (如网络抗噪性) also 具有很强的相似性。

接下来推导 4-团模体网络  $\mathcal{T}_g$  的带扰动的一阶一致性中的抗噪性  $H_{FO}$ . 本节将论证随着网络的增长,  $H_{FO}(\mathcal{T}_g)$  会收敛到一个常数。为了达到这个目的, 首先


 图 4.4: 4-团模体网络  $\mathcal{T}_0$  和  $\mathcal{T}_1$ .

计算  $\mathcal{T}_g$  的基尔霍夫系数。令  $\Omega_{ij}^{(g)}$  为网络  $\mathcal{T}_g$  中  $i$  点和  $j$  点之间的等效电阻。在网络  $\mathcal{T}_{g+1}$  中，以下引理给出了  $i, j$  两点间在  $\mathcal{T}_{g+1}$  中的等效电阻用上一代网络  $\mathcal{T}_g$  中的节点间的电阻表示的式子。

**引理 4.7** 用  $V_g$  表示  $\mathcal{T}_g$  中的点， $\bar{V}_g$  表示在第  $g$  次迭代中新生成的点， $\bar{V}_g \subseteq V_g$ 。令  $i, j$  为第  $g+1$  代 4-团模体网络  $\mathcal{T}_{g+1}$  中的两个节点，两点之间的等效电阻  $\Omega_{ij}^{(g+1)}$  满足：

1. 如果  $i, j \in V_g$ ，那么  $\Omega_{ij}^{(g+1)} = \frac{1}{2}\Omega_{ij}^{(g)}$ 。
2. 如果  $i, j \in \bar{V}_{g+1}$  并且  $\{i, j\} \in E_{g+1}$ ，那么  $\Omega_{ij}^{(g+1)} = \frac{1}{2}$ 。
3. 如果  $i \in \bar{V}_{g+1}$ ， $j, l \in \mathcal{N}_i \cap V_g$ ，那么  $\Omega_{ij}^{(g+1)} = \frac{\Omega_{jl}^{(g)}}{8} + \frac{3}{8}$ 。
4. 如果  $i \in \bar{V}_{g+1}$ ， $j \in V_g$ ， $k, l \in \mathcal{N}_i \cap V_g$ ，那么

$$\Omega_{ij}^{(g+1)} = \frac{3 + 2\Omega_{jl}^{(g)} + 2\Omega_{jk}^{(g)} - \Omega_{kl}^{(g)}}{8},$$

对于  $j \in \{k, l\}$  同样成立，此时可以简化为上一种情况。

5. 如果  $i, j \in \bar{V}_{g+1}$ ， $\{i, j\} \notin E_{g+1}$ ， $k, l \in \mathcal{N}_i \cap V_g$ ，并且  $p, q \in \mathcal{N}_j \cap V_g$ ，那么

$$\Omega_{ij}^{(g+1)} = \frac{6 + \Omega_{kq}^{(g)} + \Omega_{kp}^{(g)} + \Omega_{lp}^{(g)} + \Omega_{lq}^{(g)} - (\Omega_{kl}^{(g)} + \Omega_{pq}^{(g)})}{8}.$$

使用引理 4.4, 4.5 和 4.7, 能够推导出基尔霍夫指数  $R(\mathcal{T}_g)$ 、度乘法基尔霍夫指数  $R^*(\mathcal{T}_g)$  和度加法基尔霍夫指数  $R^+(\mathcal{T}_g)$  之间的递归表达式, 从而得到它们关于  $g$  的精确表达式。

**引理 4.8** 图  $\mathcal{T}_g$  的度乘法基尔霍夫指数、度加法基尔霍夫指数, 以及基尔霍夫指数分别为:

$$R^*(\mathcal{T}_g) = \frac{1}{5} \cdot 2^g 3^{g+2} (13 \cdot 2^{g+1} 3^g - 5 \cdot 3^{g+1} + 4), \quad (4.12)$$

$$R^+(\mathcal{T}_g) = \frac{9}{275} \left( 169 \cdot 2^{2g+2} 3^{2g} - 55 \cdot 2^{g+1} 3^{2g+1} + 11 \cdot 2^{g+3} 3^g + 35 \cdot 3^{g+1} + 11 \right), \quad (4.13)$$

$$R(\mathcal{T}_g) = \frac{3}{275} \left( 13 \cdot 2^{2g+1} 3^{2g+2} - 11 \cdot 2^g 3^{2g+2} + 13 \cdot 2^{g+2} 3^g + 7 \cdot 3^{g+2} - 11 + 36 \cdot 2^{-g} \right). \quad (4.14)$$

**证明:** 采用与 [161] 中相似的方法, 可以推导出以下关于  $R(\mathcal{T}_g)$ ,  $R^*(\mathcal{T}_g)$  和  $R^+(\mathcal{T}_g)$  的递归表达式:

$$R(\mathcal{T}_{g+1}) = \frac{3}{2} M_g^2 - \frac{1}{4} N_g (N_g - 1) + \frac{1}{4} M_g (N_g - 2) + \frac{1}{2} (R(\mathcal{T}_g) + R^+(\mathcal{T}_g) + R^*(\mathcal{T}_g)), \quad (4.15)$$

$$R^*(\mathcal{T}_{g+1}) = 9 (3 M_g^2 - M_g N_g) + 18 R^*(\mathcal{T}_g), \quad (4.16)$$

$$R^+(\mathcal{T}_{g+1}) = \frac{27}{2} M_g^2 - \frac{3}{2} M_g - \frac{3}{4} N_g (N_g - 1) - \frac{9}{4} M_g N_g + (3 R^+(\mathcal{T}_g) + 6 R^*(\mathcal{T}_g)). \quad (4.17)$$

代入  $N_g = \frac{2}{5} (6^{g+1} + 4)$ ,  $M_g = 6^{g+1}$ , 以及初始条件  $R^*(\mathcal{T}_0) = 27$ ,  $R^+(\mathcal{T}_0) = 18$  和  $R(\mathcal{T}_0) = 3$ , 可以求解以上递归方程 (4.15)、(4.16) 和 (4.17) 并且得到引理中所述  $R^*(\mathcal{T}_g)$ 、 $R^+(\mathcal{T}_g)$  和  $R(\mathcal{T}_g)$  的表达式。□

根据引理 4.8 和公式 (3.5), 可以得到以下定理:

**定理 4.9** 对于网络  $\mathcal{T}_g$ ,  $g \geq 0$ , 其一阶抗噪性的值为

$$H_{\text{FO}}(\mathcal{T}_g) = \frac{3}{88} (6^{g+1} + 4)^{-2} \left( 13 \cdot 2^{2g+1} 3^{2g+2} - 11 \cdot 2^g 3^{2g+2} + 13 \cdot 2^{g+2} 3^g + 7 \cdot 3^{g+2} - 11 + 36 \cdot 2^{-g} \right). \quad (4.18)$$

关于  $g$  的极限 ( $g \rightarrow \infty$ ) 为

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_{\text{FO}}(\mathcal{T}_g) = \frac{39}{176}. \quad (4.19)$$

因此, 在大规模网络  $\mathcal{T}_g$  中, 其一阶网络抗噪性的值收敛到一个很小的常数  $\frac{39}{176}$ 。注意到用平均度给出的  $H_{\text{FO}}(\mathcal{T}_g)$  的下界为  $\frac{1}{10}$ , 小于真实值  $\frac{39}{176}$ 。真实值大约是下界的 2.22 倍。因此, 与伪分形无标度网络类似, 4-团模体无标度网络对带扰动的一阶一致性过程中也具有几乎最优的结构。

## 4.6 结果分析

本章前面几节分别研究了现实网络了无标度网络模型中的带噪声一阶一致性过程。结果显示无论网络规模大小, 研究的所有现实无标度网络都具有很小的一阶抗噪性, 而且在所有考虑的网络模型中, 一阶抗噪性都不依赖于网络规模, 而是趋于某个很小的常数。因此, 在所有这些网络结构中, 一阶一致性算法对高斯噪声都具有很好的鲁棒性。因为一阶网络抗噪性由拉普拉斯矩阵的所有非零特征值决定, 而网络结构对这些特征值产生影响, 之所以这些被研究的网络都具有小的常数抗噪性, 是因为其结构性质影响了一致性行为。对于这些无标度, 具有很多各种尺度的环(回路)的网络, 其结构对网络抗噪性的影响可以启发式地论证如下。

如 (3.5) 所示, 网络一阶抗噪性和电阻距离有紧密的联系, 而最短路是电阻距离的上界。在一个无标度网络中, 存在一些枢纽节点, 这些节点和网络中的很多其他节点, 特别是其他枢纽节点相连, 从而导致网络同时具有小世界特性, 也就是说平均距离随网络的点数呈现对数增长 [118], 甚至更慢 [126]。关于无标度随机模型以大概率产生小世界模型的证明参见 [126]。除此之外, 现实和模型无标度网络都具有很多各种尺度的环(回路)。这些环导致点对之间有很多可替代的路径。结果导致从整体上看, 点对之间的平均电阻距离不随网络增大而变大。接下来举例说明无标度性质和大量的环单独作用时, 都不足以得到一阶抗噪性为常数的网络。

第 3 章证明了小世界法雷网络  $\mathcal{W}_g$  的一阶抗噪性满足  $H_{\text{FO}}(\mathcal{W}_g) = \Theta(\log n)$ , 然而在伪分形网络  $\mathcal{F}_g$  中,  $H_{\text{FO}}(\mathcal{F}_g) = \Theta(1)$ , 其渐近行为与  $n$  无关。注意到法雷网络和伪分形网络都具有小世界性质, 并且具有较大的聚类系数。不仅如此, 两种网络中都有具有很多长短各异的环。它们抗噪性的渐近行为的差异至少可以

部分地归结到伪分形的无标度性质。直观上讲，法雷图的各个尺度上都存在一些连接较弱的部分，而伪分形图中的枢纽节点将整个网络混合地更加均匀。在另一方面，第3章还证明了科赫网络  $\mathcal{K}_g$  的一阶抗噪性满足  $H_{FO}(\mathcal{K}_g) = \Theta(\log n)$ 。尽管科赫网络具有无标度性质，但它所有的环都是三角形构成的短环，因此其电阻距离表现出和最短距离相似的渐近行为。

## 4.7 本章小结

各种现实世界网络都是稀疏的，具有很多长度不同的环，并表现出无标度和小世界性质。这些性质对网络上的动力学过程产生了显著的影响。本章研究了带噪声的富环无标度网络的一阶一致性过程，主要是一阶网络抗噪性。首先，提出了网络一阶抗噪性的一个上界和一个下界，下界由网络平均度的倒数给出，上界由网络平均距离给出。接着研究了一些有代表性的现实世界无标度网络，发现它们具有很小的一阶网络抗噪性，而与网络规模没有关系。本章还通过数值模拟研究了 Barabási-Albert 网络和高维阿波罗网络的抗噪性。它们的一阶抗噪性的值都随网络规模增大趋于常数。最后，解析地研究了两种确定性无标度网络模型的一阶抗噪性，得到了它们的显示表达式。分析发现它们的一阶抗噪性的值也随网络规模增大（渐近）收敛到常数。研究结果显示一阶一致性算法在富环的无标度网络中对噪声具有很强的抵抗性，并且简要分析了富环无标度结构导致良好网络抗噪性的原因。

前两章研究了复杂网络结构对一阶一致性网络鲁棒性，特别是一致性系统抗噪性的影响。一阶一致性网络的抗噪性由系统的  $\mathcal{H}_2$  范数描述。下一章将研究基于相对状态测量的一致性算法，在这类问题中，噪声施加在网络中的边上。下一章将会研究一条边的噪声变化对系统整体性能的影响，并用其衡量这条边（测量）在网络中的重要性。



## 第五章 相对测量误差对一致性的影响

本章研究一类通过对相对状态的估计进行状态调整的一致性算法。该算法是位置估计、时钟同步和编队控制中常用的算法。根据此前的工作，在这类基于不确定相对状态测量的一致性系统中，节点状态的协方差矩阵仍然可以给出网络上的等效电阻，系统稳态方差可以用基尔霍夫系数表达。本章重点研究了减小一条边的测量误差对系统稳态方差的影响。等价地，本章提出在加权图中用一条边的电阻变化引起的基尔霍夫系数的变化率来刻画一条边的中心性。对于任意一条边，给出了基尔霍夫系数变化率的显式表达式，并且用边两端节点间的双调和距离来表示。因此称这种中心性定义为双调和距离相关中心性（BDRC）。通过实验展示了 BDRC 相比其他常用的中心性指标，比如介数中心性和生成树边中心性，有更好的区分能力。本章还给出了一个高效的算法，能够在图的边数的接近线性时间内以高概率近似计算所有边的双调和距离。实验结果验证了算法的高效性和准确性。

### 5.1 引言

在本文前面研究的一致性算法中，假设外界扰动和测量误差直接施加在状态值上。这在无法获知噪声产生的机制，也无法对噪声的大小进行准确估计时，是一种简单有效的建模方法。本章将研究一类在传感器网络、时钟同步和编队控制中常用的一致性算法。在这类算法中，节点无法直接得知自己和邻居的状态，而是根据对两者的“相对状态”的测量进行调整。对相对状态的测量存在一定的误差，并且可以得知这种误差大小的期望（用一个已知自相关函数的白噪声建模），并给出一致状态的最佳线性无偏估计（Best Linear Unbiased Estimator）。在这样的系统中，每个“相对状态”测量的误差都会对系统整体性能产生影响。为了衡量这种影响，即估计每个测量的重要性，本章考虑了减小一条边的测量误差导致系统稳态方差变小的变化率。

根据已经建立的理论，在这种基于不可靠相对测量值的一致性系统中，如果将测量误差解释为一条边的电阻，那么该系统和第 6 章中研究的一致性系统具有同样的协方差矩阵，可以给出网络的电阻距离 [78,84,86]。因此，可以用基尔霍夫系数衡量系统的整体表现。

基于此，本章提出了一种加权图中的新的边中心性的度量。考虑一个电阻网络，每条边的电阻是这条边权重的倒数。给定一条边  $e$ ，它的中心性定义为改

变这条边的电阻时,网络的基尔霍夫系数的变化率:变化率越大这条边  $e$  就越重要。本章展示了这样定义的变中心性能够用这条边的两个端点间的双调和距离表示,因此称这种中心性为双调和距离相关中心性 (BDRC)。实验结果显示, BDRC 相比其他常用的边中心性具有更好的区分能力,比如边介数和生成树边中心性等。本章还提出了近似双调和距离的快速近似算法,能够(可证明地)在接近线性时间内算出所有边的端点间的双调和距离。最后,通过在大规模网络上运行算法,验证了该算法足够精确,并且足够高效,能够方便地应用到大规模现实网络上。

接下来介绍一些相关工作,主要包括 BDRC 的应用背景,用网络中的动力学性质或结构性性质定义的边中心性,以及计算这些中心性的算法。

在时钟同步、分布式状态估计等应用 [162–164] 中,需要根据带误差的相对状态测量对参数进行最佳线性无偏估计 [165]。一些前期工作研究了基于相对状态测量的 [84,86] 的一致性算法的鲁棒性,以及领导者选择问题 [77,78]。虽然这类问题的背景和状态方程与 [63–65] 中研究的系统不尽相同,但其分析方法类似,节点状态的协方差矩阵相同 [63,78,86],都和网络中的电阻距离具有密切的联系。

Siami 等人近期的工作 [166,167] 研究了结构化的噪声输入对系统性能的影响,并根据影响的大小定义了一致性网络带结构化噪声的中心性指标。确切地,作者研究了系统的稳态方差随某个特定噪声的方差减小的变化率,并将其定义为网络中心性。但 [166] 研究的系统的结构与 [77,84,86] 中的不尽相同,具体来说,当噪声加到边上时,其系统只需要达到一致,而无需对状态进行最佳线性无偏估计,其反馈边权与测量误差没有关联。

度量点和边的重要性是网络分析的基础问题之一 [168]。目前已有很多工作利用网络拓扑或网络上的动态行为提出了中心性指标 [169,170],用来刻画点或者边的相对重要性。同时,针对这些中心性指标,也提出了相应的算法,用于计算中心性或找到网络中重要的点和边 [168]。相比点中心性而言,边的中心性的相关研究较少。以下介绍一些常见的边中心性的定义及计算它们的算法的时间复杂度。

边介数是最流行的边中心性度量之一。一条边的介数是任意两点间最短路通过这条边的概率。Brandes 提出了精确计算边介数的算法 [171]。给定一个  $n$  个点,  $m$  条边的网络,如果是无权网络,算法的时间复杂度是  $O(mn)$ ;如果是加权网络,运行时间是  $O(nm + n^2 \log n)$ 。后来的一些工作提出了一些计算边介数的近似算法 [172–174],但是这些算法都没有近似比率的保证。

生成树边中心性是另一种重要的边中心性概念，由 Teixeira 等人提出 [175]。对于网络中的任意一条边，它的生成树边中心性定义为这条边包含在一个均匀采样的随机生成树中的概率。到目前位置，计算生成树边中心性的最快的精确算法的时间复杂度是  $O(mn^{3/2})$ 。最近的工作 [176, 177] 提出了两种计算该中心性的近似算法，其精度具有理论保证。

第三种常用的边中心性的度量是电流中心性，最早在 [111] 中提出。根据定义，如果一条边包含于很多点对间较短的路径中，那么它相对其他边具有更高的重要性。[111] 中提出了一种计算电流中心性的运行时间为  $O(mn^{3/2} \log n)$  的算法。[176] 中将时间复杂度降低到了  $O(mn \log n)$ 。

最近提出的基尔霍夫边中心性和生成树边中心性、电流中心性一样，都属于一类与电阻有关的中心性度量，因为他们都与电阻网络、等效电阻有直接的联系。与前三种中心性度量比较，基尔霍夫边中心性具有更好的区分能力，并且（可证明地）可以在接近线性时间内近似。然而计算基尔霍夫边中心性需要选取一个参数  $\theta$ 。并且虽然 [178] 中的算法在理论上很好，其实际的额外开销，特别是与  $\theta$  相关的因子还有提高的余地。最后，[178] 中的算法还在理论阶段，真正实现和应用其中的算法还需要进一步的工作。

本章研究 [84, 86] 中考虑的一致性过程，研究相对测量误差对一致性的影响。采取和 [166, 167] 中相似的做法，由相关系统的稳态方差定义一致性网络的信息中心性的概念。容易发现该信息中心性还可以直接由电路定义，定义为网络基尔霍夫指数随某条边电阻变化的变化率。由于该中心性与双调和距离的密切联系，称其为双调和距离相关中心性（BDRC）。相比前面介绍的其他几种边中心性的定义，BDRC 具有很好的区分能力，并且可以高效地近似。本章提出快速算法并证明了它的时间复杂度和精度，并用在大规模网络中验证了算法的准确性和效率。

## 5.2 基于相对测量误差的一致性估计

考虑以下的系统模型。给定一个无向图  $G = (V, E, w)$ 。节点  $u$  的状态为  $\mathbf{x}_{[u]}$ ，系统的理想状态为

$$\mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[v]} = \sigma_{u,v}, \quad \forall u \sim v \in V \times V.$$

其中  $\delta_{u,v}$  为理想相对状态，对所有的  $u \sim v$  定义，且显然有  $\sigma_{u,v} = -\sigma_{v,u}$ 。

在此基础上定义一个双向图  $\vec{G} = (V, \vec{E}, w)$ . 有向边集  $\vec{E}$  包括所有有满足  $u \sim v$  的有向点对  $(u, v)$  和  $(v, u)$ . 节点  $u$  对  $v$  的相对状态测量表示为:

$$y_{u,v} = \mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[v]} + \xi_{u,v}.$$

$\xi_{u,v}$  是一个高斯白噪声过程, 且自相关函数为  $\mathbb{E}(\xi_{u,v}(t_1)\xi_{u,v}(t_2)) = \delta(t_1 - t_2)r_{u,v}$ . 注意这里  $\xi_{u,v}$  和  $\xi_{v,u}$  是两个独立同分布的值, 其自相关函数满足  $r_{u,v} = r_{v,u} \stackrel{\text{def}}{=} r_e$ . 进一步定义  $w(u, v) = w_e \stackrel{\text{def}}{=} 1/r_e$ ,  $D_u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in \mathcal{N}_u} w(u, v)$ .

系统的最佳线性无偏估计由以下方程给出 [84]

$$\dot{\mathbf{x}}_{[u]} = D_u^{-1} \sum_{v \in \mathcal{N}_u} r_{u,v}^{-1} (y_{u,v} - \sigma_{u,v}). \quad (5.1)$$

为了推导方便, 假设知道某个节点的状态  $\mathbf{x}_{[o]}$ , 并称之为参考节点. 这里只考虑点对之间的状态差, 与参考节点的选择无关, 任意其他节点  $u, u \in V \setminus \{o\}$  的相对状态表示为  $\tilde{\mathbf{x}}_{[u]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_{[u]} - \mathbf{x}_{[o]}$ . [84] 证明了  $\tilde{\mathbf{x}}$  的系统稳态协方差矩阵为:

$$\Sigma_o = \frac{1}{2} \mathbf{L}_o^{-1}. \quad (5.2)$$

$\mathbf{L}_o$  是  $\mathbf{L}$  去掉  $o$  对应的行列以后得到的子矩阵. 因此系统相对节点  $o$  的相对状态的稳态方差为  $(1/2)\text{Tr}(\mathbf{L}_o^{-1})$ .

由于对任意的  $\mathbf{x}_{[1]}, \dots, \mathbf{x}_{[n]}$ , 令  $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{[i]}$ , 一定满足:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_{[i]} - \bar{x})^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{[i]} - \mathbf{x}_{[j]})^2.$$

因此系统 (总的) 稳态方差为:

$$R_{RM} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \in V} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2] = \frac{1}{2n} \sum_{o \in V} \frac{1}{2} \text{Tr}((\mathbf{L}_o)^{-1}).$$

如果将白噪声参数  $r_{u,v} = r_{v,u} = r_e$  理解为边  $e = u \sim v$  的电阻, 那么利用定义2.3以及 [84] 中的结果  $R_{\text{eff}}(u, v) = (\mathbf{L}_v^{-1})_{[u,u]}$ , 可进一步求得:

$$R_{RM} = \frac{1}{2n} R(G). \quad (5.3)$$

$R(G)$  为图  $G$  的基尔霍夫系数。

### 5.3 测量误差对稳态方差的影响

一般来说，边中心性的标准与具体应用有关。在这里，定义系统 (5.1) 的稳态方差  $R_{RM}$  随任意一条边  $e \in E$  的噪声输入的期望大小  $r_e$  变化的变化率为边的中心性。这个指标体现了在基于相对状态估计的一致性系统中，一条边（测量）的重要性，即改进或损害这个测量的准确度对系统整体估计的影响。如 (5.3) 所示，如果把外加噪声的期望大小理解为这条边的电阻  $r_e$ ，则系统稳态方差可以用网络的基尔霍夫系数表达。如下所示，这样定义的边中心性指标可以用这条边端点间的双调和距离直接表示，因此称这个中心性为双调和距离相关边中心性 (BDRC)。

**定义 5.1** 对于一个图  $G = (V, E, w)$  或者它关联的电阻网络  $G = (V, E, r)$ ，令  $e = (u, v)$  是网络中一条边权为  $w_e$  的边（电阻为  $r_e = 1/w_e$ ）。边  $e = (u, v)$  的双调和距离相关中心性  $\mathcal{C}(e)$  定义为

$$\mathcal{C}(e) := \frac{\partial R(G)}{\partial r_e}. \quad (5.4)$$

BDRC 是  $R(G)$  随  $e = (u, v)$  边的电阻改变的变化率。因此这个边中心性量化了一条边对于网络基尔霍夫系数（或者与之相关的性能指标）的影响大小。 $R(G)$  的该变量  $\mathcal{C}(e)$  越大，这条边  $e$  就越重要。

使用 BDRC 的好处之一是它具有简洁的显式表达式。

**定理 5.2** 对于图  $G = (V, E, w)$  中的边  $e = (u, v)$ ，它的 BDRC 能被表达为

$$\mathcal{C}(e) = nw_e^2 d_B^2(u, v). \quad (5.5)$$

**证明：** 根据定义可知

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(e) &= \frac{\partial R(G)}{\partial r(e)} = n \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger)}{\partial w_e} \frac{dw_e}{dr_e} \\ &= n \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger + \frac{1}{n} \mathbf{J})}{\partial w_e} \frac{dw_e}{dr_e} \\ &= n \frac{\partial \text{Tr}((\mathbf{L} + \frac{1}{n} \mathbf{J})^{-1})}{\partial w_e} \frac{d(r_e^{-1})}{dr_e} \\ &= \frac{n}{r_e^2} \text{Tr} \left( \left( \mathbf{L} + \frac{1}{n} \mathbf{J} \right)^{-2} \frac{\partial (\mathbf{L} + \frac{1}{n} \mathbf{J})}{\partial w_e} \right). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\frac{\partial (\mathbf{L} + \frac{1}{n}\mathbf{J})}{\partial w_e} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial w_e} = \frac{\partial (\sum_{e \in E} w_e \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top)}{\partial w_e} = \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top.$$

然后可以推导出

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(e) &= nr_e^{-2} \mathbf{b}_e^\top (\mathbf{L}^2 + \frac{1}{n^2} \mathbf{J}^2 + \frac{1}{n} \mathbf{LJ} + \frac{1}{n} \mathbf{JL})^{-1} \mathbf{b}_e \\ &= nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top (\mathbf{L}^2 + \frac{1}{n} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{b}_e \\ &= nw_e^2 \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e = nw_e^2 d_B^2(u, v). \end{aligned} \quad (5.6)$$

证毕。  $\square$

定理 5.2 表示一条边  $e = (u, v)$  的 BDRC  $\mathcal{C}(e)$  同时由它的边权  $w_e$  和其端点  $u$  和  $v$  之间的双调和距离  $d_B(u, v)$  确定。因此, BDRC  $\mathcal{C}(e)$  同时反映了一条边的结构性质与动力学性质。

## 5.4 双调和距离相关中心性

首先回顾一下双调和距离的概念。

**定义 2.5 (双调和距离)** 图  $G$  中节点  $j, k$  间的双调和距离  $d_B(j, k)$  定义为:

$$d_B^2(j, k) = (\mathbf{L}^{2\dagger})_{[j,j]} + (\mathbf{L}^{2\dagger})_{[k,k]} - 2(\mathbf{L}^{2\dagger})_{[j,k]} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{\lambda_i^2}.$$

对于一个中心性概念而言, 能否正确区分节点或边的中心性, 以及区分能力如何都是研究人员关注的问题 [179]。接下来将会说明 BDRC 相比其他的中心性度量具有更好的区分能力。比如: 边介数中心性和生成树边中心性。

考虑图 5.1 所示的扰动环图, 该图由一个 15 个点的环加上一条边连接环上距离为 2 的两个点得到。考虑图中的两条边  $e_1$  和  $e_2$ 。从直觉上说,  $e_1$  比  $e_2$  更重要。可以这样理解: 如果删掉边  $e_1$ ,  $u$  和  $v$  之间的最短路长度增加了 12; 如果删掉边  $e_2$ , 任意点对间的最短路最多增加 1。然而,  $e_1$  和  $e_2$  的边介数中心性都为 24.5, 也就是说边介数中心性不能区分这两条边的重要性。根据定理 5.2,  $e_1$  和  $e_2$  的 BDRC 分别为  $\mathcal{C}(e_1) = 1.1327$  和  $\mathcal{C}(e_2) = 0.5413$ 。这表示相对来说  $e_2$  没有  $e_1$  重要。这个结果与一般的直觉一致。

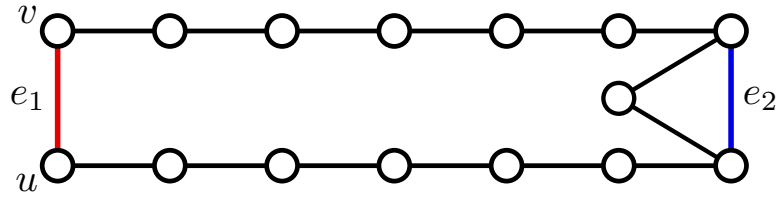


图 5.1: 扰动环图.

表 5.1: 一些经典的现实网络.

Network	$n$	$m$
Lesmis [180]	77	254
Adjnoun [181]	112	425
Dolphins [182]	62	159
Celegansneural [9]	297	2 148
High-energy [183]	5 835	13 815
Condensed matter [183]	13 861	44 619

不但如此, BDRC 相比生成树边中心性也具有更好的区分能力。比如比较图 5.2 所示的双星图中的  $e_3$  与其他任意一条边。生成树边中心性不能区分这两条边, 因为它们的生成树边中心性都是 1。然而计算它们的 BDRC,  $\mathcal{C}(e_3) = 7$ , 其他的边的 BDRC 为 0.9643。因此  $e_3$  相对其他的边分值更高, 这符合一般的直觉, 因为  $e_3$  连接了两个星状图的中心节点。

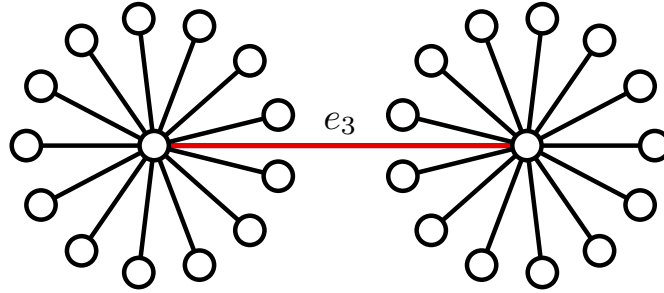


图 5.2: 双星图.

