

专题调研报告：实体单元与板壳单元的连接

邓博元 2015011604

2017 年 12 月 17 日

1 问题的提出

在很多实际工程问题中，经常遇到三维连续体和薄壁板壳组成的结构，如图 1:

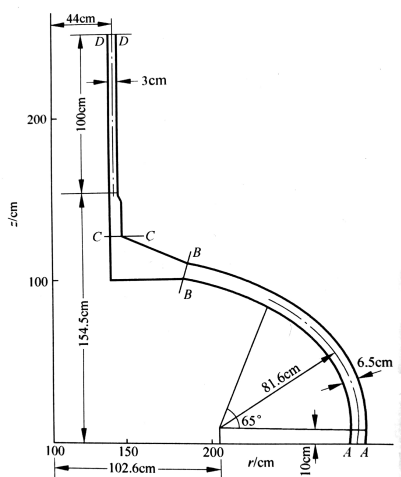


图 11.22 容器封头和接管结构

图 1: 一个薄壁容器的横截面的一部分

对于这种薄壁容器，经常需要在瓶颈和瓶体的连接处加厚以降低应力集中造成的影响。但是对于有限元方法来说，加厚的地方不再适用于薄壁板壳单元，而需要用实体单元进行划分。因此实体单元和薄壁板壳单元的连接是工程中经常遇到的问题。

对于上图的例子，我们给出如图 2 所示的有限元模型：

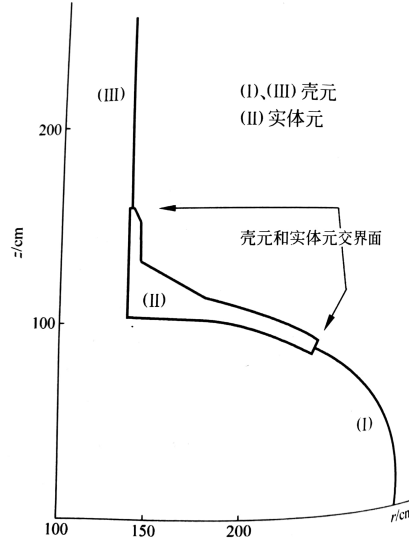


图 2: 图 1 的有限元模型

2 位移约束

如图 3, 先考虑平面内的位移:

以 u_i, v_i 表示实体单元节点在主坐标系下的位移, 以 u'_i, v'_i 表示板壳单元节点在主坐标系下的位移, 以 u_i^*, v_i^* 表示实体单元节点在壳的局部坐标系下的位移, 则有:

$$\begin{pmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

为了与板壳单元的位移协调, 有:

$$\begin{cases} u_2 = u'_2 \\ v_2 = v'_2 \\ v_1^* = v_2^* + \frac{t}{2}\beta_2 \\ v_3^* = v_2^* - \frac{t}{2}\beta_2 \end{cases}$$

其中 t 为板壳的厚度, β_2 为板壳上对应点的转角。

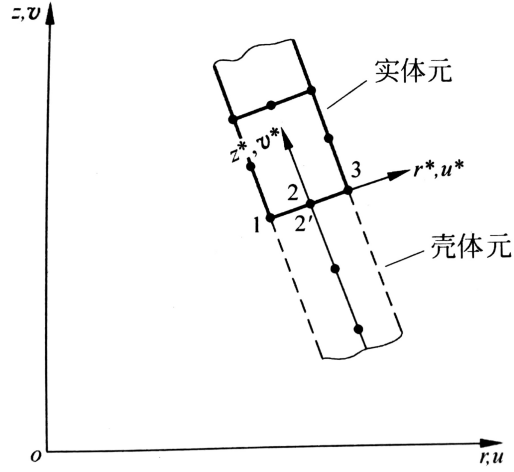


图 3: 两种单元的联结

于是联立这些等式得到位移协调的约束:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u_2 - u'_2 \\ v_2 - v'_2 \\ -\sin \phi (u_1 - u_2) + \cos \phi (v_1 - v_2) - \frac{t}{2} \beta_2 \\ -\sin \phi (u_3 - u_2) + \cos \phi (v_3 - v_2) + \frac{t}{2} \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

3 罚函数法引入约束

利用罚函数 α 将约束引入能量泛函:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{C}$$

变分后得到:

$$(\mathbf{K}_1 + \alpha \mathbf{K}_2) \mathbf{d} = \mathbf{Q}$$

考虑到 \mathbf{K}_2 奇异, 故 α 不能取太大, 一般取 \mathbf{K}_1 中最大元素的 1000 倍左右, 也因此无法得到非常精确的结果。

