

# 有限元专题调研：后屈曲分析

力 5 陈一彤

## 摘要：

结构受载不断变化后，将会出现失稳和屈曲现象。临界点后，结构呈现丰富的屈曲行为，称为后屈曲。工程应用中需要规避后屈曲伴随的失效和破坏，又可以通过控制的屈曲进行微尺度电子器件的制备，具有广泛的应用。本文综述了后屈曲分析从古典屈曲理论到近现代摄动法、离散法的进展，并尝试采用商用有限元软件 Abaqus 进行了基本的后屈曲模拟，给出了与力学进展结合的一些建议。

**关键词：** 后屈曲      Abaqus      有限元      弹性力学理论

## 目录：

- 引言：后屈曲分析的背景
- 古典屈曲理论
- 近代后屈曲研究：渐进屈曲理论
- 现代后屈曲理论
- 离散坐标后屈曲分析（有限元法）
- Abaqus 的后屈曲分析
- 结语
- 致谢
- 参考文献

## 一、引言：后屈曲分析的背景

许多结构需要估计结构的稳定性，如细长柱、压缩部件、真空容器等。在不稳定（屈曲）开始时，结构在本质上无变化的载荷作用下，在某方向上的位移产生一个很大的改变，称为失稳或屈曲。对这类问题的研究，称为屈曲分析。

而分析结构的平衡路径，当加载达到某一临界点 C 处时，结构的平衡路径发生分叉。分叉前的路径称为前屈曲状态。基本状态下，位移矢量是载荷参数的连续可微函数。在临界点之前，基本状态的平衡方程是稳定的。在临界点处，平衡方程的另一个解从基本状态分叉出来，称为平衡的临近状态。因此后文也将临界点称为分叉点。临界点后，出现一条稳定分支，一条不稳定分支。而分叉点后结构的屈曲表现，就称为后屈曲阶段。

后屈曲阶段可能产生的状态数较多，稳定位置跳变和不断变化的刚度等难以预测和表征。而工程中后屈曲的出现常常伴随着结构失效和破坏，需要严格规避；同时合理地操纵后屈曲程度，又能在微电子、微机电的微尺度制造中发挥重要作用。因而后屈曲研究越来越受到学界和业界的广泛关注。

随着计算机技术的普及和迅速发展，板壳结构屈曲分析的研究方法从古典法（能量法、瑞利-里兹法等）发展到摄动法、有限差分法、有限积分法、有限条法、有限元法等。有限元法不仅可以实现板壳结构的双重非线性的屈曲分析，还可以方便地计入几何缺陷、残余应力等影响，因此备受青睐。接下来本文就依次对后屈曲分析从经典到现代的各种方法进行综述。

## 二、古典屈曲理论

弹性体系平衡稳定性是弹性力学中的一个重要分支，最早提出该问题的是著名瑞士科学家欧拉。他于 1744 年计算出了细长压杆的临界压力，这在材料力学课上同学们都已熟悉了。在此后近两百年的时间里，人们陆续研究了梁、板、壳等的临界载荷。并对当时刚刚兴起的造船等工业产生很大指导作用。

直到上世纪 30 年代初期，人们在纵压作用下的圆柱壳的破坏试验中发现，破坏压力实验值远低于理论值，且制作参数近似的柱壳，实验值很分散。Flügge (1932) 和 Donnell (1934) 先后提出这是初始缺陷导致的结果，但是被 Karman 和钱学森否定了。他们在 1941 年发表的结果中分析了一根具有几何缺陷的铰支压杆，跨中有一个非线性弹簧支撑，分析结果发现破坏压力如要下降到理论临界压力的百分之六十，缺陷幅度必须达到一个很大的数值，于是他们得出结论，如果缺陷时圆柱壳破坏压力降低的原因，那么缺陷幅度必须几倍于壳的厚度，显然不可能。

随后 Karman 和钱学森在 1942 年，通过大挠度方程分析了理想圆柱壳在纵压作用下一理想球壳在外压作用下的后屈曲行为，发现后屈曲路径上有一个下临界点 I，如图 1。

