

有限元大作业报告

2019 年 6 月 11 日

1 3T 单元

1.1 3T 单元的建立

3T 单元是一种平面三角形线性单元, 包括 3 个节点, 每个节点有 2 个平面运动自由度。单元刚度阵规模为 6×6 。3T 单元插值函数采用一次函数: $N_1^e = \frac{1}{2A^e} [(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + y_{23}^e x + x_{32}^e y]$ $N_2^e = \frac{1}{2A^e} [(x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) + y_{31}^e x + x_{13}^e y]$ $N_3^e = \frac{1}{2A^e} [(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e) + y_{12}^e x + x_{21}^e y]$

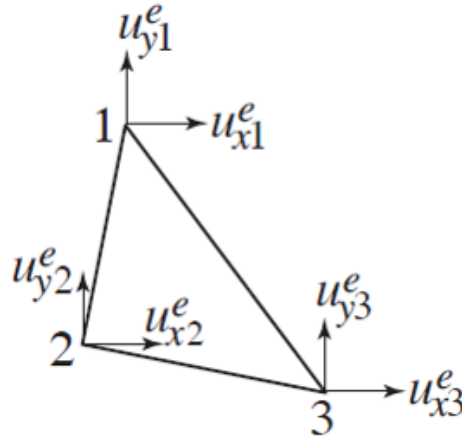


图 1: 3T 单元示意图

该插值函数满足归一化条件, 包含 $1 \ x \ y$ 项, 能够准确插值线性场。且由于形函数线性, 应变矩阵 B^e 为常数, 即 3T 单元为常应变单元。3T 单元刚度阵计算如下: $B^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23}^e & 0 & y_{31}^e & 0 & y_{12}^e & 0 \\ 0 & x_{32}^e & 0 & x_{13}^e & 0 & x_{21}^e \\ x_{32}^e & y_{23}^e & x_{13}^e & y_{31}^e & x_{21}^e & y_{12}^e \end{bmatrix}$

$$K^e = \int_{\Omega^e} B^{eT} D B^e d\Omega = t^e A^e B^{eT} D B^e$$

单元应变计算如下: $\epsilon^e = \nabla_S u^e = B^e d^e$ 结果确为常应变。

1.2 3T 单元的 Patch Test

选取一个 6 节点 6 单元的不规则网格划分如??, 构造一个单轴拉伸的线性场, 进行 Patch Test C 测试, 选取参数 $E = 1 \times 10^7$, $\nu = 0.3$, $t = 1$, $F = 10$ 。

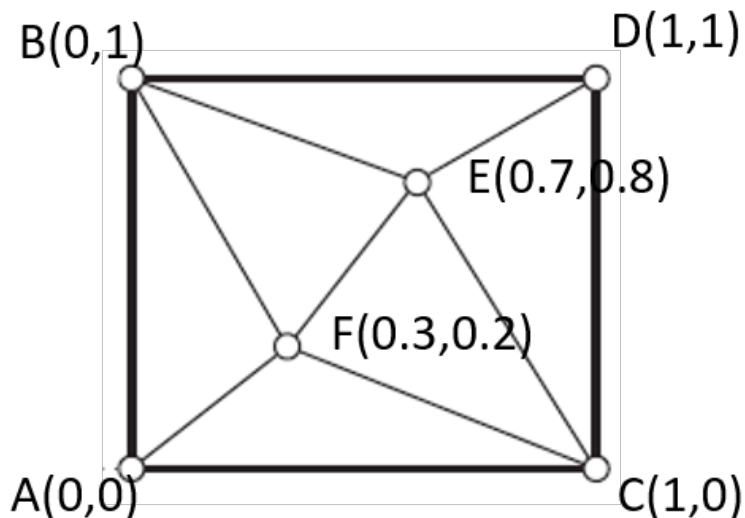


图 2: Patch Test 网格划分

测试结果如下，在忽略极小的浮点误差下与单轴拉伸的理论结果完全一致。

X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
0.00000e+000	-3.00000e-007	0.00000e+000
0.00000e+000	0.00000e+000	0.00000e+000
1.00000e-006	-1.12166e-021	0.00000e+000
1.00000e-006	-3.00000e-007	0.00000e+000
7.00000e-007	-2.40000e-007	0.00000e+000
3.00000e-007	-6.00000e-008	0.00000e+000