为了进一步展示 BDRC 在现实网络中的区分能力, 接下来通过实验比较 BDRC 和其他常用的中心性度量, 包括边介数、生成树边中心性以及电流中心性。对于每一种度量, 对每一个网络都计算了所有边的中心性。这些网络是一些经典的现实网络, 如表 5.1 所示<sup>1</sup>。和 [179] 中的做法相似, 本文计算了每种边中心性度量的相对标准差。相对标准差定义为标准差除以均值。图 5.3 展示了每个

<sup>1</sup>所有的数据都来源于 <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>

网络上各个度量的边中心性的相对标准差的结果。BDRC 在所有示例中都具有最高的相对标准差，这表示它相对其他集中边中心性具有更好的区分能力。

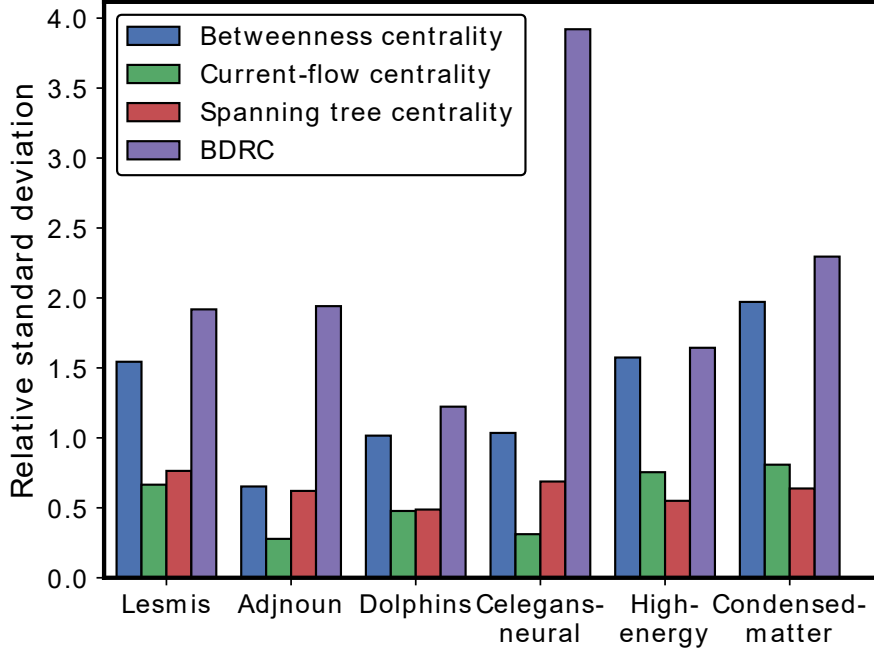


图 5.3: 现实网络中不同边中心性度量的相对标准差。

## 5.5 快速近似算法

直接计算  $e$  的双调和距离相关中心性  $\mathcal{C}(e)$  需要计算  $\mathbf{L}^2$  的 Moore-Penrose 逆，其时间复杂度为  $O(n^3)$ ，空间复杂度为  $O(n^2)$ 。因此计算大规模网络的边中心性变得很困难。本节提出了一个算法，能够用（相对于边数  $m$  的）接近线性时间以高概率近似  $\mathcal{C}(e)$ 。在介绍算法之前，首先回顾两个引理，这两个引理对设计算法和给出算法的近似比非常重要。在本章中用符号  $\tilde{O}(\cdot)$  忽略运行时间中的  $\text{poly}(\log n)$  因子。

**引理 5.3 (Johnson-Lindenstrauss 引理, [184])** 给定固定的向量  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^d$  和  $\epsilon > 0$ ，令  $\mathbf{Q}_{k \times d}$  是一个随机  $\pm 1/\sqrt{k}$  元素组成矩阵（其所有元素为独立伯努利随机变量），其中  $k \geq 24 \log n / \epsilon^2$ 。那么至少有  $1 - 1/n$  的概率使得

$$(1 - \epsilon) \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 \leq \|\mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{Q}\mathbf{v}_j\|^2 \leq (1 + \epsilon) \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2$$

对所有的  $i, j \leq n$  成立。



**引理 5.4 ([185])** 算法  $\mathbf{y} = \text{LaplSolve}(\mathbf{L}, \mathbf{z}, \epsilon)$  的输入包括一个图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$ ,  $m$  和  $n$  分别为图的点数和边数, 一个向量  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , 以及一个标量  $\delta > 0$ ; 返回一个向量  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , 以下陈述以概率  $1 - 1/\text{poly}(n)$  成立。

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{L}^\dagger \mathbf{z}\|_L \leq \delta \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{z}\|_L,$$

其中  $\|\mathbf{x}\|_L = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}}$ 。算法的期望运行时间为  $\tilde{O}(m \log(1/\delta))$ 。

由定义 2.5 可知, 对  $G$  中的任意点对  $u$  和  $v$ ,  $d_B^2(u, v)$  能被写为  $d_B^2(u, v) = \|\mathbf{L}^\dagger(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2$ 。因此,  $d_B(u, v) = \|\mathbf{L}^\dagger(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|$ , 刚好是向量  $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_u$  和  $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v$  之间的欧几里得距离。然后, 通过把  $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v$ ,  $v \in V$  映射到  $k = O(\log n)$ -维随机向量张成的子空间中, 同时使用  $\text{LaplSolve}$ , 可以给出一个计算所有  $d_B(u, v)$ ,  $e = (u, v) \in E$  的快速近似算法。

令  $\mathbf{Q}$  是一个  $k \times n$  的随机投影矩阵。根据引理 5.3,  $\|\mathbf{Q}\mathbf{L}^\dagger(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2$  可以做到  $d_B^2(u, v)$  的一个任意的近似。然而直接计算  $\mathbf{Z} = \mathbf{Q}\mathbf{L}^\dagger$  需要计算  $\mathbf{L}^\dagger$ 。通过解方程组  $\mathbf{L}\mathbf{z}_i = \mathbf{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  可以避免计算伪逆, 其中  $\mathbf{z}_i^\top$  和  $\mathbf{q}_i^\top$  分别是  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{Q}$  的第  $i$  行。引理 5.4 表示  $\mathbf{z}_i^\top$  能够被高效地近似出来。

**引理 5.5** 给定一个  $k \times n$  的矩阵  $\mathbf{Z}$ , 对所有的点对  $u, v \in V$  满足

$$(1 - \epsilon)d_B^2(u, v) \leq \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 \leq (1 + \epsilon)d_B^2(u, v).$$

如果对所有的  $u \in V$ , 令  $\mathbf{z}_u = \mathbf{Z}\mathbf{e}_u$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_u$  是  $\mathbf{z}_u$  的一个近似, 并且满足

$$\|\mathbf{z}_u - \tilde{\mathbf{z}}_u\|_L \leq \delta \|\mathbf{z}_u\|_L, \quad (5.7)$$

其中

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{3} \sqrt{\frac{6(1 - \epsilon)w_{\min}^2}{(1 + \epsilon)n^5 w_{\max}^2}}. \quad (5.8)$$

那么对任意的点对  $u, v \in V$ ,

$$(1 - \epsilon)^2 d_B^2(u, v) \leq \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 \leq (1 + \epsilon)^2 d_B^2(u, v). \quad (5.9)$$

证明: 为了证明 (5.9), 只需要保证对任意的  $u$  和  $v$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 - \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 \right| \\ &= \left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| - \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \right| \cdot \left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| + \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \right| \\ &\leq \left( \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{9} \right) \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2, \end{aligned}$$

当以下不等式成立时得以满足

$$\left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| - \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \right| \leq \frac{\epsilon}{3} \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|. \quad (5.10)$$

接下来证明 (5.10) 为真。注意到对一个连通图  $G$  而言, 点对  $u$  和  $v$  之间都存在一个简单路径  $P$ 。沿着路径  $P$  使用三角不等式可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| - \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \right| \\ &\leq \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \leq \sum_{a \sim b \in P} \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)\|. \end{aligned}$$

最后一个和式的平方满足

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{a \sim b \in P} \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)\| \right)^2 \leq n \sum_{a \sim b \in P} \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)\|^2 \\ &\leq n \sum_{a \sim b \in E} \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)\|^2 = n \|(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})\mathbf{B}^\top\|_F^2 = n \|\mathbf{B}(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})^\top\|_F^2 \\ &\leq \frac{n}{w_{\min}} \|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{B}(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})^\top\|_F^2 \leq \frac{n\delta^2}{w_{\min}} \|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{B}\mathbf{Z}^\top\|_F^2, \end{aligned}$$

其中第一个不等式由 Cauchy-Schwarz 不等式得出,  $\|\cdot\|_F$  表示一个矩阵的 Frobenius 范数, 最后一个不等式由 (5.7) 得出, 并且能够进一步进行评估

$$\begin{aligned} & \frac{n\delta^2}{w_{\min}} \|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{B}\mathbf{Z}^\top\|_F^2 = \frac{n\delta^2}{w_{\min}} \sum_{a \sim b \in E} w_{a \sim b} \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b)\|^2 \\ &\leq \delta^2 \frac{n(1+\epsilon)}{w_{\min}} \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger) \leq \frac{\delta^2 n(n^2-1)(1+\epsilon)}{6w_{\min}^2}. \end{aligned}$$

最后一个不等式根据事实  $\text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger) = R(G)/n$  得到, 其中  $R(G)$  当  $G$  是一个  $n$  个点的 (权重为  $w_{\min}$ ) 路径图时, 取得最大值  $n(n^2-1)/6$ 。另一方面,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 &\geq (1-\epsilon)d_B^2(u, v) = (1-\epsilon)\mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^{2\dagger} \mathbf{b}_e \\ &\geq (1-\epsilon)(\lambda_{n-1})^{-2} \geq (1-\epsilon)(nw_{\max})^{-2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

(5.11) 的最后一个不等式由以下事实得到：  $w_{\max} \mathbf{L}_{\mathcal{K}_n} - \mathbf{L}_G$  是半正定的，而  $\mathbf{L}_{\mathcal{K}_n}$  是单位权重的  $n$  个点的团的拉普拉斯矩阵。因此

$$\frac{\left| \|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| - \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\| \right|}{\|\mathbf{Z}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|} \leq \delta \left( \frac{n(n^2 - 1)(1 + \epsilon)}{6w_{\min}^2} \right)^{1/2} \left( \frac{n^2 w_{\max}^2}{1 - \epsilon} \right)^{1/2} \leq \frac{\epsilon}{3},$$

其中  $\delta$  由 (5.8) 给出。  $\square$

由引理 5.5 可以得到以下定理：

**定理 5.6** 存在一个运行时间为  $\tilde{O}(m \log c / \epsilon^2)$  的算法，其输入包括误差参数  $0 < \epsilon < 1$ 、图  $G = (V, E, w)$ ，其中  $c = \frac{w_{\max}^2}{w_{\min}^2}$ ；返回一个  $(24 \log n / \epsilon^2) \times n$  的矩阵  $\tilde{\mathbf{Z}}$ ，使得其至少有  $1 - 1/n$  的概率，

$$(1 - \epsilon)^2 d_B^2(u, v) \leq \|\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v)\|^2 \leq (1 + \epsilon)^2 d_B^2(u, v)$$

对任意点对  $u, v \in V$  都成立。

基于定理 5.6，本文提出一个算法 AppxBDR，用来对所有网络中的边  $e \in E$  近似计算  $\mathcal{C}(e)$ 。该算法的伪代码见算法 5.1。

---

**算法 5.1:** AppxBDR( $G, \epsilon$ )

---

**Input** :  $G$ : a connected undirected graph.

$\epsilon$ : approximation parameter of edge centrality

**Output:**  $\hat{C} = \{e, \hat{c}(e) | e \in E\}$ :  $\hat{c}$  is an approximation of  $\mathcal{C}(e)$ , the BDR of  $e$ .

1  $\mathbf{L} = \text{Laplacian of } G$ ,  $\hat{c}(e) = 0$  for all  $e \in E$

2  $k = \lceil 24 \log n / \epsilon^2 \rceil$

3 **for**  $i = 1$  **to**  $k$  **do**

4     Construct a  $\pm 1/\sqrt{k}$  random vector  $\mathbf{q}_i$  of size  $n \times 1$

5      $\tilde{\mathbf{z}}_i = \text{Lap1Solve}(\mathbf{L}, \mathbf{q}_i, \delta)$  where  $\delta$  is given by (5.8)

6     **for each**  $e \in E$  **do**

7          $\hat{c}(e) = \hat{c}(e) + nw_e^2 |\tilde{\mathbf{z}}_{i,u} - \tilde{\mathbf{z}}_{i,v}|^2$

8 **return**  $\hat{C} = \{e, \hat{c}(e) | e \in E\}$

---

## 5.6 实验评估

本节通过实验评估算法的效率和准确性。

为了评估算法的效率和精度，采用了很多不同领域的现实世界网络作为测试数据。网络数据都是从 Koblenz 网络数据集 [152] 中获取的。实验在这些网络的最大连通图（LCC）上运行。数据集的相关信息在表 5.2 中给出。

实验在一个 Linux 台机上运行。机器配置为 *Intel i7-7700K @ 4.2-GHz* (4 核), 32GB 内存。实验使用 *Julia v0.6.0* 实现了 AppxBDR 算法, 其中算法 LaplSolve 调用了程序库中实现的 [95] 中的算法。该算法的 Julia 语言的实现可以在相关网站<sup>2</sup>中找到。

为了展示近似算法 AppxBDR 的效率, 表 5.2 比较了算法 AppxBDR 和精确算法 (ExactBDR) 的运行时间。ExactBDR 通过计算  $L^2 + \frac{1}{n}J$  的逆, 根据 (5.6) 来计算双调和距离。为了客观评判算法的运行时间, 除最后 5 个标 \* 的网络以外, 对于 ExactBDR 和 AppxBDR 两个算法, 都强制程序在单线程上执行。结果显示对于适当大小的  $\epsilon$ , AppxBDR 显著地比 ExactBDR 更快, 尤其是在大网络上优势十分明显。对于最后 5 个网络, 点数的范围是  $10^5$  到  $10^6$ 。因为内存的限制, 已经无法在前面描述的机器上运行 ExactBDR 算法, 即使有足够的内存, 其时间开销也会很大。

除了效率之外, 本节还评估了近似算法 AppxBDR 的精确性。为了达到这个目的, 比较了 AppxBDR 计算的近似结果和 ExactBDR 计算的精确结果。在表 5.3 中, 给出了近似算法的平均相对误差  $\sigma$ ,  $\sigma$  定义为  $\sigma = \frac{1}{m} \sum_{e \in E} |\mathcal{C}(e) - \hat{c}(e)| / \mathcal{C}(e)$ 。结果表明在所使用的数据集中, 对所有示例中  $\epsilon$  的取值, 平均相对误差的实际值都很小, 远小于证明给出的最坏情况的保证。因此, 近似算法 AppxBDR 在实践中可以给出非常准确的计算结果。

<sup>2</sup><http://danspielman.github.io/Laplacians.jl/latest/>

表 5.2: 现实网络中 ExactBDRC 和 AppExactBDRC 的运行时间 (秒  $s$ ), 包含不同的  $\epsilon$  的取值.

Network	# nodes in LCC	# edges in LCC	ExactBDRC ( $s$ )	AppxBDRC ( $s$ ) with various $\epsilon$					
				0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	
Chicago	823	822	0.1655	0.0496	0.0692	0.1067	0.1870	0.4184	
Facebook (NIPS)	2888	2981	6.9439	0.6099	0.8944	1.4355	2.5606	5.4581	
Vidal	2783	6007	6.2797	1.5683	2.2292	3.4950	6.1910	13.950	
Powergrid	4941	6594	34.851	3.8330	5.7525	9.0637	16.826	40.202	
Reactome	5973	145778	61.673	18.916	32.787	44.870	74.794	176.13	
Route views	6474	12572	78.039	3.1174	4.0897	6.9604	11.849	27.826	
Pretty Good Privacy	10680	24316	272.87	10.622	15.451	23.832	38.945	90.053	
Astro-ph	17903	196972	1648.6	51.266	71.565	116.55	202.10	457.30	
CAIDA	26475	53381	7396.0	19.173	25.823	43.78	73.903	158.43	
Brightkite	56739	212945	35063	103.27	149.25	226.34	393.76	935.14	
Livemocha*	104103	2193083	—	3078.2	3226.5	3558.8	4131.1	6114.4	
WordNet*	145145	656230	—	294.80	373.24	493.66	776.26	1818.4	
Gowalla*	196591	950327	—	612.67	777.28	1005.7	1518.1	3029.5	
Amazon*	334863	925872	—	1307.5	1749.1	2570.3	4648.9	10517	
Pennsylvania*	1087562	1541514	—	5314.5	7288.3	11404	20410	45560	

表 5.3: 不同的  $\epsilon$  的取值下 AppxBDRRC 的平均相对误差.

Network	Mean relative error with various $\epsilon$		
	0.3	0.2	0.1
Chicago	$2.75 \times 10^{-2}$	$1.80 \times 10^{-2}$	$9.01 \times 10^{-3}$
Facebook (NIPS)	$2.46 \times 10^{-2}$	$1.62 \times 10^{-2}$	$8.14 \times 10^{-3}$
Vidal	$2.42 \times 10^{-2}$	$1.64 \times 10^{-2}$	$7.97 \times 10^{-3}$
Powergrid	$2.35 \times 10^{-2}$	$1.57 \times 10^{-2}$	$8.00 \times 10^{-3}$
Reactome	$2.36 \times 10^{-2}$	$1.58 \times 10^{-2}$	$7.75 \times 10^{-3}$
Route views	$2.27 \times 10^{-2}$	$1.54 \times 10^{-2}$	$7.93 \times 10^{-3}$
Pretty Good Privacy	$2.26 \times 10^{-2}$	$1.52 \times 10^{-2}$	$7.50 \times 10^{-3}$
Astro-ph	$2.18 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-2}$	$7.36 \times 10^{-3}$
CAIDA	$2.17 \times 10^{-2}$	$1.45 \times 10^{-2}$	$7.24 \times 10^{-3}$
Brightkite	$2.08 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$6.97 \times 10^{-3}$

## 5.7 本章小结

本章研究了相对测量误差对一致性系统的影响。确切地，研究了在一个通过相对状态估计进行状态调整的一致性系统中，改变一个测量值的误差大小对系统整体性能的影响。本章由此引入了一种边中心性，用来度量网络中边的重要性。对于每条边，这个中心性定义为网络稳态方差对改变某条边的测量误差的敏感性。如果将噪声大小解释为电阻阻值，该定义又等价于网络基尔霍夫系数对改变某条边电阻的阻值的敏感性。本文推导出：对于任意的一条边，这种边中心性正比于这条边权重的平方，以及两个端点间的双调和距离的平方。因此称之为双调和距离相关中心性（BDRRC）。本章论证了 BDRRC 相比边介数和生成树边中心性等常用边中心性指标具有更好的区分能力。不仅如此，还提出了一个高概率的近似算法，能够在（边数  $m$ ）的接近线性时间内近似所有边的 BDRRC 的值。本章在现实网络中运行了很多实验，实验表明提出的算法在现实世界大规模网络中足够高效、精确。

网络的双调和距离不仅可以用于衡量系统 (5.1) 中测量的重要性，还可以用于解析二阶一致性的抗噪能力。第 8 章将对此做详细探讨。除此之外，本章的算法还可以用于其他问题，比如在计算机图形学 [112] 中度量曲面上点对之间的距离，以及在社交网络中度量网络节点、边的重要性等等。

接下来的两章将研究一致性系统的优化。在网络控制系统中，增加控制节点和网络结构优化是优化网络性能的常用策略。后面两章将分别研究一阶一致性系统的领导者选择问题和最优结构设计问题。并且对这两个问题的研究将分别从近似算法和复杂性两个角度展开。

## 第六章 一阶一致性系统的领导者选择

在网络控制系统中，常常通过牵引少量节点来控制整个网络，这样的系统通常被称为领导者-跟随者系统。本章研究受到随机扰动影响的领导者-跟随者一致性网络，特别的，研究这种一致性网络中的  $k$ -领导者选择问题。即给定一个网络和一个整数  $k$ ，要返回不超过  $k$  个节点作为领导者，使得网络性能最优。考虑带噪声的领导者模型，在这样的系统中领导者虽然知道预设轨迹，但和跟随者一样，都会受到外界扰动的影响。和前面的章节一样，用网络的抗噪性来描述其表现。网络的抗噪性是一致性系统的  $\mathcal{H}_2$  范数，刻画了跟随者的轨迹和领导者所决定的轨迹的差异程度。本章把带倔强系数的领导者选择问题转化为网络结构优化问题，证明了该问题的超模型并给出了贪心算法的近似比。由于问题的等价性，类似算法同样适用于提高社交网络中一个点的信息中心性。本章基于此提出了两个近似算法。其中快速算法的时间复杂度为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ ，以高概率返回近似比为  $(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e} - \epsilon)$  的解。最后，在很多真实数据上测试了算法的有效性和效率。

### 6.1 引言

领导者-跟随者一致性是近年来受到关注的一类一致性问题 [38, 63, 77, 79–83]。在领导者-跟随者系统中，节点的一个子集作为领导者跟踪一个外部信号，简要说，领导者设定整个系统的运行轨迹。剩下的节点是跟随者，跟随者依据它自己与邻居节点的相对信息更新自己的状态。领导者-跟随者模型可以用来建模编队控制动力学。在这种问题中，由于带宽等限制，操作员（或系统）只能控制节点的一个子集。除此之外，领导者-跟随者系统能够模拟社交网络中的观点一致过程，其中部分节点表现出一定的倔强性 [85]。领导者-跟随者过程还被应用到分布式传感器定位问题中 [86]。在领导者-跟随者系统中，系统表现依赖于网络拓扑和领导者在网络中的位置。这种依赖性自然地导致了以下问题：如何选择领导者从而优化给定网络拓扑的系统表现？

大量的研究关注领导者-跟随者网络的表现，在这些网络中节点服从一致性动力学方程并且受到外加随机扰动的影响。相关工作一般考虑两种领导者模型。第一种称为不带噪声的领导者（*noise-free leaders*），即领导者能够准确地追踪外界信号而不受噪声的影响。第二种称为带噪声的领导者（*noise-corrupted*

*leaders*)，即领导者虽然知道外界信号，但是它们和跟随者一样也受到外加随机扰动的影响。在第二种模型中，一般通过一个参数来描述领导者的倔强系数，当系数为无穷大时，可以认为领导者不受噪声和其他节点影响。因此，可以认为第一种模型是第二种模型的特殊情况。如同很多带噪声的一致性系统的工作 [38,63,78,83]，本章用系统的  $\mathcal{H}_2$  范数量化系统表现， $\mathcal{H}_2$  范数刻画了节点状态的稳态方差，又称为网络的抗噪性。

本章用对应电阻网络中的等效电阻研究了带噪声领导者集合的一致性网络的稳态方差。针对带噪声的领导者模型，通过等效电阻与网络抗噪性的关系，将其转化为一个网络结构优化问题。在此基础上证明了问题的超模型并给出了贪心算法的近似比。由于信息中心性与电阻距离的联系，本章还将类似的贪心算法应用于选边提高网络中一个节点的信息中心性这一问题，并将算法的时间复杂度优化到  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ 。

本章内容的相关工作主要包括  $k$ -领导者选择问题的定义和算法，以及各种中心性度量的概念和优化算法，下面对一些前期工作作简要介绍。

Patterson 和 Bamieh 在 [63] 中首先提出了  $k$ -无噪声领导者选择问题。可以通过搜索所有可能的领导者集合解决这个问题，但对于一个较大规模的网络中给定一个合理的  $k$ ，穷举式搜索显然是不可行的。因此一些相关工作提出了  $k$ -无噪声领导者选择的多项式时间近似算法 [77,78,80,81,86]。另一方面，林埏 [82] 给出了有向格点图上只有一个领导者时各节点的稳态方差的渐近行为；[81] 给出了树形图上选举一个领导者的分布式算法；[83] 给出了在加权路径和环上选取  $k$  个领导者的多项式时间精确算法。带噪声领导者选择问题最早由林埏 [80] 等人提出，他们还给出了该问题的目标函数的下界和启发式算法。

Fitch 和 Leonard 近期的工作 [37,38] 研究带噪声的和无噪声的领导者选择问题。这些工作也试图建立系统的稳态方差与图结构本身建立联系。她们建立了抗噪性与网络中心性的联系，具体地，她们将 1-领导者选择与网络的信息中心性联系起来，将 2-领导者选择问题与网络的联合中心性联系起来。[37,38] 还根据这些中心性的概念给出了一些图中的最优领导者的位置。比如给出了环的长度为  $k$  的整数倍时的最优位置。

中心性度量指的是一些能够识别复杂网络中点或边的重要性的指标 [186]。网络中心性是网络分析中一个强大的工具，在网络科学中有很多重要的应用。在过去二十年中，产生了很多中心性指标和相应的算法，以帮助分析和理解网络动



力学中节点的作用 [169, 187]。在各种各样的中心性指数中，尤其是在社交网络中，介数中心性和接近中心性可能是研究最多指标。但是，这两个指标仅仅考虑了点对间的最短路，而没有考虑其他路径。为了克服这两种度量的缺点，研究者提出了电流中心性 [111, 188] 的概念，并且被证明等价于信息中心性 [35]。电流中心性考虑了图中所有的路径，并且比介数中心性 [188] 和接近中心性 [179] 有更好的区分能力。

通过在网络中添加与特定节点相连的边提高其中心性的这类问题已有大量的研究。比如，大量的研究考虑了基数限制的最大化特定中心性的问题，即添加与特定节点关联的  $k$  条边从而最大化该节点的中心性。比如介数中心性 [189–192] 和接近中心性 [189, 192]。还可以用其他点指标定义类似的优化问题，一些相关工作对此进行了研究，包括  $v$  到其他点的平均最短路 [193, 194]、点  $v$  到其他点的最大距离 [195]，PageRank [196, 197]，以及包含  $v$  的不同路径条数 [198]。然而，虽然网络的信息中心性相介数中心性 [188] 或接近中心性 [179] 能够更好地区分节点，之前还没有相关工作考虑通过添加连边提高网络的信息中心性。

本章首先将带噪声的领导者选择问题转化为增广图上的电阻优化问题，或者说将 [37] 中建立的 1-领导者选择与信息中心性的关系扩展到任意的  $k$ -领导者选择问题。然后通过证明超模性得到了 [80] 中提出的贪心算法的近似比为  $(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e})$ 。然后本章将类似的贪心算法应用于提高网络中一个节点的信息中心性，提出了两个最大化信息中心性的近似算法。其中快速算法的时间复杂度为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ ，以高概率返回近似比为  $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$  的解。最后在很多真实数据上测试了算法的有效性和效率。

## 6.2 系统模型和问题形式化

考虑一个  $n$  个节点的网络  $G = (V, E, w)$ ， $V$  是节点（智能体）的集合， $E$  是边（通信链路）的集合。和此前讨论的无领导者的一致性网络中一样，每个节点  $i \in V$  都有一个标量状态  $\mathbf{x}_{[i]}$ 。一致性算法的目的就是要让所有节点的状态都跟踪一个外部信号  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ 。

本章主要研究带噪声的领导者模型。在这种模型中，领导者集合中的节点根据一致性算法和外界信号调整它们的状态，并且它们的状态也会受到外加扰动的影响。不失一般性地假设参考信号为  $\bar{x} = 0$  [63]，领导者节点  $i$  的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}}_{[i]} = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w(i, j) (\mathbf{x}_{[i]} - \mathbf{x}_{[j]}) - \kappa_i \mathbf{x}_{[i]} + \xi_i,$$

其中  $\kappa_i$  表示了节点  $i$  的倔强程度, 亦即该节点分配给自己状态 (或外界信号) 的参考权重,  $\xi_i$  为节点  $i$  上外加的白噪声。跟随者拥有一样的状态方程, 只是其倔强系数为 0。整个系统的状态方程可以写为

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S) \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \quad (6.1)$$

其中  $\boldsymbol{\xi}$  是一列相互独立的白噪声过程, 分别施加到对应的节点上。 $\mathbf{D}_\kappa$  是表征倔强程度的对角阵,  $\mathbf{D}_S$  是一个  $(0, 1)$  对角阵, 如果第  $i$  个节点是领导者, 那么  $\mathbf{D}_S$  的第  $(i, i)$  个元素等于 1, 其他元素为 0。注意到如果  $S \neq \emptyset$ , 那么  $\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S$  是正定的 [199]

按照惯例, 通过系统总的稳态方差定义系统的表现, 在无领导者时系统的稳态方差为 [64]:

$$R_{NC}(\emptyset) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger). \quad (6.2)$$

在  $S \neq \emptyset$  时系统的稳态方差由以下结果给出 [80]:

$$R_{NC}(S) = \frac{1}{2} \text{Tr}((\mathbf{L} + \mathbf{D}_\kappa \mathbf{D}_S)^{-1}). \quad (6.3)$$

**问题 6.1 (带噪声领导者选择问题)** 给定一个网络  $G = (V, E, w)$ , 要求找到大小至多为  $k$  的领导者集合  $S \subset V$ , 使得系统 (6.1) 的抗噪性尽可能地好, 即

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && R_{NC}(S) \\ & \text{subject to} && |S| \leq k. \end{aligned} \quad (6.4)$$

根据 Weyl 不等式容易得到, 系统在加入第一个领导者时系统抗噪性变大, 在后续加入更多的领导者时系统抗噪性单调递减。

### 6.3 转化为电阻距离优化

令  $\mathbf{L}_v$  表示图  $G$  的拉普拉斯矩阵去掉第  $v$  行和第  $v$  列以后的主子矩阵, 已有的结果显示 [84]

$$R_{\text{eff}}(u, v) = (\mathbf{L}_v^{-1})_{[u, u]}, \quad (6.5)$$

即  $R_{\text{eff}}(u, v)$  由  $\mathbf{L}_v^{-1}$  的第  $u$  个对角元给出。由电阻距离的对称性知道,  $R_{\text{eff}}(u, v) = R_{\text{eff}}(v, u) = (\mathbf{L}_v^{-1})_{[u, u]} = (\mathbf{L}_u^{-1})_{[v, v]}$ 。

定义图  $G$  中一个点的电阻距离  $\mathcal{R}_v(G)$  为所有节点  $u \in V$  到一个点  $v$  的电阻距离的和, 即  $\mathcal{R}_v(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} R_{\text{eff}}(u, v)$ 。由 [200] 可知:

$$\mathcal{R}_v(G) = n(\mathbf{L}^\dagger)_{[v, v]} + \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger). \quad (6.6)$$

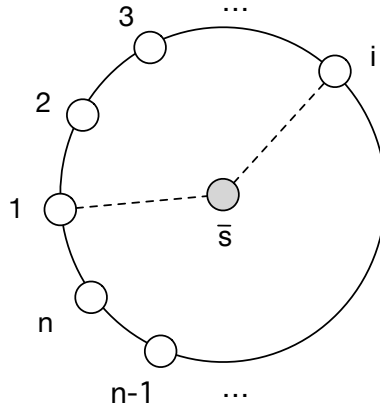


图 6.1: 选择节点 1 和  $i$  作为环上的带噪声领导者的增广图示例.

