带稳定的减缩积分调研

张逸葑

May 22, 2019

1 剪切锁定与薄膜锁定

剪切锁定是指单元弯曲方向过度刚性的现象，它会在二维以及三维实体单元、梁、壳等单元中出现。其根本原因是有限元格式中产生的剪切变形能相比弯曲形变能过大，从而造成。以壳4Q单元为例，4Q单元无法表示纯弯曲。当弯曲时，会产生剪应变以及相应的剪切变形能。这个寄生的剪切变形能会吸收应变能，使得对于给定的弯曲变形，产生的弯矩将产生大于正确的值，从而发生剪切锁定。而对梁单元，弯曲变形能正比于厚度的三次方，而剪切变形能正比于厚度。当厚度变得很小时，剪切变形能占主导因素。而纯弯状态下，不应当有剪切变形能，从而发生了剪切锁定。

而薄膜锁定则仅仅发生在弯曲的梁单元以及壳单元中。其现象是寄生的薄膜和弯曲作用会发生耦合。值得注意的是，薄膜锁定一般仅仅发生在曲面的壳单元中，而如使用四边形单元分析圆柱壳，由于每个单元都是平面的，因此不会发生薄膜锁定。三角形单元由于必然是平面的，因此不会遇到薄膜锁定的问题。曲面的二次单元以及双二次单元往往会遇到很强的薄膜锁定问题。

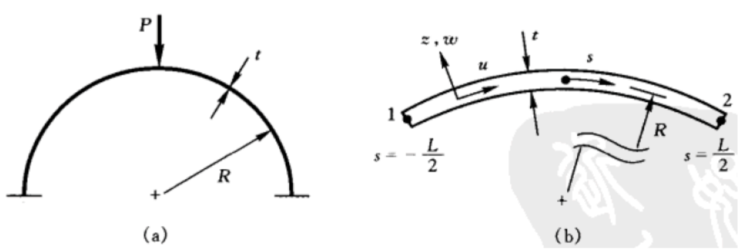


Figure 1: 圆形拱

为了进一步说明薄膜锁定问题，以曲率半径为常数R的圆形拱为例分析。圆形拱的距中线为z处的切向应变可以表示为

$$\epsilon_s = w\prime_s + \frac{w}{R} + z(\frac{w\prime_s}{R} - w\prime_{ss})$$

可以将其分为薄膜应变以及弯曲应变

$$\epsilon_s = \epsilon_m + z\kappa$$
$$\epsilon_m = u\prime_s + \frac{w}{R}$$
$$\kappa = \frac{u\prime_s}{R} - w\prime_{ss}$$

其中，κ是曲率半径变化量。规定曲率半径减小时为正。应变能U来自ϵ_m和κ的贡献，对于一个长为L的线弹性均质单元，则其应变能为

$$U = U_m + U_b = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EA\epsilon_m^2 ds + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EI\kappa^2 ds$$

其中E是弹性模量，A是截面面积，I是惯性矩。通常情况下，细长拱发生弯曲时只会产生很小的薄膜应变。无伸长条件为$\epsilon_m = 0$即$u\prime_s + \frac{w}{R} = 0$。构造径向和轴向位移场

$$u = a_1 + a_2 s$$
$$w = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3$$

则薄膜应变ϵ_m和曲率变化κ分别为

$$\epsilon_m = (a_2 + \frac{a_3}{R}) + \frac{a_4}{R} s + \frac{a_5}{R} s^2 + \frac{a_6}{R} s^3$$
$$\kappa = \frac{a_2}{R} - 2a_5 - 6a_6 s$$

当杆变得无限细长时，施加不伸长条件，则可得到

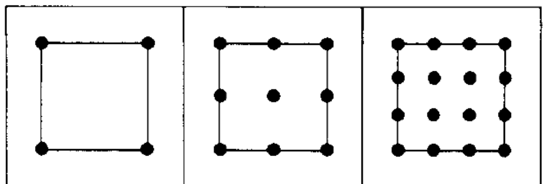
$$a_2 + \frac{a_3}{R} = 0 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = 0$$

