

有限元大作业报告

暨 STAP++ 程序说明文档

组长：黄云帆

组员：陈一彤 邓博元 管唯宇 杨正宇 卢晟昊

2017 年 12 月 28 日

Contents

1 问题描述与成果展示	3
1.1 问题简述与评测结果	3
1.2 变形图像与应力云图	4
2 STAP++ 程序框架	7
2.1 前处理模块	7
2.2 组装刚度阵 (略)	7
2.3 求解器模块	7
2.4 后处理模块	7
3 基本单元	8
3.1 Bar 杆单元 (略)	8
3.2 8H 实体单元	8
3.3 Euler-Bernoulli 梁单元	8
3.4 平板壳单元	8
4 其他单元	9
4.1 3T 平面单元	9
4.2 4Q 平面单元	9
4.3 9Q 平面单元	9
4.4 Timoshenko 梁单元	9
4.4.1 变分原理与精确解构造	9
4.4.2 有限元离散: 两种不同的格式构造方案	11
4.4.3 程序实现与收敛性分析	14
4.5 薄板单元	19
4.6 截锥壳单元	19
4.7 无限单元	19
4.8 过渡单元	19
5 扩展功能	20
5.1 稀疏求解器	20
5.2 模态分析	20
5.3 分片应力恢复 (SPR)	20
6 致谢	21
A 输入文件格式	22

B 输出文件格式 (后处理用)	23
C 优化思路简述	24
D 小组合作清单	25
D.1 主干工作	25
D.2 细节性工作	25

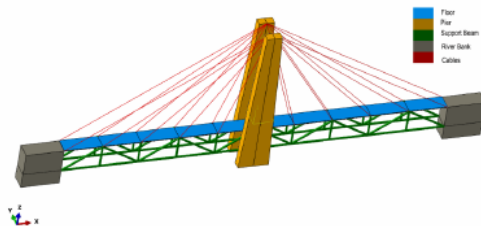
Chapter 1

问题描述与成果展示

这一章简述了大作业的题目要求并列举了评测结果 (见 1.1 节)，并就 STAP++ 的结果与 ABAQUS 的结果进行了对比分析 (见 1.2 节)。值得说明的是，在保证较高求解精度的基础上，本组在内存方面的优化取得了相同求解思路（即直接求解刚度方程）、相同测试环境下所有小组中的最好结果，

1.1 问题简述与评测结果

- 扩展后的STAP++程序必须能够求解给定的桥梁问题（同时包括杆单元、梁单元、六面体实体单元和板单元），并用ABAQUS进行验证



- 除以上基本要求外，各组可以自行选择增加其他功能，包括但不限于分片应力恢复(SPR)、稀疏求解器、半带宽优化、无限单元、超级单元、过渡单元、模态分析、动力学响应分析和弹塑性杆单元等。

Figure 1.1: Problem

算例具体描述如下：

<i>Job</i>	<i>NumNode</i>	<i>NumEle</i>	<i>S4R</i>	<i>C3D8R</i>	<i>B31</i>	<i>T3D2</i>
1	4.16E3	2.88E3	4E2	1.76E3	7.04E2	20
2	3.72E4	3.04E4	2.5E3	2.65E4	1.35E3	20
3	\	2.33E5	1E4	2.2E5	2.7E3	20
4	1.91E6	1.81E6	4E4	1.76E6	5.42E3	20

经过大规模评测，测试结果如下：

<i>Job</i>	t_A/s	t_B/s
1	0.27	0.1016
2	2.35	1.18585
3	25.0 _{6244M}	13.6638
4	\	3090.13

其中，环境 A ^[1] 和环境 B ^[2] 的说明见脚注。值得说明的是，本组在环境 A 中对 Job-3 进行内存优化测试的结果为 $1385M_{132.63s}$ ，在相同求解思路（即直接求解刚度方程）、相同测试环境下，取得了所有小组中的最好结果，同时保证了较高的求解精度。

1.2 变形图像与应力云图

这里我们仅以 Job-1 为例进行展示。其中，图 1.2 展示了利用 STAP++ 程序算得的系统变形后图像，由对称性可以初步判断计算结果的合理性。图 1.3 ~ 1.5 分别展示了利用 STAP++ 程序或 ABAQUS 软件计算得到的系统应力云图。为了便于对照，这里二者的位移放大倍数均取成了 107.7，并且尽可能地选取了一致的应力标尺。

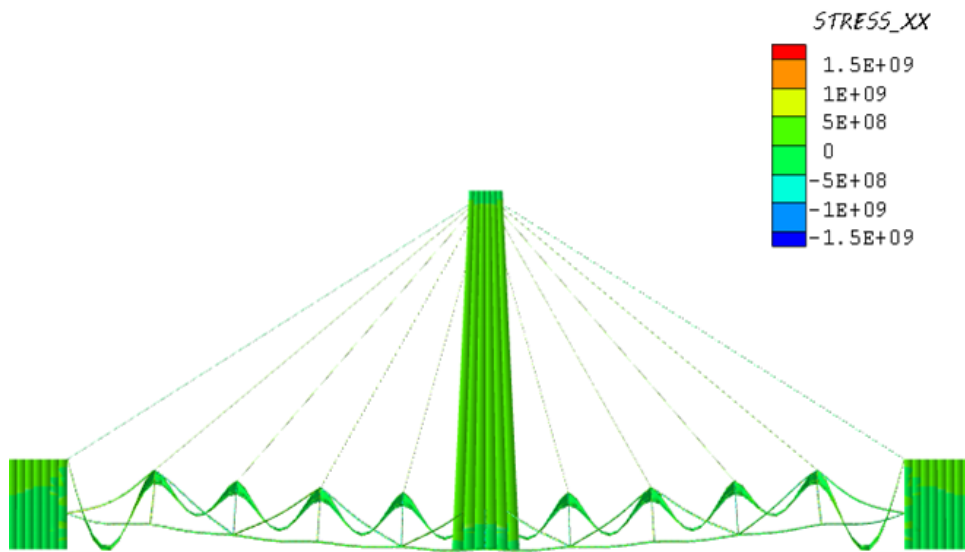


Figure 1.2: STAP++ 算得的系统变形后图像

对比图 1.3 与图 1.4 可以发现至少三方面的差异：

1. 梁的位移差异很大，STAP++ 的结果中甚至出现了明显的梁外翻的现象。这是由于在 STAP++ 程序中，将桥面附近相连的平板壳单元与梁单元的旋转自由度处理为固接约束，因此梁会随着桥面的平板壳单元发生较大的旋转。相比之下，由于固接的方式更接近工程实际，因此我们建议在下排两侧梁之间增加一些梁单元进行加固，以提高子系统的刚度。
2. 梁的图示应力有一定差异，STAP++ 的应力云图比 ABAQUS 的结果大了很多。实际上，这一差异是由于 STAP++ 输出的是梁表面的应力，而 ABAQUS 输出的是中性面上的应力，因此这一差异的出现是不足为奇的，并且 STAP++ 的输出更有利于材料力学中强度准则的应用。
3. 桥中心的桥柱变形有一定差异，STAP++ 的结果中变形稍小。注意到图 1.4 中桥柱顶端出现了明显的网格畸变，可以初步判断出现了零能模态。通过查阅 ABAQUS 文档我们了解到，建模时对三维实体单元使用的 *C3D8R* 实际上利用了减缩积分，而我们的 STAP++

¹环境 A: CPU: Intel Xeon CPU e5-2620 v4, 2.10Hz, 16核; 内存: 64G; 操作系统: win10; MSVC 编译, O2 优化.

