边界元方法简介

卢晟昊 2014011622

摘要：本文首先介绍了边界元法的发展历程、常用软件、核心思想、优缺点、原理，然后又介绍了边界元法在弹性问题和断裂力学中的应用。

关键词：边界元法、发展历程、软件、优缺点、快速多极算法、满阵

正文：

在弹性力学的小变形问题的解决方法中，有三种数学提法，分别是微分提法、变分提法、积分提法，与之相对应的数学模型则是偏微分方程、泛函极值、边界积分方程，与之相对应的数值方法则是差分法、有限元法、边界元法。

以下为边界元法的发展历程：

1963 年 M.A.Jaswon 将边界积分方程直接用于位势问题

1967 年 F.J.Rizzo 运用边界积分方程求解弹性静力学问题（第一篇文献）

1968 年 F.J.Rizzo 运用边界积分方程求解弹性动力学问题

1975 年 T.A.Cruse 和 F.J.Rizzo《边界积分方程用法：在应用力学中的计算应用》（第一本专著）

1977 年，在英国 South Ampton 大学商定采用边界元法这一名称

1979 年起，英国 C.A.Brebbia 每年组织召开一次国际边界元法学术会议，成立国际边界元协会 ISBE

1984 创办《工程分析——计算技术中的创新》，1989 年改名为《边界元工程分析》，现为 SCI 收录期刊。

目前，边界元法主要有如下开发软件：

C.A.Brebbia 组织开发的 BEASY（http://www.beasy.com/.），现在该软件已涉及机械设计、疲劳与裂纹扩展、声学设计、腐蚀和阴极保护、耐久性评定、损伤容限设计、电镀仿真等领域

加拿大 IES 公司开发的边界元软件（http://www.integratedsoft.com/.）

Coyote 公司的 AutoMEMS，采用快速多极算法取代常规边界元算法（抱歉我没找到网站）

边界元法的核心思想是这样的：只求解边界未知量（边界面力、边界位移）求得边界应力，不必求计算域内的位移场和应力场，对于计算域内的场可以通过相应的边界积分方程得到。边界元法与有限元法相比，在断裂力学中应用时，边界元发有着自己独特的优势，特别是在解决裂纹扩展问题时，因为边界元法解具有奇异性，很好的解决了力的奇异性这一问题，用 FEM 解决裂纹扩展问题时，每次扩展，有限元法都要重现划分网格，但是在边界元法中，只需要重新增加边界元就好。边界元和有限元相比，具有降低问题维数、相同离散条件下精度更高的优点，在解决半无限问题和断裂问题时优于有限元。

但是边界元法也有其缺点。首先边界元发要求存在域内解析基本解，包括良好收敛性的级数解，对于非均匀介质的问题无能为力。而且边界元法系数矩阵是满阵，而且一般情况为非对角阵。设想一个二维问题 5000 边界节点，10000 自由度，系数矩阵 100000000 个元素，每个元素双精度数，仅仅是系数矩阵就要占据 800M 空间。如果域内方程非线性，边界元积分方程中只含边界未知量的优势不复存在。所以现在大多采用有限元-边界元耦合

的方法（因为 FEM 和 BEM 程序结构差别很大，没有专门的商业软件）

首先介绍用边界元方法解决三维弹性问题：

考虑如下三维弹性问题的边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_{k,ki}+G(u_{i,jj}+u_{j,ij})+f_i=0, && \text{区域 } \Omega \text{ 内} \\ &u_i=\bar{u}_i, && \text{边界 } \Gamma_u \text{ 上} \\ &p_i=\sigma_{ij}n_j \\ &\quad=\lambda u_{k,k}n_i+G(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_j) \\ &\quad=\bar{p}_i, && \text{边界 } \Gamma_p \text{ 上} \end{aligned}\right\}, \quad (5.6)$$

式中的 i, j, $k=1, 2, 3$。

基本解 $u^*_{lk}(P, Q)$是满足下列方程

$$\lambda u^*_{lk,ki}(P, Q)+G[u^*_{li,jj}(P, Q)+u^*_{lj,ij}(P, Q)]+\delta(P-Q)\delta_{li}$$
$$=0, \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (5.7)$$

的二点函数为

$$u^*_{lk}(P, Q)=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)r}[(3-4\nu)\delta_{lk}+r_{,l}r_{,k}], \quad (5.8)$$

式中的 P、Q 为三维无限弹性体中的任意两点，r 为这两点之间的距离。

与二维问题相同，在式(5.6)第一式的两边乘上基本解 u^*_{li}，在区域 Ω 上积分，应用积分定理，得积分方程为

$$u_l(P)=\int_\Gamma[u^*_{lk}(P, Q')p_k(Q')-u_k(Q')p^*_{lk}(P, Q')]\mathrm{d}\Gamma(Q')$$
$$+\int_\Omega u^*_{lk}(P, Q)f_k(Q)\mathrm{d}\Omega(Q), \quad (5.9)$$

其中，对应基本解 u^*_{lk} 的表面力为

$$p_{lk}(P, Q')=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{lk}+3r_{,l}r_{,k}]\right.$$
$$\left.-(1-2\nu)(r_{,l}n_k-r_{,k}n_l)\right\}。 \quad (5.10)$$

