Beam 单元说明文档

邓博元 2015011604

2017 年 12 月 10 日

1　分片试验

对梁进行的不规则划分如图：

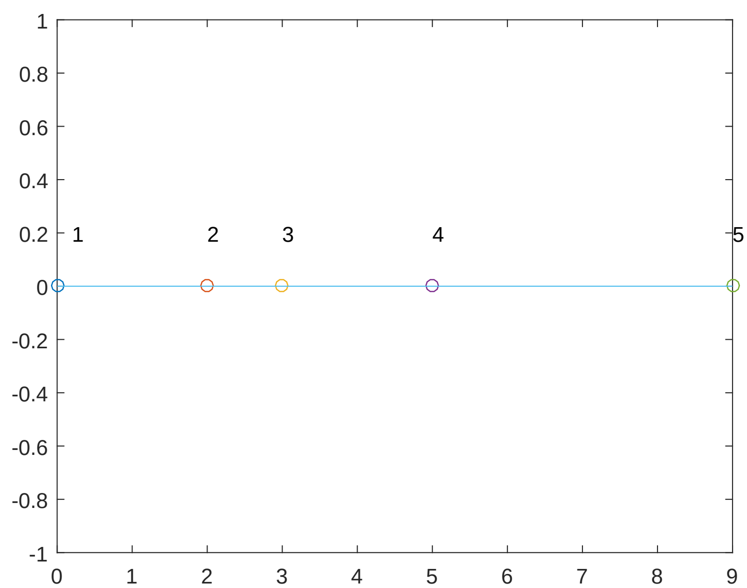

图 1: patch test

采用的位移场为 $\frac{d\theta}{dx} = const = 0.1$，边界条件为两端简支，则可以得到 $\theta = 0.1x - 0.05, w = 0.05x^2 - 0.05x$，进行分片试验，节点位移和转角精确，通过分片试验。详细数据见 beam patch test 的 dat 和 out 文件。

2 收敛率分析

对于长度为 8 的梁，依次等分为 2,4,8 个单元，如图：

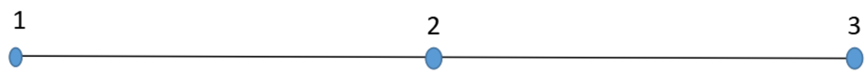

图 2: 2 单元

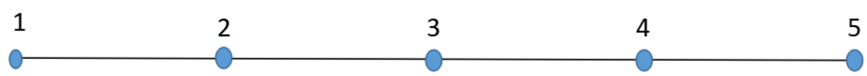

图 3: 4 单元

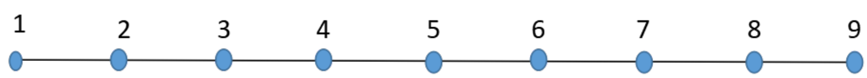

图 4: 8 单元

经过验证，欧拉梁单元可以精确表示三次位移场，故为了计算误差的收敛率，采用四次位移场，即 $w = 0.0001x^4$

误差的定义采用的是能量范数，即 $\|e\|_{en} = \left(\frac{1}{2}\int EI\left(\frac{d\theta^h}{dx} - \frac{d\theta^{ex}}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\int EI\left(\frac{d^2w^h}{dx^2} - \frac{d^2w^{ex}}{dx^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，考虑到 E，I 为常数，最后实际积分量为 $e = \left(\int\left(\frac{d^2w^h}{dx^2} - \frac{d^2w^{ex}}{dx^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

节点位移的计算结果见 convergence 的 out 文件，处理过程见 matlab 文件，计算结果如图：

得到收敛率为 1.5 阶。

3 基本原理及编程思路

基本原理已在课程中讲过，这里就不再把公式敲一遍了。但是需要注意的是，课堂上讲的是二维情况，但是我们需要考虑三维情况，即每个点有 3

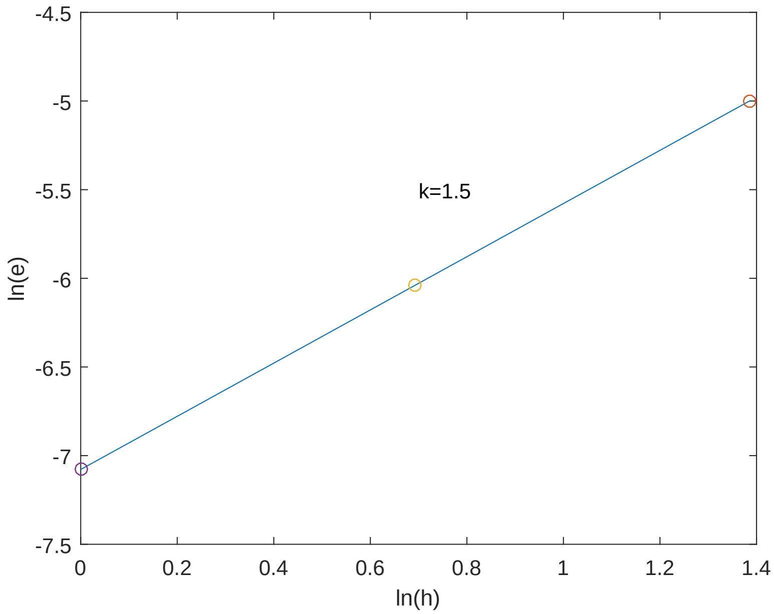

图 5: ln(h)-ln(e) 关系图

个平动自由度和三个转动自由度。

其中，一个平动自由度对应梁的轴向拉伸，一个转动自由度对应梁的扭转，剩下的两组转动自由度和平动自由度分别对应两个相互垂直的平面内的弯曲，这四个模态是相互解耦的，因此可以利用 scatter 的原理直接得出 12×12 的单元刚度阵：

$$K^e=\begin{pmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^2} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^2} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{pmatrix}$$

图 6: 单元刚度阵

而对应的位移向量为：

$$d^e=\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{pmatrix}$$

右侧的载荷向量组装方式和课堂所讲相同，单元方程组装后之后按照 LocationMatrix 的顺序来组装总体刚度阵即可。