板壳单元构造与广义协调元

清华大学钱学森力学班 2015 级 黄云帆*

摘要：板壳结构与块体材料相比，不仅重量大为减轻，同时还保证了结构的强度刚度特性，因此在工程中有着极为广泛的应用。板结构的中面在变形前为平面，因此往往以承受弯矩为主；而壳结构由于其中面具有一定的初始曲率，能够将剪切载荷分散到面内分量中。作为两种典型的构造单元，板单元和壳单元之间也有着密不可分的联系，一种典型的壳单元——平板壳单元便是从板单元演化而来。本文从典型的板壳位移元入手，简要综述了板壳单元的基本构造思路，并就单元协调性与 θ_z 向抗扭刚度缺失两个问题进行了讨论，引出了广义协调元这一重要概念。

关键词：板壳单元；强度刚度特性；位移元；协调性

1 引言

当结构在不同方向的尺度存在明显差异时，三维实体单元由于其过高的计算代价或者糟糕的数值病态问题而具有了较大的局限性。板壳结构便具有上述特征，即在某一方向的尺度远小于其他两个方向，因此这时在应用有限元方法解决相关问题时，有必要为其专门构造相应的单元。

引入板壳单元通常有两种方法。一种是首先应用板壳理论，引入经典假设，这通常会导致一定的近似；接着以此为基础，对单元进行离散，这同样又会引入一定的近似。这种方法不总是行得通，尤其是当壳结构过于复杂时，这时我们往往采用另一种方法，即直接建立单元离散。一种典型的壳单元——平板壳便是一种典型的例子。

下面，我们先从基本的板壳位移元入手，以此为基础引出板壳单元的基本构造思路。接着，本文以问题为导向，就如何保证单元收敛性以及如何处理板单元与平板壳单元常常遇到的 θ_z 方向刚度缺失这两个问题分别有针对性地给出了解决思路。

*Email: huangyf15@tsinghua.edu.cn

2 板壳位移元简述

2.1 经典板壳理论

经典板壳理论通常由三种构造方式，即微元法、弹性力学方法与能量方法。微元法通过对板壳微元进行受力分析，通过主矢为零与主矩为零建立板壳的基本方程；弹性力学方法从三维弹性力学方程出发，通过对方程积分来构造内力分量，进而得到板壳的控制方程；能量方法则以能量分析为基础，构造板壳结构的能量泛函，利用各类能量原理建立泛函极值问题，从而得到板壳的控制方程。微元法与弹性力学方法在本质上是类似的，即都是从力的观点看待板壳问题；而能量方法采用的是能量观点，在板壳结构极为复杂时往往更为有效，因此具有更普适的特点。

板壳理论共同的基本假设之一是平截面假设，这实际上规定了截面上各点具有相同的剪应变，这即便在矩形截面的情形也远非正确。针对这一情况，工程上往往采用增加修正系数的方法使得修正后的结果在应力平均或者剪切应变能的意义上与精确解对应的真实情形等价。板壳理论其他的共同基本假设还包括无挤压假设、等挠度假设等等。对于厚度方向远小于其他两个尺度的情形，我们也常常采用

直法线的假设，即变形前中面垂线上的点仍位于变形后中面的垂线上，这实际上规定了截面上任一点的剪应变为零。这在厚度不大时是一个非常接近实际情况的近似，但在厚度较大的情形、支撑附近以及局部三维受载区域就会失效。

在理论模型的意义上，板壳理论处理的对象主要包括薄板 ($h \ll l, i.e. \frac{h}{l} < \frac{1}{5}$)、厚板 ($h < l, i.e. \frac{h}{l} < \frac{1}{5}$)、薄壳 ($h \ll l, i.e. \frac{h}{l} < \frac{1}{20}$) 等等。对于薄板来说，根据其变形后挠度与板厚的量级关系，可以分为小挠度理论与大挠度理论，后者的典型特征是变形后结构曲率不可忽略，这直接导致了板中面的伸缩与剪切效应不可忽略，这一点与薄壳理论是类似的。对于薄壳来说，从实际问题建模的角度，常常分为轴对称壳、扁壳和深壳几种形式，这些单元在下面的小节中会有更详细的说明。

2.2 板的控制方程与板元

按照变量之间耦合作用的强弱，可以将板的控制方程写为混合形式和不可约形式两种。混合形式的特点是独立变量不唯一，下式便是一例：

$$\begin{cases} L^T D L\boldsymbol{\theta} + S = 0, \\ \nabla \boldsymbol{S} + \bar{q} = 0, \\ \boldsymbol{S} = \alpha(\nabla w - \boldsymbol{\theta}). \end{cases}$$