²环境 B: CPU: Intel Core i9-7920X, 4.40Hz, 12核; 内存: 32G; 操作系统: ubuntu16.04; clang 3.8.0 编译, O3 优化, Intel Parallel Studio XE 2018.1.038 静态链接.

使用的是精确积分。因此，后者会出现一定程度的剪切闭锁，而前者尽管避免了剪切闭锁，却很有可能出现零能模式。我们还利用 ABAQUS 选取精确积分的实体单元进行建模，由此得到的图 1.5 中网格畸变现象消失，并且位移结果相比之下明显变小，这也在一定程度上验证了我们的上述判断。

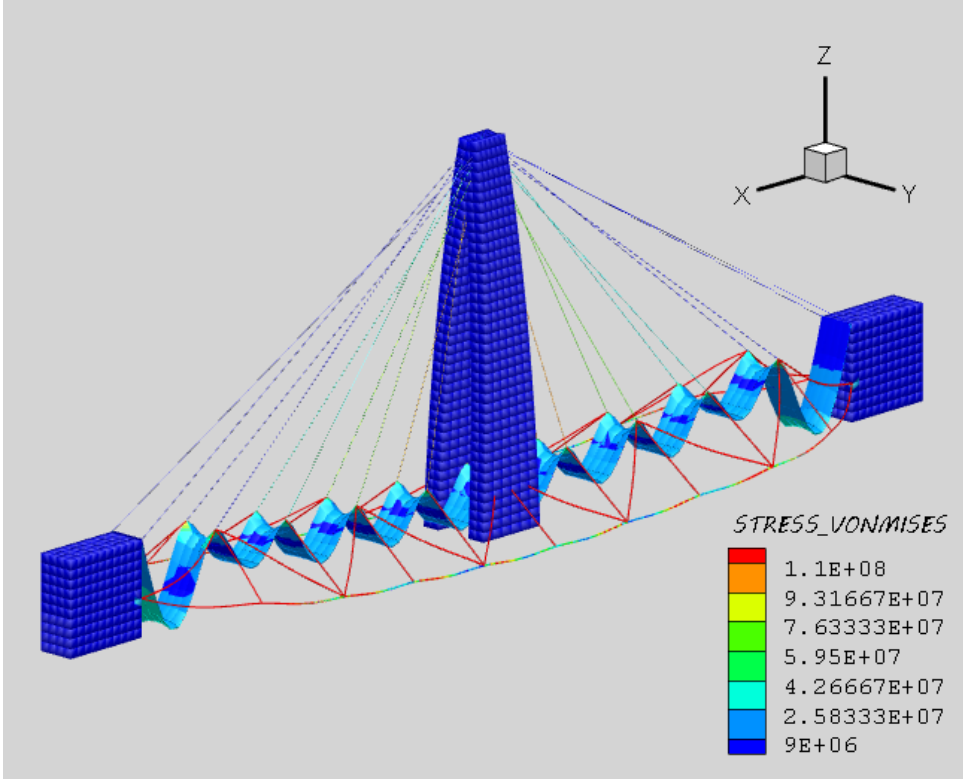


Figure 1.3: STAP++ 算得的 von Mises 应力云图

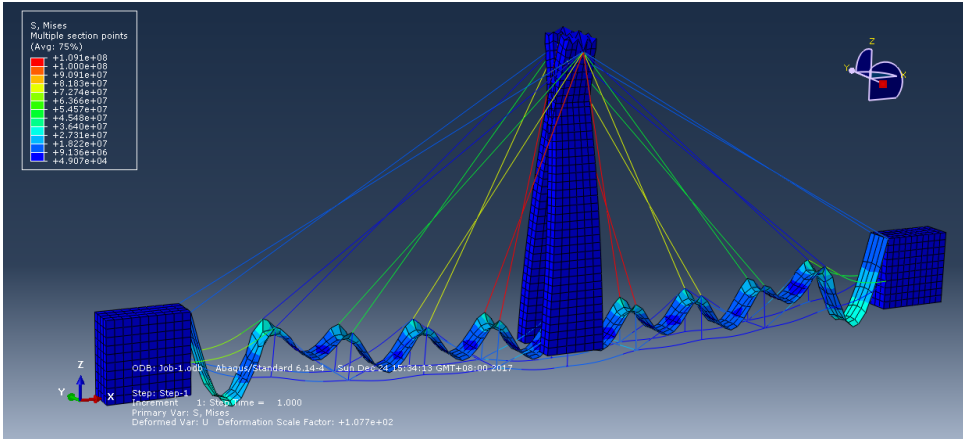


Figure 1.4: ABAQUS 算得的 von Mises 应力云图 (实体单元利用了减缩积分)

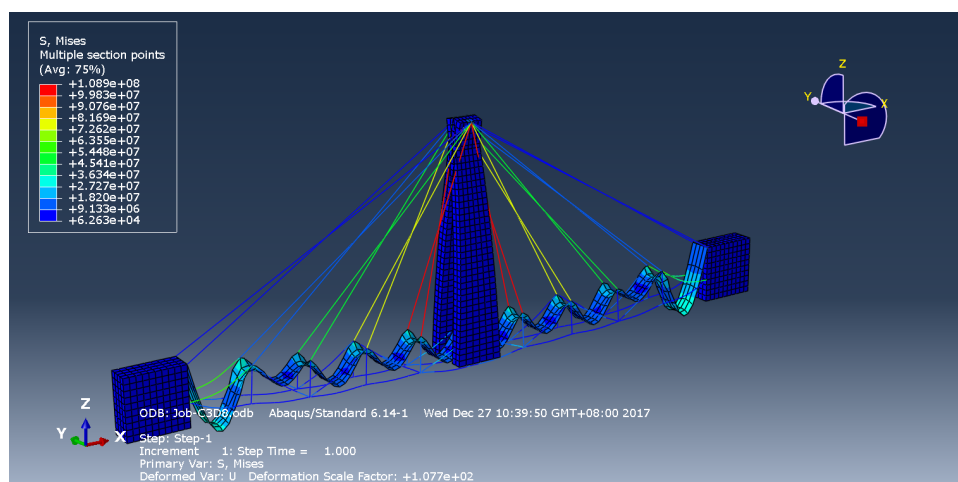


Figure 1.5: ABAQUS 算得的 von Mises's 应力云图 (实体单元未利用减缩积分)