图 3: Patch Test 结果

与建模时候的预测相同，3T 单元能够准确复现线性场，达到预期的一阶收敛率。

1.3 3T 单元收敛率分析

收敛率分析是针对插值函数的分析，与有限元求解无关，因此我们采用 matlab 进行分析。网格划分时先将网格划分为长度为 h 的小的正方形网格，再沿 45° 方向将正方形划分成两个三角形。

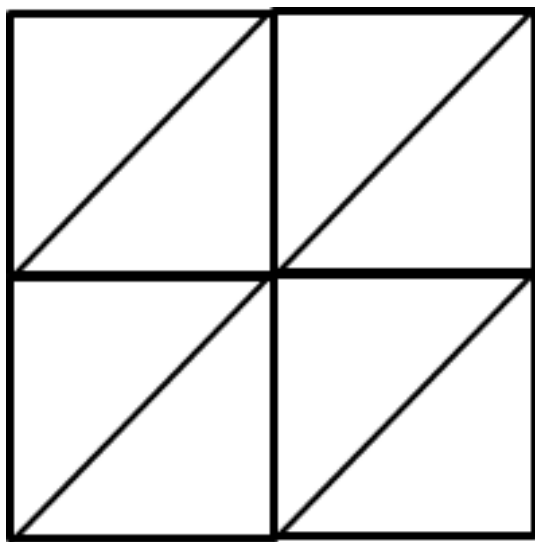


图 4: 收敛率分析网格示意图

对于每个正方形, 建立一个以左下顶点为原点的局部坐标系 x', y' 。对于左上的三角形, 插值函数为: $N_1^e = 1 - \frac{y'}{h}$ $N_2^e = \frac{y'-x'}{h}$ $N_3^e = \frac{x'}{h}$ 对于右下角的三角形, 插值函数为: $N_1^e = 1 - \frac{x'}{h}$ $N_3^e = \frac{y'}{h}$ $N_4^e = \frac{x'-y'}{h}$ 选择二次试探函数 $u(x) = x^2$ 进行插值, 单元误差函数定义为 $e^2 = \int_0^L (u^e - u)^2 dx$ 。对 e 积分, 做双对数图如下, 收敛率为 1, 符合之前线性收敛的假设。

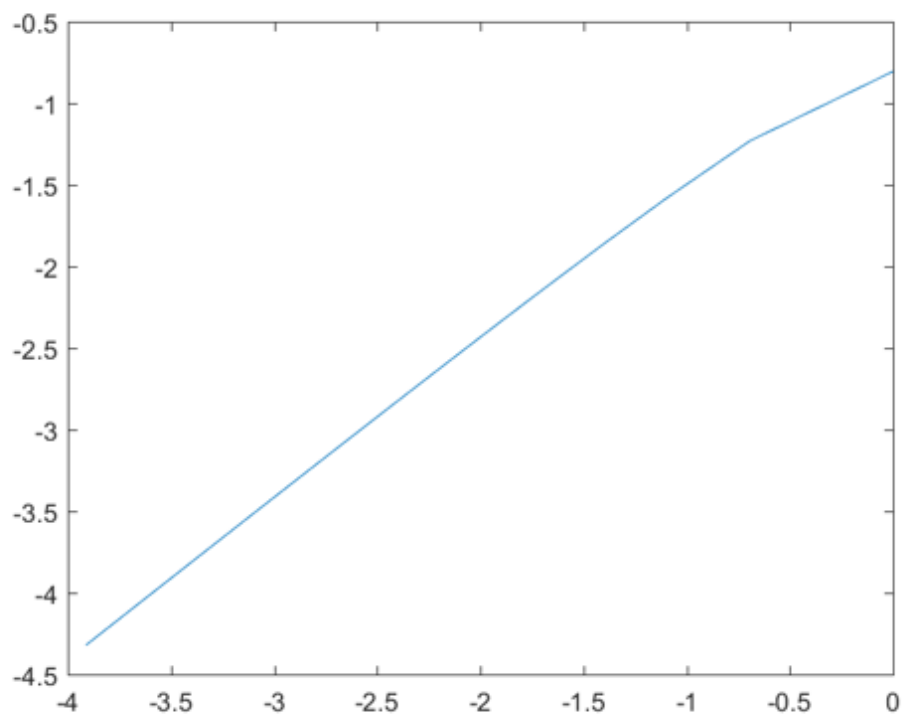


图 5: 收敛率双对数图

2 8H 单元

2.1 8H 单元的建立

8H 单元是一种三维拉压单元，8 节点 24 自由度。插值时采用母单元插值方法，即构造一个母单元，建立母单元与实际单元之间的一一映射关系，通过在母单元插值后映射到实际单元完成对实际单元的插值。