其中，$\alpha = \kappa G t$，以及有

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & & \partial_y \\ & \partial_y & \partial_x \end{pmatrix}^T.$$

以此为基础的板单元常称为 Mindlin-Reissner 板单元，这种板单元考虑了板的剪切作用，且对位移型变量与转角型变量进行独立插值。

不可约形式是在混合形式的基础上引入了某些人为的近似或约束，从而使相互独立的基本变量个数减少，这等价于引入了罚函数或者修改了能量泛函。最常见的不可约形式是引入薄板假设 $\nabla w - \boldsymbol{\theta} = 0$ 后的 Kirchhoff 板，这时控制方程退化为

$$(L\nabla)^T D L \nabla w - \bar{q} = 0.$$

可以看到，这时控制方程以挠度 w 为单一变量，方程的阶次也相应地提高了。薄板假设相当于忽略了板的剪切作用，且需要对挠度采用更高阶的形函数进行插值。

2.3 壳的控制方程与壳元

壳结构由于其复杂性，仍然没有一个统一形式的控制方程，而更多的是针对具体问题的特点进行具体分析，这时直接构造单元离散的方法便显得比较重要。一个例子是针对轴对称壳的截锥单元，由于问题由二维降为了一维，因此可以通过沿轴线对壳体进行单元划分，从而使问题得到了极大的简化。

对于一般的二维壳，前文已经说明可以分为扁壳和深壳两种。一种统一的处理方法是应用平板壳单元，它是由板单元向壳单元的自然延伸，即对曲面壳采用局部平面近似。具体来说，一般壳可以采用三角形板单元，而圆柱壳则可以采用矩形板单元。对于扁壳结构，可以应用扁壳单元进行离散。它的核心思想是利用扁壳单元曲率不大的特点，将流动坐标系近似认为是正交坐标系，这为壳单元格式的建立提供了很大的方便。当单元划分非常细时，由于局部梯度趋于零，因此深壳在原则上也可以用扁壳单元进行近似。然而需要注意的是，由于壳单元的优势正是在于当网格不是很细密时便能够较准确地逼近曲面，而当单元尺寸非常小时，扁壳单元与平板壳单元的差别实际上已经可以忽略不计，因此针对性地发展深壳特型结构的单元仍然具有重要的工程实际意义。

除了上面所述的直接离散单元与扁壳单元两种壳单元构造方式外，还有另一种从六面体实体单元退化而来的所谓“退化型壳单元”，这与“厚壳”有一定类似。然而，这种单元在应用中会出现剪切闭锁、薄膜闭锁等各类闭锁问题，这都是六面体实体单元对弯曲变形描述能力不足造成的。目前，退化型壳单元仍然是研究的热点之一。

3 板壳单元基本构造思路

上一节简要介绍了一些重要的板壳位移元。实际上，位移元并不是构造板壳单元的唯一思路。从单元的构造方法上说，主要可以概括为应用能量原理直接从泛函入手，以及对控制方程加权余量进而构建弱形式两种途径。两种方法各有优势，能量原理方法由于能量泛函的存在，给收敛性分析提供了很大的方便；但当能量泛函不存在时，采用加权余量的方法往

往能够更灵活地构造出可能有效的有限元格式。除课程中已经讲述过的基于最小势能原理的协调位移元外，基于能量原理的各种有限元格式分类如下：

非协调位移元 基于分区势能原理，即在系统势能中增加了一个用于表征连接界面处不连续的位移场的能量项。当泛函取驻值时，对应于分区弹性体的全部控制方程、边界条件以及交界面的链接条件。

广义协调位移元 基于分区势能原理的退化形式，将在下一节具体阐述。

应力杂交元 采用应力试函数，满足平衡微分方程。该单元基于最小余能原理。

混合元 采用混合试函数，含位移变量、应力变量和应变变量。该单元基于广义变分原理。

分区混合元 部分单元采用位移试函数，其余单元采用应力试函数。该单元基于混合能量原理。

4 延伸：广义协调元

在应用有限元解决实际问题时，如何根据结构的特性选取合适的单元是最关键的问题。度量合适与否的标准主要有 Validation 和 Verification 两种，即有效性与可行性。就板壳问题而言，就存在针对上述两个标准的典型疑难问题。值得注意的是，这两个问题的解决都离不开广义协调元的概念。

