模态分析简要报告

杨正宇

2017年12月16日

1 模态分析思想简述

振动是日常生活中普遍存在的现象.对于由弹簧和质量体组成的一个单自由度系统,我们可以通过受力方程$kx + m\ddot{x} = 0$得到其固有频率$\omega = \sqrt{k/m}$. 对于一个多自由度的系统,我们可以求出它的多个自由振动频率,这时我们考虑的方程是一个多自由度的广义特征值问题,即$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$.像一般的特征值问题一样,对于每一个特征值$\lambda_i = \omega_i^2$,存在一个向量$\mathbf{x}_i s.t. |\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M}|\mathbf{x}_i = 0$.所有特征向量可以构成一组基,任何一组位移都可以表示成这组基的线性组合,那么就可以说明这组位移为初始位移的振动相当于分解之后不同振型在各自频率下振动的加和.因此,在有限元分析过程中,也可以将分解后的模型视为一个具有线弹性的分布质量多自由度振动系统,通过解其广义特征值问题得到其振型与对应频率. [1] [2]

2 问题分解

有限元模态分析可以大体上分为方程(模型)的建立和求解两部分,其中方程的建立主要是指刚度矩阵和质量矩阵的组装,而求解则主要是对于对应广义特征值的求解.

2.1 方程建立

我们可以直接利用有限元问题的刚度矩阵.如果这样的话,注意到刚度矩阵描述的是节点广义自由度与节点广义力之间的关系,我们建立的质量矩阵必然也是等效到节点上的等效质量矩阵.利用哈密顿原理,我们得到一个数学上比较严格的等效矩阵的形式,即$\mathbf{M} = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T\mathbf{N} \mathrm{d}\Omega$. 这种矩阵叫一致质量矩阵,此外还可以简单地将质量分布置于对角上得到一个效率更高的形式,称为集中质量矩阵,其生成方法主要有行相加法,对角元素放大法,节点积分法等.

2.2 广义特征值问题求解

我们希望对于问题$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$求出其特征值和特征向量.特别地,在工程问题中,我们一般只希望求解其较小的几阶特征值.为了这个目的,我们可以选取一组基向量,如果基向量选取合适的话,其线性组合就能比较接近较小的几阶特征值,这时我们求取的特征值问题变为$\mathbf{K\Phi} = \mathbf{M\Phi\Lambda}_m$,其中$\mathbf{\Phi}$为$m$个列向量组成的振型矩阵.通过将这个公式前乘一个$\mathbf{\Phi}^T$,我们就能实现将多阶的广义特征值问题缩减的目的.

这时我们要解决的问题是,如何保证这些基向量的选取合适呢?一方面我们要采取迭代的方法.我们通过解缩减后的广义特征值问题,理论上应该是在已有的空间中相对接近原特征值问题的解.我们对于得到的这组解进行逆迭代,这样能够起到显著放大较小特征值的目的.上面的方法就是瑞利-里兹法的主要内容.另外,注意到初始基向量的选取也会对收敛的速度产生影响,我们也有很多选取初始基向量的方法,比如Lanczos方法.

在这时我们尚未涉及到广义特征值问题本身如何求解.这里有两种方法,其一为广义Jacobi方法,其思想是设计矩阵使得刚度矩阵与质量矩阵同时对角化.广义Jacobi 方法利用的变换矩阵的形式为$\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$,其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & i=j;\\ \alpha & i=m,j=n;\\ \gamma & i=n,j=m;\\ 0 & \text{others.}\end{cases}$$

这个矩阵的用意在于使得对应的非对角元在变化之下同时归零.因为在对于每个对角元扫描的过程中都有可能使得其他对角元重新不为零,我们可以采用阀值雅克比法.

另一种是Householder-QR分解法.首先这种方法只对于一般特征值问题适用,因此可以将原问题转化为一般特征值问题$|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I}|=0$.Householder分解主要是将矩阵变化为三对角矩阵,方便进一步的QR分解;将分解得到的矩阵执行$\mathbf{K}_{n+1}=\mathbf{R}_n\mathbf{Q}_n$进行迭代,最终会收敛于一个对角阵,也就是所求矩阵的特征值阵.这样再利用逆迭代法,就能很容易地得到特征向量的值.

求解出这个问题之后,我们还可以利用Sturm序列检查是否已经得到了所有的特征值. [2]

3 对于程序实现的讨论

3.1 组装质量矩阵

不同的单元需要不同的质量矩阵,在程序实现的过程中需要对质量矩阵另外使用一个Skyline Matrix进行组装,并编写对应单元的质量矩阵,过程与组装刚度矩阵比较类似.通过CMake增加对应的分支选项,从而在编译时如果以振动模态编译则进行组装,以免影响主分支的运行效率.

3.2 子空间迭代法的实现

对于子空间迭代法,主要按照书上的步骤进行实现.初始向量的生成设想先编写一个相对简单的初始向量,之后再尝试增加Lanczos功能.对于其他的内容,可能通过调用矩阵运算库,调用其他语言借口(FORTRAN程序或MATLAB)或者通过MATLAB语言转C++功能来实现.虽然广义Jacobi方法是受到推荐的,但是Householder-QR方法相对来说调用库或者MATLAB函数更加容易,所以可能会更优先考虑.

4 对于一般模态分析的进一步讨论

一般来说,在结构中还会产生阻尼,这一部分要用阻尼矩阵加以描述.阻尼将给结果带来复特征值,最终求解得到的振动模态也会是一个复模态.对于复模态来说,频率中的虚部代表衰减的情况,而复模态向量的虚部会带来一个相位角,其结果是该模态在振动过程中不再具有一个特殊的形状.对于比例结构阻尼,可以类似上面的方法分析各阶振型对应的复特征值;而对于明显的非比例阻尼则更加复杂,可以考虑使用拉氏变换进行分析. [3]

此外,我们也可以通过工程中测得的振型对于有限元得到的结果进行修正,一种方法是约束优化法,主要思想是通过将实际测得的频率与振型进行扩充,利用这些振型生成修正矩阵,在满足对应约束的条件下使范数$\|[M]^{-1/2}[\Delta m][M]^{1/2}\|$以及$\|[M]^{-1/2}[\Delta k][M]^{1/2}\|$最小,详见参考文献. [3]

References

[1] 吴福光, 蔡承武, 徐兆. 振动理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987

[2] 张雄, 王天舒. 计算动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.12

[3] 方远?, 陈安宁, 董卫平. 振动模态分析技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.5