由 (6.5) 容易得到

$$\mathcal{R}_v(G) = \text{Tr} \left( (\mathbf{L}_v^G)^{-1} \right). \quad (6.7)$$

对于带噪声领导者的情况, 可以通过构造一个增广图得到网络抗噪性的表达式。令  $G = (V, E, w)$  是一个无向加权图, 权重函数为  $w(e) : E \rightarrow \mathbb{R}$ , 并且令  $S \subseteq V$  为一个带噪声领导者集合。根据原图  $G$  构造一个增广图  $\bar{G}$ 。构造方法为: 向图  $G$  中加入一个 (虚拟) 节点  $\bar{s}$  并且对所有的  $i \in S$  和  $\bar{s}$  之间建立一个新的连接, 边权为  $\kappa_i$ 。在图 6.1 中给出了一个关于  $n$  个节点的环的例子。选取的两个带噪声领导者分别为节点 1 和节点  $i$ 。用记号  $\bar{r}(u, v)$  表示节点  $u$  和节点  $v$  在图  $\bar{G}$  中的等效电阻。

以下定理给出了带噪声领导者网络  $G$  的一致性和增广图  $\bar{G}$  中的等效电阻的关系。

**定理 6.2** 假设  $G = (V, E, w)$  是一个包含带噪声领导者集合  $S$  的一致性网络, 令  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{w})$  为相关的增广图。那么网络上的抗噪性可以表示为

$$R_{NC}(S) = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\bar{s}}(\bar{G}).$$

**证明:** 令  $\mathbf{L}$  是图  $G$  的拉普拉斯矩阵,  $\bar{\mathbf{L}}$  是增广图  $\bar{G}$  的拉普拉斯矩阵。记  $\bar{\mathbf{L}}_{\bar{s}}$  为由  $\bar{\mathbf{L}}$  去掉关于节点  $\bar{s}$  的行和列的主子矩阵。首先注意到, 根据  $\bar{G}$  的构造方式,  $\bar{\mathbf{L}}_{\bar{s}} = \mathbf{L} + \mathbf{D}_S \mathbf{D}_{\kappa}$ 。根据 (6.5), 对任意的  $i \in \bar{V}$ , 以下等式成立

$$\bar{r}(i, \bar{s}) = \left( (\mathbf{L} + \mathbf{D}_S \mathbf{D}_{\kappa})^{-1} \right)_{[i, i]}.$$

据此可以得到：

$$R_{NC}(S) = \frac{1}{2} \text{Tr}((\mathbf{L} + \mathbf{D}_S \mathbf{D}_\kappa)^{-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \bar{r}(i, \bar{s}),$$

其中第一个等式由 (6.3) 得到。  $\square$

因此，已经把带噪声的领导者选择问题转化为添加与  $\bar{s}$  关联的边使得所有点到  $\bar{s}$  的等效电阻的和最小这样一个问题。值得注意的是，除了第一步的选择以外，该问题与以下的连通图加关联边最小化电阻距离问题密切相关。

对一个连通的无向加权图  $G(V, E, w)$ ，给定一个加权边集  $S$ ， $S \cap E = \emptyset$ ，用  $G + S$  表示将  $S$  中的边添加到  $G$  以后得到的图，即  $G + S = (V, E \cup S, w')$ ，其中  $w' : E \cup S \rightarrow \mathbb{R}_+$  是新的权重函数。令  $\mathbf{L}(S)$  表示图  $G + S$  的拉普拉斯矩阵。

**问题 6.3 (连通图加关联边最小化电阻距离)** 假设有一个不在原图  $G$  中的边集，边集中所有的边都与  $v$  相邻，并且每条边分配了一个给定的权重。记这个候选边集为  $E_v$ 。考虑在候选集  $E_v$  中选择一个包含  $k$  条边的子集  $S$ ，将这些边加入图  $G$  使得点  $v$  的电阻距离最小化。定义以下集合函数优化问题

$$\underset{S \subset E_v, |S|=k}{\text{minimize}} \quad \mathcal{R}_v(S), \quad (6.8)$$

其中  $\mathcal{R}_v(S)$  表示点  $v$  在图  $G + S$  中的电阻距离。

## 6.4 目标函数的超模性

首先证明问题 6.3 中  $\mathcal{R}_v(S)$  的单调性和超模性。

令  $2^{E_v}$  为  $E_v$  的所有子集。那么节点  $v$  在  $G + S$  中的电阻距离能够表示成一个集合函数  $\mathcal{R}_v(S) : 2^{E_v} \rightarrow \mathbb{R}$ 。为了给出问题 6.3 的有效算法，接下来证明  $v$  的电阻距离是一个超模函数。

电阻的 Rayleigh 单调性证明了加边  $(u, v)$  以后任意点对间的电阻不会增大；而  $(u, v)$  之间的电阻必然会减小。因此，得到以下定理：

**定理 6.4**  $\mathcal{R}_v(S)$  是集合  $S$  的单调递减函数，也就是说，对于任意的子集  $S \subset T \subset E_v$ ，

$$\mathcal{R}_v(T) < \mathcal{R}_v(S).$$

接下来证明目标函数  $\mathcal{R}_v(S)$  的超模性。

**定理 6.5**  $\mathcal{R}_v(S)$  是超模的。也就是说，对于任意满足  $S \subset T \subset E_v$  的子集  $S$  和  $T$ ，以及任意满足  $e \in E_v \setminus T$  的边  $e$ ，

$$\mathcal{R}_v(T) - \mathcal{R}_v(T \cup \{e\}) \leq \mathcal{R}_v(S) - \mathcal{R}_v(S \cup \{e\}).$$

**证明：** 假设边  $e$  连接了两个点  $u$  和  $v$ ，那么  $\mathbf{L}(S \cup \{e\})_v = \mathbf{L}(S)_v + w(e)\mathbf{E}_{uu}$ ，其中矩阵  $\mathbf{E}_{uu}$  是一个方阵，其第  $u$  个对角元等于 1，其他元素全都等于 0。根据 (6.7)，为了证明  $\mathcal{R}_v(S)$  的次模性，只需要证明

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\mathbf{L}(T)_v^{-1}) - \text{Tr}((\mathbf{L}(T)_v + w(e)\mathbf{E}_{uu})^{-1}) \\ & \leq \text{Tr}(\mathbf{L}(S)_v^{-1}) - \text{Tr}((\mathbf{L}(S)_v + w(e)\mathbf{E}_{uu})^{-1}). \end{aligned}$$

因为  $S$  是  $T$  的一个子集， $\mathbf{L}(T)_v = \mathbf{L}(S)_v + \mathbf{P}$ ，其中  $\mathbf{P}$  是一个非负对角阵。为了简单，在以下证明中，用  $\mathbf{M}$  表示矩阵  $\mathbf{L}(S)_v$ 。然后，只需要证明

$$\begin{aligned} & \text{Tr}((\mathbf{M} + \mathbf{P})^{-1}) - \text{Tr}(\mathbf{M}^{-1}) \\ & \leq \text{Tr}((\mathbf{M} + \mathbf{P} + w(e)\mathbf{E}_{uu})^{-1}) - \text{Tr}((\mathbf{M} + w(e)\mathbf{E}_{uu})^{-1}). \end{aligned}$$

定义方程  $f(t)$ ， $t \in [0, \infty)$  为

$$f(t) = \text{Tr}((\mathbf{M} + \mathbf{P} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1}) - \text{Tr}((\mathbf{M} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1}).$$

那么，如果  $f(t)$  在  $t = 0$  处取得最小值，以上不等式成立。接下来通过证明  $\frac{df(t)}{dt} \geq 0$  得到  $f(t)$  是一个递增函数。证明用到了以下矩阵求导公式

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(\mathbf{A}(t)^{-1}) = -\text{Tr}\left(\mathbf{A}(t)^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \mathbf{A}(t)^{-1}\right),$$

对  $f(t)$  求导得到

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= -\text{Tr}((\mathbf{M} + \mathbf{P} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1} \mathbf{E}_{uu} (\mathbf{M} + \mathbf{P} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1}) \\ &\quad + \text{Tr}((\mathbf{M} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1} \mathbf{E}_{uu} (\mathbf{M} + t\mathbf{E}_{uu})^{-1}) \\ &= -\text{Tr}(\mathbf{E}_{uu} (\mathbf{M} + \mathbf{P} + t\mathbf{E}_{uu})^{-2}) \\ &\quad + \text{Tr}(\mathbf{E}_{uu} (\mathbf{M} + t\mathbf{E}_{uu})^{-2}) \\ &= -((\mathbf{M} + \mathbf{P} + t\mathbf{E}_{uu})^{-2})_{[u,u]} + ((\mathbf{M} + t\mathbf{E}_{uu})^{-2})_{[u,u]}. \end{aligned}$$

令  $N = M + tE_{uu}$ , 同时令  $Q$  是一个非负对角阵, 且只有一个对角元素  $Q_{[h,h]} > 0$ , 其他元素都等于零。现在证明  $(N^{-1})_{[i,j]} \geq ((N + Q)^{-1})_{[i,j]}$  对所有的  $1 \leq i, j \leq n-1$  都成立。采用 Sherman-Morrison 公式 [201] 可以得到

$$N^{-1} - (N + Q)^{-1} = \frac{Q_{[h,h]} N^{-1} e_h e_h^T N^{-1}}{1 + Q_{[h,h]} e_h^T N^{-1} e_h}.$$

因为  $N$  是一个 M 矩阵,  $N^{-1}$  的每个元素都是正的 [202], 进而容易得到  $N^{-1} e_h e_h^T N^{-1}$  的每个元素也都是正的。另外, 分母  $1 + Q_{[h,h]} e_h^T N^{-1} e_h$  也是正的, 其原因是  $N$  是正定的。因此,  $N^{-1} - (N + Q)^{-1}$  是一个正矩阵, 其所有的元素都大于 0。

通过重复应用以上过程, 容易证明  $N^{-1} - (N + P)^{-1}$  是一个正矩阵, 所以,

$$\frac{df(t)}{dt} = -((N + P)^{-2})_{[u,u]} + (N^{-2})_{[u,u]} \geq 0,$$

证毕。 □

因此, 对于问题 6.1, 可以对任意的非空集合  $S$  和  $T$ , 给出函数  $R_{NC}(S)$  的单调性和超模性:

**定理 6.6 (单调性)** 在问题 6.1 中, 对于任意满足  $S \subset T \subset V$  的非空子集  $S$  和  $T$ ,

$$R_{NC}(T) < R_{NC}(S).$$

**定理 6.7 (超模性)** 在问题 6.1 中, 对于任意满足  $S \subset T \subset V$  的非空子集  $S$  和  $T$ , 以及任意满足  $u \in V \setminus T$  的点  $u$ ,

$$R_{NC}(T) - R_{NC}(T \cup \{u\}) \leq R_{NC}(S) - R_{NC}(S \cup \{u\}).$$

## 6.5 贪心算法及近似比例

[80] 中 (启发式地) 提出了算法 6.1 所描述的贪心优化算法, 但并没有给出算法的解的理论保证。

由于使用了秩-1 更新, 该算法的时间复杂度为  $O(n^3 + kn^2)$ . 接下来由定理 6.6 和 6.7 出发, 证明算法 6.1 的近似比。

**定理 6.8** 算法  $S = \text{NCLeadSelect}(G, D_\kappa, k)$  输入一个图  $G = (V, E, w)$  及其拉普拉斯矩阵  $L$ , 倔强系数矩阵  $D_\kappa$  和一个整数  $2 \leq k \leq n$ , 返回一个  $k$  个点的集合

**算法 6.1:** LeadSel( $G, \mathbf{D}_\kappa, k$ )

---

**Input** : A connected graph  $G = (V, E, w)$ ; stubbornness matrix  $\mathbf{D}_\kappa$ ; maximum number of leaders  $k$  ( $k \geq 2$ )

**Output:** A set of vertices  $S_k$  s.t.  $S_k \subset V$  and  $|S| = k$

- 1 Initialize solution  $S \leftarrow \emptyset, i \leftarrow 0$
- 2 Compute  $\mathbf{L}^\dagger$
- 3 Compute  $R_{NC}(\{u\})$  for all  $u \in V$  by rank-1 update
- 4  $v \leftarrow \arg \min_{u \in V} R_{NC}(\{u\})$
- 5  $S_1 \leftarrow S_1 \cup \{v\}$
- 6 Compute  $(\mathbf{L} + \mathbf{D}_{\{S_1\}} \mathbf{D}_\kappa)^{-1}$  from  $\mathbf{L}^\dagger$  by rank-1 update
- 7 **for**  $i = 2$  **to**  $k$  **do**
- 8     Compute  $R_{NC}(S_i + \{u\})$  for all  $u \in V \setminus S$  by rank-1 update
- 9      $v \leftarrow \arg \min_{u \in V \setminus S_i} R_{NC}(S_i \cup \{u\})$
- 10     $S_{i+1} \leftarrow S_i \cup \{v\}$
- 11    Update  $(\mathbf{L} + \mathbf{D}_{S_{i+1}} \mathbf{D}_\kappa)^{-1}$  by rank-1 update
- 12 **return**  $S_k$

---

$S$ ,  $S$  满足

$$R_{NC}(\{v^*\}) - R_{NC}(S) \geq \left(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e}\right) (R_{NC}(\{v^*\}) - R_{NC}(S^*)),$$

其中,  $S^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{|Q| \leq k} R_{NC}(Q)$ ,  $v^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{u \in V} R_{NC}(\{u\})$

**证明:** 由定理 6.7 得, 对于任意的  $i \geq 1$

$$R_{NC}(S_i) - R_{NC}(S_{i+1}) \geq \frac{1}{k} (R_{NC}(S_i) - R_{NC}(S^*)),$$

因此,

$$R_{NC}(S_{i+1}) - R_{NC}(S^*) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) (R_{NC}(S_i) - R_{NC}(S^*)).$$

然后可以得到

$$\begin{aligned} R_{NC}(S_k) - R_{NC}(S^*) &\leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} (R_{NC}(S_1) - R_{NC}(S^*)) \\ &\leq \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e} (R_{NC}(S_1) - R_{NC}(S^*)) \end{aligned}$$

因为在算法 6.1 中, 第一步选择  $v^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{u \in V} R_{NC}(\{u\})$ , 因此  $S_1 = \{v^*\}$ .  $\square$

## 6.6 提高网络中节点的信息中心性

2.3 节中介绍了网络的信息中心性 [35] 的概念

**定义 2.4 (信息中心性)** 对于一个连通图  $G = (V, E, w)$ , 一个点  $v$  的信息中心性  $I_v$  定义为

$$I_v = \frac{n}{\sum_{u \in V} 1/I_{uv}}.$$

并且已经知道一个点  $v$  的信息中心性和该点的电阻距离  $\mathcal{R}_v$  有以下关系

$$I_v = n/\mathcal{R}_v. \quad (6.9)$$

本章后面的部分研究以下问题:

**问题 6.9 (连通图加关联边最大化信息中心性)** 假设有一个不在原图  $G$  中的边集, 边集中所有的边都与  $v$  相邻, 并且每条边分配了一个给定的权重。记这个候选边集为  $E_v$ . 考虑在候选集  $E_v$  中选择一个包含  $k$  条边的子集  $S$ , 将这些边加入图  $G$  使得点  $v$  的信息中心性最大化。令  $I_v(S)$  表示点  $v$  在  $G + S$  中的信息中心性。定义以下集合函数优化问题:

$$\underset{S \subset E_v, |S|=k}{\text{maximize}} \quad I_v(S). \quad (6.10)$$

由 6.9 易得, 问题 6.9 和 6.3 等价。

### 6.6.1 简单贪心算法

定理 6.4 和 6.5 表明目标函数是单调超模的。因此, 通过简单的贪心算法就能够给出可证明近似比的结果。在这个贪心算法中, 添加的边集  $S$  最初是空的。然后  $k$  条边被迭代地从候选边集  $E_v$  中选出并加入  $S$  中。在每次迭代中, 选出  $E_v$  中的一条边  $e_i$  从而最大化  $\mathcal{R}_v(S) - \mathcal{R}_v(S \cup \{e_i\})$ . 算法在  $|S| = k$  时结束。

根据 (6.6), 电阻距离  $\mathcal{R}_v$  等于  $n(\mathbf{L}^\dagger)_{[v,v]} + \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger)$ . 一个朴素的算法的时间复杂度为  $O(k|E_v|n^3)$ . 接下来说明通过运用 Sherman-Morrison 公式, 可以把时间复杂度降低到  $O(n^3)$ .



**引理 6.10** 对于一个连通加权图  $G = (V, E, w)$ , 其拉普拉斯矩阵为  $\mathbf{L}$ , 令  $e$  是一条与点  $v$  相邻, 但不在当前图中的边, 其权重为  $w(e)$ , 那么

$$(\mathbf{L}(\{e\}))^\dagger = (\mathbf{L} + w(e)\mathbf{b}_e\mathbf{b}_e^\top)^\dagger = \mathbf{L}^\dagger - \frac{w(e)\mathbf{L}^\dagger\mathbf{b}_e\mathbf{b}_e^\top\mathbf{L}^\dagger}{1 + w(e)\mathbf{b}_e^\top\mathbf{L}^\dagger\mathbf{b}_e}.$$

对一个尚未加入  $S$  中的候选边, 令  $\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \mathcal{R}_v(S) - \mathcal{R}_v(S \cup \{e\})$ , 用引理 6.10 和 (6.6) 可以推出以下结果。

**引理 6.11** 令  $G = (V, E, w)$  为一个连通加权图, 其拉普拉斯矩阵为  $\mathbf{L}$ . 令  $e \notin E$  是一条与  $v$  相连的权值为  $w(e)$  的候选边, 那么

$$\mathcal{R}_v^\Delta(e) = \frac{w(e) \left( n (\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger)_{[v,v]} + \text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger) \right)}{1 + w(e) \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e}. \quad (6.11)$$

引理 6.11 给出了一个简单的贪心算法  $\text{ExactSM}(G, v, E_v, k)$ , 算法 6.2 给出了伪代码。首先需要计算  $\mathbf{L}$  的伪逆, 其时间复杂度为  $O(n^3)$ . 随后该算法运行  $k$  轮, 每一轮包含时间复杂度为  $O(n^2)$  的计算和更新操作。所以, 算法总的时间复杂度为  $O(n^3)$ . 不仅如此, 根据 [203] 中的结果, 算法 6.2 能够得到  $(1 - \frac{1}{e})$  倍的近似

---

**算法 6.2:**  $\text{ExactSM}(G, v, E_v, k)$

---

**Input :** A connected graph  $G$ ; a node  $v \in V$ ; a candidate edge set  $E_v$ ; an integer  $k \leq |E_v|$

**Output:** A subset of  $S \subset E_v$  and  $|S| = k$

```

1 Initialize solution  $S = \emptyset$ 
2 Compute  $\mathbf{L}^\dagger$ 
3 for  $i = 1$  to  $k$  do
4   Compute  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$  for each  $e \in E_v \setminus S$ 
5   Select  $e_i$  s.t.  $e_i \leftarrow \arg \max_{e \in E_v \setminus S} \mathcal{R}_v^\Delta(e)$ 
6   Update solution  $S \leftarrow S \cup \{e_i\}$ 
7   Update the graph  $G \leftarrow G(V, E \cup \{e_i\})$ 
8   Update  $\mathbf{L}^\dagger \leftarrow \mathbf{L}^\dagger - \frac{w(e_i)\mathbf{L}^\dagger\mathbf{b}_{e_i}\mathbf{b}_{e_i}^\top\mathbf{L}^\dagger}{1+w(e_i)\mathbf{b}_{e_i}^\top\mathbf{L}^\dagger\mathbf{b}_{e_i}}$ 
9 return  $S$ 
    
```

---

比, 如以下定理所示:

**定理 6.12** 算法 6.2 返回的集合  $S$  满足

$$\mathcal{R}_v(\emptyset) - \mathcal{R}_v(S) \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) (\mathcal{R}_v(\emptyset) - \mathcal{R}_v(S^*)),$$

其中  $S^*$  是问题 (6.8) 的一个最优解, 即

$$S^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{S \subset V, |S|=k} \mathcal{R}_v(S).$$

### 6.6.2 快速贪心算法

虽然算法 6.2 比朴素算法快, 但它仍然有很大的计算开销, 因为它涉及到计算  $\mathbf{L}$  的伪逆。在本节中, 为了避免求矩阵  $\mathbf{L}$  的伪逆, 本文给出了一个高效的近似算法, 能够达到问题 (6.8) (增量) 的  $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$  倍近似, 时间复杂度为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ . 在这里介绍  $\epsilon$ -近似的概念

**定义 6.13 ( $\epsilon$ -近似 [204])** 令  $a, b \geq 0$  是两个非负标量。如果  $\exp(-\epsilon)a \leq b \leq \exp(\epsilon)a$  成立, 称  $a$  是  $b$  的一个  $\epsilon$ -近似, 记为  $a \approx_\epsilon b$ .

近似  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$

为了解决问题 (6.8), 需要计算 (6.11) 中的关键量  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$ . 这里给出一个能够恰当地近似  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$  的高效算法。

首先考虑 (6.11) 中的分母。假设新加的边  $e$  连接了节点  $u$  和  $v$ . 注意到分母中的  $R_{\text{eff}}(e) = \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e$  实际上是边  $e$  的端点  $u$  和  $v$  之间的等效电阻  $R_{\text{eff}}(u, v)$ . 可以通过以下近似算法计算 [205]。

**引理 6.14** 令  $G = (V, E, w)$  是一个连通的加权图。存在一个算法  $\text{ApproxIER}(G, E_v, \epsilon)$ , 算法返回所有边  $e \in E_v$  的等效电阻  $R_{\text{eff}}(e)$  的一个估计  $\hat{R}_{\text{eff}}(e)$ , 时间复杂度为  $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ 。算法以概率  $1 - 1/n$  保证  $\hat{R}_{\text{eff}}(e) \approx_\epsilon R_{\text{eff}}(e)$  对所有的  $e \in E_v$  都成立。

对于 (6.11) 的分子, 它包含两项:  $(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger)_{[v,v]}$  和  $\text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger)$ 。第一项能通过  $(\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger)_{[v,v]} = \mathbf{e}_v^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger \mathbf{e}_v$  进行计算, 计算的方法会在后面给出。第二项是一个隐含矩阵的迹, 可以通过 Hutchinson 蒙特卡罗方法 [206] 近似。通过生成  $M$  个不同的随机  $\pm 1$  向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^n$  (其所有元素为独立伯努利随机变量),  $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_i$  能被用来估算矩阵  $\mathbf{A}$  的迹。因为  $\mathbb{E}[\mathbf{x}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_i] = \text{Tr}(\mathbf{A})$ , 根据大数定理, 当  $M$  足够大时,  $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_i$  应该接近  $\text{Tr}(\mathbf{A})$ . 以下引理 [207] 给出了  $\text{Tr}(\mathbf{A})$  的一个好的估计。

**引理 6.15** 令  $\mathbf{A}$  是一个半正定矩阵，矩阵的秩为  $\text{rank}(\mathbf{A})$ 。令  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$  是独立随机  $\pm 1$  向量。令  $\epsilon, \delta$  是两个标量，满足  $0 < \epsilon \leq 1/2$  和  $0 < \delta < 1$ 。对于任意的  $M \geq 24\epsilon^{-2} \ln(2 \text{rank}(\mathbf{A})/\delta)$ ，以下陈述以  $1 - \delta$  的概率成立：

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_i \approx_\epsilon \text{Tr}(\mathbf{A}).$$

因此，将近似 (6.11) 的分子规约到计算矩阵  $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{L}^\dagger$  的二次型。如果直接计算这个二次型，就必须计算  $\mathbf{L}^\dagger$ ，计算的时间复杂度较高。为了避免对  $\mathbf{L}$  求伪逆，本文采用了接近线性时间拉普拉斯求解器 [95]。该求解器的表现可由以下引理刻画：

**引理 5.4 ([185])** 算法  $\mathbf{y} = \text{LaplSolve}(\mathbf{L}, \mathbf{z}, \epsilon)$  的输入包括一个图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$ ， $m$  和  $n$  分别为图的点数和边数，一个向量  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ，以及一个标量  $\delta > 0$ ；返回一个向量  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ，以下陈述以概率  $1 - 1/\text{poly}(n)$  成立。

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{L}^\dagger \mathbf{z}\|_L \leq \delta \|\mathbf{L}^\dagger \mathbf{z}\|_L,$$

其中  $\|\mathbf{x}\|_L = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}}$ 。算法的期望运行时间为  $\tilde{O}(m \log(1/\delta))$ 。

根据引理 6.14, 6.15 和 5.4 可以得到以下算法  $\text{VReffComp}(G, v, E_v, \epsilon)$ ，算法对所有的  $e \in E_v$  计算出  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$ 。算法 6.3 给出了描述。该算法的总运行时间为  $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ ，并且对所有的  $e \in E_v$ ，返回有序对集合  $\{(e, \hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e)) | e \in E_v\}$ 。

### 目标函数的快速近似

通过应用算法 6.3 近似  $\mathcal{R}_v^\Delta(e)$ ，可以给出一个解决问题 (6.8) 的快速算法  $\text{ApproxISM}(G, v, E_v, k, \epsilon)$ ，流程如算法 6.4 所示。

算法 6.4 运行  $k$  轮 (2-4 行)。每一轮的调用  $\text{VReffComp}$  和更新操作共耗时  $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ 。所以算法 6.4 的总运行时间为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ 。以下定理证明了算法 6.4 的输出  $\hat{S}$  给出了问题 (6.8) (的增量) 的一个  $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$  倍近似。

**定理 6.16** 对任意的  $0 < \epsilon \leq 1/2$ ，以上贪心算法返回的集合  $\hat{S}$  满足

$$\mathcal{R}_v(\emptyset) - \mathcal{R}_v(\hat{S}) \geq \left(1 - \frac{1}{e} - \epsilon\right) (\mathcal{R}_v(\emptyset) - \mathcal{R}_v(S^*)),$$

其中  $S^*$  是问题 (6.8) 的最优解，即  $S^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{S \subset V, |S|=k} \mathcal{R}_v(S)$ 。

该定理的证明与 [208] 中的证明相似，在此省略。

**算法 6.3:** VReffComp( $G, v, E_v, \epsilon$ )

---

**Input** : A graph  $G$ ; a node  $v \in V$ ; a candidate edge set  $E_v$ ; a real number  $0 \leq \epsilon \leq 1/2$

**Output:**  $\{(e, \hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e)) | e \in E_v\}$

- 1 Let  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M$  be independent random  $\pm 1$  vectors, where  $M = \lceil 432\epsilon^{-2} \ln(2n) \rceil$ .
- 2 **for**  $i = 1$  **to**  $M$  **do**
- 3      $\mathbf{y}_i \leftarrow \text{LaplSolve}(\mathbf{L}, \mathbf{z}_i, \frac{1}{72}\epsilon n^{-8} w_{\max}^{-4})$
- 4     **for each**  $e \in E_v$  **do**
- 5         Compute  $t_i(e) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_i^\top \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{y}_i$
- 6  $\mathbf{x} \leftarrow \text{LaplSolve}(\mathbf{L}, \mathbf{e}_v, \frac{1}{72}\epsilon n^{-9} w_{\max}^{-4})$
- 7 **for each**  $e \in E_v$  **do**
- 8     Compute  $\alpha(e) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\top \mathbf{b}_e \mathbf{b}_e^\top \mathbf{x}$
- 9  $\hat{R}_{\text{eff}}(e) \leftarrow \text{APPROXIER}(G, \epsilon/3)$
- 10 Compute  $\hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e) = w(e) \frac{n\alpha(e) + \frac{1}{M} \sum_i t_i(e)}{1 + w(e) \hat{R}_{\text{eff}}(e)}$  **for each**  $e$
- 11 **return**  $\{(e, \hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e)) | e \in E_v\}$

---

**算法 6.4:** ApproxSM( $G, v, E_v, k, \epsilon$ )

---

**Input** : A graph  $G$ ; a node  $v \in V$ ; a candidate edge set  $E_v$ ; an integer  $k \leq |E_v|$ ; a real number  $0 \leq \epsilon \leq 1/2$

**Output:**  $S$ : a subset of  $E_v$  and  $|S| = k$

- 1 Initialize solution  $S = \emptyset$
- 2 **for**  $i = 1$  **to**  $k$  **do**
- 3      $\{e, \hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e) | e \in E_v \setminus S\} \leftarrow \text{VReffComp}(G, v, E_v \setminus S, 3\epsilon)$ .
- 4     Select  $e_i$  s.t.  $e_i \leftarrow \arg \max_{e \in E_v \setminus S} \hat{\mathcal{R}}_v^\Delta(e)$
- 5     Update solution  $S \leftarrow S \cup \{e_i\}$
- 6     Update the graph  $G \leftarrow G(V, E \cup \{e_i\})$
- 7 **return**  $S$

---

## 6.7 实验评估

本节在一些网络模型和真实网络中对前面提出的两种贪心算法进行了实验评估。实验中采用的所有算法都由 Julia 实现。算法中用到了 Lap1Solve [95], 该算法在 Julia 中的实现可以在网站中<sup>1</sup>找到。实验所用改的机器配置和第 5 章中实验部分的描述相同。

首先在两种流行的模型网络上执行了实验, 它们分别是 Barabási-Albert (BA) 网络和 Watts-Strogatz (WS) 网络; 然后在 KONECT [152] 和 SNAP<sup>2</sup> 数据集中的很多真实网络中执行了实验。在表 6.1 中, 按原图的节点数升序给出了这些网络的信息: 对于一个  $n$  个点,  $m$  条边的网络, 记它的最大连通分量中的点数和边数分别为  $n'$  和  $m'$ 。

### 6.7.1 贪心算法的有效性

为了论证提出的两种算法的有效性, 两个较小的模型网络 (BA 和 WS), 以及两个较小的现实网络 (Zachary karate club 和 Windsufers) 中比较了近似算法的结果和问题的最优值。因为这些网络规模较小,  $k$  也比较小, 能够计算得到最优解。

对每个网络, 随机选取 20 个目标节点。对每个目标节点  $v$ , 候选边集是所有与  $v$  关联但不在原图中的边。所有候选边的权重为  $w = 1$ 。对于每个指定的  $k = 1, 2, \dots, 6$ , 添加  $k$  条  $v$  到其非邻居的边。然后对每个  $k$ , 对这 20 个点, 计算他们的平均信息中心性。结果展示在图 6.2 中。

图中给出了 ExactSM, ApproxSM, 随机 (Random) 和最优 (Optimum) 给出的添加  $k$  条边时各目标节点的平均信息中心性。可以观察到两种贪心算法给出的结果和最优解的结果差异很小。在实验中, 它们实际的近似比都达到了 0.98 以上, 远远好于理论保证的近似比。另外, 本文给出的贪心方案比其他随机方案得到了好得多的结果。

为了进一步论证算法的效力, 本文在四个真实网络 (Jazz musicians, Euroroad, Facebook 和 Powergrid) 上把提出的近似算法的结果和其他基准方案进行了比较, 包括随机选择 (random)、最大度 (Top-degree) 和最大中心性 (Top-cent)。在最大度方案中, 简单地选择所有与  $v$  不相邻的点中度最大的  $k$  个节点, 在这些节点与  $v$  之间添加新边。在最大中心性方案中, 简单地选择所有与  $v$  不相邻的点中信息中心性最大的  $k$  个节点, 在这些节点与  $v$  之间添加新边。

<sup>1</sup><https://github.com/danspielman/Laplacians.jl>

<sup>2</sup><https://snap.stanford.edu>

表 6.1: 数据集的信息.