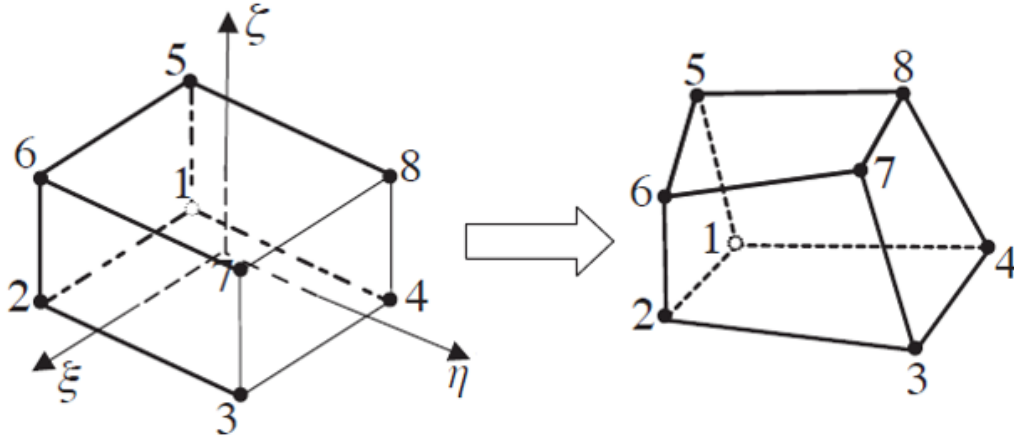


图 6: 8H 单元 d1 母单元与实际单元

母单元插值函数为三方向线性插值函数的积： $N_L^{8H}(\xi, \eta, \zeta) = N_I^{2L}(\xi)N_J^{2L}(\eta)N_K^{2L}(\zeta)$
坐标映射 $J_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_L \xi) (1 + \eta_L \eta) (1 + \zeta_L \zeta)$

$$J^e = GN^{8H} [x^e y^e]$$

cobian 矩阵为：

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ \vdots & \vdots \\ x_8^e & y_8^e \end{bmatrix}$$

应变矩阵 B^e 满足： $B^e = \begin{bmatrix} B_1^e & B_2^e & \cdots & B_8^e \end{bmatrix}$

其中： $B_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial z} & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{8H}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$

B^e 的元素满足： $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{8H}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{8H}}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_8^{8H}}{\partial z} \end{bmatrix} = (J^e)^{-1} GN^{8H}$

B^e 不是常系数矩阵，单元刚度阵 K^e 需要积分获得。假设 J^e 的行列式为常数，则被积函数为 2 次，需要 $2 \times 2 \times 2$ 的高斯积分。实际编程时分别直接计算 8 个高斯点对应的 J^e 、 B^e 和被积函数的值，再加权相加即可得到单元刚度阵。

2.2 8H 单元的 Patch Test

由于一一映射的要求，8H 单元必须是凸六面体单元，故选择一个大立方体套小立方体的结构，共 16 节点 7 单元。其中大立方体边长为 1，小立方体与大立方体平行且中心重合，边长为 0.6。加载形式为无重力单轴拉伸，参数 $E = 1 \times 10^7$ ， $\nu = 0.3$ ， $t = 1$ ， $F = 100$ 。

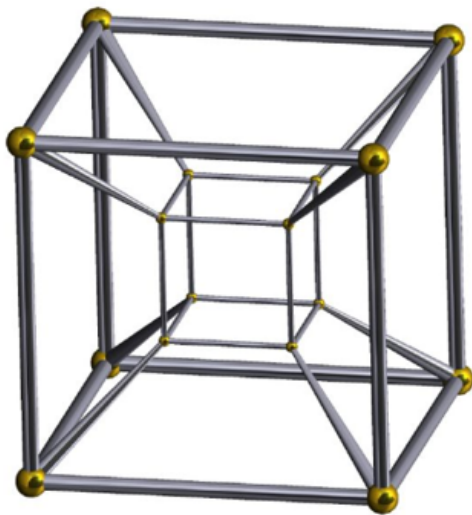


图 7: Patch Test 网格划分

结果如下。在不规则单元下，8H 计算的结果与实际结果有一定的偏移，偏移可能是由于 J^e 的行列式不是常数，导致高斯积分的结果与实际值发生了偏差。但是若取作规则单元，仍然能够保证精确复现线性场。