用位势问题相同的方法，当区域内的点P移到边界上时，以 Q' 点为球心，作一半径为 ε 的球面，考虑 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，由式(5.9)可得边界积分方程为

$$C_{lk}(P')u_k(P')=\int_\Gamma[u^*_{lk}(P', Q')p_k(Q')$$
$$-u_k(Q')p^*_{lk}(P', Q')]\mathrm{d}\Gamma(Q')$$
$$+\int_\Omega u^*_{lk}(P', Q)f_k(Q)\mathrm{d}\Omega(Q), \quad (5.11)$$

式中的系数$C_{lk}(P')$也是与边界点的边界几何形状有关的量，也可以用 4.2.3 节中的方法，不直接计算它的值。对于光滑边界，有

$$C_{lk}(P')=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}。$$

将积分方程式(5.9)代入几何方程式(3.14)，再代入物理方程式(3.17)，可得区域内应力分量的表达式为

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}(P) = & \int_\Gamma D_{kij}(P,\ Q')\, p_k(Q')\,\mathrm{d}\Gamma(Q') \\
& - \int_\Gamma S_{kij}(P,\ Q')\, u_k(Q')\,\mathrm{d}\Gamma(Q') \\
& + \int_\Omega D_{kij}(P,\ Q)\, f_k(Q)\,\mathrm{d}\Omega(Q),
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
D_{kij} = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i}\right. \\
& \left.-\delta_{ij}r_{,k})+3r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right] \\
S_{kij} = & \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3}\left\{3\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}+\nu(\delta_{ik}r_{,j}\right.\right. \\
& \left.+\delta_{jk}r_{,i})-5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]+3\nu(r_{,i}r_{,k}n_j+r_{,j}r_{,k}n_i) \\
& +(1-2\nu)(\delta_{ik}n_j+\delta_{jk}n_i+3r_{,i}r_{,j}n_k) \\
& \left.-(1-4\nu)\delta_{ij}n_k\right\}
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.13}
$$

将边界积分方程式(5.11)离散，按边界条件求出边界上未知的位移分量和表面力分量。然后通过离散后的积分方程式(5.9)和式(5.12)计算区域内任意点的位移分量和应力分量。与体积力项有关的积分，可把区域分成有限个小区域，由数值计算得到。

用边界元方法解决断裂力学问题：

考虑线弹性断裂力学问题。如图 5-5 所示无限平面内有一个裂纹的情况，裂纹尖端附近的应力、位移是所研究点到裂纹尖端距离 r 和 θ 的函数。

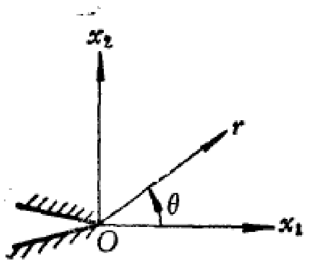

图 5-5

对于 I 型裂纹(张开型)，如图 5-6(a)所示，应力分量和位移分量分别为

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2} \\ 1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{pmatrix}
\tag{5.37}
$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}。 \quad (5.38)$$

对于 II 型裂纹（面内剪切型），如图 5-6(b)所示，应力分量和位移分量分别为

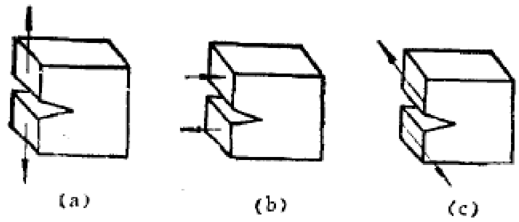

图 5-6

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

和

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}。 \quad (5.40)$$

对于 III 型裂纹(面外剪切型)，如图 5.6(c) 所示，应力分量和位移分量分别为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

$$u_3 = \frac{2K_{\mathrm{III}}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}。 \quad (5.42)$$

以上各式中，K_{I}、K_{II} 和 K_{III} 分别是 I 型、II 型和 III 型裂纹的应力强度因子。G 为材料的剪切弹性模量，κ 为：

平面应变问题　　$\kappa = 3-4\nu$,

平面应力问题　　$\kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$,

其中的 ν 为材料的泊桑比。

因此，对于平面应力问题应力强度因子可从下式求出：

$$\begin{pmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{pmatrix} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}_{\theta=0} \quad (5.43)$$

$$\begin{pmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \lim_{r \to 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{pmatrix} Eu_2 \\ Eu_1 \\ \frac{E}{1+\nu} u_3 \end{pmatrix}_{\theta=\pi}, \qquad (5.44)$$

其中的E为材料的拉压弹性模量。

平面应变问题场合，应将式(5.44)中的E换为$\frac{E}{1-\nu^2}$。

可见，把裂纹面作为边界面，用弹性问题的边界元法计算应力或位移，然后按得到的应力分量或位移分量由外插法可求得应力强度因子。

总结： 我们在选择使用边界元方法或是有限元方法时，应根据问题特点灵活选择，或者是部分单元采用有限元部分单元采用边界元，已达到最优解。

参考文献：

[1]http://www.uta.edu/faculty/rcli/TopTen/topten.pdf
[2]姚振汉 王海涛 《边界元法》高等教育出版社
[3]姚振汉 蒲军平 尹欣 段小华《边界元法应用的若干近期研究》清华大学工程力学系
[4]快速多极方法的概念性介绍 应乐兴 《中国科学》杂志
[5] ExaFMM（http://www.bu.edu/exafmm/）