若迫使梁弯曲，非零的广义自由度a_i会导致产生非零的薄膜应变，而在薄板情况下，非零的薄膜应变能将是巨大的，即单元对于弯曲的响应趋向于被锁定。而对于直边单元，由于R趋向于无穷，因此不伸长条件的要求不一样，因此不会发生薄膜锁定的问题。

对于剪切锁定以及薄膜锁定的解决方式，一般采用的有增加自由度、非协调元、减缩积分的方法。其中减缩积分的方法最为常用。如之前那个圆拱的例子，使用减缩积分可以消去a_4、a_5、a_6对薄膜应变的影响，从而防止薄膜锁定带来的影响，使其和直边单元相似。

2 减缩积分及其带来的问题

减缩积分是指相比完全积分，阶次较低的方法，通常情况下只会低一个阶次。在一些方向上选择性地减缩积分不仅能够大大加快计算速度（特别是在一些非线性问题中，单点高斯积分被更为广阔地应用），而且能够避免很多寄生模态的问题（特别是寄生的剪切模态）。然而，减缩积分也会带来一些问题，在刚度阵的表象上来说，是刚度阵奇异，且其秩数不能提供在刚体自由度限制后有解。更为深入地研究可以看出有零能模式（Zero-energy Mode）以及沙漏模式（Hourglass Mode）等问题。



lamina shape functions	bilinear	biquadratic	bicubic
normal Gaussian rule	2 × 2	3 × 3	4 × 4
reduced Gaussian rule	1 × 1	2 × 2	3 × 3

Figure 2: 板壳的减缩积分

零能模式即在某些模态的应变能为零，这也是导致刚度矩阵不满秩的内在原因。由于减缩积分使用的信息较少，积分点往往并不能表达所有的模态。虽然某些寄生模式被避免，但有一些模态也被忽略从而导致其所代表的应变能为零，刚度矩阵中有关项也为零。零能模态与力锁相对，力锁使单元在某些模态上变“硬”，而零能模态使单元在某些模态上不受约束。沙漏模式是一种典型的零能模式。依旧以4Q单元为例。如果对4Q单元使用减缩积分，即单点高斯积分。在纯弯状态下单点高斯积分采用的高斯点即没有主应变，也没有切应变，因此会产生零能模态。在弯曲情况下各节点可以随意变形，而所取的高斯点的应变却没有任何变化。由于这个零能模态形态与沙漏相似，因此被称作沙漏模式。

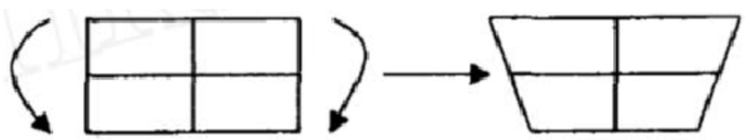


Figure 3: 4Q单元的沙漏模式

3 带稳定的减缩积分方法

由于直接减缩积分会导致零能模式，因此在减缩积分中采用某些技巧，使有力锁的项（如剪切应力项以及薄膜应力项）通过减缩积分消除力锁，而其余的项通过完全积分计算（如沙漏模式中的纯弯模态）。消除奇异的稳定方法大体上即将刚度阵分为弯曲项、剪切项以及薄膜项，对弯曲项完全积分以及对后两项减缩积分。对后两项减缩积分时需要加上稳定项，一般为高阶项。