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	0.00000e+000	0.00000e+000	0.00000e+000
2	9.28893e-006	-9.44056e-008	-9.99794e-008
3	1.07342e-005	-3.14089e-006	5.02537e-008
4	0.00000e+000	-2.85849e-006	0.00000e+000
5	0.00000e+000	0.00000e+000	-2.83348e-006
6	1.07221e-005	8.05604e-008	-3.10277e-006
7	9.32495e-006	-2.91083e-006	-2.84237e-006
8	0.00000e+000	-3.14771e-006	-3.12416e-006
9	2.03906e-006	-5.71069e-007	-5.27135e-007
10	7.67256e-006	-6.16545e-007	-5.72331e-007
11	8.26378e-006	-2.41080e-006	-6.55711e-007
12	1.96302e-006	-2.34067e-006	-6.93518e-007
13	1.95649e-006	-6.45204e-007	-2.29590e-006
14	8.28590e-006	-5.99913e-007	-2.36601e-006
15	7.73754e-006	-2.41443e-006	-2.39147e-006
16	2.05507e-006	-2.48524e-006	-2.47829e-006

图 8: Patch Test 结果

2.3 8H 单元的收敛率

8H 单元是三线性单元，能够精确复现线性场。选择二次试探函数 $u(x) = x^2$ 进行插值。由于三个方向插值为直积，故 y, z 积分之后对结果没有影响，即结果和一维单元的收敛率一致，都是线性收敛。

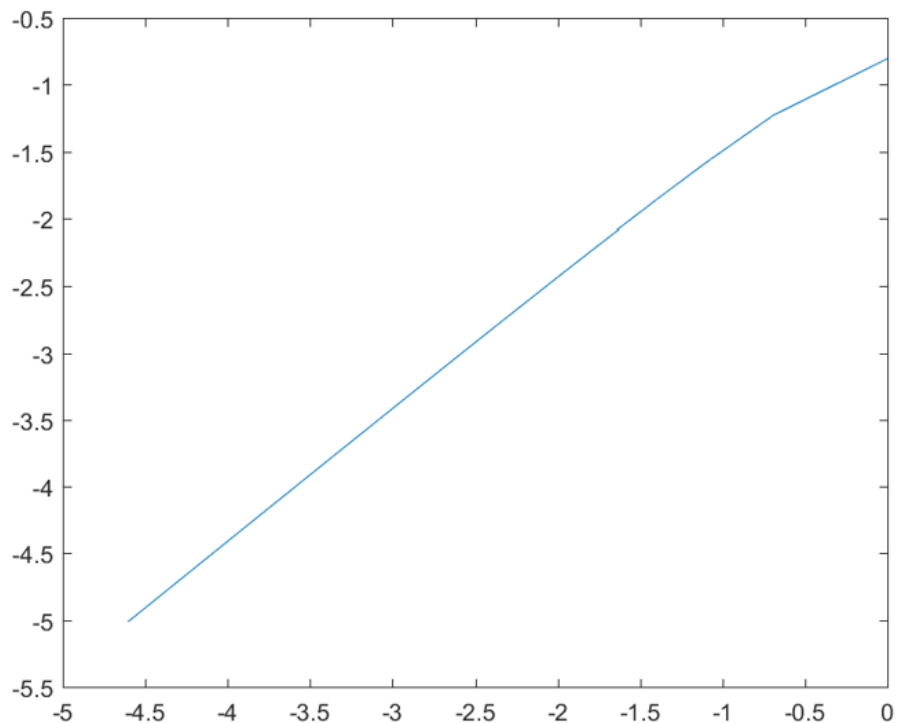


图 9: 收敛率双对数图

3 后处理

后处理采用 vtk 格式实现。某次实验输出的 vtk 格式结果样图如下。vtk 信息中包含各节点、单元的几何信息，六个方向的位移和 Mises 应力。stap++ 每次执行输出两个 vtk 文件，分别对应变形前和变形后的几何信息，七个物理量的信息完全一致。