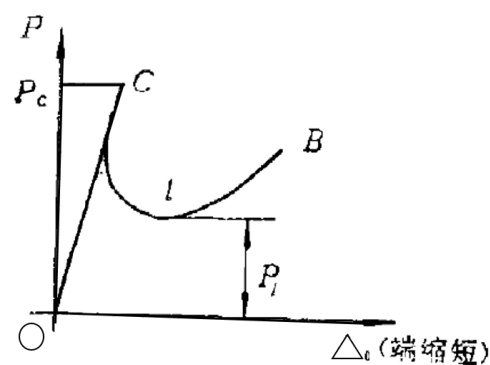


图 1

它对应的压力  $P$  比按照线性理论求得的临界压力  $P_c$  低得多，因此认为这种下临界点的存在是导致压力大大降低的原因，说明实际结构的破坏压力与理想结构的后屈曲行为有关。由此开创了基于非线性对后屈曲进行研究的理论。但是仍然无法解释相同尺寸的模型会有十分分散的实验结果，也不能估计缺陷大小对临界压力的影响，仅仅局限在理想壳体上。

## 三、近代后屈曲研究：渐进屈曲理论

目前公认的近代后屈曲研究的一般理论，是 1945 年 Koiter 在《The stability of the elastic equilibrium》提出的渐进屈曲理论。简单来说，该理论的核心思想就是将后屈曲路径在临界点 C 处展成了幂级数的渐进形式：

$$\frac{P}{P_c} = 1 + a\zeta + b\zeta^2 + \dots$$

其中 $\zeta$ 是摄动参数，从物理意义上易知， $a$  是后屈曲路径 CB 在 C 点的斜率， $b$  则是 CB 在 C 点曲率的一半，如图 2。实际结构的破坏压力在缺陷不大的情况下，主要是与  $a, b$  的数值有关，称之为初始后屈曲系数，因为它们只描述后屈曲路径在临界点附近的性态。采用摄动展开和初始系数的方法，就将整个后屈曲问题简化为初始后屈曲性态的研究。

此外 Koiter 还指出，实际结构的破坏压力除了与理想壳体的后屈曲性态有关外，还与缺陷参数（缺陷幅度的无量纲值）大小有关，并导出了它们的渐进关系，定量地解决了结构的缺陷敏感度问题。这套理论成功地证实了圆柱壳受纵压以及球壳受外压对初始缺陷十分敏感。

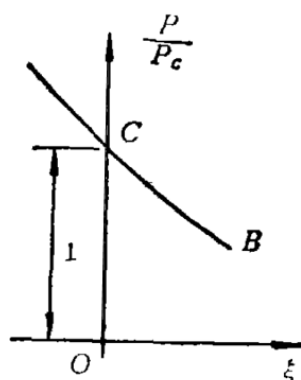


图 2

#### 四、现代后屈曲理论

随着上世纪六十年代，航空航天技术迅速发展对壳体的增长需求，屈曲分析受到了越来越广泛的关注，包括：

各种壳体在轴力、外压、扭转等载荷下缺陷敏感度的计算；

随着计算机发展而提出的后屈曲离散坐标分析；

分析了前屈曲变形和边界条件对临界压力的影响，从而对后屈曲计算的简化等。

虽然要想在现在的基础上达到改进、创造新的有限元方法的目的，学习以上其他力学理论是不可缺少的；但是考虑到篇幅和课程侧重点，本文接下来介绍其中的离散坐标屈曲分析法。

## 五、离散坐标后屈曲分析（有限元法）

顾名思义，本节的内容是用离散坐标出发研究弹性平衡稳定的非线性特征。

利用有限元剖分或截取级数展开的有限项，可把一个连续弹性体离散化，这时体系的变形可用结点位移 $Q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 或级数中前面几项的系数 $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 来描述， $Q_i$ 或 $C_i$ 这几个独立变量称为体系的广义坐标。这时体系的总势能就可以写为：

$$V(Q_i, \lambda)$$

其中 $\lambda$ 表示载荷参数，不再是一个反韩，而是一个代数函数。

在一般的广义坐标分析中对于相异分支点，其分支路径在分支点处的斜率为：

$$\lambda^{(1)c} = -\frac{W_{ijk}q_i^{(1)}q_j^{(1)}q_k^{(1)}}{2W'_{ij}q_i^{(1)}q_j^{(1)}}$$