Network	$n$	$m$	$n'$	$m'$
BA network	50	94	50	94
WS network	50	100	50	100
Zachary karate club	34	78	34	78
Windsufers	43	336	43	336
Jazz musicians	198	2742	195	1814
Virgili	1,133	5,451	1,133	5,451
Euroroad	1,174	1,417	1,039	1,305
Hamster full	2,426	16,631	2,000	16,098
Facebook	2,888	2,981	2,888	2,981
Powergrid	4,941	6,594	4,941	6,594
ca-GrQc	5,242	14,496	4,158	13,422
ca-HepPh	12,008	118,521	11,204	117,619
com-DBLP	317,080	1,049,866	317,080	1,049,866
roadNet-TX	1,379,917	1,921,660	1,351,137	1,879,201

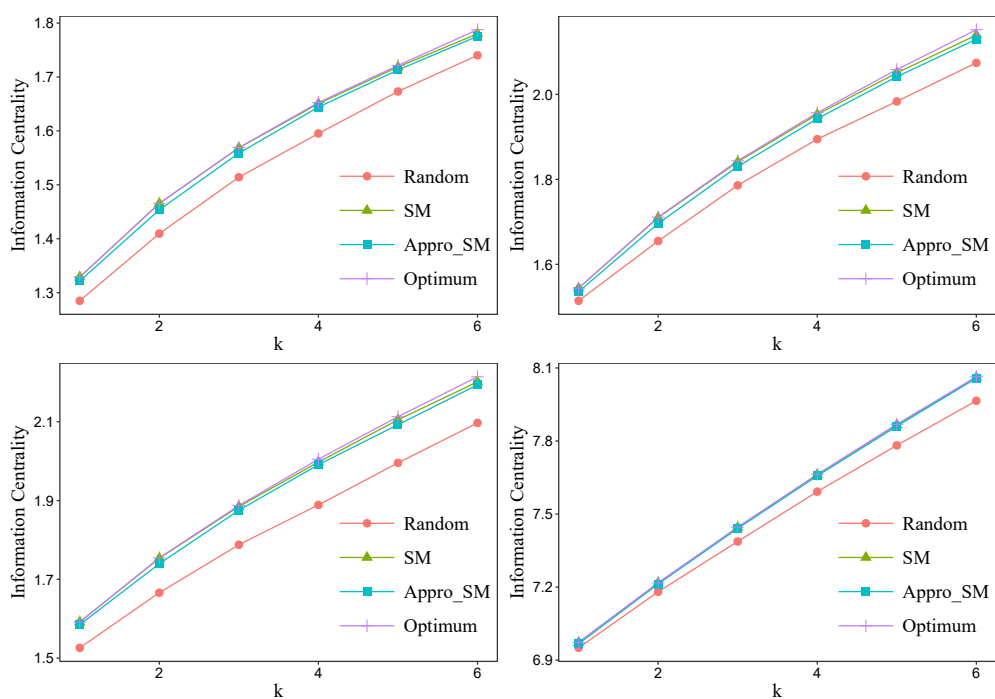


图 6.2: 两种贪心算法、随机加边与最优解的优化效果比较.

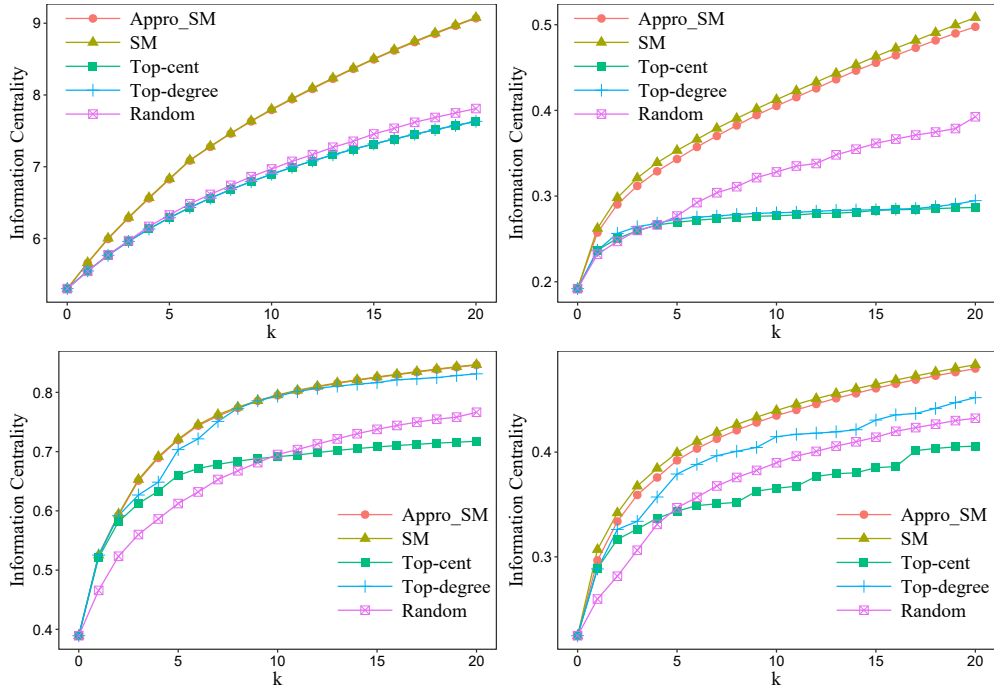


图 6.3: 贪心算法和启发式基准算法的优化效果比较.

图 6.3给出了四个网络上通过贪心算法和 3 种启发式基准算法给出的添加  $k$  条边时目标节点的平均信息中心性。因为结果可能和选取的  $v$  的初始信息中心性之间有一定的依赖关系，对每个现实网络，随机选择了 10 个不同的目标节点。对每个目标节点，首先计算出它的初始信息中心性，然后向网络中添加  $k = 20$  条与  $v$  相邻的新边，以提高其信息中心性。这里执行了两种贪心算法和三种基准算法。然后对所有的  $k = 1, 2, \dots, 20$  计算并记录了目标节点在加边以后的信息中心性的值，并画在图 6.3 中。可以观察到对所有四个现实网络中本文提出的贪心算法都胜过了三种基准算法。

### 6.7.2 贪心算法的效率比较

虽然本文给出的两种贪心算法都很有效，下面将说明：它们在大规模的网络中的效率有较大的差别。为了达到这个目的，本小节比较了两种贪心算法在几种现实世界网络中的效率。对每个网络，随机选择了 10 个目标节点，对它们中的每一个，添加  $k = 10$  条与目标节点关联的新边，以最大化它的信息中心性。在每个网路中，对 10 个目标节点都执行了算法 6.2 和 6.4 并记录了 10 个节点的平均信息中心性和算法的运行时间。表 6.2 给出了 ApproxSM (ASM) 和 ExactSM (ESM) 算法在几个现实网络中的平均运行时间和运行结果 ( $k = 10$ )，

表 6.2: 两种贪心算法的优化效果和运行时间的比较.

Network	Time (seconds)			Information centrality		
	ASM	ESM	Ratio	ASM	ESM	Ratio
Virgili	1.3996	0.9172	1.5259	2.5005	2.5037	0.9987
Euroroad	0.6563	0.7593	0.8643	0.4003	0.4069	0.9838
Hamster full	3.0785	4.8528	0.6344	2.9904	2.9944	0.9987
Facebook	1.7151	12.9203	0.1327	0.7937	0.7947	0.9987
Powergrid	5.8727	58.3359	0.1006	0.4327	0.4369	0.9904
ca-GrQc	5.3023	34.0228	0.1558	1.2118	1.2136	0.9985
ca-HepPh	28.7462	620.4557	0.0463	2.2569	2.2592	0.9990
com-DBLP	697.1835	-	-	1.1327	-	-
roadNet-TX	1569.5059	-	-	0.0556	-	-

以及 ApproxSM 和 ExactSM 两个算法的运行时间和优化结果的比率。可以观察到 ApproxSM 比 ExactSM 更快，特别是在大规模网络中。比如在 com-DBLP 和 roadNet-TX 网络中，ApproxSM 能在半小时内运行结束，而由于时间和空间复杂度的限制，ApproxSM 不能给出这些网络中的结果。

## 6.8 本章小结

本章研究了带噪声一致性网络中的领导者选择问题。首先建立了带噪声的  $k$ -领导者选择问题与增广图上电阻距离优化问题的关系。然后证明了两个问题的超模型（领导者选择问题的超模型定义在非空集合上），并据此证明了带噪声领导者选择问题的贪心算法的近似比例为  $(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e} - \epsilon)$ 。然后，利用电阻距离和信息中心性的关系，将类似的算法应用于在网络中给特定点加关联边提高其信息中心性。本章提出了两种优化  $\mathcal{R}_v$  的算法，通过贪心算法迭代地加入  $k$  条新边。第一个算法用  $O(n^3)$  的运行时间给出了  $(1 - \frac{1}{e})$  的近似比保证，第二个算法用  $\tilde{O}(mk\epsilon^{-2})$  的运行时间给出了  $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon)$  的近似比保证。最后，在大量的现实网络中验证了算法的有效性和效率，结果表明算法能够给出很好的近似结果，并且快速算法可以应用到大规模网络中。

除了领导者选择之外，结构优化也是网络控制系统中常见的优化问题。下一章将研究加边最小化网络熵问题的近似困难性。



## 第七章 最小化网络熵的复杂性

本章首先回顾了网络的（加权）生成树数目  $\mathcal{T}$  与带噪声一致性网络的关系，网络的生成树数目实际上与一致性网络的不确定状态体积的倒数正相关，从而与由此定义出的网络熵的概念直接相关 [40, 68]。然后，研究了通过加  $k$  条边最小化网络熵的指数近似困难性。本章证明了存在一个常数  $c > 0$ ，使得将网络熵  $\mathcal{S}(G)$  近似到  $(1 - c)$  倍以内是 **NP**-困难的。或者说存在一个常数  $d > 0$ ，使得将加权生成树数目  $\mathcal{T}$  近似到  $\frac{1}{(1-d)^n}$  倍以内是 **NP**-困难的。本章的近似困难性的结果由图上的最小路径覆盖（*minimum path cover*）规约得到。最小路径覆盖的困难性由距离为 1 和 2 的旅行商问题（*Traveling Salesman Problem, TSP*）规约得到。这是第一个最大化生成树数目的近似困难性的结果，亦即第一个最大化 对称对角占优  $M$ -矩阵（*SDDM* 矩阵）的行列式的近似困难性的结果。

### 7.1 引言

在协同控制领域，一个网络的对数加权生成树数目  $\log \mathcal{T}$  可以用来描述网络的鲁棒性。在 [68] 中，de Badyn 等人根据玻尔兹曼熵的概念，利用  $\log \mathcal{T}$  定义了网络熵的概念，在此基础上定义了其他网络熵，并把它们与网络上的一些动力学过程联系起来。在 [40, 209] 中，研究者利用  $-\log \mathcal{T}$  描述了在随机扰动的影响下，一个网络中的智能体保持一致的程度。特别地，网络的生成树数目的倒数与网络的不确定状态的体积成正比。因此可以通过在网络中增加一些连接，进而优化一个网络的鲁棒性，这等价于最大化网络的对数加权生成树数目  $\log \mathcal{T}$  [147, 210]。不仅如此，一个 *SDDM* 矩阵的对数行列式可以直接用来描述更一般的线性动力学系统的可控性 [211]。

第 2 章中已经介绍了加权网络  $G = (V, E, w)$  的网络熵  $\mathcal{S}(G)$  和加权生成树数目的定义。两者具有以下简单关系：

$$\mathcal{S}(G) = -\log(\mathcal{T}(G)) \quad (7.1)$$

本章研究以下问题：通过从给定候选边集中选取最多  $k$  条边，加入一个连通图中，从而最小化一个图的网络熵（最大化图中的加权生成树数目）。首先，将问题形式化地表述如下：

**问题 7.1 (生成树数目最大化 (NSTM))** 给定一个连通图  $G = (V, E)$ , 一个包含  $q$  条边的候选边集  $Q$ , 一个边权函数  $w : (E \cup Q) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , 以及一个整数  $1 \leq k \leq q$ , 从  $Q$  中选取最多  $k$  条边加入图  $G$  中, 使得  $G$  的网络熵最小。也就是说, 目标是找到一个基数为  $k$  的集合  $P \subseteq Q$ , 使得

$$P \in \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{S}(G + S).$$

**问题 7.2 (网络熵最小化 (NEM))** 给定一个连通图  $G = (V, E)$ , 一个包含  $q$  条边的候选边集  $Q$ , 一个边权函数  $w : (E \cup Q) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , 以及一个整数  $1 \leq k \leq q$ , 从  $Q$  中选取最多  $k$  条边加入图  $G$  中, 使得  $G$  的带权生成树数目最大。也就是说, 目标是找到一个基数为  $k$  的集合  $P \subseteq Q$ , 使得

$$P \in \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{T}(G + S).$$

在机器人领域中, 最大化生成树数目被应用到基于图的即时定位与地图构建 (SLAM) 中。在基于图的 SLAM 中 [212], 图中的一个点代表了机器人的一个位姿, 边代表了位姿之间的相对测量。整个图被用来估计机器人最可能的位姿配置。因为测量一般都带有误差, 通过更多的测量可以得到更加精确的结果。选择  $k$  个测量值加入 SLAM 位姿图用于提高位姿估计的问题可以转化为选择  $k$  条边加入一个连通图图中, 以最大化网络的生成树数目 [41, 213–215]。

在网络科学中, 相关研究 [216] 把生成树数目作为网络可靠性 (*reliability*) 的一种度量。此处网络可靠性定义为任意点对能够通信的概率。因此, 可以通过加边增加网络中的生成树数目, 进而提高网络的可靠性。网络生成树数目还被用于预测社交网络中的信息传播 [108], 更多的生成树意味着更好的信息传播 [108]。

由于最大化生成树数目在图论中的重要意义及其广泛的应用, 已有一些相关研究讨论了特殊情况下的最优解 [217–224], 或者给出了该问题的近似算法 [41]。然而迄今为止仍然缺乏对该问题的困难性的论证。由于控制优化问题的困难性也是分布式控制领域的重要问题 [76, 225], 因此无论是从图结构优化还是分布式控制的角度来看, 该问题的近似困难性都是一个有重要意义的问题。

本章内容的相关工作包括最大化生成树数目和最大化行列式的算法和复杂性研究, 接下来对这些工作作简要介绍。

前期关于最大化图的生成树数目的近似算法研究比较有限。Khosoussi 等人 [41] 研究了与本文相同的优化问题，即在候选边集中选择  $k$  条边加入一个连通图中，从而最大化这个图的加权生成树数目。在 [41] 中，作者利用  $\log \mathcal{T}$  是一个次模函数，提出了一个最大化  $\log \mathcal{T}$  的  $(1 - \frac{1}{e})$  倍近似算法，其算法复杂度为  $O(n^3)$ 。但 [41] 等前期工没有论证该问题的困难性。

一个相关的问题是给定点数  $n$  和边数  $m$ ，要求给出所有可能的图中包含生成树数目最多的图。然而，大多数解都是在图非常稀疏或者非常稠密时给出的，即  $m = O(n)$  [217, 218] 或  $m = \frac{n(n-1)}{2} - O(n)$  [219–223]。值得注意的是，完全多部图相比其他  $m$  和  $n$  相等的图拥有最多的生成树数目 [224]。

由基尔霍夫矩阵树定理可知，最大化网络的生成树数目等价于最大化拉普拉斯矩阵的  $n - 1$  阶主子式。而最大化一个半正定矩阵（PSD）的行列式在计算理论中有广泛的研究。[226–230] 给出了在一个 PSD 中选取（最大化）主子式的近似算法。[228, 231] 研究了另一个相关的问题，即在一个给定的凸包中选择一个体积最大的  $k$ -维单纯形。这个问题可以规约到前一个问题（最大化主子式）。对于选择  $k$  阶主子矩阵以最大化主子式的问题，[231] 中给出了一个近似比为  $e^{-(k+o(k))}$  的算法。从复杂性的角度，本段中提及的问题都已被证明是指数近似困难的 [228, 232, 233]。

在这些工作中，[227, 233] 研究了以下的列选择问题：给定一个矩阵  $A_{d \times n}$  和一个  $k$ ，选择一个子集  $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ， $|J| = k$ ，使得  $\det(A_J^\top A_J)$  最大。而本章研究的问题可以看做以下行选择问题：因为候选边的拉普拉斯矩阵可以写为  $L_P = (W_P^{1/2} B_P)^\top W_P^{1/2} B_P$ ，目标是选择  $W_P^{1/2} B_P$  的  $k$  行，加入原图中，使得整个图的拉普拉斯矩阵的  $n - 1$  阶主子式最大。

[234–236] 研究了  $D$ -最优实验设计 ( $D$ -optimal experimental design,  $D$ -Optimality)。在这个问题中，给定了  $n$  个  $p$  阶向量  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^p$ ，需要找到一个基数为  $k$  的子集  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ， $k \geq p$ ，使得最小化以下的量：

$$\det \left( \sum_{i \in S} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \right)^{-1/p}.$$

[231, 234] 给出的算法可以得到  $D$ -Optimality 的  $e$  倍近似，也就是说，可以得到一个与本章研究的问题类似问题的  $e^{-n}$  倍近似，即从空图开始构造，选择  $k$  条边构成的图，使得图中生成树数目最大。[235, 236] 给出了  $k = \Omega(n/\epsilon^2)$  时  $D$ -Optimality 的  $(1 + \epsilon)^{-n}$  倍近似算法，且可以扩展应用到本章的问题上。但该方

法要求  $k = \Omega(n/\epsilon^2)$ , 无法应用到  $k$  较小的情况。从复杂性的角度, [237] 证明了 **D-Optimality** 是 **NP**-难问题, 如果不附加限制, 近似到  $(1 + \epsilon)^n$  以内也是 **NP**-难的 [228]。相比而言, 问题 7.2 讨论的是图上的相关问题, 且有不一样的问题设定。目前还不存在问题 7.2 的近似困难性的结果。

## 7.2 主要结果

以下定理说明对于问题 7.1, 存在一个常数  $c$  使得近似  $\mathcal{S}(G + P)$  到  $(1 - c)$  倍以内是一个 **NP**-难问题。

**定理 7.3** 存在一个常数  $c > 0$  使得给定一个问题 7.2 的实例, 找到集合  $P \subseteq Q$ ,  $|P| \leq k$  满足

$$\mathcal{S}(G + P) - \mathcal{S}(G) < (1 - c) \cdot (\mathcal{S}(G + P^*) - \mathcal{S}(G)),$$

是 **NP**-难的。其中  $P^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{S}(G + S)$  是问题 7.1 的一个最优解。

一个等价的命题是对于问题 7.2, 存在一个常数  $c$  使得近似  $\log \mathcal{T}(G + P)$  到  $(1 - c)$  倍以内是一个 **NP**-难问题。

**定理 7.4** 存在一个常数  $c > 0$  使得给定一个问题 7.2 的实例, 找到集合  $P \subseteq Q$ ,  $|P| \leq k$  满足

$$\log \frac{\mathcal{T}(G + P)}{\mathcal{T}(G)} > (1 - c) \cdot \log \frac{\mathcal{T}(G + P^*)}{\mathcal{T}(G)},$$

是 **NP**-难的。其中  $P^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{T}(G + S)$  是问题 7.2 的一个最优解。

定理 7.4 的证明可以从引理 7.6 得到。同样根据引理 7.6, 可以得到生成树数目本身的近似困难性:

**定理 7.5** 存在一个常数  $d > 0$  使得给定一个问题 7.2 的实例, 找到集合  $P \subseteq Q$ ,  $|P| \leq k$  满足

$$\mathcal{T}(G + P) > \frac{1}{(1 + d)^n} \cdot \mathcal{T}(G + P^*),$$

是 **NP**-难的。其中  $P^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{S \subseteq Q, |S| \leq k} \mathcal{T}(G + S)$  是问题 7.2 的一个最优解。

定理 7.4 说明在问题 7.2 中, 对  $\log \mathcal{T}$  的近似最多能保证达到一个常数比例。而对  $\mathcal{T}(G + P)$  本身的近似则最多能保证在指数上达到一个常数比例。这是第一

个最大化生成树数目的近似困难性的结果。或者说是一个等价问题：选行最大化一个 SDDM 矩阵的行列式（拉普拉斯矩阵的主子矩阵）的第一个近似困难性的结果。

为了证明定理 7.4，可以把无向图的最小路径覆盖问题规约到问题 7.2，而最小路径覆盖问题的困难性又由距离为 1 和 2 的旅行商问题规约得到。本章的规约基于一类特殊的图，这类图由一个星形图和支撑在星形图叶子上的任意一个图构成。

令图  $H = (V, E)$  由一个星形图  $S_n$  加上一个  $H$  的子图  $H[V'] = (V', E')$  得到， $H[V']$  支撑在  $S_n$  的叶子上。可以在图  $H$  上，按以下方式构造出问题 7.2 的一个实例。设原图、候选边集、加边的基数限制分别为：

$$G \leftarrow S_n, \quad Q \leftarrow E', \quad k \leftarrow |V'| - 1.$$

图 7.1 给出了问题 7.2 的实例的一个例子。在图 7.1 中， $H$  由一个星形图加上支撑在其叶子上的一个图  $H[V']$  构成。图中， $r$  是星形图的中心节点；所有红色和绿色的边都属于候选边集，其中红色的边表示一个可能的大小为  $|V'| - 1$  的选择。

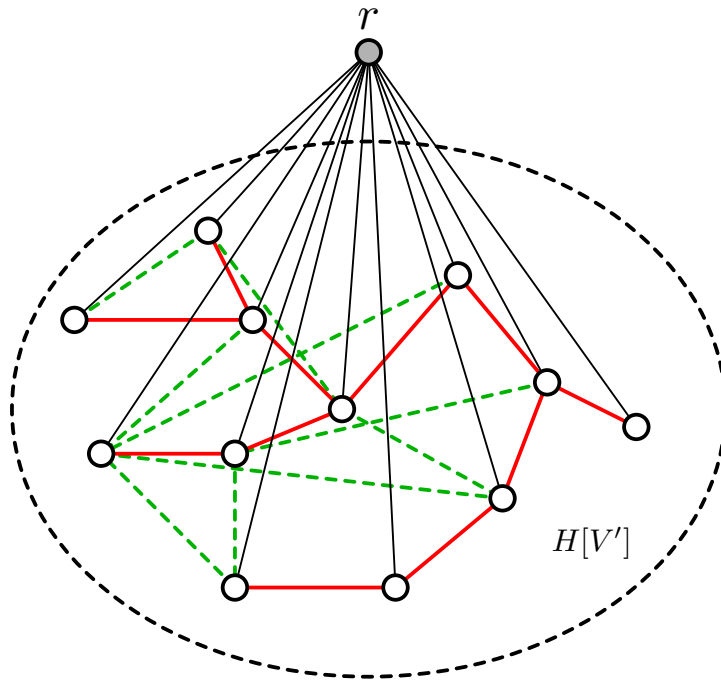


图 7.1: 由  $H$  构造的问题 7.2 的一个实例。

以下引理说明对问题 7.2 的两个实例，如果  $H[V']$  的最小路径覆盖数分别为 1 和  $\Omega(|V'|)$ ，这两个实例的最大生成树数目相差一个常数的指数倍。

**引理 7.6 (可靠性)** 令  $H = (V, E)$  为一个无权图, 由一个星形图  $S_n$  加上  $H$  的一个支撑在  $S_n$  的叶子上的子图  $H[V'] = (V', E')$  构成。对于任意的常数  $0 < \delta < 1$ , 存在一个常数  $c > 0$  使得: 如果  $H[V'] = (V', E')$  没有任何路径覆盖  $\mathcal{P}$  满足  $|\mathcal{P}| < \delta n$ , 那么

$$\log \mathcal{T}(S_n + P) \leq (1 - c) \cdot \log \mathcal{T}(F_n)$$

对任意的  $P \subseteq E'$ ,  $|P| \leq n - 1$  成立。这里  $F_n$  是一个包含  $n - 1$  个三角形的扇图, 即星形图  $S_n$  加上一个支撑在其叶子上的路径。

注意到规约只用到了权重全部等于 1 的简单图。因此问题 7.2 对于没有自环和重边的无权图也是近似困难的。

### 7.3 证明概要

根据矩阵行列式引理 [238], 加权生成树的数目在加上一条边  $e = (u, v)$  之后乘上

$$1 + w(u, v)R_{\text{eff}}(u, v),$$

其中  $R_{\text{eff}}(u, v)$  是  $u$ 、 $v$  两点间加边以前的电阻。

证明的关键步骤是建立最小路径覆盖问题和问题 7.2 之间的联系。为了达到这个目的, 考虑问题 7.2 的一个实例, 在这个实例中  $G$  是一个  $n$  个点的星状图  $S_n$ , 候选集  $Q$  构成了一个连接  $S_n$  的叶子的图  $H'$ 。而且加边的数目是  $k = n - 1$ 。本章证明了对两个不同的实例, 如果其候选边集构成的图的最小路径覆盖数分别为 1 和  $\Omega(n)$ , 那么其生成树数目的最优解相差一个常数的  $n$  次幂倍。

考虑由  $Q$  中的  $n - 1$  条边组成的任意的集合  $P$ , 以及  $H'$  的一个路径覆盖  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ 。显然  $t$  大于等于  $H'$  的最小路径覆盖数。如果  $P$  构成  $H'$  中的一个哈密顿路  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{T}(S_n + P)$  能够被显式地计算出来 [239]

$$\mathcal{T}(S_n + P) = \mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (7.2)$$

当  $H'$  的路径覆盖数大于 1 时,  $\mathcal{T}(S_n + P)$  可以表达为  $\mathcal{T}(G + \mathcal{P})$  和一个等效电阻序列的乘积。特别地, 对于在  $P$  中, 而不在  $\mathcal{P}$  中的边的一个任意的排序

$(u_i, v_i)_{i=1}^{t-1}$ , 可以定义一个图序列  $G^{(1)}, \dots, G^{(t)}$  为:

$$\begin{aligned} G^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} G + \mathcal{P}, \\ G^{(i+1)} &\stackrel{\text{def}}{=} G^{(i)} + (u_i, v_i) \text{ for } i = 1, \dots, t-1. \end{aligned}$$