Chapter 2

STAP++ 程序框架

这一章介绍了 STAP++ 有限元程序求解弹性力学问题的整体框架，包括前处理模块 (见 2.1 节)、组装刚度阵 (见 2.2 节)、求解器模块 (见 2.3 节)、后处理模块 (见 2.4 节)。其中，组装刚度阵模块包括单元刚度阵的生成以及总体刚度阵的组装两部分，前者将在第 3 章以及第 4 章详细说明，后者的过程是平凡的，这里不再赘述。

2.1 前处理模块

2.2 组装刚度阵 (略)

2.3 求解器模块

2.4 后处理模块

Chapter 3

基本单元

这一章着重介绍在桥梁算例中使用的各种单元类型。

3.1 Bar 杆单元 (略)

3.2 8H 实体单元

3.3 Euler-Bernoulli 梁单元

3.4 平板壳单元

Chapter 4

其他单元

这一章将在上一章的基础上介绍新增的其他单元，包括可用于 3 维背景空间的平面单元（包括 3T, 4Q, 9Q，详见 4.1, 4.2, 4.3 节）、为适应结构的尺度效应而发展出的构造单元（包括 Timoshenko 梁单元、薄板单元、截锥壳单元，详见 4.4, 4.5, 4.6 节）以及可用于解决更广泛的弹性力学问题的扩展单元（包括无限单元和过渡单元，详见 4.7, 4.8 节）。

4.1 3T 平面单元

4.2 4Q 平面单元

4.3 9Q 平面单元

4.4 Timoshenko 梁单元

Timoshenko 梁与 Euler-Bernoulli 梁是两种经典的梁模型，二者的共同之处在于均采用了平截面假设，即变形前位于中性轴法线上的点在变形后仍然共线。二者的关键性区别在于，后者的模型中采用了直法线假设，这直接导致了剪应变为零，因此只适用于剪切变形可以忽略的细长梁；而前者对此作了修正，采用了剪应变沿截面均匀分布的假设，从而可以解决包括短粗梁在内的更广泛的工程问题。需要指出的是，事实上梁的剪应变沿截面并非均匀分布的，因此在实际应用中还需进行系数修正。

下面，我们先从变分原理出发导出 Timoshenko 梁的控制方程，进而以此为基础构造分片试验所需要的精确解；接着，给出两种 Timoshenko 梁单元的构造思路及过程；最后，通过分片试验与收敛率分析两种途径对各种 Timoshenko 梁单元进行收敛性分析。

4.4.1 变分原理与精确解构造

变分原理与强形式

为简便起见，仅以挠度在 y 方向的情形进行推导。写出系统的势能泛函表达式

$$\Pi_p = \int_0^l \frac{1}{2} E I_z \kappa_z^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} \frac{GA}{k} \gamma_{xy}^2 dx - \int_0^l \bar{q} v dx - \bar{N}_{yj} v_j - \bar{M}_{zk} \theta_{zk}.$$

其中,

$$\begin{aligned}\kappa_z &\equiv \frac{d\theta_z}{dx}, \\ \gamma_{xy} &\equiv \frac{dv}{dx} - \theta_z.\end{aligned}$$

利用最小势能原理 $\delta\Pi_p = 0$ 可得到如下控制方程

$$EI_z \frac{d\kappa_z}{dx} + \frac{GA}{k} \gamma_{xy} + \bar{M}_{zk} \delta(x - x_k) = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\frac{GA}{k} \frac{d\gamma_{xy}}{dx} + \bar{q} + \bar{N}_{yj} \delta(x - x_j) = 0. \quad (4.4.2)$$

这里已经假定梁的截面性质沿梁均匀分布。这样就得到了 Timoshenko 梁控制方程的强形式。

与上面等价的另一种推导强形式的方法是, 利用截面局部坐标系中内力分量之间的关系

$$\frac{dM_z}{dx} + F_y = 0, \quad (4.4.3)$$

$$\frac{dF_y}{dx} + \bar{q} = 0. \quad (4.4.4)$$

这里没有考虑集中力载荷与集中力矩载荷的作用。其中,

$$\begin{aligned}M_z &\equiv EI_z \kappa_z = EI_z \frac{d\theta_z}{dx}, \\ F_y &\equiv \frac{GA}{k} \gamma_{xy} = \frac{GA}{k} \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right).\end{aligned}$$

悬臂梁：用于分片试验的精确解

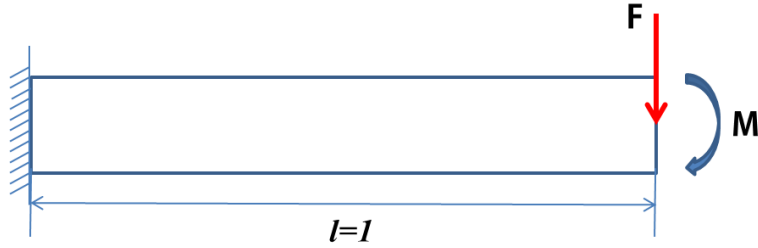


Figure 4.1: Example

我们考虑一端固定、另一端受集中载荷的矩形截面悬臂梁的情形, 如图 4.1 所示。材料/几何尺寸以及相应的材料/截面性质依次为

- Young's Modulus $E = 1000$, Poisson's ratio $\nu = 0.25$, $k = \frac{6}{5}$;
- $a := \text{Height}_y = 0.3$, $b := \text{Height}_z = 0.6 \rightarrow \text{Area} = 0.18$, $I_{yy} = 0.0054$, $I_{zz} = 0.00135$;
- $\text{Theta}_{y1} = 0$, $\text{Theta}_{y2} = 0$, $\text{Theta}_{y3} = -1$, $l = 1$.