4.1 两个典型问题及其解决思路

首先是单元试函数的选择，即如何保证收敛性。对于不可约形式的板壳控制方程，通过引入人工近似，使方程变为单变量的。然而，由于此时形函数的阶数要求较高，导致很难满足单元公共边上的协调性要求。即使采用协调单元，其精度也普遍较低。对于可约形式，由于对各变量直接独立插值，因此对试函数的阶数要求有所降低。然而，这种形式的位移元存在着完备性的问题，尤其是很有可能出现各种类型的闭锁问题。即便采取诸如选择性减缩积分的策略，仍然会出现零能模态的奇异现象。针对如上问题，龙驭球等人与 1987 年首次在文献 [1] 中提出了广义协调元的概念，通过设置“极限协调”条件这一严格方式从根本上解决了上述问题。

另一个问题是在应用板单元或平板壳单元时，由于板元和壳元在局部 θ_z 方向的刚度项缺失，导致当某一节点所连单元均在同一平面内时，系统刚度阵在对应自由度缺秩从而奇异。这时，一般有两种解决思路。其一是，增加节点所连单元共面与否的判断步骤，对于所连单元共面的节点，删除其在局部 θ_z 方向的自由度。这种方法的思路非常直接，然而在操作时由于增加了判断步骤，当单元个数较多时会大幅增加计算时间。另一种思路是，为板壳单元增加对应旋转自由度上的刚度，从而在根本上解决刚度缺失的问题。这一思路的好处是省去了判断步骤，但由于引入了 θ_z 的旋转自由度，因此增加了构造单元刚度阵时的难度。

4.2 单元协调性与广义协调元

广义协调元方法最初时针对薄板有限元要求具有 C^1 连续性这一难题提出的，它在协调元与非协调元开辟出一条新的道路：一方面克服了协调元难以构造和过于刚硬的缺点，另一方面又消除了非协调元不一定收敛等致命弱点。下面以薄板弯曲为例加以说明。

协调元对应变分原理的能量是势能 Π_p 泛函

$$\Pi = \sum_e \Pi_p^e.$$

同时要求单元挠度、法向倾角和切向倾角在边界上保持精确的协调，即要求

$$\forall x \in \partial A^e, w = \tilde{w}, \frac{\partial w}{\partial n} = \tilde{\Psi}_n, \frac{\partial w}{\partial s} = \tilde{\Psi}_s.$$

这里势能 Π_p 是以位移场 w 为唯一变量的单类变量场泛函，这也直接带来了协调性要求过严、性能偏硬的问题，但这时泛函形式非常简单、收敛性容易保证。

非协调元对应变分原理的能量分区势能 Π_{mp} 泛函

$$\Pi_{mp} = \sum_e (\Pi_p^e + \mathrm{H}_p^e).$$

其中 H 是单元边界上对应于不协调位移的附加能量，相当于是精确协调条件的加权余量的总

和。这时分区势能 Π_{mp} 含有位移和边界力两类变量场，而这时为了简便，构造非协调元时不是应用分区势能泛函 Π_{mp} 而仍采用势能泛函 Π_p，从而不能保证收敛。这时尽管挠度场易于设定，但泛函的形式较为复杂；如果随意采用简化后的泛函 Π_p，则有不能保证收敛。

广义协调元既保证了泛函形式的简单性，又兼顾了挠度场设定的简便性。具体来说，其形式为

$$\Pi_{mp} = \sum_e (\Pi_p^e + \mathrm{H}^e)$$

$$\mathrm{H}^e = \int\limits_{\Gamma^e} p^T(u - u_a)d\Gamma =: \int\limits_{\Gamma^e} p^T u_\lambda d\Gamma$$

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{H}^e = 0.$$

由此可见，广义协调元在粗网格情况下属于非协调元，在网格无限细分时逼近协调元。其中，$H \to 0$ (对于无限细分网格) 的条件可以等价地替换为 $H = 0$ (对于常应变状态和刚体位移状态)。

广义协调元法可以看作是能量法和加权余量法相结合的方法。与离散 DKT 板元不同的是，广义协调元不是令协调条件在有限个点上满足，而是要求其在边界上以某种加权积分的形式满足，这不仅使得收敛性从根本上得到了保证，而且通过权函数的各种选择方式使其拥有了更大的灵活性，如点协调、边协调、周协调以及相互组合的各种形式的协调条件。值得注意的是，针对第一个问题提出的假设挠度场和剪应变场单元，以及针对第二个问题提出的新型膜单元，在本质上都属于广义协调元。

References

[1] 龙驭球，辛克贵．广义协调元．土木工程学报，1978, 20(1): 1∼14.

[2] 龙驭球，龙志飞，岑松等．新型有限元论．北京：清华大学出版社，2004.

[3] 王勖成．有限单元法．北京：清华大学出版社，2003.

[4] 薛守义．有限单元法．北京：中国建材工业出版社，2005.

[5] 黄克智等．板壳理论．北京：清华大学出版社，1987.