根据矩阵行列式引理, 写出  $G^{(t)}$  的生成树数目

$$\mathcal{T}(G^{(t)}) = \mathcal{T}(G^{(1)}) \cdot \prod_{i=1}^{t-1} \left(1 + R_{\text{eff}}^{G^{(i)}}(u_i, v_i)\right). \quad (7.3)$$

令  $l_i \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{p}_i|$  为路径  $\mathbf{p}_i$  的长度 (路径上的边数), 由于所有  $\mathbf{p}_i \in \mathcal{P}$  的路径不相交,  $\mathcal{T}(G^{(1)})$ ,  $\mathcal{T}(G^{(1)})$  可以表达为:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(G^{(1)}) &= \prod_{i=1}^t \mathcal{T}(S_{l_i+1} + \mathbf{p}_i) \\ &= \prod_{i=1}^t \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{l_i+1} - \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{l_i+1} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

其中  $S_{l_i+1}$  表示有  $l_i + 1$  个叶子的星状图; 第二个等式由 (7.2) 式求得。

当候选边在叶子节点上构成的图  $H'$  的路径覆盖数至少为  $\Omega(n)$  时, 证明了  $S_n + P$  的生成树数目与  $\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*)$  中的生成树数目相差一个常数关于  $n$  的指数倍。令  $\mathcal{P}_1$  表示  $\mathcal{P}$  中长度为  $O(1)$  的路径, 令  $t_1$  表示  $\mathcal{P}_1$  中路径的数目。那么, 由于以下的原因,  $\mathcal{T}(S_n + P)$  与  $\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*)$  之间存在指数级的差距: 首先, 根据 (7.2) 和 (7.4),  $\mathcal{T}(G^{(1)})$  至少比  $\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*)$  小  $(\sqrt{5})^{t-1} (1+\theta)^{t_1}$  倍, 这里  $\theta > 0$  是一个常数。其次,  $t-1$  条在  $P$  中而不在路径覆盖  $\mathcal{P}$  中的边的端点间的电阻都小于  $\sqrt{5} - 1$ , 因此无法弥补  $(\sqrt{5})^{t-1}$  倍的差距。第三, 根据马尔可夫不等式 (Markov's inequality),  $t_1$  为  $\Omega(n)$ , 因此可以保证因子  $(1+\theta)^{t_1}$  是指数级别的。这导致了  $\mathcal{T}(S_n + P)$  与  $\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*)$  相差指数级的倍数。下一节将给出详细的证明。

## 7.4 近似困难性

本节将利用一些特殊图的性质。比如: 星形图  $S_n$  是一个  $(n+1)$ -个点的树, 其中  $n$  个叶子节点直接连接到一个中心节点上;  $n$  个点的路径图  $P_n$ ;  $n$  个点的回路  $C_n$ ; 扇形图  $F_n$ , 定义为  $S_n$  加上一个支撑在其叶子上的  $P_n$ ; 轮形图  $W_n$ , 定义为  $S_n$  加上一个支撑在其叶子上的环  $C_n$ 。定义一个路径或者一个回路的长度为路径或者回路上的边权的和。特别地, 如果  $P_n$  和  $C_n$  中的边权都为 1, 那么它们的长度分别为  $n-1$  和  $n$ 。另外, 用  $K_n$  表示  $n$  个点的完全图。

### 7.4.1 最小路径覆盖的近似困难性

首先介绍最小路径覆盖问题的定义

**问题 7.7 (最小路径覆盖)** 给定一个无向图  $G = (V, E)$ , 一个路径覆盖是一个不相交的路径的集合, 使得每一个节点  $v \in V$  都刚好属于集合中的一条路径。注意到一个路径覆盖可能包含长度为 0 的路径 (一个孤立点)。最小路径覆盖问题就是要找到图  $G$  的基数最小的路径覆盖。又称最小路径覆盖的基数为最小路径覆盖数。

首先回顾一个已知的困难性结果: 距离为 1 和 2 的旅行商问题 ((1,2)-TSP)。

**引理 7.8 ([240,241])** 存在一个常数  $\sigma > 0$ , 使得: (在一个边权为 1 和 2 的完全图  $K_n$  中) 对于 (1,2)-TSP 的两个实例, 其最短哈密顿回路长度分别为  $n$  和  $(1 + \sigma)n$ , 区分这样的两个实例是 **NP**-难的。

接下来, 将 (1,2)-TSP 问题规约到距离为 1 和 2 的旅行商路径问题 ((1,2)-TSP-Path)。

**引理 7.9** 存在一个常数  $\delta > 0$ , 使得: (在一个边权为 1 和 2 的完全图  $K_n$  中) 对于 (1,2)-TSP-Path 的两个实例, 其最短哈密顿路径的长度分别为  $(n - 1)$  和  $(1 + \delta)n$ , 区分这样的两个实例是 **NP**-难的。

**证明:** 完备性: 如果一个 (1,2)-加权的完全图  $K_n$  有一个长度为哈密顿回路  $n$ , 那么它有一个长度为  $n - 1$  的哈密顿路径。

可靠性: 给定一个 (1,2)-加权的完全图  $K_n$ , 令  $\mathcal{Q}$  为  $K_n$  中的最短哈密顿回路, 假设它的长度满足  $|\mathcal{Q}| \geq (1 + \sigma)n$ , 那么  $K_n$  中的最短哈密顿路径  $\mathcal{H}$  的长度至少为  $(1 + \sigma)n - 2$ . 令  $\delta = \frac{\sigma}{2}$ , 那么对  $n > \frac{4}{\sigma}$ ,  $\mathcal{H}$  满足  $|\mathcal{H}| \geq (1 + \delta)n$ .  $\square$

**引理 7.10** 存在一个常数  $\delta$ , 区分两个最小路径覆盖数分别是 1 和  $\delta n$  的实例是一个 **NP**-难问题。



**证明：** 完备性：在一个  $(1, 2)$ -加权的完全图  $K_n$  中，如果  $\mathcal{H}^*$  是  $K_n$  中的一个最短哈密顿路径，其长度满足  $|\mathcal{H}^*| = n - 1$ ，那么  $\mathcal{H}^*$  是由  $K_n$  中边权为 1 的边构成的子图的一个哈密顿路径。

可靠性：在一个  $(1, 2)$ -加权的完全图  $K_n$  中，如果所有的哈密顿路径  $\mathcal{H}$  都满足  $|\mathcal{H}| \geq (1 + \delta)n$ ，那么由  $K_n$  中边权为 1 的边构成的子图的最小路径覆盖数至少为  $\delta n + 2$ .  $\square$

### 7.4.2 最大化生成树数目的指数近似困难性

考虑第 7.2 节中介绍的 NSTM 的一个实例。在这里回顾一下通过迭代地使用矩阵行列式引理得到  $G + P$  的生成树数目：

$$\mathcal{T}(G^{(i+1)}) = \left(1 + R_{\text{eff}}^{G^{(i)}}(u_i, v_i)\right) \mathcal{T}(G^{(i)}).$$

需要专门考虑由  $S_n$  的叶子节点和  $P$  中的边构成的子图  $H[V']$  中的不在路径覆盖  $\mathcal{P}$  中的边的端点间（在加边之前）的等效电阻，因为可以用它来界定加上这些边以后的生成树数目。

**引理 7.11** 令  $H = (V, E)$  是一个不加权的图，这个图由一个星形图  $S_n$  和  $H$  的一个支撑在  $S_n$  的叶子上的子图  $H[V'] = (V', E')$  构成（见图 7.1）。假设  $P$  是  $E'$  的任意一个大小为  $n - 1$  的子集，即  $|P| = n - 1$ ， $\mathcal{P}$  是  $H[V']$  的一个只用到  $P$  中的边的最小路径覆盖。令  $e = (u_i, v_i)$  是一条包含于  $P$  但不在  $\mathcal{P}$  中的任何一条路径中的边。那么在图  $G + \mathcal{P}$  中：

1. 如果  $u_i$  不是路径覆盖  $\mathcal{P}$  中的一条路径的端点，并且  $v_i$  不是  $\mathcal{P}$  中的一个孤立点，那么

$$R_{\text{eff}}(u_i, v_i) \leq \frac{7}{6}.$$

2. 如果  $u_i$  不是路径覆盖  $\mathcal{P}$  中的一条路径的端点，并且  $v_i$  是  $\mathcal{P}$  中的一个孤立点，那么

$$R_{\text{eff}}(u_i, v_i) \leq \frac{3}{2}.$$

3. 如果  $u_i$  和  $v_i$  是属于  $\mathcal{P}$  的同一条路径的两个端点，那么

$$R_{\text{eff}}(u_i, v_i) < \sqrt{5} - 1.$$

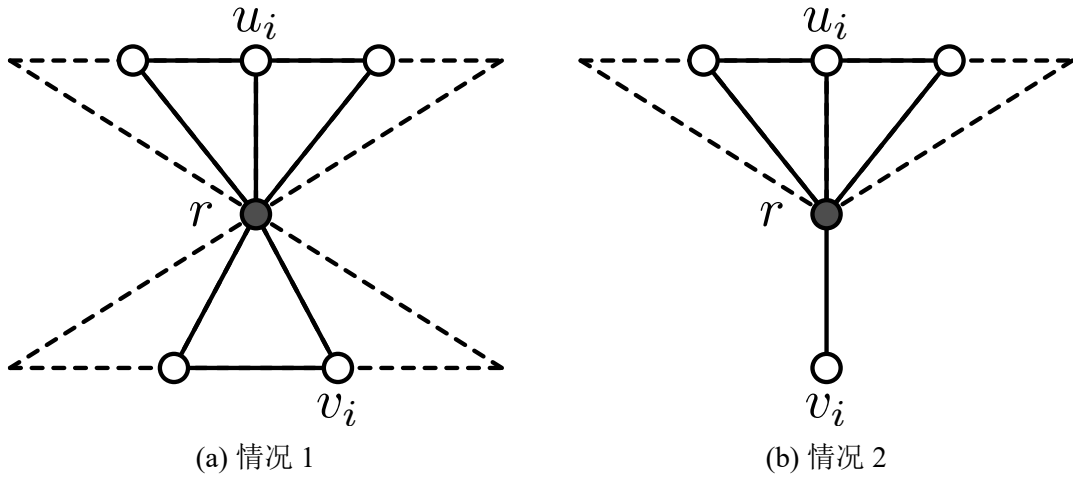


图 7.2: 引理 7.11 的解释.

**证明:** 由 Rayleigh 单调性定律, 可以知道对于第 1 种情况,

$$R_{\text{eff}}(u_i, v_i) \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{3}.$$

对于引理中的第 2 种情况, 类似地可以得到

$$R_{\text{eff}}(u_i, v_i) \leq \frac{1}{2} + 1.$$

图 7.2 展示了如何得到这些等效电阻的上界。图中虚线表示  $u_i$  或  $v_i$  所属路径的剩余部分, 以及它们与  $r$  相连的边。

最后一种情况可以直接由以下事实得到:

$$\mathcal{T}(W_n) < \sqrt{5} \cdot \mathcal{T}(F_n),$$

这个结果可以由 [239] 中给出的扇形图端点间的等效电阻的显式结果推出。  $\square$

接下来把最小路径覆盖问题规约到问题 7.2。首先证明规约的完备性。

**引理 7.12** 令  $H = (V, E)$  是一个无权图, 这个图由一个星形图  $S_n$  和  $H$  的一个支撑在  $S_n$  的叶子上的子图  $H[V'] = (V', E')$  构成。在问题 7.2 的一个实例中,  $G = S_n$ ,  $Q = E'$ , 而且  $k = n - 1$ , 如果  $H[V']$  有一个哈密顿路径, 那么存在  $P \subseteq Q$ ,  $|P| = k$ , 满足

$$\mathcal{T}(G + P) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

**证明:** 假设  $H[V']$  中有一个哈密顿路径  $\mathcal{P}^*$ , 那么  $S_n + \mathcal{P}^*$  构成了一个扇形图  $F_n$ , 其生成树数目由 [239] 给出, 如下所示:

$$\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*) = \mathcal{T}(F_n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (7.5)$$

□

在证明这个规约的可靠性之前, 首先通过证明以下引理热身。

**引理 7.13** 令  $H = (V, E)$  是一个无权图, 这个图由一个星形图  $S_n$  和  $H$  的一个支撑在  $S_n$  的叶子上的子图  $H[V'] = (V', E')$  构成。在问题 7.2 的一个实例中,  $G = S_n$ ,  $Q = E'$ , 而且  $k = n - 1$ , 对于任意满足  $P \subseteq Q$ ,  $|P| = k$  的边集, 如果  $P$  中的边不构成一个哈密顿路径, 那么

$$\mathcal{T}(S_n + P) < \mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}^*).$$

**证明:** 假设  $\mathcal{P}' = \{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_{t'}\}$  是子图  $G'' = (V', P)$  的一个最小路径覆盖, 其中  $|\mathbf{p}'_i| = l'_i$ , 不失一般性, 假设  $l'_1 \leq l'_2 \leq \dots \leq l'_{t'}$ , 并且  $l'_1 = \dots = l'_\kappa = 0 < l'_{\kappa+1}$ , 那么

$$\mathcal{T}(S_n + \mathcal{P}') = \prod_{i=1}^{t'} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{l'_i+1} - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{l'_i+1} \right), \quad (7.6)$$

因为  $7/6 < \sqrt{5} - 1 < 3/2$ , 结合电阻的 Rayleigh 单调性可得

$$\mathcal{T}(S_n + P) \leq \left( \frac{5}{2} \right)^\kappa \cdot 5^{(t-\kappa-1)/2} \cdot 5^{-(t-\kappa)/2} \prod_{i=\kappa+1}^{t'} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{l'_i+1} - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{l'_i+1} \right) \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} &< \left( \frac{5}{2} \right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-\kappa} - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-\kappa} \right) \\ &< \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\ &= \mathcal{T}(S_{n+1} + \mathcal{P}^*). \end{aligned} \quad (7.8)$$

其中, 可以根据  $\sum_{i=\kappa+1}^{t'} (l'_i + 1) = n - \kappa$ , 由 (7.7) 推出 (7.8)。

□

接下来证明规约的可靠性。

**证明:** [引理 7.6 的证明] 假设  $H[V'] = (V', E')$  的最小路径覆盖数至少为  $\delta n$ , 那么子图  $G'' = (V', P)$  的任意路径覆盖  $\mathcal{P}' = \{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_{t'}\}$  都必须满足  $t' \geq t$ . 记  $|\mathbf{p}'_i| = l'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, t'\}$ , 且不是一般性地假设  $l'_1 \leq l'_2 \leq \dots \leq l'_{t'}$ ,  $l'_1 = \dots = l'_\kappa = 0 < l'_{\kappa+1}$ ; 那么根据 (7.7) 式, 可以得到

$$\mathcal{T}(S_n + P) \leq \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \prod_{l'_i \geq 1} \left( \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} \right)$$

因为  $\mathcal{P}'$  中路径的平均长度满足

$$\mathbb{E}_i[l'_i] \leq \frac{n - \delta n}{\delta n} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

根据马尔可夫不等式,

$$\Pr_i \left[ l'_i \geq \frac{2(1-\delta)}{\delta} \right] \leq \frac{1}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(S_n + P) &\leq \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \prod_{1 \leq l'_i < \frac{2(1-\delta)}{\delta}} \left( \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left( \prod_{l'_i \geq \frac{2(1-\delta)}{\delta}} \left( \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{l'_i+1} \right) \right) \\ &\leq \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \prod_{1 \leq l'_i < \frac{2(1-\delta)}{\delta}} \left( 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2l'_i+2} \right) \right) \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-\kappa} \\ &< \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left( 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{4-2\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta n}{2}-\kappa} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-\kappa} \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left( 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{4-2\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta n}{2}-\kappa} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{\delta n}{2}-\kappa} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-\frac{\delta n}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{2}\right)^\kappa \left( \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{4-3\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta n}{2}-\kappa} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-\frac{\delta}{2}n} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

第三个不等式由马尔可夫不等式推出。令

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \left( \frac{15 - 5\sqrt{5}}{4} \right)^{\frac{\delta}{2}}, \left( 1 - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{4-2\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta}{2}} \right\}. \quad (7.9)$$

因为  $\delta$  是一个正常数,  $\alpha$  是一个满足  $0 < \alpha < 1$  的常数, 那么

$$\mathcal{T}(S_n + P) < \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \alpha \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathcal{T}(S_n + P)}{\log \mathcal{T}(F_n)} &< \frac{-\frac{1}{2} \log 5 + n \cdot \log \left( \alpha \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}{-\frac{1}{2} \log 5 + n \cdot \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) + \log \left( 1 - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right)} \\ &< \frac{n \log \left( \alpha \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}{n \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) + \log \left( 1 - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right)}. \end{aligned}$$

如果  $n$  满足

$$n > \max \left\{ \frac{1}{2 \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \frac{2}{\log \frac{1}{\alpha}} \right\},$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathcal{T}(S_n + P)}{\log \mathcal{T}(F_n)} &< \frac{n \cdot \log(\alpha) + n \cdot \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}{n \cdot \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) + \log \left( 1 - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right)} \\ &< \frac{\frac{1}{2} \log(\alpha) + \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}{\log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)} \\ &= 1 - \frac{\log(1/\alpha)}{2 \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}. \end{aligned}$$

因此得到了引理 7.6 中阐明的常数  $c$ :

$$c = \frac{\log(1/\alpha)}{2 \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)}. \quad (7.10)$$

证毕。  $\square$

## 7.5 本章小结

本章研究了通过加边最小化网络熵的近似困难性。结果显示，存在一个常数  $c > 0$ ，使得将网络熵  $\mathcal{S}(G)$  近似到  $(1 - c)$  倍以内是 **NP**-困难的。同时证明了存在一个常数  $d > 0$ ，使得将加权生成树数目  $\mathcal{T}$  近似到  $\frac{1}{(1-d)^n}$  倍以内是 **NP**-困难的。这些结果给出了相关优化问题复杂性的下界。

本文第 3 章到第 5 章分析了一阶一致性算法的（平均）稳态方差，及其受噪声变化影响的程度。第 6 章和本章研究了一阶一致性网络的性能优化问题。下一章将研究二阶一致性的状态方程，通过分析给出二阶系统的  $\mathcal{H}_2$  范数和系统稳态方差，从而定义二阶共识网络的抗噪性，并将若干指标与图上的双调和距离建立关联，搭建二阶一致性系统的分析框架。

## 第八章 二阶一致性的抗噪性研究框架

本章研究了噪声对二阶一致性过程的影响。研究了三种不同的性能度量：点对之间的稳态方差、一个节点状态偏离当前平均的稳态方差、以及系统所有节点的平均稳态方差。本章展示了这三种性能度量与网络上节点间的双调和距离之间具有紧密的联系。双调和距离的平方在二阶一致性网络中的作用和等效电阻在一阶一致性网络中的作用相似。本章同时还定义了基于双调和距离的基尔霍夫系数和节点中心性。最后推导了一些常见网络上的性能指标，并比较了一阶和二阶一致性系统中的抗噪性（coherence）的渐近行为。

### 8.1 引言

在绪论和前几章中已经介绍了，一致性过程是分布式网络系统中共享信息的一种基本方式。在噪声影响下，系统状态一般不能达到一致，而会在系统均值附近波动 [65]。很多工作都着力于研究量化系统稳态方差的分析方法。大部分的相关工作集中于一阶一致性系统的分析 [38, 64, 65, 67, 135, 242]。研究发现，在一阶一致性系统中，系统的总体稳态方差可以用对应的电阻网络的基尔霍夫系数给出 [64, 67]。反过来，等效电阻也可以用相关动力学系统节点状态的协方差矩阵给出 [60]。前几章中已经介绍并频繁使用了相关的方法。

很多现实世界的系统都能被二阶动力学更准确地刻画。比如：把二阶共识算法可以应用到编队控制问题中，因为它很好地刻画了汽车或飞行器的运动学规律 [100]。二阶一致性的方案还被应用到时钟同步算法中 [102]。虽然二阶一致性过程有很多重要的应用，相比一阶过程而，系统受到外加扰动影响的二阶一致性系统的相关研究工作仍然非常有限。此前的研究表明，二阶一致性网络的稳态方差决定于图的拉普拉斯矩阵的特征值 [65]。此外，[65] 还分析了相关状态偏差的宏观和微观渐进行为。然而，到目前为止，还没有针对带噪声的二阶一致性系统提出与等效电阻在一阶系统分析中的作用等同的性能衡量标准。或者说，没有将二阶一致性网络的表现指标与图的结构性质很好地联系起来。

本章提出用图上的双调和距离作为分析受扰动影响的二阶一致性网络的工具。双调和距离由拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量定义，也可以由拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose 逆的平方给出。双调和距离已被用到计算机图形学中，作为一种兼顾局部信息和全局信息的距离度量 [112]。本章研究了二阶一致性系统中

的三种表现指标：点对间状态偏移量的方差，单个点状态（距离系统平均值）的偏差，以及所有节点的平均稳态方差。对于这三个性能指标，都展示了如何用双调和距离进行分析。除此之外，本章还引入了些新的基于双调和距离的点中心性和图系数的概念。一个具有更高双调和中心性的点在二阶一致性系统中具有更小的稳态方差。然后解析了一些典型网络结构（比如完全图、星状图、环和路径）上的双调和距离，以及相关的性能度量。最后比较了一阶和二阶一致性网络在外加扰动影响下的稳态方差的渐进行为。

相关工作包括一阶、二阶一致性网络抗噪性分析，以及相关的中心性概念。

Bamieh 等人提出了网络抗噪性的概念，用节点状态的平均稳态方差来刻画一阶、二阶共识算法在随机扰动影响下的鲁棒性。该工作展示了网络抗噪性与图的拉普拉斯矩阵的谱之间的联系，并且研究了圆环面网络上的系统抗噪性的渐进行为 [65]。若干早期的工作分析了各种网络结构上的一阶抗噪性的精确结果或渐进行为，比如 [64, 67, 135, 138, 243] 等等，本文已在第 4 章中进行了详细的讨论。另外，也有一些近期的工作讨论了不同网络拓扑中的二阶抗噪性，即圆环面 [65]、分形树 [67]、科赫网络 [138] 的二阶抗噪性。但是，以上工作都没有建立二阶抗噪性和图上的距离度量的一般性的数学联系。

关于双调和距离，Fitch 和 Leonard [38] 在她们近期的工作中使用了一个与本文中略有区别的定义，用于描述一阶一致性系统中多个领导者的“联合”中心性。本文采用了一个由 [112] 中提出的概念离散化得到的定义，因为这样更加符合“距离”的定义。

本章的组织结构如下：第 8.2 节介绍本文研究的动力学系统。第 8.2.3 节介绍了基于双调和距离的点中心性和图系数（graph indices）的概念。第 8.3 节展示了双调和距离在受到扰动的二阶一致性系统中扮演了重要的角色，本章给出了网络抗噪性性能指标和双调和距离及其衍生出的图指数之间的关系。第 8.4 节给出了完全图、星状图、回路和路径图的二阶抗噪性性能指标的精确值。第 8.5 节比较了一阶和二阶一致性系统在环境扰动影响下的一致性表现，以及与他们分别相关的等效电阻和双调和距离。最后进行小结。

## 8.2 二阶一致性系统的抗噪性

### 8.2.1 系统模型

网络中的每一个节点有一个标量状态。假设  $\mathbf{x}_1(t)$  是一个  $n$  阶向量，表示了所有节点的状态； $\mathbf{x}_{1[j]}(t)$  表示节点  $j$  的状态， $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 。然后，用  $\mathbf{x}_2(t)$



表示  $\mathbf{x}_1(t)$  对时间  $t$  的一阶导数, 即  $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t)$ 。节点  $j$  根据它和它的邻居的状态 ( $\mathbf{x}_{1[j]}(t)$  和  $\mathbf{x}_{2[j]}(t)$ ) 来设定  $\dot{\mathbf{x}}_{2[j]}(t)$ , 从而调整自身状态, 使得系统趋于一致。以下方程给出了噪声影响下的二阶一致性过程。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\alpha\mathbf{L} & -\beta\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (8.1)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  是关于  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的增益系数;  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{L}$  都是  $n \times n$  的矩阵, 并且  $\boldsymbol{\xi}(t)$  是一个  $n$  阶向量, 包含了  $n$  个相互独立的高斯白噪声。

## 8.2.2 性能指标

因为每个节点的状态都受到高斯噪声的干扰, 整个网络系统不会达到准确的一致性。因此, 希望研究节点状态偏移量的大小的期望。特别地, 对与节点状态便宜相关的三种性能指标感兴趣, 这三种性能度量定义如下:

首先, 两个节点之间在外加扰动的影响下状态相差多少是一个重要的指标。因此研究点对偏移量的稳态方差。

**定义 8.1** 对于图  $G$  中的两个节点  $j, k \in V$ , 二阶一致性系统中的点对方差  $H_{\text{So}}(j, k)$  定义为  $\mathbf{x}_{1[j]}$  和  $\mathbf{x}_{1[k]}$  的差值的稳态方差, 即

$$H_{\text{So}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \mathbf{x}_{1[k]}(t))^2]. \quad (8.2)$$

注意到在  $d$ -维圆环面  $\mathbb{Z}_n^d$  中,  $H_{\text{So}}(j, j-1)$  是 [65] 中定义的二阶微观抗噪性,  $H_{\text{So}}(j, j+\frac{n}{2})$  是 [65] 中定义的二阶远程抗噪性。因此, 这里的定义把微观抗噪性的概念扩展到了任意无向图的任意点对上。

然后, 还研究了一个点偏离系统 (当前) 均值的方差。令  $\bar{x}_1(t)$  是均值  $\bar{x}_1(t) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}_1(t)$ 。

**定义 8.2** 对于一个节点  $j \in V$ , 二阶一致性系统中的节点偏移方差  $H_{\text{So}}(j)$  定义为节点状态  $x_{1[j]}(t)$  和  $\bar{x}_1(t)$  的差值的稳态方差, 即

$$H_{\text{So}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(x_{1[j]}(t) - \bar{x}_1(t))^2]. \quad (8.3)$$

最后研究系统的总方差。

**定义 8.3** 对于网络  $G$ ，二阶一致性系统中平均稳态方差  $H_{\text{so}}(G)$  定义为每个节点的平均稳态方差

$$H_{\text{so}}(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{x}_1(t))^2]. \quad (8.4)$$

在  $d$ -维圆环面  $\mathbb{Z}_n^d$  中， $H_{\text{so}}(G)$  等价于 [65] 中定义的二阶抗噪性。因此这里的定义把二阶网络抗噪性也扩展到了任意的无向图中。

### 8.2.3 双调和距离相关系数

**定义 2.5 (双调和距离)** 图  $G$  中节点  $j$ 、 $k$  间的双调和距离  $d_B(j, k)$  定义为：

$$d_B^2(j, k) = (\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[j,j]} + (\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[k,k]} - 2(\mathbf{L}^{2\ddagger})_{[j,k]} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{\lambda_i^2}.$$

根据双调和距离的定义，还可以定义以下的图指数。

**定义 8.4** 图  $G$  的双调和基尔霍夫指数  $D_B^2(G)$  定义为

$$D_B^2(G) = \sum_{\substack{j,k \in V \\ j < k}} d_B^2(j, k). \quad (8.5)$$

**定义 8.5** 图  $G$  中节点  $j$  的双调和点指数  $D_B^2(j)$  定义为

$$D_B^2(j) = \sum_{k \in V} d_B^2(j, k). \quad (8.6)$$

可以根据  $d_B(j, k)$  的定义知道

$$D_B^2(G) = n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (8.7)$$

最后，对于图  $G$  中的点  $j$ ，可以基于双调和距离定义它的中心性。

**定义 8.6** 图  $G$  中点  $j$  的双调和中心性 定义为

$$C_B(j) = \left( \frac{1}{n} D_B^2(j) \right)^{-1}. \quad (8.8)$$

### 8.3 带扰动的二阶共识系统分析

方程式 (8.1) 给出了二阶一致性算法受到随机扰动的动力学过程。节点  $j$  偏离所有节点当前平均值由  $\mathbf{y}_{[j]}(t) = \mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{x}_1(t)$  给出。令  $\mathbf{y}(t)$  是一个  $n$ -阶列向量，代表了所有节点偏离均值的量。

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{\Pi} \mid \mathbf{0}] \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{x}_1(t),$$

其中  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$ . 本文研究的所有性能指标都可以用  $\mathbf{y}(t)$  表示。具体而言，

$$\begin{aligned} H_{\text{SO}}(j, k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{x}_1(t)) - (\mathbf{x}_{1[k]}(t) - \bar{x}_1(t))]^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{y}_{[j]}(t) - \mathbf{y}_{[k]}(t))^2] \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$H_{\text{SO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{1[j]}(t) - \bar{x}_1(t))^2] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{y}_{[j]}(t)^2] \quad (8.10)$$

$$H_{\text{SO}}(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[\mathbf{y}_{[j]}(t)^2]. \quad (8.11)$$

然而，(8.1) 所描述的系统仅仅是边际稳定的 (marginally stable) [64]。为了得到一个稳定系统，仅仅考虑正交于  $\mathbf{1}_n$  的状态子空间。定义矩阵  $\mathbf{Q}$  为一个  $(n-1) \times n$  的矩阵，它的行由  $\mathbf{L}$  的特征向量组成，但不包含零对应的特征向量  $\mathbf{1}_n$ 。 $\mathbf{L}$  能够被对角化为  $\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^\top$ ，其中  $\mathbf{U}$  是一个酉矩阵， $\mathbf{\Lambda}$  是一个对角阵。那么  $\mathbf{Q}^\top$  就是  $\mathbf{U}$  去掉第一列以后得到的子矩阵。容易验证， $\mathbf{Q} \mathbf{1}_n = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_{n-1}$ ， $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{\Pi}$ ，以及  $\mathbf{L} \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{L}$ 。接下来，定义

$$\mathbf{z}_1(t) = [\mathbf{Q} \mid \mathbf{0}] \mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \mathbf{x}_1(t),$$