由于 Timoshenko 梁模型的控制方程为线性方程, 因此只需分别求出两种工况下的位移精确解, 再进行线性叠加即可。下面给出了两种工况下的精确解表达式, 其中的坐标均在单元局部坐标系中。

1. 集中弯矩载荷 $M_z = 1$:

$$\begin{aligned}v &= \frac{Mx^2}{2EI_z} = \frac{10}{27}x^2 = 0.370x^2; \\ \theta_z &= \frac{Mx}{EI_z} = \frac{20}{27}x = 0.740x.\end{aligned}$$

2. 集中力载荷 $F_y = 1$:

$$\begin{aligned}
v &= -\frac{F}{6EI_z}x^3 + \frac{Fl}{2EI_z}x^2 + \frac{k}{GA}x \\
&= -\frac{10}{81}x^3 + \frac{10}{27}x^2 + \frac{1}{60}x \\
&= -0.123456790x^3 + 0.370x^2 + 0.016x; \\
\theta_z &= -\frac{F}{2EI_z}x^2 + \frac{Fl}{EI_z}x \\
&= -\frac{10}{27}x^2 + \frac{20}{27}x \\
&= -0.370x^2 + 0.740x.
\end{aligned}$$

4.4.2 有限元离散：两种不同的格式构造方案

坐标变换

我们首先约定，带“ \sim ”为单元局部坐标系中的量，否则为单元背景坐标系中的量。上述坐标系的定义如下

单元局部坐标系 以节点 1 为原点 \tilde{O} ，以 $1 \rightarrow 2$ 为单元局部坐标系的 \tilde{x} 轴， \tilde{y}, \tilde{z} 轴由惯性主矩的方向确定，且要求 $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ 成右手系。

单元背景坐标系 以节点 1 为原点 \tilde{O} ，以背景空间的 x, y, z 轴方向建立单元背景坐标系 $\tilde{O}xyz$ 。

对于无限小转动，角位移可以近似利用向量进行描述，因此可直接利用坐标转换矩阵

$$\mathbf{L} = \text{diag}\{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}\}. \quad (4.4.5)$$

其中， \mathbf{Q} 即为坐标变换矩阵，其元素定义为 $Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j$ 。由此可得向量与二阶张量的变换公式分别为

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{a}}; \quad (4.4.6)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (4.4.7)$$

本节以下所有讨论均在单元局部坐标系中进行。

位移转角一致插值 (Euler-Bernoulli 梁的直接修正)

将总位移分解为弯曲位移项与纯剪位移项

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_s. \\
\mathbf{a}_i &= (u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T; \\
\mathbf{a}_b &= (\mathbf{a}_{b1}, \mathbf{a}_{b2})^T; \\
\mathbf{a}_s &= (\mathbf{a}_{s1}, \mathbf{a}_{s2})^T; \\
\mathbf{a}_{bi} &= (u_i, v_{bi}, w_{bi}, \varphi_i, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T; \\
\mathbf{a}_{si} &= (0, v_{si}, w_{si}, 0, 0, 0)^T.
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{bi}}{dx} &= \theta_{zi}; \\
\frac{dw_{bi}}{dx} &= -\theta_{yi}.
\end{aligned}$$

下面以 y 方向的刚度阵为例进行推导。对弯曲位移项进行两点 Hermite 插值，对剪切位移项进行两点线性插值

$$\begin{aligned} v_b &= N_1 v_{b1} + N_2 \theta_1 + N_3 v_{b2} + N_4 \theta_4, \\ v_s &= N_5 v_{s1} + N_6 v_{s2}. \end{aligned}$$

其中, $(0 \leq \xi \leq 1)$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & N_2 &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 & N_4 &= (\xi^3 - \xi^2)l \\ N_5 &= 1 - \xi & N_6 &= \xi. \end{aligned}$$

将上述用形函数表达的位移项代入能量泛函中进行变分, 可以得到

$$\mathbf{K}_b \mathbf{a}_b = \mathbf{P}_b, \mathbf{K}_s \mathbf{a}_s = \mathbf{P}_s. \quad (4.4.8)$$

由于单元内部成立平衡方程 $Q = \frac{dM}{dx}$, 因此弯曲位移项与剪切位移项均可以表达为总位移与转角的线性组合

$$\begin{pmatrix} v_{b2} - v_{b1} \\ v_{s2} - v_{s1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+b_z} & \frac{lb_z}{2(1+b_z)} \\ \frac{b_z}{1+b_z} & -\frac{lb_z}{2(1+b_z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ \theta_{z1} + \theta_{z2} \end{pmatrix}. \quad (4.4.9)$$

其中, $b_z := \frac{12EI_z k}{GA l^2}$ 为剪切附加项, 对于矩形截面梁有 $k = \frac{6}{5}$ 。注意到公式 (4.4.9) 的特点, 将方程 (4.4.8) 的式 1 与式 5 求和, 式 3 与式 6 求和, 将公式 (4.4.9) 代入方程 (4.4.8) 中, 可以得到最终的刚度方程

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{P}.$$

其中,

$$\mathbf{K} = \frac{EI_z}{(1+b_z)l^3} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 6l & 6l \\ & 12 & -6l & -6l \\ & & (4+b_z)l^2 & (2-b_z)l^2 \\ [symmetry] & & & (4+b_z)l^2 \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

$$\mathbf{a} = (v_1, v_2, \theta_{z1}, \theta_{z2})^T. \quad (4.4.11)$$

一般地, 考虑所有的位移分量

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_s.$$

$$\mathbf{a}_i = (u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T.$$

$$\mathbf{P} = (N_{xi}, N_{yi}, N_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi})^T.$$

则在单元局部坐标系内的刚度阵可写为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \text{Tens} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Tens} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Bendz1} & 0 & 0 & 0 & \text{Bendz2} & 0 & -\text{Bendz1} & 0 & 0 & 0 & \text{Bendz2} \\ & & \text{Bendy1} & 0 & -\text{Bendy2} & 0 & 0 & 0 & -\text{Bendy1} & 0 & -\text{Bendy2} & 0 \\ & & & \text{Tors} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Tors} & 0 & 0 \\ & & & & \text{Bendy3} & 0 & 0 & 0 & \text{Bendy2} & 0 & \text{Bendy4} & 0 \\ & & & & & \text{Bendz3} & 0 & -\text{Bendz2} & 0 & 0 & 0 & \text{Bendz4} \\ & & & & & & \text{Tens} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \text{Bendz1} & 0 & 0 & 0 & -\text{Bendz2} \\ & & & & & & & & \text{Bendy1} & 0 & \text{Bendy2} & 0 \\ [symmetry] & & & & & & & & & \text{Tors} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \text{Bendy3} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \text{Bendz3} \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

其中,

- Tens = $\frac{EA}{l}$, Tors = $\frac{GJ}{l}$;
- Bendy1 = $\frac{12EI_y}{(1+b_y)l^3}$, Bendy2 = $\frac{6EI_y}{(1+b_y)l^2}$, Bendy3 = $\frac{(4+b_y)EI_y}{(1+b_y)l}$, Bendy4 = $\frac{(2-b_y)EI_y}{(1+b_y)l}$;
- Bendz1 = $\frac{12EI_z}{(1+b_z)l^3}$, Bendz2 = $\frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2}$, Bendz3 = $\frac{(4+b_z)EI_z}{(1+b_z)l}$, Bendz4 = $\frac{(2-b_z)EI_z}{(1+b_z)l}$.