若势能函数  $W$  不包含 $q_i$ 的三次项，则 $W_{ijk} = 0$ ，此时 $\lambda^{(1)c} = 0$ 。

分支路径在分支点的曲率为

$$\lambda^{(2)c} = -\frac{W_4}{3Wq_i^{(1)}q_j^{(1)}}$$

其中 $q_i$ 为广义坐标 $Q_i$ 的增量， $W$ 为总势能，“ $'$ ”表示求导，在下标上的 $i, j, k, \dots$ 分别表示对广义坐标 $q_i, q_j, q_k, \dots$ 求导， $W_4 = W_{ijk}q_i^{(1)}q_j^{(1)}q_k^{(1)}q_l^{(1)} + 3Wq_i^{(1)}q_j^{(1)} \times q_k^{(2)}$ 。

在特定的对角化坐标分析中，对相异分支点，设 $u_i$ 为广义坐标的增量， $A(u_i, \lambda)$ 为总势能，则

$$\lambda^{(1)c} = -\frac{A_{111}}{2A'_{11}}$$

$$\lambda^{(2)c} = -\frac{A_0}{3A'_{11}}$$

其中

$$A_0 = A_{1111} - 3 \sum_{s=2}^n \frac{(A_{s11})^2}{A_{ss}}$$

和 Koiter 理论一样，若 $\lambda^{(2)c} > 0$ 则  $C$  点是稳定的对称分支点；若 $\lambda^{(2)c} < 0$ 则  $C$  点为不稳定的分支点。

对缺陷体系的分析，用缺陷参数 $\psi$ 来度量。如图 3 所示，可以把 $\psi$ 看成是对理想体系的一种微小干扰，因此由理想体系基本平衡路径  $OC$  上任一点  $F$  变化到缺陷体系平衡路径  $OM$  上对应点 $F'$ 的总势能，经坐标变换后可写为

$$A(u_i, \lambda, \psi) = V(Q_1^F + a_{ij}u_j, \lambda, \psi)$$

变换 $q_i = a_{ij}u_j$ 使得 $A(u_i, \lambda, \psi)$ 的二次型矩阵对角化，即 $A_{ij}(0, \lambda, 0) = 0 (i \neq j)$ 。

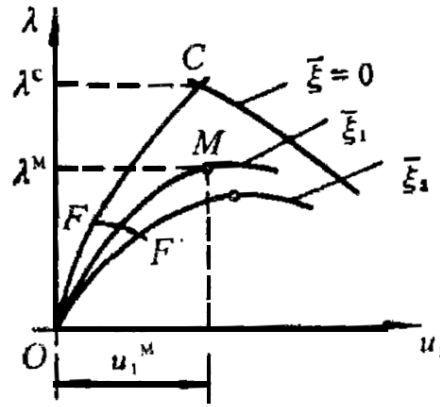


图3

则缺陷体系平衡路径上极限点 M 的轨迹( $u_1^M(\psi)$ ,  $\lambda^M(\psi)$ )可以根据下式确定：

$$A_i(u_j^M, \lambda^M, \psi) = 0$$

$$\Delta = |A_{ij}(u_j^M, \lambda^M, \psi)| = 0$$

对之进行和前面一样的离散摄动，在缺陷参数比较小的情况下，可求得计算缺陷敏感度的近似公式

对于不对称分支点：

$$\left(1 - \frac{\lambda^M}{\lambda^c}\right)^2 = -4\lambda^{(1)c} \frac{\dot{A}_1^c}{(\lambda^c)^2 A_{11}^{c'}} \psi$$

其中 $\dot{A}$ 表示对 $\psi$ 的偏微分。

对于对称分支点：

$$\left(1 - \frac{\lambda^M}{\lambda^c}\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{-1.5\lambda^{(2)c}}}{2} \frac{\dot{A}_1^c}{(\lambda^c)^{3/2} A_{11}^{c'}} \psi$$

可见当 $\lambda^{(2)c} > 0$ 时，缺陷的存在不会引起压力的下降，故临界点 C 是稳定的对称分支点，这和 Koiter 理论的结果吻合。但可以看出，离散坐标的分析方法，最后都归结到数值计算，在计算技术高速发展的现在，具有尤其广阔的发展前景。