并且注意到  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t)$ 。这意味着可以把相应的性能指标写成  $\mathbf{z}_1(t)$  的表达式。令  $\mathbf{z}_2(t) = \dot{\mathbf{z}}_1(t)$ 。那么由 (8.1) 可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ -\alpha \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} & -\beta \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t),$$

所以得到了以下稳定系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\alpha \bar{\mathbf{\Lambda}} & -\beta \bar{\mathbf{\Lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t),$$

此处  $\bar{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{Q} \mathbf{U})^\top = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ ，其中  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  是一个对角阵，其对角线上的第  $k$  个元素为  $\lambda_k$ 。

总是能找到一个正交置换矩阵  $\mathbf{V} \in \{0, 1\}^{(2n-2) \times (2n-2)}$ , 满足

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V}^\top \mathbf{K} \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t), \quad (8.12)$$

此处  $\mathbf{K}$  是块对角矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (8.13)$$

其中每个  $\mathbf{P}_i$  定义为:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\lambda_i & -\beta\lambda_i \end{bmatrix}.$$

可以通过研究 (8.12) 定义的系统动力学过程给出第 8.2.2 节中定义的抗噪性性能指标的表达式。

### 8.3.1 点对方差

**定理 8.7** 在 (8.1) 所描述的系统中, 点对  $i, j$  状态差的稳态方差能够用图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}$  的特征值和特征向量表示为

$$H_{\text{SO}}(j, k) = \frac{1}{2\alpha\beta} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{\lambda_i^2}. \quad (8.14)$$

**证明:** 首先把  $H_{\text{SO}}(j, k)$  用  $\mathbf{z}_1(t)$  表示。

$$\begin{aligned} H_{\text{SO}}(j, k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\mathbf{y}(t)^\top (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_j^\top - \mathbf{e}_k^\top) \mathbf{y}(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(\mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t))^\top (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_j^\top - \mathbf{e}_k^\top) \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\mathbf{z}_1(t)^\top \mathbf{Q} (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_j^\top - \mathbf{e}_k^\top) \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\text{Tr}((\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k)^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t) \mathbf{z}_1(t)^\top \mathbf{Q} (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k))] , \end{aligned}$$

此处  $\mathbf{e}_j$  是  $\mathbb{R}^N$  的第  $j$  个标准基向量。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k)^\top \mathbf{Q}^\top [\mathbf{I}_{n-1} | \mathbf{0}_{n-1}] \mathbf{z}(t) \\ &= (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k)^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t). \end{aligned} \quad (8.15)$$

接下来, 定义  $\Sigma(t) = \mathbb{E}[\phi(t)\phi(t)^\top]$ ; 那么  $H_{\text{SO}}(j, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{Tr}(\Sigma(t))]$   
 $= \text{Tr}(\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(\Sigma).$

对于由方程 (8.12) 和 (8.15) 给出的状态空间系统  $\mathfrak{S}$ , 系统的  $\mathcal{H}_2$  范数为:

$$\mathcal{H}_2^2 = \int_0^\infty \mathbf{B}^\top \mathbf{e}^{-M^\top t} \mathbf{Z} \mathbf{e}^{-Mt} \mathbf{B} dt, \quad (8.16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\alpha \bar{\Lambda} & -\beta \bar{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (8.18)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k)(\mathbf{Q}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k))^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

进而有  $H_{\text{so}}(j, k) = \|\mathfrak{S}\|_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \Sigma \mathbf{B})$ .  $\Sigma$  是以下李雅普诺夫方程 (Lyapunov equation) 的解,

$$\mathbf{M}^\top \Sigma + \Sigma \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (8.20)$$

这个方程等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \mathbf{M}^\top \Sigma \mathbf{V}^\top + \mathbf{V} \Sigma \mathbf{M} \mathbf{V}^\top &= -\mathbf{V} \mathbf{Z} \mathbf{V}^\top \text{ 或者} \\ (\mathbf{V} \mathbf{M}^\top \mathbf{V}^\top)(\mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^\top) + (\mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^\top)(\mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{V}^\top) &= -\mathbf{V} \mathbf{Z} \mathbf{V}^\top \end{aligned}$$

其中西 (置换) 矩阵  $\mathbf{V}$  的定义由 (8.12) 给出。记  $\mathbf{K} = \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{V}^\top$ , 以及  $\Phi = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^\top$ . 接下来方程 (8.20) 能被写为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\top \Phi + \Phi \mathbf{K} &= -\mathbf{V} \mathbf{Z} \mathbf{V}^\top \\ &= - \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{Z}_{11} & \cdots & \mathbf{Z}_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{Z}_{(n-1)1} & \cdots & \mathbf{Z}_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (8.21)$$

对  $i, r \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ir} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{[i,j]} \mathbf{Q}_{[r,j]} - \mathbf{Q}_{[i,j]} \mathbf{Q}_{[r,k]} - \mathbf{Q}_{[i,k]} \mathbf{Q}_{[r,j]} + \mathbf{Q}_{[i,k]} \mathbf{Q}_{[r,k]}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{[i,j]} \mathbf{u}_{[r,j]} - \mathbf{u}_{[i,j]} \mathbf{u}_{[r,k]} - \mathbf{u}_{[i,k]} \mathbf{u}_{[r,j]} + \mathbf{u}_{[i,k]} \mathbf{u}_{[r,k]}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到  $\mathbf{K}$  是块对角的。将 (8.13) 代入 (8.21) 的对角块中得  $\mathbf{P}_i^\top \Phi_{ii} + \Phi_{ii} \mathbf{P}_i = \mathbf{Z}_{ii}$ .

因为  $\mathbf{Z}_{ii}$  和  $\mathbf{P}_i$  都是对称的, 所以  $\Phi_{ii}$  也是对称的, 将其写为

$$\Phi_{ii} = \begin{bmatrix} X_{ii} & \Psi_{ii} \\ \Psi_{ii} & Y_{ii} \end{bmatrix}.$$

因此有,

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha\lambda_i \\ 1 & \beta\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ii} & \Psi_{ii} \\ \Psi_{ii} & Y_{ii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{ii} & \Psi_{ii} \\ \Psi_{ii} & Y_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\lambda_i & \beta\lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可以解出

$$Y_{ii} = \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{2\alpha\beta\lambda_i^2}.$$

接下来可以推导出

$$\begin{aligned} H_{\text{so}}(j, k) &= \mathcal{H}_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \Sigma \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{V}^\top \Phi \mathbf{V} \mathbf{B}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{ii}) = \frac{1}{2\alpha\beta} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2}{2\lambda_i^2}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

□

根据定义 2.5, 立刻可以得到以下定理。

**定理 8.8** 对于一个满足状态方程 (8.1) 的网络  $G$  中的两个点  $j$  和  $k$ ,

$$H_{\text{so}}(j, k) = \frac{1}{2\alpha\beta} d_B^2(j, k) \quad (8.23)$$

这个定理表明,  $j$  和  $k$  之间的点对方差和两点间的双调和距离的平方成正比。

### 8.3.2 节点偏移方差

首先用  $\mathbf{L}$  的特征值和特征向量给出一个节点偏移方差的表达式。

**定理 8.9** 对于任意满足状态方程 (8.1) 的图  $G$  中的点  $j$ ,

$$H_{\text{so}}(j) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mathbf{u}_{i[j]}^2}{2\lambda_i^2}. \quad (8.24)$$

**证明:** 首先, 用  $\mathbf{z}_1(t)$  给出一个点偏移方差的表示。

$$\begin{aligned} H_{\text{SO}}(j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\mathbf{y}(t)^\top \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top \mathbf{y}(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(\mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t))^\top \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\mathbf{z}_1(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\text{Tr}(\mathbf{e}_j^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t) \mathbf{z}_1(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_j)] . \end{aligned}$$

据此, 进一步定义系统输出为

$$\phi(t) = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{Q}^\top [\mathbf{I}_{n-1} | \mathbf{0}_{n-1}] \mathbf{z}(t) = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{z}_1(t) . \quad (8.25)$$

与前面类似, 定义  $\Sigma(t) = \mathbb{E}[\phi(t)\phi(t)^\top]$ , 所以  $H_{\text{SO}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{Tr}(\Sigma(t))] = [\text{Tr}(\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t))] \stackrel{\text{def}}{=} [\text{Tr}(\Sigma)]$ .

对于方程 (8.12) 和方程 (8.25) 给出的状态空间系统  $\mathfrak{S}$ , 系统  $\mathcal{H}_2$  范数的平方仍然由 (8.16) 定义, 其中  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{M}$  分别由 (8.17) 和 (8.18) 给出,  $\mathbf{Z}$  可以表示为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j (\mathbf{Q} \mathbf{e}_j)^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

接下来计算  $H_{\text{SO}}(j) = \|\mathfrak{S}\|_2^2 = \text{Tr}((\mathbf{B}^\top \Sigma \mathbf{B}))$ .  $\Sigma$  是以下李雅普诺夫方程的解

$$\mathbf{M}^\top \Sigma + \Sigma \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \mathbf{0} , \quad (8.26)$$

这个方程等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\top \Phi + \Phi \mathbf{K} &= -\mathbf{V} \mathbf{Z} \mathbf{V}^\top \\ &= - \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{Z}_{11} & \cdots & \mathbf{Z}_{1(n-1)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{Z}_{(n-1)1} & \cdots & \mathbf{Z}_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] , \end{aligned} \quad (8.27)$$

所以

$$\mathbf{Z}_{ir} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{[i,j]} \mathbf{Q}_{[r,j]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i[j]} \mathbf{u}_{r[j]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ,$$

对任意的  $i, r \in \{1, \dots, n-1\}$  都成立。注意到  $\mathbf{K} = \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{V}^\top$ , 以及  $\Phi = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^\top$ .

将 (8.13) 代入 (8.27) 的对角块中, 可以得出  $\mathbf{P}_i^\top \Phi_{ii} + \Phi_{ii} \mathbf{P}_i = \mathbf{Z}_{ii}$ . 和点对的情

况类似, 可以得到

$$\Phi_{ii} = \begin{bmatrix} X_{ii} & \Psi_{ii} \\ \Psi_{ii} & Y_{ii} \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

通过解方程  $\mathbf{P}_i^\top \Phi_{ii} + \Phi_{ii} \mathbf{P}_i = \mathbf{Z}_{ii}$  可以推导出

$$Y_{ii} = \frac{\mathbf{u}_{i[j]}^2}{2\lambda_i^2}.$$

接着可以得到

$$H_{\text{so}}(j) = \mathcal{H}_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \Sigma \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{V}^\top \Phi \mathbf{V} \mathbf{B}) \sum_{i=1}^{N-1} (Y_{ii}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mathbf{u}_{i[j]}^2}{2\lambda_i^2}. \quad (8.29)$$

□

接下来利用定理 8.9 推导节点偏移方差和双调和距离的关系。

**定理 8.10** 对于一个满足状态方程 (8.1) 的网络  $G$  中的点  $j$ , 节点状态偏离网络当前平均状态的稳态方差可以用双调和距离相关的指数表示为

$$H_{\text{so}}(j) = \frac{1}{2N} \left( D_B^2(j) - \frac{1}{N} D_B^2(G) \right). \quad (8.30)$$

**证明:** 基于双调和距离的点指数  $D_B^2(j)$  可以写为

$$\begin{aligned} D_B^2(j) &= \sum_{k=0}^{n-1} d_B^2(j, k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^2} (\mathbf{u}_{i[j]} - \mathbf{u}_{i[k]})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_{i[j]}^2 - 2\mathbf{u}_{i[j]}\mathbf{u}_{i[k]} + \mathbf{u}_{i[k]}^2}{\lambda_i^2} \\ &= N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_{i[j]}^2}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^2}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

将 (8.7) 和 (8.24) 代入 (8.31), 得到

$$H_{\text{so}}(j) = \frac{D_B^2(j)}{2n} - \frac{D_B^2(G)}{2n^2}. \quad (8.32)$$

□



### 8.3.3 系统总方差

最后用拉普拉斯矩阵的谱写出系统总方差的表达式。

**定理 8.11** 满足状态方程 (8.1) 的共识网络的总稳态方差为

$$H_{\text{so}}(G) = \frac{1}{2n\alpha\beta} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (8.33)$$

**证明:** 因为

$$H_{\text{so}}(G) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{N-1} H_{\text{so}}(j),$$

立刻得到

$$\begin{aligned} H_{\text{so}}(G) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2\alpha\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u_{i[j]}^2}{\lambda_i^2} \right) = \frac{1}{2n\alpha\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_{i[j]}^2}{\lambda_i^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta n} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i^2}. \end{aligned}$$

证毕。  $\square$

类似地, 可以使用 (8.7) 得到以下系统总方差关于双调和距离的关系。

**定理 8.12** 对于一个满足状态方程 (8.1) 的共识网络  $G$ , 系统的总方差由网络的双调和距离基尔霍夫系数表达为

$$H_{\text{so}}(G) = \frac{1}{2\alpha\beta n^2} D_B^2(G). \quad (8.34)$$

## 8.4 解析示例

本节给出了一些特殊结构的图上双调和距离和基于双调和距离的一些指数的示例。包括完全图、星状图、回路和路径图。对于所有的情况, 都给出了三个抗噪性指标的闭式解。

注意到在一些示例中, 拉普拉斯矩阵的特征向量用复向量给出 (可以通过一个酉变换转化为实特征向量)。因此通过以下表达式计算双调和距离。

$$d_B^2(j, k) = L_{jj}^{2\dagger} + L_{kk}^{2\dagger} - 2L_{jk}^{2\dagger} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_n^2} |\mathbf{u}_{n[j]} - \mathbf{u}_{n[k]}|^2, \quad (8.35)$$

这是定义 2.5 的一个等价形式。为了讨论方便, 本节假设  $\alpha = 1, \beta = 1$ . 此外, 在本节中,  $i$  表示虚数单位。

### 8.4.1 完全图

考虑一个  $n$  个点的完全图。它的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_n^{cp}$  写为

$$\mathbf{L}_n^{cp} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

矩阵  $\mathbf{L}_n^{cp}$  可以用离散傅里叶变换对角化。容易验证其特征值和特征向量为

$$\lambda_0 = 0 \quad (8.36)$$

$$\lambda_p = n, \quad p = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.37)$$

$$\mathbf{u}_{p[q]} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i2\pi pq/n}, \quad p, q = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.38)$$

**命题 8.13** 在一个  $n$  个点的完全图中, let  $j, k \in V, j \neq k$ 。两点  $j$  和  $k$  之间的双调和距离

$$d_B(j, k) = \frac{\sqrt{2}}{n}. \quad (8.39)$$

**证明:** 将式 (8.36) - (8.38) 带入 (8.35) 中, 得到

$$d_B^2(j, k) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{|\mathbf{u}_{p[j]} - \mathbf{u}_{p[k]}|^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{p=1}^{n-1} 4 \sin^2 \frac{(j-k)\pi p}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

证毕。 □

一旦得到了所有点对间的双调和距离, 立刻就可推导出相关的图和点指数。可以根据 (8.39) 推导  $n$  个点的完全图的双调和基尔霍夫指数

$$D_B^2(G) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

还可以推导出基于双调和距离的点指数和点中心性

$$D_B^2(j) = (n-1) \cdot \frac{2}{n^2} = \frac{2(n-1)}{n^2},$$

$$C_B(j) = \frac{n^3}{2(n-1)}.$$

最后, 可以用推导出的双调和距离、定理 8.8、8.10 和 8.12 来确定 8.2.2 节中定义的三个性能指标的闭式表达式。

**定理 8.14** 对于一个  $n$  个点的完全图  $G$ , 如果共识网络满足状态方程 (8.1),

$$H_{\text{so}}(j, k) = \frac{1}{n^2}, \quad j, k \in V, j \neq k;$$

$$H_{\text{so}}(j) = \frac{n-1}{2n^3}, \quad j \in V;$$

$$H_{\text{so}}(G) = \frac{n-1}{2n^3}.$$

## 8.4.2 星状图

然后考虑  $n$  个点的星状图, 包含一个中心节点与  $n-1$  个叶子节点。它的拉普拉斯矩阵为:

$$\mathbf{L}_n^{\text{star}} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

其特征值和相应的特征向量为 [244]:

$$\lambda_0 = 0 \quad (8.41)$$

$$\lambda_p = 1, \quad p = 1, 2, \cdots, n-2, \quad (8.42)$$

$$\lambda_{n-1} = n, \quad (8.43)$$

以及

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1)^\top \quad (8.44)$$

$$\mathbf{u}_p = \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}(0, \underbrace{-1, \dots, -1}_p, p, 0, 0, \dots, 0)^\top, \\ p = 1, 2, \dots, n-2, \quad (8.45)$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(1-n, 1, \dots, 1, 1)^\top. \quad (8.46)$$

接下来用这些特征值和特征向量来计算星状图中的双调和距离。

**命题 8.15** 在一个点 0 为中心节点，其他  $n-1$  个节点为叶子的星状图中，中心点与其他任意节点间的双调和距离为

$$d_B(0, j) = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (8.47)$$

任意两个叶子间的双调和距离为

$$d_B(j, k) = \sqrt{2}, \quad j, k = 1, 2, \dots, N-1; \quad j \neq k. \quad (8.48)$$

**证明：** 两个点  $j, k \in V, j \neq k$  之间的双调和函数由以下方式给出：

$$d_B^2(j, k) = \sum_{p=1}^{n-2} \frac{(\mathbf{u}_{p[j]} - \mathbf{u}_{p[k]})^2}{1^2} + \frac{(\mathbf{u}_{n-1,[j]} - \mathbf{u}_{n-1,[k]})^2}{n^2}. \quad (8.49)$$

将 (8.41) - (8.43) 和 (8.44) - (8.46) 代入 (8.49) 可以得到定理的结果。  $\square$

根据双调和距离的结论，容易算出其双调和基尔霍夫系数

$$D_B^2(G) = (n-1)\frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 = n^2 - 2n + \frac{1}{n}.$$

基于双调和距离的点指数和中心性也很容易由命题 8.15 得到。对于中心节点 0 而言，

$$D_B^2(0) = (n-1) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)^2}{n}, \\ C_B(0) = \frac{n^2}{(n-1)^2},$$

对于任意的叶子节点  $j$ ,

$$D_B^2(j) = \frac{n-1}{n} + (n-2) \cdot 2 = \frac{2n^2 - 3n - 1}{n},$$

$$C_B(j) = \frac{n^2}{2n^2 - 3n - 1}.$$

应用命题 8.15 和定理 8.8, 8.10 和 8.12, 能够计算得到三个稳态性能指标的闭式结果。

**定理 8.16** 对于一个  $n$  个点的星状图  $G$ , 系统状态方程为 (8.1)。标号为 0 的节点为中心节点, 那么

$$H_{\text{So}}(0, j) = \frac{n-1}{2n}, \quad j \neq 0;$$

$$H_{\text{So}}(j, k) = 1, \quad j \neq k; \quad j, k \neq 0;$$

$$H_{\text{So}}(0) = \frac{n-1}{2n^3};$$

$$H_{\text{So}}(j) = \frac{n^3 - n^2 - n - 1}{2n^3}, \quad j \neq 0;$$

$$H_{\text{So}}(G) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3}.$$

### 8.4.3 环

一个  $n$  个点的回路  $C_n$  的拉普拉斯矩阵为:

$$\mathbf{L}_n^{\text{cyc}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{L}_n^{\text{cyc}}$  是一个循环矩阵。因此它的谱分解由一个离散傅里叶变换给出。令  $\phi_p = \frac{p\pi}{n}$ ,  $\mathbf{L}_N^{\text{cyc}}$  的特征值和特征向量为

$$\lambda_p = 2(1 - \cos 2\phi_p), p = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.50)$$

$$\mathbf{u}_{p[q]} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i2q\phi_p}, p, q = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.51)$$

然后用特征值和特征向量的结果确定环上任意点对间的双调和距离。

**命题 8.17** 对于一个回路图  $G = (V, E)$  中的任意两个节点  $j, k \in V$ ,  $k \leq j$ , 满足  $j - k = l$ 。  $j$  和  $k$  之间的双调和距离为

$$d_B(j, k) = \sqrt{\frac{l^4}{12n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^2 n}{12} - \frac{l^2}{6n} + \frac{l}{6}}. \quad (8.52)$$

**证明:** 在证明中使用  $i$  作为虚数单位。

将 (8.50) 和 (8.51) 代入定义 2.5, 可以得到

$$d_B^2(j, k) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{|e^{i2j\phi_p} - e^{i2k\phi_p}|^2}{4(1 - \cos 2\phi_p)^2} = \frac{1}{2} G_n(j - k), \quad (8.53)$$

此处

$$G_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos(2l\phi_p)}{(1 - \cos 2\phi_p)^2}.$$

不失一般性地, 假设  $0 \leq l \leq 2n$ .

为了简化  $G_n(l)$ , 可以给出以下和式的实部的两个等价表达式。

$$H_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - e^{2il\phi_p}}{(1 - e^{2i\phi_p})^2}. \quad (8.54)$$

第一个表达式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_n(l)) &= \frac{1}{4n} \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{1 - \cos 2l\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} - \frac{2 - 2 \cos 2(l-1)\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \cos 2(l-2)\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} - \frac{1 - \cos 4\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} + \frac{2 - 2 \cos 2\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( G_n(l) - 2G_n(l-1) + G_n(l-2) - G_n(2) + 2G_n(1) \right). \end{aligned} \quad (8.55)$$

注意到  $G_n(0) = 0$ 。令  $K_n(l) = G_n(l) - G_n(l-1)$ 。为了后面推导的方便把 (8.55) 写为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_n(l)) &= \frac{1}{4} \left( [(G_n(l) - G_n(l-1)) - (G_n(l-1) - G_n(l-2))] \right. \\ &\quad \left. - [(G_n(2) - G_n(1)) - (G_n(1) - G_n(0))] \right) \\ &= \frac{1}{4} [(K_n(l) - K_n(l-1)) - (K_n(2) - K_n(1))] \end{aligned} \quad (8.56)$$

接下来利用等式  $\sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{1-x^n}{1-x}$  展开 (8.54)

$$\begin{aligned} H_n(l) &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - e^{2il\phi_p}}{1 - e^{2i\phi_p}} \frac{1}{1 - e^{2i\phi_p}} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \left( \frac{e^{2il'\phi_p}}{1 - e^{2i\phi_p}} - \frac{1}{1 - e^{2i\phi_p}} + \frac{1}{1 - e^{2i\phi_p}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \left( \sum_{l'=2}^{l-1} \frac{e^{2il'\phi_p} - 1}{1 - e^{2i\phi_p}} - 1 \right) + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{2i\phi_p}} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} e^{2il''\phi_p} - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} 1 - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} 1 + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{2i\phi_p}}. \quad (8.57) \end{aligned}$$

为了简化最后一个等式中的三重求和, 首先对  $p$  求和

$$E_1 \equiv -\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} e^{2il''\phi_p} = -\frac{1}{n} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} \left( \frac{1 - e^{i2\pi l''}}{1 - e^{i\pi y''/n}} - 1 \right) = \frac{1}{n} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} 1,$$

最后一个等式成立, 因为  $e^{i2\pi l''} = 1$  对所有的  $l'' \in \mathbb{Z}$  都成立。

考虑到对任意的  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $\operatorname{Re}(1/(1 - e^{i\theta})) = 1/2$ . (8.57) 的第四项的实数

部分为

$$\operatorname{Re}(E_4) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} \right) = \frac{(n-1)l}{2n}.$$

所以,

$$\operatorname{Re}(H_n(l)) = \frac{l^2}{2n} - \frac{l}{n} - \frac{l}{2} + 1. \quad (8.58)$$

令  $X_n(l) = 4\operatorname{Re}(H_n(l))$ , 因为 (8.56) 和 (8.58) 的等价性, 可以推出

$$X_n(l) = (K_n(l) - K_n(l-1)) - (K_n(2) - K_n(1)).$$

通过这个递归方程可以解出

$K_n(l) = G_n(l) - G_n(l-1) = Y_n(l) + (l-1)G_n(2) - (2l-3)G_n(1)$ , 以及

$$G_n(l) = Z_n(l) + \left( \frac{l^2}{2} - \frac{l}{2} \right) G_n(2) - (l^2 - 2l) G_n(1), \quad (8.59)$$

其中

$$Y_n(l) = \sum_{j=2}^l X_n(j),$$

$$Z_n(l) = \sum_{j=2}^l Y_n(j) = \sum_{j=2}^l \sum_{k=2}^j X_n(k).$$

将 (8.58) 和以下恒等式

$$G_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos 2\phi_p}{(1 - \cos 2\phi_p)^2} = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \phi_p} = \frac{n}{6} - \frac{1}{6n}, \quad (8.60)$$

$$G_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos 4\phi_p}{(1 - \cos 2\phi_p)^2} = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\sin^2 2\phi_p}{\sin^4 \phi_p} = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2 \phi_p}{\sin^2 \phi_p} = \frac{2n}{3} - 2 + \frac{4}{3n}, \quad (8.61)$$

代入 (8.59), 最终得到  $G_n(l)$  的表达式

$$G_n(l) = \frac{l^4}{6n} - \frac{l^3}{3} + \frac{l^2 n}{6} - \frac{l^2}{3n} + \frac{l}{3}.$$

将这个值代入 (8.53) 就可以得到命题 8.17 的结果。  $\square$

接下来使用双调和距离的结果来计算其他的图指数, 对于一个  $n$  个点的环  $C_n$ , 其双调和基尔霍夫系数为

$$D_B^2(G) = \frac{1}{720}(n^5 + 10n^3 - 11n).$$

对于环中的一个点  $j$ , 它的双调和点指数和点中心性为

$$D_B^2(j) = \frac{1}{360}(n^4 + 10n^2 - 11),$$

$$C_B(j) = \frac{360n}{n^4 + 10n^2 - 11}.$$

通过应用定理 8.8、8.10 和 8.12, 以及命题 8.17, 可以得到稳态方差性能指标的闭式结果。



**定理 8.18** 在一个  $n$  个点的环形网络中, 如果系统状态满足 (8.1), 那么

$$H_{\text{So}}(j, k) = \frac{l^4}{24n} - \frac{l^3}{12} + \frac{l^2 n}{24} - \frac{l^2}{12n} + \frac{l}{12},$$

$$\text{当 } j, k \in V, \quad k \leq j \text{ 且 } j - k = l; \quad (8.62)$$

$$H_{\text{So}}(j) = \frac{1}{1440} \left( n^3 + 10n - \frac{11}{n} \right), \quad j \in V; \quad (8.63)$$

$$H_{\text{So}}(G) = \frac{1}{1440} \left( n^3 + 10n - \frac{11}{n} \right). \quad (8.64)$$

这里给出一些  $n$  个点的环中的  $H_{\text{So}}(j, k)$  的示例。比如,  $H_{\text{So}}(0, 1) = \frac{1}{24}(n - 1/n)$ . 对于偶数大小的  $n$ ,  $H_{\text{So}}(0, n/2) = \frac{1}{384}n(n^2 + 8)$ .

#### 8.4.4 路径

然后考虑  $n$  个点的路径  $P_n$ , 令它的点标号为  $0, 1, \dots, n-1$ .  $P_n$  的拉普拉斯矩阵满足以下形式:

$$\mathbf{L}_N^{\text{path}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{L}_n^{\text{path}}$  的特征值和特征向量是 [245]

$$\lambda_p = 2(1 - \cos \phi_p), \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.65)$$

$$u_{0q} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad q = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8.66)$$

$$\mathbf{u}_{p[q]} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos(q + 1/2 \phi_p),$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1, q = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8.67)$$

其中  $\phi_p = p\pi/n$ .