输出的单元内力分量包括节点的轴力、剪力和扭矩值。具体计算公式如下

$$\begin{aligned}
F_{x2} &= -F_{x1} = EA\varepsilon_{xx} = \frac{EA(u_2 - u_1)}{l}, \\
F_{y2} &= -F_{y1} = \frac{GA}{k}\gamma_{xy} = \frac{GA}{kl} \frac{b_z}{1+b_z} \left((v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_{z1} + \theta_{z2})l \right), \\
F_{z2} &= -F_{z1} = \frac{GA}{k}\gamma_{xz} = \frac{GA}{kl} \frac{b_y}{1+b_y} \left((w_2 - w_1) + \frac{1}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2})l \right), \\
M_{x2} &= -M_{x1} = GJ\alpha = \frac{GJ(\varphi_2 - \varphi_1)}{l}, \\
M_{y1} &= EI_y \frac{d\theta_y}{dx} = -\frac{EI_y}{l^2} \left(6\frac{w_2 - w_1}{b_y + 1} - 3\frac{b_y}{b_y + 1}(\theta_{y1} + \theta_{y2})l + (4\theta_{y1} + 2\theta_{y2})l \right), \\
M_{y2} &= EI_y \frac{d\theta_y}{dx} = -\frac{EI_y}{l^2} \left(-6\frac{w_2 - w_1}{b_y + 1} + 3\frac{b_y}{b_y + 1}(\theta_{y1} + \theta_{y2})l - (2\theta_{y1} + 4\theta_{y2})l \right), \\
M_{z1} &= EI_z \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{EI_z}{l^2} \left(6\frac{v_2 - v_1}{b_z + 1} + 3\frac{b_z}{b_z + 1}(\theta_{z1} + \theta_{z2})l - (4\theta_{z1} + 2\theta_{z2})l \right), \\
M_{z2} &= EI_z \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{EI_z}{l^2} \left(-6\frac{v_2 - v_1}{b_z + 1} - 3\frac{b_z}{b_z + 1}(\theta_{z1} + \theta_{z2})l + (2\theta_{z1} + 4\theta_{z2})l \right).
\end{aligned}$$

输出单元中性面上的 Gauss 点应力，用于恢复并输出节点应力。具体包括单元的轴向正应力 σ_{xx} 、弯曲剪应力 σ_{xy} 与 σ_{xz} ，其计算公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} = \frac{E(u_2 - u_1)}{l}, \\
\sigma_{xy} &= \frac{G}{k}\gamma_{xy} \\
&= \frac{G}{kl} \frac{b_z}{1+b_z} \left((v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_{z1} + \theta_{z2})l \right), \\
\sigma_{xz} &= \frac{G}{k}\gamma_{xz} \\
&= \frac{G}{kl} \frac{b_y}{1+b_y} \left((w_2 - w_1) + \frac{1}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2})l \right).
\end{aligned}$$

位移转角独立同阶插值

位移转角独立进行两点线性插值，以 v 方向的刚度阵为例，其单元刚度阵为

$$\mathbf{K} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{GA}{4kl} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2l & 2l \\ & 4 & -2l & -2l \\ & & l^2 & l^2 \\ [sym] & & & l^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

类似地，考虑所有的位移分量时，单元局部坐标系内的刚度阵可写为与式 (4.4.12) 相同的形式，只是其中的变量有所不同。其中，

- Tens = $\frac{EA}{l}$, Tors = $\frac{GJ}{l}$;
- Bendy1 = $\frac{GA}{kl}$, Bendy2 = $\frac{GA}{2k}$, Bendy3 = $\frac{GA}{4k} \left(\text{or } \frac{GA}{3k} \right) + \frac{EI_y}{l}$, Bendy4 = $\frac{GA}{4k} \left(\text{or } \frac{GA}{6k} \right) - \frac{EI_y}{l}$;
- Bendz1 = $\frac{GA}{kl}$, Bendz2 = $\frac{GA}{2k}$, Bendz3 = $\frac{GA}{4k} \left(\text{or } \frac{GA}{3k} \right) + \frac{EI_z}{l}$, Bendz4 = $\frac{GA}{4k} \left(\text{or } \frac{GA}{6k} \right) - \frac{EI_z}{l}$.

上述式子中，括号外的项是对转角进行选择性感缩积分（ Selective Reduced Integration，简称 SRINT）的结果，括号内为精确积分（ Accurate Integration，简称 ACINT）的结果。

输出的单元内力分量包括节点的轴力、剪力和扭矩值。具体计算公式如下

$$\begin{aligned}
F_{x2} &= -F_{x1} = EA\varepsilon_{xx} = \frac{EA(u_2 - u_1)}{l}, \\
F_{y2} &= -F_{y1} = \frac{GA}{k}\gamma_{xy} = \frac{GA}{kl} \left((v_2 - v_1) - \frac{(\theta_{z1} + \theta_{z2})l}{2} \right), \\
F_{z2} &= -F_{z1} = \frac{GA}{k}\gamma_{xz} = \frac{GA}{kl} \left((w_2 - w_1) - \frac{(\theta_{y1} + \theta_{y2})l}{2} \right), \\
M_{x2} &= -M_{x1} = GJ\alpha = \frac{GJ(\varphi_2 - \varphi_1)}{l}, \\
M_{y2} &= EI_y \frac{d\tilde{\theta}_y}{dx} = \frac{EI_y}{l}(\theta_{y2} - \theta_{y1}) + \frac{1}{2}F_{z2}l, \\
M_{y1} &= EI_y \frac{d\tilde{\theta}_y}{dx} = \frac{EI_y}{l}(\theta_{y2} - \theta_{y1}) - \frac{1}{2}F_{z2}l, \\
M_{z2} &= EI_z \frac{d\tilde{\theta}_z}{dx} = \frac{EI_z}{l}(\theta_{z2} - \theta_{z1}) - \frac{1}{2}F_{y2}l, \\
M_{z1} &= EI_z \frac{d\tilde{\theta}_z}{dx} = \frac{EI_z}{l}(\theta_{z2} - \theta_{z1}) + \frac{1}{2}F_{y2}l.
\end{aligned}$$

需要说明的是，由于转角插值函数的阶数限制，有可能出现单元主矢或单元主矩不为零的情况，因此我们用单元中点上的剪力代替节点处的剪力，并依此来修正节点处的弯矩。细心的读者可能会注意到，这种处理方式与选择性减缩积分的思想是相通的。

输出单元中性面上的 Gauss 点应力，用于恢复并输出节点应力。具体包括单元的轴向正应力 σ_{xx} 、弯曲剪应力 σ_{xy} 与 σ_{xz} ，其计算公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} = \frac{E(u_2 - u_1)}{l}, \\
\sigma_{xy} &= \frac{G}{k}\gamma_{xy} \\
&= \frac{G}{kl} \left((v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_{z1} + \theta_{z2})l \right), \\
\sigma_{xz} &= \frac{G}{k}\gamma_{xz} \\
&= \frac{G}{kl} \left((w_2 - w_1) + \frac{1}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2})l \right).
\end{aligned}$$