## 六、Abaqus 的后屈曲分析

目前诸如 Ansys、Abaqus 等商用有限元计算软件的功能已经十分强大，即使不懂得上面所说的原理，合理设置加载和分析步也能获得理想的后屈曲分析结果。下面我们选取 Abaqus 的后屈曲分析功能进行简单尝试：

根据 ABAQUS Benchmarks Manual 官方手册的介绍，后屈曲分析一般分为两步。第一步，特征值屈曲分析，这步分析是线性的，故而只能在小变形情况下进行，也即进行模态分析。据此得出临界荷载（一般取一阶模态的特征值乘以所设定的荷载）。通过在 inp 文件中做修改：

\*node file, global = yes

\*End Step

据此可以将下一步后屈曲分析所需要的初始缺陷的结点输出为.fil 文件。第二步，后屈曲分析，此步一般定义为非线性，原因在于是在大变形情况进行的，采用位移控制加修正的弧长法，可以定义材料非线性。加上初始确定，可以进行非线性屈曲分析。

按照上述步骤，调整加载和迭代参数，笔者尝试计算了单个欧拉梁和以铁木辛柯梁为单元的网络结构的后屈曲行为，应力云图见图 4 和图 5。

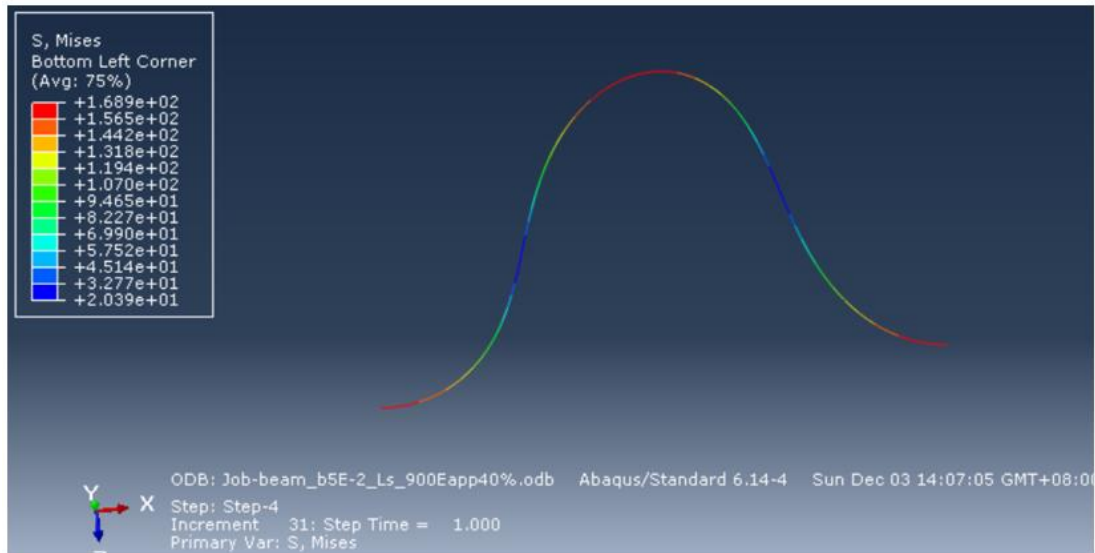


图4

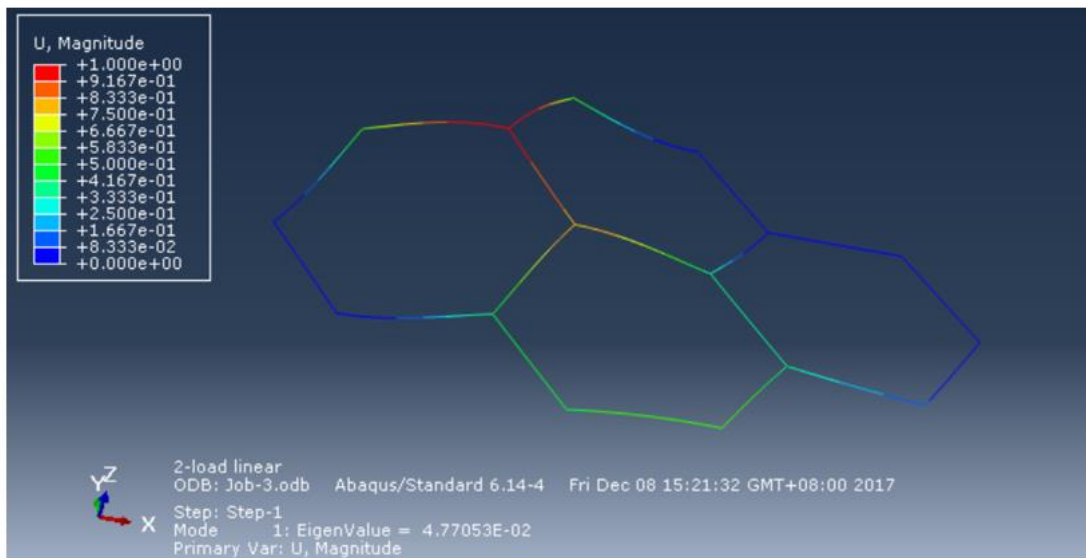


图5

虽然条件所限，无法做实验对照计算结果，但是通过线性分析的初步检验，所得的后屈曲计算结果还是比较吻合的。这对于一些缺少力学基础的工程人员，是个很好的进行简单屈曲分析的方式。

然而，虽然 Abaqus 等商用软件的屈曲分析已经十分方便，但是仍经常出现迭代不

收敛、与实验结果相左等情况。在笔者上文的实验中就经常出现，查阅相关资料发现确实并非个案。如果想要在此基础上进一步改进有限元的后屈曲计算，显然需要对上述力学理论的进展有更深入的研究。诸如基于 Koiter 初始后屈曲理论以及 Newton 法的增量迭代技术而提出的自动跟踪非线性平衡路径的降阶方法等，都是进一步建立近现代力学理论有限元格式的成果。

## 七、结语

经过上文的综述可以看出，结构在不断加载的过程中，呈现出丰富的后屈曲行为。笔者一开始选择后屈曲分析作为调研题目，也是因为觉得后屈曲是非常有趣的研究。不仅在后屈曲过程中可能出现多次刚度的上升和下降（甚至负刚度），还可能跳变出多种稳定状态。