可以用 (8.65) - (8.67) 来确定路径中点对间的双调和距离。

**命题 8.19** 在一个  $n$  个点的路径图中, 节点  $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $k < j$  之间的

双调和距离为：

$$d_B(j, k) = \left( \frac{j}{6} + \frac{j^2}{2} - \frac{j^2}{4n} + \frac{j^3}{3} - \frac{j^3}{2n} - \frac{j^4}{4n} - \frac{k}{6} - jk + \frac{jk}{2n} + \frac{j^2k}{2n} + \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4n} - jk^2 + \frac{jk^2}{2n} + \frac{j^2k^2}{2n} + \frac{2k^3}{3} - \frac{k^3}{2n} - \frac{k^4}{4n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.68)$$

**证明：** 在这个证明中，同样用  $i$  表示虚数单位。

按照定义， $j$  和  $k$ ， $j \leq k$  之间的双调和距离为：

$$d_B^2(j, k) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{[\cos(j + \frac{1}{2})\phi_p - \cos(k + \frac{1}{2})\phi_p]^2}{2(1 - \cos \phi_p)^2} \\ = \frac{1}{2} \left( F_n(j + k + 1) + F_n(j - k) - \frac{1}{2}F_n(2j + 1) - \frac{1}{2}F_n(2k + 1) \right). \quad (8.69)$$

其中

$$F_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos l\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2}.$$

接下来，用两种方式计算以下和式的实部

$$T_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - e^{il\phi_p}}{(1 - e^{i\phi_p})^2}. \quad (8.70)$$

首先，令  $E_n(l) = F_n(l) - F_n(l - 1)$ ，可以得到

$$\operatorname{Re}(T_n(l)) = \frac{1}{4} \left( F_n(l) - 2F_n(l - 1) + F_n(l - 2) - F_n(2) + 2F_n(1) \right) \\ = \frac{1}{4} \left[ (E_n(l) - E_n(l - 1)) - (E_n(2) - E_n(1)) \right]. \quad (8.71)$$

其次，使用等式  $\sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{1-x^n}{1-x}$  可以推导出

$$T_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - e^{il\phi_p}}{1 - e^{i\phi_p}} \cdot \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \left( \frac{e^{il'\phi_p}}{1 - e^{i\phi_p}} - \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} + \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} \right) \\ = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \left( \sum_{l'=2}^{l-1} \frac{e^{il'\phi_p} - 1}{1 - e^{i\phi_p}} - 1 \right) + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} \\ = -\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} e^{il''\phi_p} - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} 1 - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} 1 + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}}. \quad (8.72)$$

再次交换  $n$ 、 $l'$  和  $l''$  的求和顺序以简化 (8.72) 的第一项。

$$E'_1 \equiv -\frac{1}{N} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} e^{il''\phi_p} = -\frac{1}{n} \sum_{l'=2}^{l-1} \sum_{l''=1}^{l'-1} \left[ \frac{1 - (-1)^{l''}}{1 - e^{i\pi y''/n}} - 1 \right].$$

$E'_1$  的实部和 (8.72) 中的第四项 (记为  $E'_4$ ) 分别为:

$$\operatorname{Re}(E'_1) = \frac{1}{8n} [2l^2 - 8l + 7 + (-1)^l],$$

$$\operatorname{Re}(E'_4) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l'=0}^{l-1} \frac{1}{1 - e^{i\phi_p}} \right) = \frac{(n-1)l}{2n}.$$

因此

$$\operatorname{Re}(T_n(l)) = \frac{-4n(l-2) + 2l^2 - 4l + (-1)^l - 1}{8n}. \quad (8.73)$$

由 (8.71) 和 (8.73) 相等, 可以推出

$$F_n(l) = \sum_{i=2}^l \sum_{j=2}^i 4\operatorname{Re}(T_n(l)) + \left( \frac{l^2}{2} - \frac{l}{2} \right) F_n(2) - (l^2 - 2l) F_n(1). \quad (8.74)$$

接下来计算  $F_n(1)$  和  $F_n(2)$

$$F_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos \phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(\phi_p/2)}, \quad (8.75)$$

$$F_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1 - \cos 2\phi_p}{(1 - \cos \phi_p)^2} = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2(\phi_p/2)}{\sin^2(\phi_p/2)}. \quad (8.76)$$

为了计算  $F_n(1)$ , 首先展开表达式  $\sum_{p=1}^{2n-1} 1/(\sin^2 \frac{p\pi}{2n})$ 。因为  $\sum_{p=1}^{n-1} 1/(\sin^2 \frac{p\pi}{n}) = \frac{n^2}{3} - \frac{1}{3}$ , 可以推出

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} &= \frac{4n^2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n}} \\ &\quad + \frac{1}{\sin^2 \frac{(n+1)\pi}{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{(2n-2)\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

因为对  $0 \leq x \leq 2\pi$  有  $\sin x = \sin(\pi - x)$ , 又因为  $1/(\sin^2 \frac{N\pi}{2N}) = 1$ , 所以

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} = 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} + 1.$$

因此可以得到以下等式

$$F_n(1) = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} = \frac{n}{3} - \frac{1}{3n}. \quad (8.77)$$

类似地, 可以利用  $\cos^2 \frac{N\pi}{2N} = 0$  展开  $F_n(2)$ :

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} + \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n}} + \sum_{p=n+1}^{2n-1} \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} = 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}}.$$

因为  $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2 \phi_p}{\sin^2 \phi_p} = \frac{n^2}{3} - n + \frac{2}{3}$ , 可以推出  $\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n}} = \frac{4n^2}{3} - 2n + \frac{2}{3}$ . 可以进一步得到以下等式

$$F_n(2) = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos^2(\phi_p/2)}{\sin^2(\phi_p/2)} = \frac{4n}{3} - 2 + \frac{2}{3n}. \quad (8.78)$$

把 (8.77)、(8.78) 和 (8.73) 代入 (8.74), 可以推出以下  $F_n(l)$  的表达式

$$F_n(l) = \frac{l^4}{12n} - \frac{l^3}{3} + \frac{l^2 n}{3} - \frac{l^2}{6n} + \frac{(-1)^l}{8n} + \frac{l}{3} - \frac{1}{8n}.$$

将  $F_n(l)$  的结果代入 (8.69) 中, 可以得到命题 8.19 中的结果。□

接下来用命题 8.19 的结果推导  $n$  个点的路径图的双调和基尔霍夫系数,

$$D_B^2(G) = \frac{1}{180}(2n^5 + 5n^3 - 7n).$$

除此之外, 还对节点  $j$  给出其基于双调和距离的点指数和点中心性的结果

$$D_B^2(j) = \frac{1}{30}(n^4 - 10j(j+1)n^2 + 10j(2j+1)(j+1)n - 10j^2(j+1)^2 - 1),$$

$$C_B(j) = \frac{30n}{n^4 - 10j(j+1)n^2 + 10j(2j+1)(j+1)n - 10j^2(j+1)^2 - 1}.$$

最后, 以下定理给出了  $P_n$  中稳态方差的性能指标。这个定理的结果可以直接由命题 8.19 和定理 8.8、8.10、8.12 得到。

**定理 8.20** 令  $G = (V, E)$  是一个  $n$  个点的路径, 点集  $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 。系统

满足状态方程 (8.1)。令  $j, k \in V$ ,  $k < j$ , 那么

$$H_{\text{SO}}(j, k) = \frac{1}{2} \left( \frac{j}{6} + \frac{j^2}{2} - \frac{j^2}{4n} + \frac{j^3}{3} - \frac{j^3}{2n} - \frac{j^4}{4n} - \frac{k}{6} - jk + \frac{jk}{2n} + \frac{j^2k}{2n} + \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4n} - jk^2 + \frac{jk^2}{2n} + \frac{j^2k^2}{2n} + \frac{2k^3}{3} - \frac{k^3}{2n} - \frac{k^4}{4n} \right), \quad (8.79)$$

$$H_{\text{SO}}(j) = \frac{1}{360n} (4n^4 - (60j^2 + 60j + 5)n^2 + 60j(2j + 1)(j + 1)n - 60j^2(j + 1)^2 + 1) \quad (8.80)$$

$$H_{\text{SO}}(G) = \frac{1}{360n} (2n^4 + 5n^2 - 7). \quad (8.81)$$

这里给出  $n$  个点的路径  $P_n$  的  $H_{\text{SO}}(j, k)$  和  $H_{\text{SO}}(j)$  的示例。比如,  $H_{\text{SO}}(0, n-1) = \frac{1}{24}n(n^2 - 1)$ ,  $H_{\text{SO}}(0) = \frac{1}{90}n(n^2 - 5/4) + \frac{1}{360n}$ . 对于偶数  $n$ ,  $H_{\text{SO}}(n/2, n-1) = \frac{5}{384}n(n - 2/5)(n - 2)$ ,  $H_{\text{SO}}(n/2) = \frac{1}{1440}n(n^2 + 40) + \frac{1}{360n}$ .

## 8.5 与一阶共识网络抗噪性的比较

考虑带噪声的一阶一致性系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t),$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  代表所有节点的状态,  $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$  代表一系列互相独立的高斯白噪声过程。系统的稳态总方差为  $H_{\text{FO}}(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_{[j]}(t) - \bar{x}(t))^2]$ , 其中  $\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}(t)$ .

系统的总的稳态方差  $H_{\text{FO}}$  能够用图上的距离度量定义, 在这种情况下可以用电阻距离 (等效电阻) 描述。相关概念已在第 2 章中介绍。已知基尔霍夫系数和一阶一致性系统的稳态总方差有以下关系 [64, 65]:

$$H_{\text{FO}}(G) = \frac{1}{2n^2} R(G).$$

如表 4.1 所示, 一些网络结构的  $H_{\text{FO}}(G)$  的渐近行为已经被研究过。表 8.1 给出了一阶和二阶系统稳态总方差的渐近行为的比较。可以看出在完全图这种稠密的结构中, 一阶系统的方差大于二阶系统。在环和路径中, 一阶系统的方差小于二阶系统。而在星状图中一阶系统和二阶系统的方差大小相近。对此的直观理解是对比点对在双调和距离的图嵌入和等效电阻平方根的图嵌入中的距离。在连通性很好的图中前者更小, 而在连通性不好的图中后者更小。

表 8.1:  $n$  个点的一阶和二阶一致性系统的稳态总方差的渐近行为.

图结构	$H_{FO}(G)$	$H_{SO}(G)$
完全图	$\Theta(1/n)$	$\Theta(1/n^2)$
星状图	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
环	$\Theta(n)$	$\Theta(n^3)$
路径	$\Theta(n)$	$\Theta(n^3)$

## 8.6 本章小结

本章研究了噪声对二阶一致性过程的影响。本章提出了三种不同的性能度量，作为二阶一致性网络抗噪性的指标。这三种性能分别是：点对稳态方差、节点状态稳态方差和平均稳态方差。本章建立了二阶网络抗噪性指标与图上双调和距离之间的关系。双调和距离可以作为二阶网络抗噪性的直接度量；同时还定义了基于双调和距离的基尔霍夫系数和节点中心性；最后推导了完全图、星状图、环和路径的双调和距离和中心性指标，以及所有的二阶抗噪性指标。本章还比较了一阶和二阶一致性系统中的抗噪性的渐近行为。本章的研究建立起了二阶网络抗噪性与图上结构指标的直接关系，为从图论角度理解和分析二阶一致性算法性能提供了工具。这些解析结果和渐近行为分析有助于理解常见网络结构中的二阶一致性系统的抗噪性。

## 第九章 总结与展望

本文研究了带噪声的复杂网络中的一致性问题的，研究了各种不同的平均一致性算法在外加噪声影响下的表现，特别关注了网络结构对一致性算法鲁棒性的影响。本文研究了一致性网络的相关稳态性能指标的分析、评估、计算和优化，得到了一系列的研究成果。本章主要对全文的内容进行总结，并展望未来的研究方向。

### 9.1 全文总结

在网络控制系统中常常需要对网络状态量进行分布式的估计和控制。平均一致性算法是相关系统中节点达成共识的一种重要的方式。因此一致性过程是复杂网络中研究最多、应用最广的动力学过程之一。本文研究了噪声对几种常见的一致性过程的影响，研究了相关稳态性能指标的评估、复杂网络结构特性对指标的影响、噪声大小对整体性能的影响、一致性网络中的最优领导者选择问题、网络结构优化问题和二阶共识网络与图结构的关联。具体总结如下：

(1) 揭示了小世界和无标度特性对网络抗噪性的影响。研究了两种确定性复杂网络模型中受噪声干扰时，一阶一致性算法的抗噪性。这两种复杂网络模型分别是法雷网络和科赫网络，它们分别是小世界、度分布为指数分布和小世界、度分布为幂律分布的复杂网络模型的代表。本文给出了这两种复杂网络模型的抗噪性的精确解和渐近行为，并与规则格点网络的两种指标进行了比较。结果显示，法雷网络和科赫网络都具有  $\Theta(\log n)$  的一阶网络抗噪性，而用于比较的规则格点网络具有  $\Theta(n)$  的一阶网络抗噪性。对比分析揭示了小世界和无标度特性对网络抗噪性的显著影响。

(2) 发现富环的无标度网络具有几乎最优的一阶网络抗噪性。本文论证了富环的无标度网络对一致性网络中的噪声具有很强的抵抗性。首先给出了系统抗噪性的上界和下界，其中，下界由网络的平均度给出；上界由网络的平均距离给出。然后通过对现实网络进行实证研究，发现现实无标度网络都具有接近下界的抗噪性。接着，模拟了随机无标度网络模型的抗噪性，并分析了两个富环的确定性无标度网络模型的抗噪性的渐近行为。结果表明，一阶一致性算法在富环的无标度网络中对噪声具有很强的抵抗性。确切地，在大规模富环无标度网络中，一阶一致性算法的期望平均稳态方差收敛到一个常数，不会随网络变大不断增长。这也是稀疏网络的抗噪性下界所决定的几乎最优的渐近行为。

(3) 量化了基于相对状态测量的一致性系统中某条边的误差改变对系统稳态方差的影响。本文用系统稳态方差随白噪声功率谱密度改变的变化率衡量一个测量的重要性。这样定义的边中心性等价于在图中通过一条边的电阻变化引起的基尔霍夫系数的变化率。对于图中所有的边, 本文用图上的双调和距离给出了该中心性的显示表达式, 并且因此称之为双调和距离相关中心性 (BDRC)。通过实验发现 BDRC 对网络中的边有很好的区分能力。为了在大规模网络上计算这个量, 本文还给出了近似计算 BDRC 的几乎线性时间算法。对于任意给定的精度  $\epsilon$ , 算法都可以 (以高概率) 返回相关指标的  $(1 \pm \epsilon)$  近似。算法的运行时间为  $\tilde{O}(m\epsilon^{-2})$ 。本文使用大量真实网络数据验证了算法的效率和准确性。实际上, 类似的快速算法容易扩展到计算二阶网络抗噪性等相关问题中。

(4) 建立了带噪声领导者选择问题到一个图结构优化问题的联系。任何一个带噪声的领导者选择问题都可以转化为在一个增广图上加关联边最小化虚拟节点到其他所有节点的电阻距离的问题。本文证明了该问题的目标函数的超模性, 并据此给出了贪心算法的近似比为  $(1 - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{\epsilon})$ 。同时, 由于问题的等价性, 还将算法用于加关联边最大化给定点的信息中心性。本文基于贪心策略给出了最大化信息中心性的两种算法。精的贪心算法的时间复杂度为  $O(n^3)$ , 近似比为  $(1 - \frac{1}{\epsilon})$ 。快速贪心算法的时间复杂度为  $\tilde{O}(km\epsilon^{-2})$ , (高概率) 近似比为  $(1 - \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)$ 。本文在大量真实网络中检验了算法的效果和效率。实验表明两种算法都能得到非常接近最优值的结果, 而且快速算法在运行时间上有巨大的优势, 可以在大规模网络上解决这类带噪声领导者选择问题或者最大化给定节点信息中心性的问题。本文提出的算法对加速类似优化问题的算法有一定的借鉴意义。

(5) 证明了加边最小化网络熵的近似困难性。在带噪声的一致性网络中, 网络熵可以描述一致性算法的稳态不确定体积的大小。证明了存在一个常数  $c$ , 使得通过加边最小化网络熵到最优解的  $(1 - c)$  倍以内是 **NP**-困难的。网络熵和加权生成树数目具有直接的联系。证明方法是将距离为 1 和 2 的旅行商问题规约到最小路径覆盖问题, 然后规约到加边最大化生成树数目问题。本文证明了以最小化网络熵为目标的一致性结构优化问题的近似困难性, 同时也证明了加边最大化生成树数目的指数近似困难性。除此之外, 这个近似困难性的证明对证明图上的其他结构设计问题的困难性可能有启发作用。

(6) 建立了带噪声网络中二阶一致性算法的稳态性能的衡量标准和分析框架。本文提出了描述带噪声网络中一致性算法的稳态性能的一组指标, 包括稳态的点对方差、节点偏移方差和系统总方差, 并称这一组指标为二阶一致性系统的



抗噪性指标。通过本文的研究发现二阶共识网络中的抗噪性指标可以用网络节点间的双调和距离及基于双调和距离的指标表示，据此给出了这些指标关于网络拉普拉斯矩阵的精确表达式，计算了一些常见网络上的二阶抗噪性，并与带噪声的一阶一致性算法的抗噪性结果进行了比较。这项作为理解网络结构如何影响网络中的二阶一致性算法的稳态性能提供了理论分析的框架。

## 9.2 未来工作展望

本文的工作处在网络控制分析和优化研究的前沿，从不同角度研究了网络结构对带噪声一致性过程的影响，以及相关的计算、优化问题。当前，关于一致性算法的研究仍然非常活跃，本节将展望一些重要的研究方向。

**网络设计的近似算法和复杂性分析：**本文已经研究了一些一致性网络性能优化的问题，包括通过选择领导者优化系统稳态方差的算法，以及通过加边优化网络熵的近似困难性。在一致性系统优化中，还有一些相关问题没有得到很好的解决，或者算法复杂度还有很大的提高空间。本文中用于加速算法的一些技巧可以应用于一些相关问题，得到更快的算法。同时还希望利用快速次模算法进一步提高优化算法的效率。复杂性方面，本文第 6 章中研究的带噪声的领导者选择问题的困难性还没有得到完整的证明。当然，相关研究还有一些更具有挑战性的问题。比如，在基数限制条件下，通过加边优化一阶网络的抗噪性不是超模的，目前还不知道这一问题在不附加额外条件时的有效的近似算法，也没有其近似困难性的结果。

**二阶领导者选择问题与图结构的关系：**本文建立了二阶一致性算法的抗噪性与双调和距离之间的联系，但二阶的情形比一阶更为复杂，这样的联系无法直接应用到二阶领导者-跟随者系统中。因此如何用图的性质表达二阶领导者-跟随者系统的性能还是一个尚未解决的问题。如果可以建立这种转化关系，可能会对理解领导者-跟随者系统中的二阶一致性行为有所帮助，还可以进一步启发相关系统中的领导者选择算法的设计。

**有向网络上带噪声的一致性问题：**有向网络上的一致性问题的收敛性已经得到了很好的研究，目前有一些工作探讨了带噪声的有向网络上的一致性问题，但相关工作要么局限于拉普拉斯矩阵为正规矩阵的情形，要么其给出的性能指标尚且无法和图结构性质建立等价关系，这使得相比无向网络，分析和优化有向网络上一致性算法的性能更加困难。显然，如何建立有向网络一致性指标与图结构的联系是一个值得进一步研究的方向。

**本文研究内容在相关领域的应用：**本文研究使用的方法实际上可以扩展到很多相关领域的研究中。比如可以用于研究网络控制系统的可控性和平均控制能量等问题。已有的工作表明，信息中心性等指标在这些问题的分析中仍然具有重要的含义。又比如结构化的噪声输入对系统性能的影响可以用于定义更多的点和边的中心性指标，而中心性在更广泛的网络分析如社交网络分析中具有很多应用。

**更复杂的一致性动力学过程分析：**在很多应用中，比如在分布式优化和分布式学习中，每一个节点本身有更为复杂的动力学行为，而一致性算法作为分布式优化算法的一个组成部分，起到协调节点间状态的作用。在一些已有的工作中，可以看到一致性过程对一些分布式优化、学习算法的收敛速度和长期行为会产生重要的影响。如何进一步研究这种影响，以及挖掘这种影响与通信图拓扑结构的关联是一项有趣而富有挑战性的工作。

## 参考文献

- [1] Strogatz S H. Exploring complex networks[J]. Nature, 2001, 410(6825): 268–276.
- [2] Albert R, Barabási A-L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74(1): 47.
- [3] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics[J]. Physics Reports, 2006, 424(4): 175–308.
- [4] Börner K, Sanyal S, Vespignani A. Network science[J]. Annual Review of Information Science and Technology, 2007, 41(1): 537–607.
- [5] Newman M. Networks: An introduction[M]. [S.l.]: Oxford university press, 2010.
- [6] Chen G, Wang X, Li X. Fundamentals of complex networks: Models, structures and dynamics[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.
- [7] Barabási A-L. Network science[M]. [S.l.]: Cambridge university press, 2016.
- [8] Barabási A-L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509–512.
- [9] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440–442.
- [10] Maslov S. Complex networks: Role model for modules[J]. Nature Physics, 2007, 3(1): 18–19.
- [11] Tsitsiklis J N. Problems in decentralized decision making and computation[D]. [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [12] Bertsekas D P, Tsitsiklis J N. Parallel and distributed computation: numerical methods: Vol 23[M]. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [13] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215–233.
- [14] Lynch N A. Distributed algorithms[M]. [S.l.]: San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1996.
- [15] Fischer M J, Lynch N A, Paterson M. Impossibility of distributed consensus with one faulty process[J]. Journal of the ACM, 1985, 32(2): 374–382.
- [16] Lamport L. The part-time parliament[J]. ACM Transactions on Computer Systems, 1998, 16(2): 133–169.

- [17] Patterson S. Design and analysis of algorithms for large-scale distributed systems: A control theoretic approach[D]. [S.l.] : University of California, Santa Barbara, 2009.
- [18] Olshevsky A. Efficient information aggregation strategies for distributed control and signal processing[D]. [S.l.] : Massachusetts Institute of Technology, 2010.
- [19] Young G F. Optimising robustness of consensus to noise on directed networks[D]. [S.l.] : Princeton University, 2014.
- [20] Fitch K. Optimal leader selection in multi-agent networks: Joint centrality, robustness and controllability[D]. [S.l.] : Princeton University, 2016.
- [21] Parada Contzen M. Consensus in multiagent systems[D]. [S.l.] : Technical University of Berlin, 2017.
- [22] Elson J, Girod L, Estrin D. Fine-grained network time synchronization using reference broadcasts[C] // Proceedings of the 5th Symposium on Operating System Design and Implementation (OSDI). 2002 : 147 – 163.
- [23] Sivrikaya F, Yener B. Time synchronization in sensor networks: a survey[J]. IEEE Network, 2004, 18(4) : 45 – 50.
- [24] Sun W, Ström E G, Brännström F, et al. Random broadcast based distributed consensus clock synchronization for mobile networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(6) : 3378 – 3389.
- [25] Cybenko G. Dynamic load balancing for distributed memory multiprocessors[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 1989, 7(2) : 279 – 301.
- [26] Diekmann R, Frommer A, Monien B. Efficient schemes for nearest neighbor load balancing[J]. Parallel Computing, 1999, 25(7) : 789 – 812.
- [27] Amelina N, Fradkov A, Jiang Y, et al. Approximate consensus in stochastic networks with application to load balancing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(4) : 1739 – 1752.
- [28] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9) : 1465 – 1476.
- [29] Calafiore G C, Abrate F. Distributed linear estimation over sensor networks[J]. International Journal of Control, 2009, 82(5) : 868 – 882.
- [30] Sayed A H. Adaptation, learning, and optimization over networks[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2014, 7(4-5) : 311 – 801.
- [31] Matta V, Braca P, Marano S, et al. Diffusion-based adaptive distributed detection: Steady-state performance in the slow adaptation regime[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(8) : 4710 – 4732.

- [32] Biau G, Bleakley K, Cadre B. The statistical performance of collaborative inference[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2016, 17(1): 2200–2228.
- [33] Nedic A, Olshevsky A, Rabbat M G. Network topology and communication-computation tradeoffs in decentralized optimization[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2018, 106(5): 953–976.
- [34] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118–121.
- [35] Stephenson K, Zelen M. Rethinking centrality: Methods and examples[J]. *Social Networks*, 1989, 11(1): 1–37.
- [36] Chung F R. Spectral graph theory: Vol 92[M]. [S.l.]: American Mathematical Society, 1997.
- [37] Fitch K, Leonard N E. Information centrality and optimal leader selection in noisy networks[C] // *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2013: 7510–7515.
- [38] Fitch K, Leonard N. Joint centrality distinguishes optimal leaders in noisy networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2016, 3(4): 366–378.
- [39] Ghosh A, Boyd S. Growing well-connected graphs[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2006: 6605–6611.
- [40] Siami M, Motee N. Schur-convex robustness measures in dynamical networks[C] // *Proceedings of the 2014 American Control Conference (ACC)*. 2014: 5198–5203.
- [41] Khosoussi K, Sukhatme G S, Huang S, et al. Maximizing the weighted number of spanning trees: Near- $t$ -optimal graphs[J]. *arXiv preprint arXiv: 1604.01116*, 2016.
- [42] Chatterjee S, Seneta E. Towards consensus: Some convergence theorems on repeated averaging[J]. *Journal of Applied Probability*, 1977, 14(1): 89–97.
- [43] Tsitsiklis J, Bertsekas D, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803–812.
- [44] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model[C] // *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*. 1987: 25–34.
- [45] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226.

- [46] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [47] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [48] Xiao L, Boyd S P, Lall S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus[C] // Proceedings of the 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks (IPSN). 2005: 63 – 70.
- [49] Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 169 – 182.
- [50] Matei I, Baras J S, Somarakis C. Convergence results for the linear consensus problem under markovian random graphs[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(2): 1574 – 1591.
- [51] Mousavi H K, Somarakis C, Bahavarnia M, et al. Performance bounds and optimal design of randomly switching linear consensus networks[C] // 2017 Proceedings of the 2017 American Control Conference (ACC). 2017: 4347 – 4352.
- [52] Zhou J, Wang Q. Convergence speed in distributed consensus over dynamically switching random networks[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1455 – 1461.
- [53] Abaid N, Igel I, Porfiri M. On the consensus protocol of conspecific agents[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(1): 221 – 235.
- [54] Patterson S, Bamieh B, El Abbadi A. Convergence rates of distributed average consensus with stochastic link failures[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 880 – 892.
- [55] Das A, Yi Y, Patterson S, et al. Convergence rate of consensus in a network of networks[C] // Proceedings of the 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2018: \*\*\*\* – \*\*\*\*.
- [56] Dullerud G E, Paganini F. A course in robust control theory: a convex approach: Vol 36[M]. [S.l.]: Springer, 2013.
- [57] Lin P, Jia Y, Li L. Distributed robust  $\langle_{\infty}$  consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(8): 643 – 653.
- [58] Wang J, Elia N. Consensus over networks with dynamic channels[C] // Proceedings of the 2008 American Control Conference (ACC). 2008: 2637 – 2642.
- [59] Wang J, Tan Y, Mareels I. Robustness analysis of leader-follower consensus[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2009, 22(2): 186 – 206.

- [60] Young G F, Scardovi L, Leonard N E. A new notion of effective resistance for directed graphs—part I: Definition and properties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(7): 1727–1736.
- [61] Xiao L, Boyd S, Kim S-J. Distributed average consensus with least-mean-square deviation[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2007, 67(1): 33–46.
- [62] Bamieh B, Jovanovic R M, Mitra P, et al. Effect of topological dimension on rigidity of vehicle formations: Fundamental limitations of local feedback[C] // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2008: 369–374.
- [63] Patterson S, Bamieh B. Leader selection for optimal network coherence[C] // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2010: 2692–2697.
- [64] Young G F, Scardovi L, Leonard N E. Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication[C] // Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC). 2010: 6312–6317.
- [65] Bamieh B, Jovanovic R M, Mitra P, et al. Coherence in large-scale networks: Dimension-dependent limitations of local feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(9): 2235–2249.
- [66] Korniss G. Synchronization in weighted uncorrelated complex networks in a noisy environment: Optimization and connections with transport efficiency[J]. Physical Review E, 2007, 75: 051121.
- [67] Patterson S, Bamieh B. Consensus and coherence in fractal networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2014, 1(4): 338–348.
- [68] de Badyn M H, Chapman A, Mesbahi M. Network entropy: A system-theoretic perspective[C] // Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2015: 5512–5517.
- [69] Ghosh A, Boyd S, Saberi A. Minimizing effective resistance of a graph[J]. SIAM Review, 2008, 50(1): 37–66.
- [70] Dai R, Mesbahi M. Optimal topology design for dynamic networks[C] // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). 2011: 1280–1285.
- [71] Lin F, Fardad M, Jovanović M R. Identification of sparse communication graphs in consensus networks[C] // Proceedings of the 50th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2012: 85–89.
- [72] Wu X, Jovanovic M R. Sparsity-promoting optimal control of consensus and synchronization networks[C] // Proceedings of the 2014 American Control Conference (ACC). 2014: 2936–2941.

- [73] Summers T, Shames I, Lygeros J, et al. Topology design for optimal network coherence[C] // Proceedings of the 2015 European Control Conference (ECC). 2015 : 575 – 580.
- [74] Olshevsky A. On (non)supermodularity of average control energy[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2017, 5(3) : 1177 – 1181.
- [75] Summers T, Kamgarpour M. Performance guarantees for greedy maximization of non-submodular set functions in systems and control[J]. arXiv preprint arXiv:1712.04122, 2017.
- [76] Jadbabaie A, Olshevsky A, Pappas G J, et al. Minimal reachability is hard to approximate[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018.
- [77] Clark A, Poovendran R. A submodular optimization framework for leader selection in linear multi-agent systems[C] // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). 2011 : 3614 – 3621.
- [78] Clark A, Bushnell L, Poovendran R. A supermodular optimization framework for leader selection under link noise in linear multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2) : 283 – 296.
- [79] Clark A, Alomair B, Bushnell L, et al. Minimizing convergence error in multi-agent systems via leader selection: A supermodular optimization approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6) : 1480 – 1494.
- [80] Lin F, Fardad M, Jovanovic M. Algorithms for leader selection in stochastically forced consensus networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(7) : 1789 – 1802.
- [81] Patterson S. In-network leader selection for acyclic graphs[C] // Proceedings of the 2015 American Control Conference (ACC). 2015 : 329 – 334.
- [82] Lin F. Performance of leader-follower multi-agent systems in directed networks[J]. Systems & Control Letters, 2018, 113(3) : 52 – 58.
- [83] Patterson S, McGlohon N, Dyagilev K. Optimal k-leader selection for coherence and convergence rate in one-dimensional networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2017, 4(3) : 523 – 532.
- [84] Barooah P, Hespanha J. Graph effective resistance and distributed control: Spectral properties and applications[C] // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2006 : 3479 – 3485.
- [85] Vassio L, Fagnani F, Frasca P, et al. Message passing optimization of harmonic influence centrality[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2014, 1(1) : 109 – 120.