剪应变直接插值

对于 Timoshenko 梁单元的情况，直接用剪应变插值的方法与挠度转角独立插值并减缩积分的方法是等价的，这里不再赘述。

4.4.3 程序实现与收敛性分析

程序实现

我们在 STAPpp 程序中新增了两种单元，即 TimoshenkoSRINT 和 TimoshenkoEBMOD，分别对应于两种不同的 Timoshenko 梁单元格式构造思路，即位移转角独立插值方法以及欧拉伯努利梁剪切修正方法。对于前者，我们还设置了预处理器标签 `_TIMOSHENKO_ACCURATE_INTEGRATION_` 用于单元刚度阵数值积分方法的转换，开启时采用精确积分、关闭时采用减缩积分。另外，由于两种单元涉及的材料/截面性质是类似的，我们在基类 `Material` 的基础上定义了派生类 `CTimoshenkoMaterial` 用于储存上述两种单元的材料/截面性质。

单元刚度阵组装以及单元应力计算的算法上一大节已经给予了充分的说明，下面主要叙述材料/截面性质相关的实现细节。在阅读了 ABAQUS 文档后，笔者最终决定在 Timoshenko 梁单元部分采用杨氏模量、泊松比、截面面积、局部坐标轴惯性矩以及局部 y 轴方向的输入参数设置方式。在输入格式的具体设置上，材料/截面性质控制行与纯弯梁单元完全相同，依次为杨氏模量 E 、泊松比 ν 、截面面积 $Area$ 、单元局部 y 轴惯性矩 I_{yy} 、单元局部 z 轴惯性矩 I_{zz} 、单元局部 y 轴方向 $Thetay1$, $Thetay2$, $Thetay3$ 。

分片试验结果

我们首先探讨 Timoshenko 梁单元的分片试验的含义。一般认为，分片试验应该包括单元的刚体模态与常应变模态。前者的概念是清楚的，而后者的含义则随单元类型的不同而有所差异，但总的来说是指使得单元应变能表达式中的被积函数项为常数的位移模态。对于 Euler-Bernoulli 梁单元来说，所谓常应变模态实际上是常曲率模态，这与该单元应变能表达式中只含有弯曲应变能项是一致的。对于 Timoshenko 梁来说，所谓常应变模态实际上应该指常曲率且常剪应变模态，具体到位移与转角分布上，可写为

$$v = \frac{1}{2}ax^2 + cx + d;$$

$$\theta_z = ax + b.$$

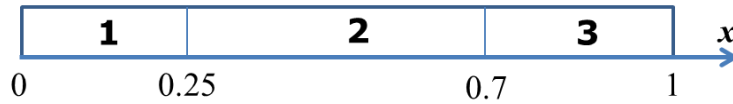


Figure 4.2: Patch test

容易看到，这实际上正对应于一端受集中剪力载荷、集中弯矩载荷共同作用的悬臂梁情形，其精确解我们在第一大节已经给出。作为分片试验，我们采用非等距单元（如图 4.2 所示），并分别在端部施加集中剪力载荷以及集中弯矩载荷。

图 4.3, 4.4 分别给出了采用选择性缩减积分的 TimoshenkoSRINT 格式在集中弯矩和集中剪力作用下计算得到的有限元解与精确解的对比图；图 4.5, 4.6 分别给出了精确积分时对应的有限元解与精确解的对比图。

对比图 4.3, 4.4 和图 4.5, 4.6 可以看到，选择性缩减积分提高了节点位移和转角的计算精度；并且，除了端部剪力载荷工况下的位移曲线外，经过选择性缩减积分的 TimoshenkoSRINT 格式均通过了分片试验。为了确保收敛性，下一小节我们将对 TimoshenkoSRINT 格式进行收敛率分析。

图 4.7, 4.8 分别给出了 TimoshenkoEBMOD 格式在集中弯矩和集中剪力作用下计算得到的有限元解与精确解的对比图。由此可见，该单元可以通过分片试验，且由形函数的特点可知该单元具有四阶收敛性。

收敛率分析

为了得到 TimoshenkoSRINT 梁单元的收敛率，我们仍沿用分片试验时的模型来考察误差应变能随等距单元数加倍时的性态。图 4.9 给出了 TimoshenkoSRINT 格式两种积分方法在端部集中弯矩载荷工况下的收敛率曲线，图 4.10 则给出了集中剪力作用下的收敛率曲线。这里，误差采用能量范数的平方度量，其中误差应变能定义为 $U(u - u^h)$ 。

从上述收敛率分析的结果可以看出，在误差能量范数的意义下，选择性缩减积分的 TimoshenkoSRINT 具有一阶收敛率，而精确积分情形的收敛率则很可能小于一阶。因此，尽管