4 直接引入约束

实质上，实体单元和板壳单元的连结在数学意义上是这样的问题：

$$K_1 d_1 = f_1, K_2 d_2 = f_2$$

其中：

$$d_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \beta_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

为了使得两个方程组能够合并为一个，需要对位移向量做一定处理。之前得到的约束也可以这样表示：

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & -\frac{t}{2} \sin \phi \\ \sin \phi & 0 & -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & \frac{t}{2} \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & -\frac{t}{2} \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & \frac{t}{2} \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_3^* \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

转换矩阵简记为 L' ，则有：

$$(K_1 L) d'_1 = f_1$$

其中：

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix}, d'_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ u_1^* \\ u_3^* \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

于是便可以对局部刚度阵进行 scatter 并组装为总刚度阵。

这种方法的问题在于，坐标转换过程中的转换矩阵并不是标准的 Jacobi 矩阵，因此不能像对右侧向量做类似变换从而维持刚度阵的对称性，一旦刚度阵失去了对称性，计算将会变得十分困难。

5 过渡单元

5.1 过渡单元的提出与构造

Surana 在 1980 年提出过基于轴对称应力分析的过渡单元，基本构造方式相当简单，图 4 是其中的一种：相当于左侧 6 个节点沿用了实体单元，右

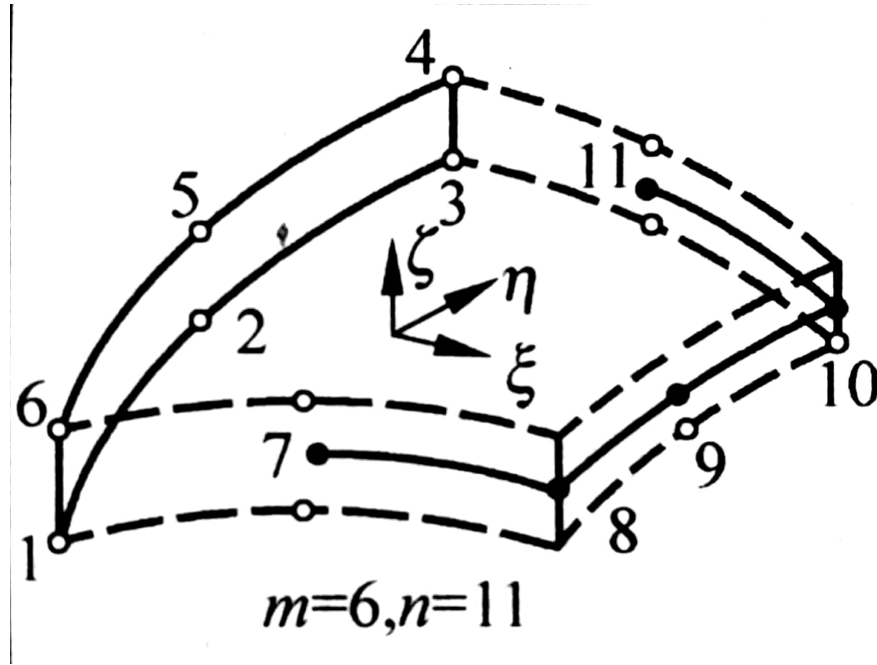


图 4: 过渡单元

侧 5 个节点沿用了板壳单元，位移的构造也相当简单：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} + \sum_{i=m+1}^n N'_i(\xi, \eta) \left(\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} + \frac{\zeta t_i}{2} \begin{pmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \right)$$

其中 m 为从实体单元继承的节点的数量， $n-m$ 为从板壳单元继承的节点的数量。实质上就是由两边继承的节点各自乘上对应的型函数插值得到位移。

5.2 过渡单元的局限性

利用几何关系, 实体单元能由位移确定所有的应变分量, 但是对于板壳元, 只能确定局部坐标系内五个分量: $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}, \gamma_{y'z'}, \gamma_{x'z'}$ 。由于板的基本假设, $w'(\xi, \eta, \zeta) = w'(\xi, \eta)$, 可得到 $\varepsilon_{z'} = 0$

但是考虑到在实体单元一侧也需要满足同样的约束, 同时又由板壳元另一个假设: $\sigma_{z'} = 0$, 得到 $\varepsilon_{z'} = \nu(\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'})$

两者联立得到, 为了不对实体单元添加不必要的约束, 需要满足:

$$\nu = 0$$

这无疑将该种过渡单元的应用限制在了泊松比很小的范围内。

6 参考文献

王勖成. 有限单元法 [M]. 清华大学出版社, 2003.

Surana K S. Transition finite elements for axisymmetric stress analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 15(6):809-832.