- [86] Barooah P, Hespanha J. Error scaling laws for linear optimal estimation from relative measurements[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(12): 5661 – 5673.
- [87] Fitch K, Leonard N. Optimal leader selection for controllability and robustness in multi-agent networks[C] // Proceedings of the 2016 European Control Conference (ECC). 2016.
- [88] Lin F, Fardad M, Jovanović M R. Algorithms for leader selection in large dynamical networks: Noise-corrupted leaders[C] // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). 2011 : 2932 – 2937.
- [89] Gilbert J R, Miller G L, Teng S. Geometric mesh partitioning: Implementation and experiments[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 19(6): 2091 – 2110.
- [90] Karypis G, Kumar V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 359 – 392.
- [91] Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888 – 905.
- [92] Ng A Y, Jordan M I, Weiss Y. On spectral clustering: Analysis and an algorithm[C] // Advances in Neural Information Processing Systems 14: Neural Information Processing Systems (NIPS). 2001 : 849 – 856.
- [93] Spielman D A, Teng S. Nearly linear time algorithms for preconditioning and solving symmetric, diagonally dominant linear systems[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis Applications, 2014, 35(3): 835 – 885.
- [94] Cohen M B, Kyng R, Miller G L, et al. Solving sdd linear systems in nearly  $m \log 1/2n$  time[C] // Proceedings of the 46th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). 2014 : 343 – 352.
- [95] Kyng R, Sachdeva S. Approximate gaussian elimination for laplacians - fast, sparse, and simple[C] // Proceedings of the IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2016 : 573 – 582.
- [96] Xiao L, Boyd S P, Lall S. A space-time diffusion scheme for peer-to-peer least-squares estimation[C] // Proceedings of the 5th International Conference on Information Processing in Sensor Networks (IPSN). 2006 : 168 – 176.
- [97] Carli R, Chiuso A, Schenato L, et al. Distributed kalman filtering based on consensus strategies[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2008, 26(4): 622 – 633.

- [98] Schwager M, Slotine J-J, Rus D. Consensus learning for distributed coverage control[C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2008 : 1042 – 1048.
- [99] Soltero D E, Schwager M, Rus D. Decentralized path planning for coverage tasks using gradient descent adaptive control[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 33(3) : 401 – 425.
- [100] Ren W, Atkins E. Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions[C] // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. 2005 : 15 – 18.
- [101] Choi H, Brunet L, How J P. Consensus-based decentralized auctions for robust task allocation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(4) : 912 – 926.
- [102] Carli R, Zampieri S. Network clock synchronization based on the second-order linear consensus algorithm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2) : 409 – 422.
- [103] Simpson-Porco J W, Shafiee Q, Dörfler F, et al. Secondary frequency and voltage control of islanded microgrids via distributed averaging[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(11) : 7025 – 7038.
- [104] Andreasson M, Dimarogonas D V, Sandberg H, et al. Distributed controllers for multiterminal HVDC transmission systems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2017, 4(3) : 564 – 574.
- [105] Zhang S, Choromanska A, LeCun Y. Deep learning with elastic averaging SGD[C] // Advances in Neural Information Processing Systems 28: Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS). 2015 : 685 – 693.
- [106] Acemoglu D, Ozdaglar A. Opinion dynamics and learning in social networks[J]. Dynamic Games and Applications, 2011, 1(1) : 3 – 49.
- [107] Acemoglu D, Ozdaglar A, ParandehGheibi A. Spread of (mis) information in social networks[J]. Games and Economic Behavior, 2010, 70(2) : 194 – 227.
- [108] Budak C, Agrawal D, El Abbadi A. Limiting the spread of misinformation in social networks[C] // Proceedings of the 20th International Conference on World Wide Web (WWW). 2011 : 665 – 674.
- [109] Klein D J, Randić M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12(1) : 81 – 95.
- [110] Kirchhoff G. Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird[J]. Annalen der Physik und Chemie, 1847, 72 : 497 – 508.
- [111] Brandes U, Fleischer D. Centrality measures based on current flow[C] // Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS) : Vol 3404. 2005 : 533 – 544.

- [112] Lipman Y, Rustamov R M, Funkhouser T A. Biharmonic distance[J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 29(3): 27.
- [113] Patanè G. An Introduction to Laplacian Spectral Distances and Kernels: Theory, Computation, and Applications[M]. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2017.
- [114] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications[M]. [S.l.]: Wiley, 1974.
- [115] Gardiner C. Stochastic methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences: Vol 4[M]. [S.l.]: springer Berlin, 2009.
- [116] Poulakakis I, Scardovi L, Leonard N E. Coupled stochastic differential equations and collective decision making in the two-alternative forced-choice task[C] // Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC). 2010: 69–74.
- [117] Patterson S, Bamieh B. Network coherence in fractal graphs[C] // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2011: 6445–6450.
- [118] Newman M E J. The structure and function of complex networks[J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167–256.
- [119] Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. Physics Letters A, 1999, 263(4): 341–346.
- [120] Kleinberg J M. Navigation in a small world[J]. Nature, 2000, 406(6798): 845–845.
- [121] Kleinberg J M. The small-world phenomenon: an algorithm perspective[C] // Proceedings of the 32nd annual ACM symposium on Theory of computing (STOC). 2000: 163–170.
- [122] Wang X, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(1): 187–192.
- [123] Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems[J]. Physics Review Letters, 2002, 89(5): 054101.
- [124] Olfati-Saber R. Ultrafast consensus in small-world networks[C] // Proceedings of the 2005 American Control Conference (ACC). 2005: 2371–2378.
- [125] Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. Small world phenomenon, rapidly mixing Markov chains, and average consensus algorithms[C] // Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2007: 276–281.
- [126] Chung F, Lu L. The average distances in random graphs with given expected degrees[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., 2002, 99(25): 15879–15882.
- [127] Zhang Z, Wu B, Comellas F. The number of spanning trees in Apollonian networks[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 169(0): 206–213.

- [128] Zhang Z, Wu B. Pfaffian orientations and perfect matchings of scale-free networks[J]. Theoretical Computer Science, 2015, 570 : 55 – 69.
- [129] Albert R, Jeong H, Barabási A-L. Error and attack tolerance of complex networks[J]. Nature, 2000, 406(6794) : 378 – 382.
- [130] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14) : 3200.
- [131] Santos F C, Santos M D, Pacheco J M. Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games[J]. Nature, 2008, 454(7201) : 213 – 216.
- [132] Colbourn C J. Farey series and maximal outerplanar graphs[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1982, 3(2) : 187 – 189.
- [133] Zhang Z, Comellas F. Farey graphs as models for complex networks[J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(8) : 865 – 875.
- [134] Zhang Z, Zhou S, Xie W, et al. Standard random walks and trapping on the Koch network with scale-free behavior and small-world effect[J]. Physical Review E, 2009, 79(6) : 061113.
- [135] Yi Y, Zhang Z, Lin Y, et al. Small-world topology can significantly improve the performance of noisy consensus in a complex network[J]. Computer Journal, 2015, 58(12) : 3242 – 3254.
- [136] Zhang Z, Wu B, Lin Y. Counting spanning trees in a small-world Farey graph[J]. Physica A, 2012, 391(11) : 3342 – 3349.
- [137] Krattenthaler C, Srivastava H M. Summations for basic hypergeometric series involving a  $q$ -analogue of the digamma function[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1996, 32(3) : 73 – 91.
- [138] Yi Y, Zhang Z, Shan L, et al. Robustness of first-and second-order consensus algorithms for a noisy scale-free small-world koch network[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 25(1) : 342 – 350.
- [139] Kalman D, White J E. Polynomial equations and circulant matrices[J]. The American Mathematical Monthly, 2001, 108(9) : 821 – 840.
- [140] Rajagopal R, Wainwright M J. Network-based consensus averaging with general noisy channels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(1) : 373 – 385.
- [141] Yang Y, Blum R S. Broadcast-based consensus with non-zero-mean stochastic perturbations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(6) : 3971 – 3989.
- [142] He J, Zhou M, Cheng P, et al. Consensus under bounded noise in discrete network systems: An algorithm with fast convergence and high accuracy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(12) : 2874 – 2884.

- [143] Rozenfeld H D, Kirk J E, Boltt E M, et al. Statistics of cycles: how loopy is your network?[J]. *Journal of Physics A*, 2005, 38(21): 4589.
- [144] Klemm K, Stadler P F. Statistics of cycles in large networks[J]. *Physical Review E*, 2006, 73(2): 025101.
- [145] Jin Y, Li H, Zhang Z. Maximum matchings and minimum dominating sets in Apollonian networks and extended Tower of Hanoi graphs[J]. *Theoretical Computer Science*, 2017, 703: 37–54.
- [146] Liu Y-Y, Slotine J-J, Barabási A-L. Controllability of complex networks[J]. *Nature*, 2011, 473(7346): 167–173.
- [147] Zelazo D, Schuler S, Allgöwer F. Performance and design of cycles in consensus networks[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(1): 85–96.
- [148] Lovisari E, Zampieri S. Performance metrics in the consensus problem: a survey[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2010, 43(21): 324–335.
- [149] Zhou T, Yan G, Wang B-H. Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution[J]. *Physical Review E*, 2005, 71(4): 046141.
- [150] Zhang Z, Rong L, Comellas F. High-dimensional random Apollonian networks[J]. *Physica A*, 2006, 364: 610–618.
- [151] Merris R. Laplacian matrices of graphs: a survey[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1994, 197: 143–176.
- [152] Kunegis J. Konect: The koblenz network collection[C] // *Proceedings of the 22nd International Conference on World Wide Web Companion (WWW Companion)*. 2013: 1343–1350.
- [153] Bianconi G, Capocci A. Number of loops of size  $h$  in growing scale-free networks[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(7): 078701.
- [154] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F. Pseudofractal scale-free web[J]. *Physical Review E*, 2002, 65(6): 066122.
- [155] Foster R M. The average impedance of an electrical network[J]. *Contributions to Applied Mechanics (Reissner Anniversary Volume)*, 1949: 333–340.
- [156] Chen H. Random walks and the effective resistance sum rules[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2010, 158(15): 1691–1700.
- [157] Chen H, Zhang F. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2007, 155(5): 654–661.
- [158] Gutman I, Feng L, Yu G. Degree resistance distance of unicyclic graphs[J]. *Transactions on Combinatorics*, 2012, 1(2): 27–40.

- [159] Shan L, Li H, Zhang Z. Domination number and minimum dominating sets in pseudofractal scale-free web and Sierpiński graph[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 677: 12–30.
- [160] Zhang Z, Liu H, Wu B, et al. Enumeration of spanning trees in a pseudofractal scale-free web[J]. EPL (Europhysics Letters), 2010, 90(6): 68002.
- [161] Yang Y, Klein D J. Resistance distance-based graph invariants of subdivisions and triangulations of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 181: 260–274.
- [162] Karp R, Elson J, Estrin D, et al. Optimal and global time synchronization in sensor networks[R]. [S.l.]: Center for Embedded Networked Sensing, Univ. of California, Los Angeles, 2003.
- [163] Aragues R, Carlone L, Sagüés C, et al. Distributed centroid estimation from noisy relative measurements[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(7): 773–779.
- [164] Rossi W S, Frasca P, Fagnani F. Distributed estimation from relative and absolute measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6385–6391.
- [165] Rhodes I. A tutorial introduction to estimation and filtering[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, 16(6): 688–706.
- [166] Siami M, Bamieh B, Bolouki S, et al. Notions of centrality in consensus protocols with structured uncertainties[C] // Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2016: 3542–3547.
- [167] Siami M, Bolouki S, Bamieh B, et al. Centrality measures in linear consensus networks with structured network uncertainties[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2017.
- [168] You K, Tempo R, Qiu L. Distributed algorithms for computation of centrality measures in complex networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5): 2080–2094.
- [169] White S, Smyth P. Algorithms for estimating relative importance in networks[C] // Proceedings of the 9th ACM International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD). 2003: 266–275.
- [170] Benzi M, Klymko C. On the limiting behavior of parameter-dependent network centrality measures[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis Applications, 2015, 36(2): 686–706.
- [171] Brandes U. A faster algorithm for betweenness centrality[J]. Journal of Mathematical Sociology, 2001, 25(2): 163–177.
- [172] Bader D A, Kintali S, Madduri K, et al. Approximating betweenness centrality[C] // Proceedings of the 5th International Conference on Algorithms and Models for the Web-Graph (WAW): Vol 4863. 2007: 124–137.

- [173] Brandes U, Pich C. Centrality estimation in large networks[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(07): 2303–2318.
- [174] Geisberger R, Sanders P, Schultes D. Better approximation of betweenness centrality[C] // *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments (ALENEX)*. 2008: 90–100.
- [175] Teixeira A S, Monteiro P T, Carriço J A, et al. Spanning edge betweenness[C] // *Proceedings of 11st Workshop on Mining and Learning with Graphs (MLG)*: Vol 24. 2013: 27–31.
- [176] Mavroforakis C, Garcia-Lebron R, Koutis I, et al. Spanning edge centrality: Large-scale computation and applications[C] // *Proceedings of the 24th International Conference on World Wide Web (WWW)*. 2015: 732–742.
- [177] Hayashi T, Akiba T, Yoshida Y. Efficient algorithms for spanning tree centrality[C] // *Proceedings of the 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*. 2016: 3733–3739.
- [178] Li H, Zhang Z. Kirchhoff index as a measure of edge centrality in weighted networks: Nearly linear time algorithms[C] // *Proceedings of the 29th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*. 2018: 2377–2396.
- [179] Bergamini E, Wegner M, Lukarski D, et al. Estimating current-flow closeness centrality with a multigrid laplacian solver[C] // *Proceedings of the 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing (CSC)*. 2016: 1–12.
- [180] Knuth D E. *The Stanford GraphBase: a Platform for Combinatorial Computing*: Vol 37[M]. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1993.
- [181] Newman M E J. Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices[J]. *Physical Review E*, 2006, 74(3): 036104.
- [182] Lusseau D, Schneider K, Boisseau O J, et al. The bottlenose dolphin community of doubtful sound features a large proportion of long-lasting associations[J]. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 2003, 54(4): 396–405.
- [183] Newman M E. The structure of scientific collaboration networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 2001, 98(2): 404–409.
- [184] Achlioptas D. Database-friendly random projections[C] // *Proceedings of the twentieth ACM symposium on Principles of database systems (PODS)*. 2001: 274–281.
- [185] Spielman D A, Teng S-H. Nearly-linear time algorithms for graph partitioning, graph sparsification, and solving linear systems[C] // *Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing (STOC)*. 2004: 81–90.
- [186] Lü L, Chen D, Ren X-L, et al. Vital nodes identification in complex networks[J]. *Physics Reports*, 2016, 650: 1–63.

- [187] Boldi P, Vigna S. Axioms for centrality[J]. Internet Mathematics, 2014, 10(3-4): 222–262.
- [188] Newman M E J. A measure of betweenness centrality based on random walks[J]. Social Networks, 2005, 27(1): 39–54.
- [189] Crescenzi P, D’Angelo G, Severini L, et al. Greedily improving our own centrality in a network[C] // International Symposium on Experimental Algorithms (SEA), LNCS. 2015: 43–55.
- [190] D’Angelo G, Severini L, Velaj Y. On the maximum betweenness improvement problem[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2016, 322: 153–168.
- [191] Crescenzi P, D’angelo G, Severini L, et al. Greedily improving our own closeness centrality in a network[J]. ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data, 2016, 11(1): 9.
- [192] Hoffmann C, Molter H, Sorge M. The parameterized complexity of centrality improvement in networks[C] // International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics (SOFSEM), LNCS. 2018: 111–124.
- [193] Meyerson A, Tagiku B. Minimizing average shortest path distances via shortcut edge addition[J]. International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization (APPROX), LNCS, 2009: 272–285.
- [194] Parotsidis N, Pitoura E, Tsaparas P. Centrality-aware link recommendations[C] // Proceedings of the Ninth ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM). 2016: 503–512.
- [195] Demaine E D, Zadimoghaddam M. Minimizing the diameter of a network using shortcut edges[C] // Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT), LNCS. 2010: 420–431.
- [196] Avrachenkov K, Litvak N. The effect of new links on Google PageRank[J]. Stochastic Models, 2006, 22(2): 319–331.
- [197] Olsen M. Maximizing PageRank with new backlinks[C] // International Conference on Algorithms and Complexity (ICAC), LNCS. 2010: 37–48.
- [198] Ishakian V, Erdős D, Terzi E, et al. A framework for the evaluation and management of network centrality[C] // Proceedings of the 2012 SIAM International Conference on Data Mining (SDM). 2012: 427–438.
- [199] Rahmani A, Ji M, Mesbahi M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162–186.
- [200] Bozzo E, Franceschet M. Resistance distance, closeness, and betweenness[J]. Social Networks, 2013, 35(3): 460–469.



- [201] Jr Meyer C D. Generalized inversion of modified matrices[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1973, 24(3): 315 – 323.
- [202] Plemmons R J. M-matrix characterizations. I nonsingular M-matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1977, 18(2): 175 – 188.
- [203] Nemhauser G L, Wolsey L A, Fisher M L. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions[J]. Mathematical Programming, 1978, 14(1): 265 – 294.
- [204] Peng R, Spielman D A. An efficient parallel solver for SDD linear systems[C] // Proceedings of the 46th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). 2014: 333 – 342.
- [205] Spielman D A, Srivastava N. Graph sparsification by effective resistances[J]. SIAM Journal on Computing, 2011, 40(6): 1913 – 1926.
- [206] Hutchinson M. A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1989, 18(3): 1059 – 1076.
- [207] Avron H, Toledo S. Randomized algorithms for estimating the trace of an implicit symmetric positive semi-definite matrix[J]. Journal of the ACM, 2011, 58(2): 8:1 – 8:34.
- [208] Badanidiyuru A, Vondrák J. Fast algorithms for maximizing submodular functions[C] // Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2014: 1497 – 1514.
- [209] Zavlanos M M, Egerstedt M B, Pappas G J. Graph-theoretic connectivity control of mobile robot networks[J]. Proceedings of the IEEE, 2011, 99(9): 1525 – 1540.
- [210] Siami M, Motee N. Growing linear dynamical networks endowed by spectral systemic performance measures[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, , 63(7): 2091 – 2106.
- [211] Summers T H, Cortesi F L, Lygeros J. On submodularity and controllability in complex dynamical networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2016, 3(1): 91 – 101.
- [212] Thrun S, Montemerlo M. The graph SLAM algorithm with applications to large-scale mapping of urban structures[J]. International Journal of Robotics Research, 2006, 25(5-6): 403 – 429.
- [213] Khosoussi K, Huang S, Dissanayake G. Good, bad and ugly graphs for SLAM[C] // RSS Workshop on the problem of mobile sensors. 2015.
- [214] Khosoussi K, Huang S, Dissanayake G. Tree-connectivity: Evaluating the graphical structure of SLAM[C] // Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2016: 1316 – 1322.

- [215] Khosoussi K, Sukhatme G S, Huang S, et al. Designing sparse reliable pose-graph SLAM: A graph-theoretic approach[C] // International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR). 2016: 1 – 16.
- [216] Myrvold W. Reliable network synthesis: Some recent developments[C] // Proceedings of International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications: Vol 3. 1996.
- [217] Boesch F T, Li X, Suffel C. On the existence of uniformly optimally reliable networks[J]. Networks, 1991, 21(2): 181 – 194.
- [218] Wang G. A proof of Boesch's conjecture[J]. Networks, 1994, 24(5): 277 – 284.
- [219] Shier D. Maximizing the number of spanning trees in a graph with  $n$  nodes and  $m$  edges[J]. Journal Research National Bureau of Standards, Section B, 1974, 78(4): 193 – 196.
- [220] Kelmans A K. On graphs with the maximum number of spanning trees[J]. Random Structures & Algorithms, 1996, 9(1-2): 177 – 192.
- [221] Gilbert B, Myrvold W. Maximizing spanning trees in almost complete graphs[J]. Networks, 1997, 30(2): 97 – 104.
- [222] Petingi L, Boesch F, Suffel C. On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees[J]. Discrete Mathematics, 1998, 179(1-3): 155 – 166.
- [223] Petingi L, Rodriguez J. A new technique for the characterization of graphs with a maximum number of spanning trees[J]. Discrete Mathematics, 2002, 244(1-3): 351 – 373.
- [224] Cheng C-S. Maximizing the total number of spanning trees in a graph: two related problems in graph theory and optimum design theory[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1981, 31(2): 240 – 248.
- [225] Blondel V, Tsitsiklis J N. NP-hardness of some linear control design problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1997, 35(6): 2118 – 2127.
- [226] Khachiyan L. On the complexity of approximating extremal determinants in matrices[J]. Journal of Complexity, 1995, 11(1): 138 – 153.
- [227] Çivril A, Magdon-Ismael M. On selecting a maximum volume sub-matrix of a matrix and related problems[J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(47-49): 4801 – 4811.
- [228] Summa M D, Eisenbrand F, Faenza Y, et al. On largest volume simplices and sub-determinants[C] // Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2015: 315 – 323.
- [229] Nikolov A, Singh M. Maximizing determinants under partition constraints[C] // Proceedings of the 48th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). 2016: 192 – 201.

- [230] Ebrahimi J B, Straszak D, Vishnoi N K. Subdeterminant maximization via non-convex relaxations and anti-concentration[C] // Proceedings of the 58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2017: 1020–1031.
- [231] Nikolov A. Randomized rounding for the largest simplex problem[C] // Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing (STOC). 2015: 861–870.
- [232] Koutis I. Parameterized complexity and improved inapproximability for computing the largest  $j$ -simplex in a  $v$ -polytope[J]. Information Processing Letters, 2006, 100(1): 8–13.
- [233] Çivril A, Magdon-Ismail M. Exponential inapproximability of selecting a maximum volume sub-matrix[J]. Algorithmica, 2013, 65(1): 159–176.
- [234] Singh M, Xie W. Approximate positive correlated distributions and approximation algorithms for  $d$ -optimal design[C] // Proceedings of the 29th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2018: 2240–2255.
- [235] Allen-Zhu Z, Li Y, Singh A, et al. Near-optimal design of experiments via regret minimization[C] // Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning (ICML). 2017: 126–135.
- [236] Allen-Zhu Z, Li Y, Singh A, et al. Near-optimal discrete optimization for experimental design: A regret minimization approach[J]. arXiv preprint arXiv:1711.05174, 2017.
- [237] Welch W J. Algorithmic complexity: three NP-hard problems in computational statistics[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 1982, 15(1): 17–25.
- [238] Harville D A. Matrix algebra from a statistician's perspective: Vol 1[M]. [S.l.]: Springer, 1997.
- [239] Mokhlissi R, El Marraki M. Enumeration of spanning trees in a closed chain of fan and wheel[J]. Applied Mathematical Sciences, 2014, 8(82): 4053–4061.
- [240] Papadimitriou C H, Yannakakis M. The traveling salesman problem with distances one and two[J]. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(1): 1–11.
- [241] Engebretsen L, Karpinski M. Approximation hardness of TSP with bounded metrics[C] // International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP), LNCS. 2001: 201–212.
- [242] Jadbabaie A, Olshevsky A. Scaling laws for consensus protocols subject to noise[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, \*\*(\*): \*\*\*–\*\*\*.
- [243] Yi Y, Zhang Z, Patterson S. Scale-free loopy structure is resistant to noise in consensus dynamics in complex networks[J]. arXiv preprint arXiv:1801.00535, 2018.
- [244] Xu X-P. Exact analytical results for quantum walks on star graphs[J]. Journal of Physics A, 2009, 42(11): 115205.
- [245] Tzeng W-J, Wu F. Spanning trees on hypercubic lattices and nonorientable surfaces[J]. Applied Mathematics Letters, 2000, 13(7): 19–25.

## 博士期间完成论文

- [1] **Yuhao Yi**, Liren Shan, Huan Li, Zhongzhi Zhang\*. Biharmonic distance related centrality for edges in weighted networks[C] // Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI). 2018: 3620-3626.
- [2] **Yuhao Yi**, Bingjia Yang, Zhongzhi Zhang\*, Stacy Patterson\*. Biharmonic distance and performance of second-order consensus networks with stochastic disturbances[C] // Proceedings of the 2018 Annual American Control Conference (ACC). 2018: 4943-4950.
- [3] **Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang\*, Stacy Patterson. Scale-free loopy structure is resistant to noise in consensus dynamics in complex networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, \*\*(\*): \*\*\*-\*\*\* (2018). (in press)
- [4] **Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang\*, Liren Shan, Guanrong Chen. Robustness of First- and Second-Order Consensus Algorithms for a Noisy Scale-Free Small-World Koch Network[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 25(1): 342-350 (2017).
- [5] **Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang\*, Yuan Lin, Guanrong Chen. Small-world topology can significantly improve the performance of noisy consensus in a complex network[J]. Computer Journal, 58(12): 3242-3254 (2015).
- [6] Liren Shan , **Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang\*. Improving information centrality of a node in complex networks by adding edges[C] // Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI). 2018: 3535-3541.
- [7] Anirban Das, **Yuhao Yi**, Stacy Patterson, Bassam Bamieh, Zhongzhi Zhang. Convergence rate of consensus in a network of networks[C] // Proceedings of the 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2018: accepted.
- [8] Stacy Patterson\*, **Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang. A resistance distance-based approach for optimal leader selection in noisy consensus networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, \*\*(\*): \*\*\*-\*\*\* (2018). (in press)
- [9] **Yuhao Yi**, Bingjia Yang, Zhongzhi Zhang\*, Stacy Patterson\*. Biharmonic Distance-Based Performance for Second-Order Noisy Consensus Networks[J]. submitted to IEEE Transactions on Automatic Control, under review.
- [10] <sup>1</sup>Huan Li, Stacy Patterson,**Yuhao Yi**, Zhongzhi Zhang\*. Maximizing the number of spanning trees in a connected graph. submitted to The Web Conference. under review.

---

<sup>1</sup>文章 [10] 的作者顺序按字典序排列

## 致 谢

这篇博士论文是读研以来 5 年多时间里科研工作的总结。这些工作的背后离不开老师的指导、合作者的共同努力、同学的帮助，以及家人朋友的支持。在论文的最后，谨向一直以来帮助、关心、支持我的人表示感谢。

首先，非常感谢我的导师章忠志老师对本文的指导，以及 5 年以来对我每一项科研工作认真、细致的指导。我从做本科毕业设计开始跟随章老师开展复杂网络方面的研究工作，是章老师引导我学习和掌握了相关领域的知识和研究方法，并逐步培养我独立开展科研的能力。在这 5 年的研究过程中，章老师总是帮我把握正确的研究方向，并对研究工作给予关键性的指导。我们经常对所研究的问题进行深入的讨论，有时候还要经过反复讨论才能找到一个问题的解决方案。在这个过程中，章老师总是能提供一些有意义的想法，并且非常耐心地引导我思考。在本文的撰写过程中，章老师从选题、论文结构到证明细节、实验、语言阐述都进行了一丝不苟的指导。在多年的学习和研究过程中，章老师勤勉的工作作风和严谨的治学态度给我树立了榜样，让我养成了一个科研人员应具备的科研素养。

感谢香港城市大学的陈关荣老师对我的指导和关心。我曾在 3 年以前受陈老师邀请访问过香港城大的混沌与复杂网络研究中心，并与陈老师合作过两篇论文。陈老师非常关心我的学习和科研工作，常常鼓励我进步，并且在我的科研道路上提供了宝贵的建议和帮助。陈老师同样非常细致地指导和修改了我们合作的论文，并有几次印象深刻的讨论，对我后来的科研方向产生了一定的影响。非常幸运能够得到陈老师的指导，陈老师的为人和治学态度对我的成长起到了重要的积极影响。

感谢伦斯勒理工学院的 Stacy Patterson 博士对我的细致指导。在 Patterson 博士的实验室联合培养的一年中，我们每周都会进行 1 至 2 次的深入讨论，在此期间完成了好几项研究工作。在她的指导下，我更好地理解 and 掌握了研究所需的分布式系统及算法、分布式控制等方向的知识 and 研究方法，为我后来的科研工作奠定了更加扎实的基础。Patterson 博士思维敏捷、在网络控制领域耕耘多年，在讨论过程中总是能抛出一些有启发性的想法，对我开阔研究思路很有帮助。

感谢佐治亚理工学院的彭泱老师，彭老师在上海开设的数学工具与高效算法课程对我掌握谱图理论和算法的新进展很有帮助。感谢彭老师对我们近期工作提出的一些建议。感谢合作者，加州大学圣芭芭拉分校的 Bassam Bamieh 教授深入浅出的手稿，加深了我对矩阵扰动理论的理解。感谢在复旦的接近 10 年里所有传授知识、讨论过问题、关心我成长、并且以身作则的师长们。

感谢我的同学以及合作者林苑、齐轶、李寰、单立人、杨冰佳和 Anirban Das。本文的部分内容同样包含了他们的劳动和智慧，谢谢他们的付出！感谢复杂网络研究小组的所有其他同学，他们营造了良好的学习、研究氛围，让我受益匪浅。多年以来，我在生活、学习中得到了他们很多的帮助，向他们致谢。

感谢我在读博期间认识的众多同行和同学，和他们的交流拓宽了我的视野。

感谢我的父母一直以来对我的无私付出和关爱，他们对我学术事业的支持和鼓励让我多年来可以无忧无虑地专注于学习和科研，他们无微不至的关怀也让我倍感温暖。

感谢所有亲人和朋友们的关怀和陪伴。

感谢我的母校复旦大学给我们提供了良好的学习和科研环境。

最后，感谢百忙之中评阅本论文的专家！