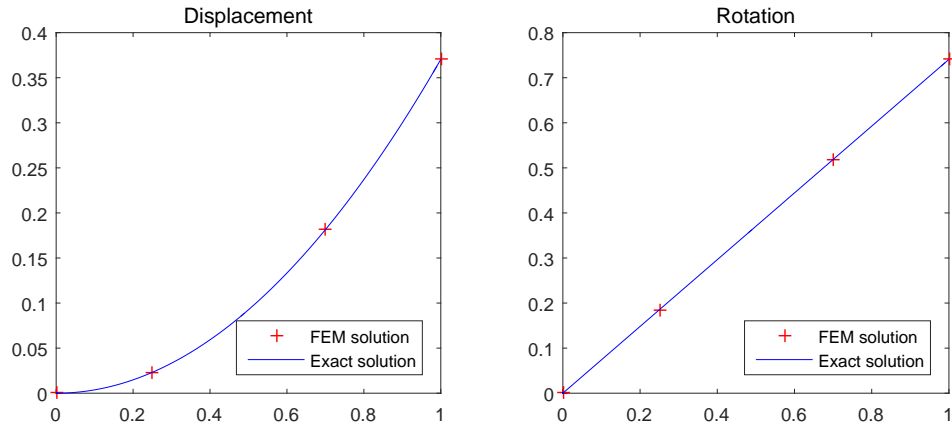


Figure 4.3: Concentrated M_z **WITH** SRINT

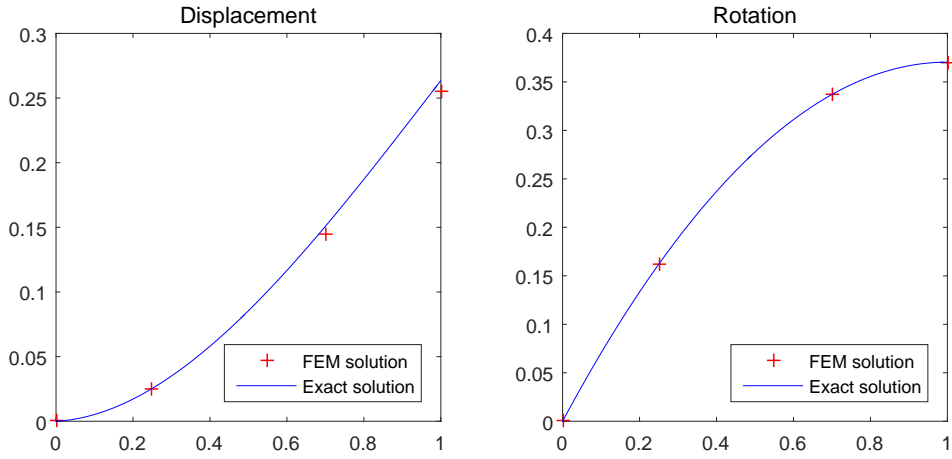


Figure 4.4: Concentrated F_y **WITH** SRINT

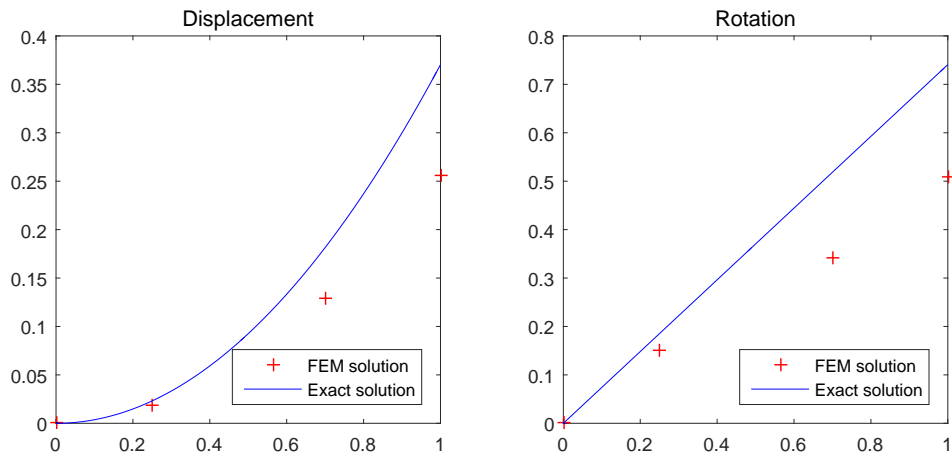


Figure 4.5: Concentrated M_z **WITHOUT** SRINT

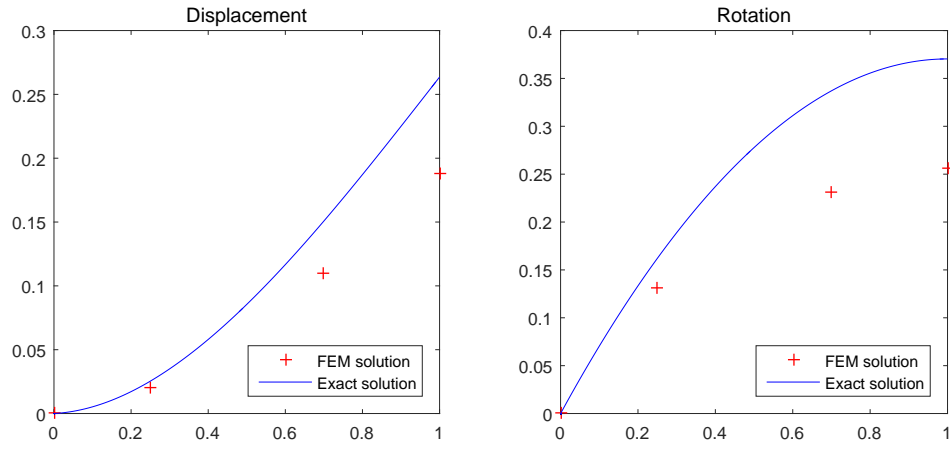


Figure 4.6: Concentrated F_y **WITHOUT** SRINT

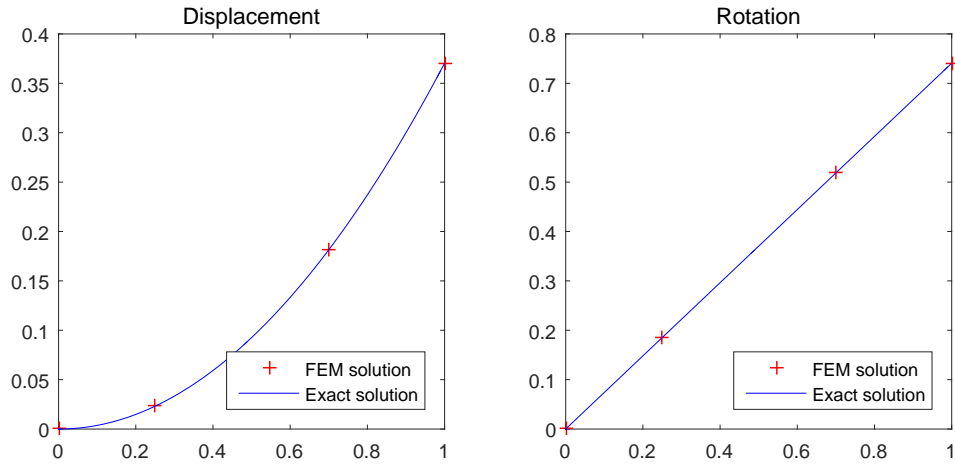


Figure 4.7: Concentrated M_z with EBMOD

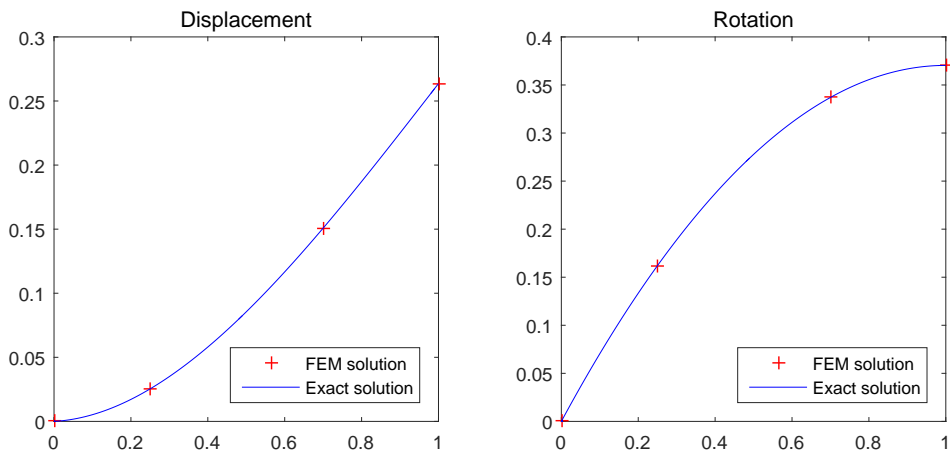


Figure 4.8: Concentrated F_y with EBMOD

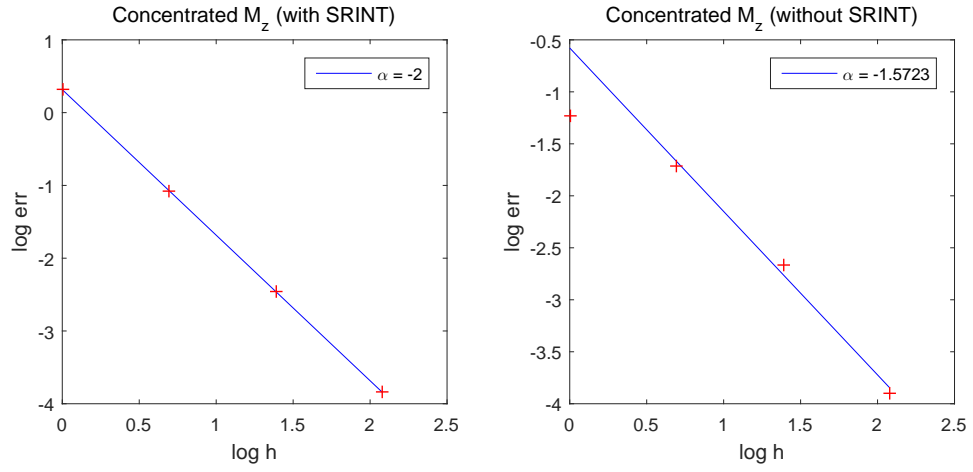


Figure 4.9: Convergence Curve (Concentrated M_z)

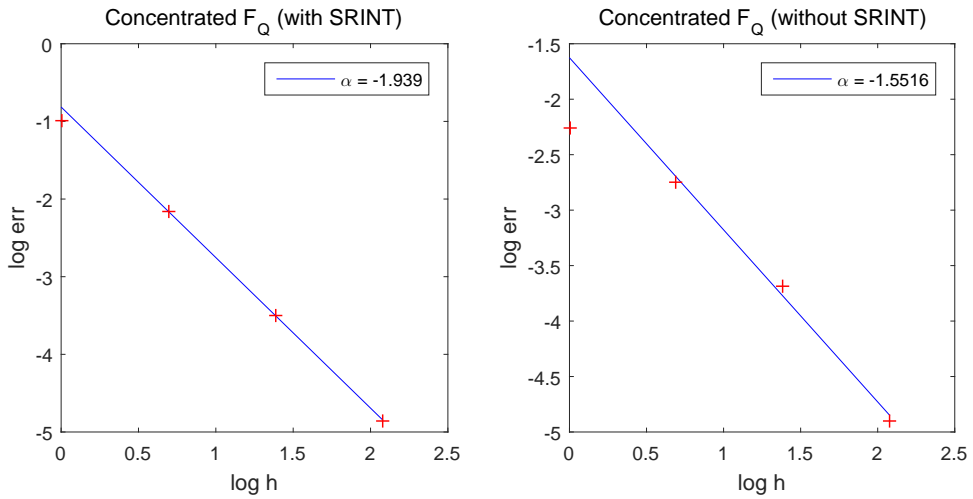


Figure 4.10: Convergence Curve (Concentrated F_y)

后者在单元数较少时可能会有较好的表现，但当单元数增多时，前者的精度会提高得更快并最终占据绝对优势。

4.5 薄板单元

4.6 截锥壳单元

4.7 无限单元

4.8 过渡单元

Chapter 5

扩展功能

这一章介绍了 STAP++ 程序的一些扩展功能，包括基于 MKL 的稀疏求解器 (见 5.1 节)、基于 Bar 单元的模态分析 (见 5.2 节) 以及基于 8H 单元的分片应力恢复 (见 5.3 节)。

5.1 稀疏求解器

5.2 模态分析

5.3 分片应力恢复 (SPR)

Chapter 6

致谢

感谢张老师和宋言学长在整个项目完成工作中对本组全组同学的耐心指导!

感谢在部分任务中，其余组的部分同学与本组同学的积极讨论与互相扶持!

最要感谢的，是我们组里的每一位同学，感谢大家一直以来的不懈努力以及团队所有成员的通力合作!

Appendix A

输入文件格式

Appendix B

输出文件格式 (后处理用)

Appendix C

优化思路简述

Appendix D

小组合作清单

D.1 主干工作

黄云帆(组长) 铁木辛柯梁 (减缩积分与一致插值两个版本), 截锥壳; 统筹工作, 组织组会。