首先针对Mindlin板单元进行讨论。在计算单元刚度阵时，可以将刚度阵分为弯曲项以及剪切项，表达式如下。其中刚度阵的上标为高斯积分点的数目，由于是对双线性单元，因此完全积分是2×2，减缩积分是1×1。

$$
K = K_B^{[2\times 2]} + K_S^{[1\times 1]}
$$

$$
K_B = D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & A_{xx} + \frac{1-\nu}{2} A_{yy} & \nu A_{xy} + \frac{1-\nu}{2} A_{yx} \\ sym & & A_{yy} + \frac{1-\nu}{2} A_{xx} \end{bmatrix}
$$

$$
K_S = \kappa G t \begin{bmatrix} A_{xx} + A_{yy} & -A_x & -A_y \\ & A & 0 \\ sym & & A \end{bmatrix}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A &= \textstyle\int_\Omega N N^T \Omega \\
A_x &= \textstyle\int_\Omega N_{,x} N^T \Omega \\
A_y &= \textstyle\int_\Omega N_{,y} N^T \Omega \\
A_{xx} &= \textstyle\int_\Omega N_{,x} N_{,x}^T \Omega \\
A_{xy} &= \textstyle\int_\Omega N_{,x} N_{,y}^T \Omega \\
A_{yy} &= \textstyle\int_\Omega N_{,y} N_{,y}^T \Omega
\end{aligned}
$$

之后继续将剪切项拆分成两项：

$$
K_S = (1-\epsilon) K_S^{[1\times 1]} + \epsilon K_S^{[2\times 2]} = K_S^{[1\times 1]} + \epsilon K_H
$$

其中$K_H = K_S^{[2\times 2]} - K_S^{[1\times 1]}$。从而整体刚度阵可以表达为$K_B^{[2\times 2]} + K_S^{[1\times 1]} + K_H$。其中，$\epsilon = rt^2/A$，其中$r$是一个无量纲的常数，称为稳定系数。稳定系数大于0时即可消除零能模态，其典型取值范围为0.001到10之间。

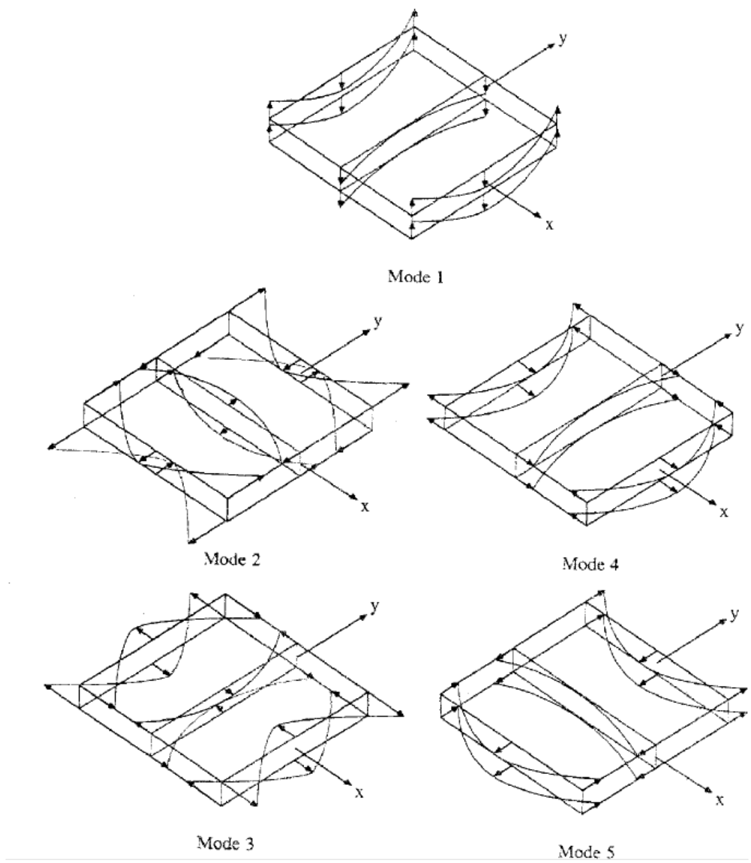


Figure 4: 壳的零能模态

而针对壳单元，情况则更为复杂一些。分析的壳单元是9点的双二次单元。可将B矩阵分为低阶项和高阶项，两者互相正交，并且使用变分法得出刚度矩阵为$K = K^L + K^H$。B矩阵可分为弯曲项、剪切项以及薄膜项之和。其表达式为