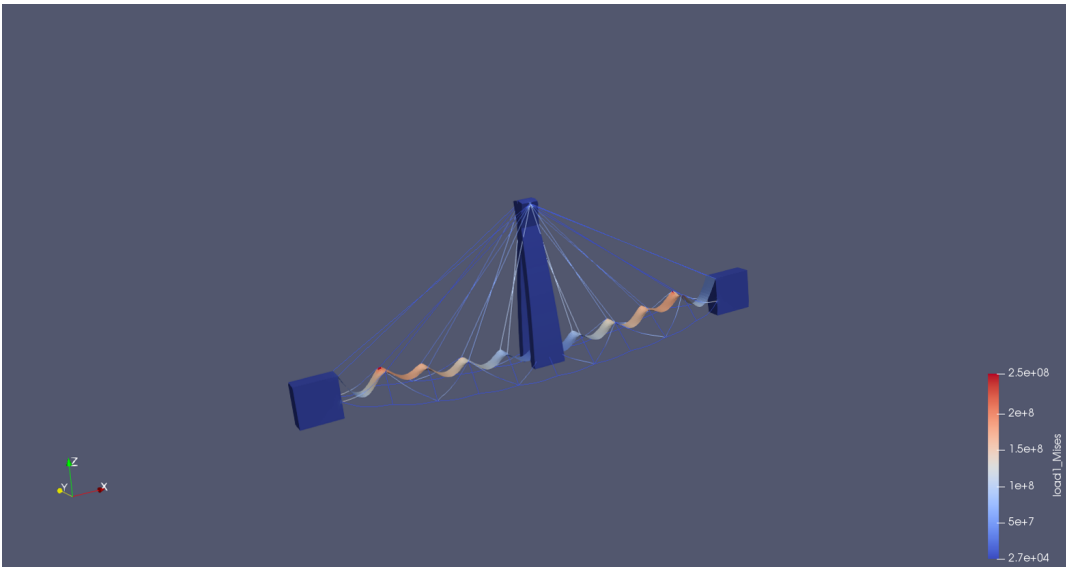


图 10: 输出结果样图

本次实验使用的 vtk 文件包括控制行、节点信息、单元信息、节点物理量、单元物理量四个部分。典型的 vtk 的部分图如下：

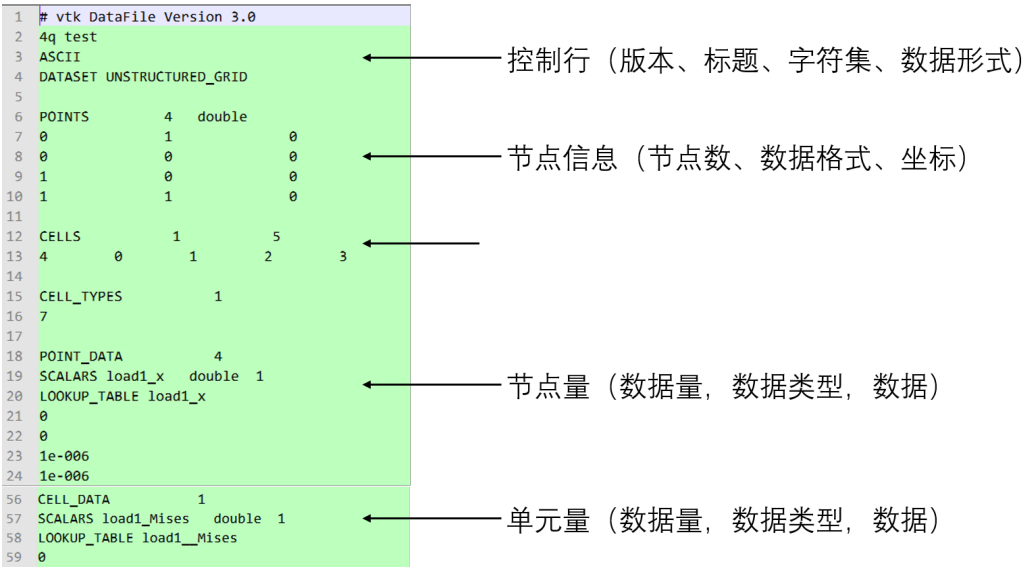


图 11: 一个典型的 vtk 文件（部分）

其中控制行在程序开始执行时输出。变形前的节点和单元信息分别在读取节点和单元信息之后立即输出，保证即使无法求解也能够绘制出几何信息，便于查错。当位移计算完成时，在变形前的 vtk 中写入六个方向的位移信息；在变形后的 vtk 中先按照原始位形与位移和夸张系数计算出新的节点坐标，再依次输出单元信息和位移信息。当在向.out 结果文件中写入应力后，依次向两个 vtk 中写入应力信息。为方便起见，每个单元写入的 Mises 应力为单元全部高斯点的 Mises 应力的平均值。