

板单元原理说明以及算例验证

杨正宇

2017年12月9日

1 板单元刚度阵的构造

这里板单元刚度阵的构造与4Q单元有较大的相似之处.我们采用了彭细荣书中给出的形函数, [1]

$$\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}(s-1)(t-1)(s^2+s+t^2+t-2) \\ -\frac{1}{8}b(s-1)(t-1)^2(t+1) \\ \frac{1}{8}a(s-1)^2(s+1)(t-1) \\ \frac{1}{8}(s+1)(t-1)(s^2-s+t^2+t-2) \\ \frac{1}{8}b(s+1)(t-1)^2(t+1) \\ \frac{1}{8}a(s+1)^2(s-1)(t-1) \\ -\frac{1}{8}(s+1)(t+1)(s^2-s+t^2-t-2) \\ \frac{1}{8}b(s+1)(t+1)^2(t-1) \\ -\frac{1}{8}a(s+1)^2(s-1)(t+1) \\ \frac{1}{8}(s-1)(t+1)(s^2+s+t^2-t-2) \\ -\frac{1}{8}b(s-1)(t+1)^2(t-1) \\ -\frac{1}{8}a(s-1)^2(s+1)(t+1) \end{pmatrix}$$

根据 $\mathbf{B} = [-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}]^T \mathbf{N}$ 以及 $\mathbf{K} = ab\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ 得到总刚度阵.需要说明的是,这里的形函数事实上是一个沿板厚变化的值,但经过积分可以化为弯曲刚度中的一部分.对于得到的刚度阵利用Zienkiewicz的原始论文进行初步的验证,二者得到的结果是一致的. [2]

2 分片验证

我们在 $[0, 1]^2$ 的正方形板构造这样的位移场 $w = x^2 - \nu y^2$,得到一个纯弯场 $M_{11} = -2D(1 - \nu^2)$.利用 $x = 0; x = 0.3; y = -0.2; y = 0$ 四条直线将正方形板分割成九个分片,对应的将法线沿 x 轴方向边界上的 y 向弯矩分配到每个点上.具体输入文件见plate_patch_test,可见位移基本准确,误差在浮点数范围内.

3 单点位移收敛率分析

取四边简支的正方形薄板,薄板大小同上,取 $E = 230.4GPa, \nu = 0.2$,在中央加一集中载荷 P ,根据弹性力学可以得到其级数解 $w = \frac{16P}{D\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}}{((2m+1)^2 + (2n+1)^2)^2} \sin \frac{m\pi x_1}{2} \sin \frac{n\pi x_2}{2}$,通过数值方法得到其中央的最大挠度为 $\frac{0.04640335P}{D} = 0.232017$.对于 $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8$ 依次进行求解,得到的结果的对数误差如图:

对于板,其形函数是三次以上的,而且构造的位移场是级数场,因而中点不是其高斯点.发现收敛率为1.67,考虑到构造的不是多项式场,认为这样的收敛率是可以满意的,也与书上的结果符合,因此认为该板是收敛的.具体文件见downpress1, downpress2, downpress3.

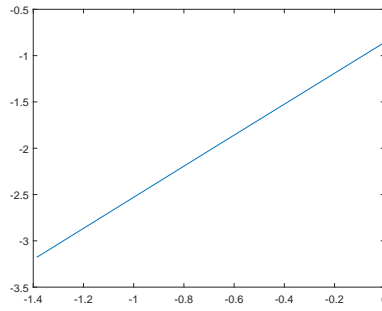


Figure 1: 中点收敛率分析

References

- [1] 彭细荣,杨庆生,孙卓. 有限单元法及其应用北京: 清华大学出版社北京交通大学出版社. 2012
- [2] Zienkiewicz O C, Cheung Y K. The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28:471-488, 1964.