$$B = B_b + B_s + B_m$$

$$B_b = \begin{bmatrix} B_x^1 & 0 & 0 & 0 & B_x \\ 0 & B_y^1 & 0 & -B_y^0 & 0 \\ B_y^1 & B_x^1 & 0 & -B_x^0 & B_y^0 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y^0 & 0 & 0 & 0 \\ B_y^0 & B_x^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_x^0 & 0 & N \\ 0 & 0 & B_y^0 & -N & 0 \end{bmatrix}$$

其中，B的上标为0的是与ζ无关的项，上标为1的是与ζ有关的项。壳单元的减缩积分会产生5个零能模态，从之前的式子中通过正交化等方法分离出高阶项，从而计算出减缩积分中的稳定项。这样得出的单元在柱壳中得到了验证，更偏近准确解。

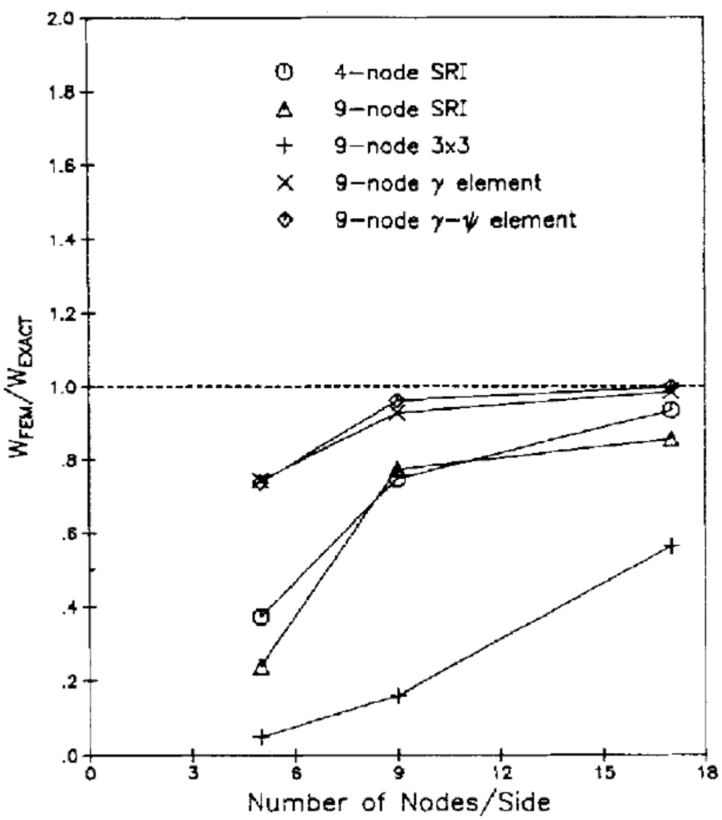


Figure 5: 受集中载荷的柱壳

References

[1] Cook R D , Saunders H . Concepts and Applications of Finite Element Analysis (2nd Edition)[M]. Wiley, 1974.

[2] Belytschko T , Tsay C S , Liu W K . A stabilization matrix for the bilinear mindlin plate element[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, 29(3):313-327.

[3] Belytschko T , Tsay C S . A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, 19(3):405-419.

[4] Belytschko T , Wong B L , Stolarski H . Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, 28(2):385-414.

[5] Hughes T J R , Liu W K . Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, 26(3):331-362.

[6] Stolarski H , Belytschko T . Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements[J]. Journal of Applied Mechanics, 1982, 49(1):172.

[7] Belytschko T , Wing-Kam L , Ong S J , et al. Implementation and application of a 9-node Lagrange shell element with spurious mode control[J]. Computers Structures, 1985, 20(1-3):121-128.