从古典的欧拉失稳等屈曲理论到近现代的摄动法、离散法和高度集成并图形界面化的商用有限元软件，我们对后屈曲的刻画更加细致，方式也从理论、实验增加了数值计算的强有力的工具。可以想见，有限元的方法会在后屈曲中扮演越来越重要的角色，指导更多的工程应用。

## 八、致谢

研究过程中用到了许多清华大学张雄老师《有限元法基础》课程中的内容。感谢张老师的指教和助教宋言学长对 Abaqus 使用等方面的指导！

本文的参考文献之一是清华大学庄茁老师等著的《Abaqus 非线性有限元分析与实例》，笔者在依书尝试的时候遇到一些问题。庄茁老师听说是有关本书的问题，热情地给予了解答。特此致谢！

## 九、参考文献

- [1] Bushnell D., Buckling of shells-pitfall for designers, AIAA J., 19,9(1981): 1193-1226.
- [2] Koiter W T. Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht (on the stability of elastic equilibrium). Thesis, Delft H J Paris, Amsterdam, 1945, English translation issued at NASA TTF-10,1967,833.
- [3] Tsien H S. A Theory for the Buckling of Thin Shells. J.Aero.Sci.,1941,8
- [4] Kaman Th von, Dunn L G, Tsien H S. The buckling of spherical shells by external pressure, J.Aero.Sci.,1937,7
- [5] 黄玉盈, 金梦石, 雷国璞. 弹性后屈曲理论及其发展趋势[J]. 固体力学学报, 1981(3):132-143.
- [6] 庄茁 等. ABAQUS 非线性有限元分析与实例[M]. 科学出版社, 2005.

- [7] 梁珂, 孙秦, zafer,等. 结构非线性屈曲分析的有限元降阶方法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2013(2):105-110.
- [8] 黄宝宗, 任文敏. Koiter 稳定理论及其应用[J]. 力学进展, 1987(1):32-40.
- [9] 范钦珊, 殷雅俊, 唐靖林. 材料力学.第 3 版[M]. 清华大学出版社, 2015.