管唯宇 3T, 4Q, 9Q 单元; 前处理, 稀疏求解器; 效率/内存整体优化。

陈一彤 8H 单元; 后处理 (基于 tecplot); SPR (基于 8H)。

杨正宇 矩形板, 平板壳; 模态分析 (基于 Bar)。

邓博元 欧拉梁; 无限单元, 过渡单元 (基于 5Q)。

D.2 细节性工作

自动测试脚本 搭建自动测试流程, 可以利用已有的分片试验结果, 在每一次的 `push` 和 `Pull Request` 操作之前对代码进行较为全面的自动测试。这部分工作由管唯宇同学完成。

DOF 自动适配 在兼容已有输入格式的基础上, 可以更灵活地适应不同的旋转自由度约束要求。这部分工作由邓博元、杨正宇、黄云帆、管唯宇四位同学共同完善而成。

8H 刚度阵组装 由于此前调用 Eigen 库进行运算的效率过低, 故改写为显式写法, 大幅提高了效率。这部分工作由黄云帆在陈一彤同学原来代码的基础上完成。

STAP90 程序 为已有用 Fortran90 语言编写的 STAP90 程序的完善, 增加了若干单元和后处理功能。这部分工作由卢晟昊同学完成。

Bibliography

- [1] 张雄等. 计算动力学 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [2] 彭细荣等. 有限单元法及其应用. 北京: 清华大学出版社, 北京交通大学出版社, 2012.
- [3] 青克维奇, E.C., 泰勒, R.L. 著. 有限元方法 (第一卷, 基本原理). 曾攀译. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [4] 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [5] 薛守义. 有限单元法. 北京: 中国建材工业出版社, 2005.
- [6] 陆明万. 弹性理论基础 (第二版). 北京, 德国: 清华大学出版社, 施普林格出版社, 2001.
- [7] Zienkiewicz O C, Cheung Y K. The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. Proc. Inst. Civ. Eng. 28:471-488, 1964.
- [8] Wikipedia. Timoshenko beam theory. (2017.08.25) [2017.12.06].
https://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko_beam_theory.
- [9] MKL reference.
<https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-c-spgvd#22ACC038-0667-4E23-8263-B4C0E67A769C>.