

半带宽优化算法文献调研

胡昌平 2016011546

1. 半带宽优化简介

有限元法的核心问题是将微分方程近似转化为一个代数方程组进行求解。当有限元的单元数量很大时，待求解的矩阵（总刚度阵）就会变得高度稀疏。对于高度稀疏的矩阵，如果按照一般矩阵的存储方法存储就会造成很大的资源浪费。Skyline 存储法是一种相对高效的稀疏矩阵存储方法，它基于总刚度阵对称的特点设计，存储时按列顺序存储，每列从对角元开始向上存储至行号最低的非 0 元素，再记录下每个对角元的位置即可。半带宽指的是每列存储的元素数目。最大半带宽和半带宽越小，对求解越有利，也能有效减少存储空间。因此，在网格给定的条件下，在编号时减少半带宽就能有效提高有限元的程序效率并节约内存空间。

到目前为止，没有一套通用的方法能够将任意有限元网格问题的半带宽降到最小值。现有方法只能将网格的半带宽降到比较低的值。从实现方法上来看，现有方法都是研究半带宽最小状态下的网格编号，总结出其中的规律，再通过重编号的方法使新的网格具有其中的一个或几个性质，达到降低半带宽的效果。由于优化的参数不同，得到的结果也会有差别，但多数算法在多数情况下都能起到降低半带宽的效果。根据计算方法的不同，半带宽优化又可以分为图论直接算法、迭代算法和混合算法。

2. 半带宽优化的图论方法

2.1. 半带宽的图论模型

半带宽问题本质上可以归结为图论问题。将网格节点视为图中的节点，将同一单元相连的节点视为两两有边相连，这样构成网格对应的图。观察总刚度阵可以发现，总刚度阵中元素 (i, j) 若非零，对应可以倒退出该元素由同时含有 (i, j) 的单元的单元刚度阵组装而来。换句话说总刚度阵元素 (i, j) 非零意味着图上编号为 i 和 j 的两点相邻。假设 (i, j) 为第 j 列首个非零元素，则说明与 j 相邻的节点的最小编号为 j 。反过来，若图中与 j 点相邻点的最小编号为 i ，若 $i < j$ 则第 j 列列高（半带宽-1）为 $j-i$ ，反之列高为 0。整体上看，总刚度阵的最大列高即为图中任意相邻相邻两点编号差的绝对值。优化最大半带宽（最大列高）就是找到一种图的

重编号方法，使得任意相邻相邻两点编号差的绝对值尽可能小。

2.2. 相关的其他概念

半带宽优化的图论方法需要用到一些图论的概念，列举如下：

1) 度及其衍生概念

与一个节点相邻的节点的数量称为节点的度，用以衡量节点的连接情况。半带宽优化中也用跨距和节点商衡量连接状态。跨距指的是某节点相邻节点及自身编号的最大值和最小值之和；节点商指的是某节点相邻节点及自身的编号和与节点相连单元数量之比。

2) 遍历与生成树

树是一种数据结构。它是由 n 个有限结点组成一个具有层次关系的集合。与一般的图结构最明显的区别在于，树是一种层次结构。其层次数减 1 称为树高。对于一个强连通图而言，进行遍历时可以按照遍历顺序获得一棵生成树。树的节点即为图的全部节点，树的边是遍历过程中经过的图的边。遍历的起点和遍历规则不同，得到的生成树也会有所不同。常见的遍历规则有广度优先遍历 (BFT) 和深度优先遍历 (DFT)。半带宽优化常用的遍历算法都是 BFT，即先遍历与当前节点相邻的所有未遍历到的节点，再同样处理下一个节点。遍历到的节点存入一个辅助队列的队尾，按照队列顺序进行遍历。

3) 半径

一系列首尾相连的边称为路径，边的数量称为路径的长度。对于两个顶点，顶点间最短的路径的长度称为两点的距离。对于一张图，任意两个顶点距离的最大值称为图的半径，这两个点称为直径端点。对于一般的图结构，找到图的直径端点很难，可以找到两点距离的极大值对应的两点作为直径端点的近似，这两点称为伪直径端点。

3. 常见的半带宽优化算法

半带宽优化算法有很多，直接算法包括如经典的 CM/RCM 算法、GPS 算法、BURGESS 算法、WBRA 算法等；迭代算法包括 AD 算法等。这些算法各有特点，由于不存在绝对最优算法，对于不同的问题不同算法的效果会有一定的差别。下面介绍几种最常用的半带宽优化算法。

3.1. CM/RCM 算法

CM 算法是一种经典的半带宽优化算法，其核心思路是尽可能将图上相邻的点排序时聚拢在一起，使得两点间的节点号差得到降低。

CM 算法具体内容如下：

- 1) 定义搜索起点集合，一般选择度比较低的节点作为起始点。
- 2) 从集合中某一个节点出发，对图做一次 BFS 得到生成树。
- 3) 根据树的结构进行重编号。编号顺序为优先按层编号，层内编号优先编和已编号最大节点相邻的节点，全部相邻节点中优先编号度较小的节点。
- 4) 以起点集合中的每一个节点做一次操作可以得到不同的编号方案，取这些方案中最大半带宽最小的方案即为最终方案，若有多组最大半带宽相等，则取半带宽和最小的方案。

RCM 算法是 CM 算法的一种小改进。RCM 算法的主体方案与 CM 算法一致，但是在最大最小的方法选出后，添加它们的逆序排列作为新的方案再取半带宽和最小的方案，相比于 CM 算法，RCM 算法并不能降低最大半带宽，但是可以进一步优化半带宽和。

CM/RCM 算法最大的优势就是简单，节省优化的计算时间。不足之处在于它的优化条件没有很好的解释性，这也使得它在半带宽优化方面的结果表现比较一般。

3.2. GPS 算法

GPS 算法是另一种常用的直接优化方法。其核心思路是通过生成树合成为一种新的层次结构，压缩合成结构的宽度，从而限制新编号体系中可能的最大半带宽上限。

GPS 算法具体内容如下：

- 1) 找到图的伪直径端点。一种基于迭代的方法如下：首先选择一个度最小的点做 BFS。对生成树最后一层的顶点做 BFS，若有节点的生成树的树高更大，则将其作为起始点重复上一步；否则，取这些节点生成树宽度与高度之比最小者，该点与起始点为伪直径端点。一般来说，伪直径端点生成树的高度相等。

- 2) 树合成为层结构。主要思路是将两棵树一正一倒拼合成一种新的层次结构，使新结构的层宽尽可能的小。设树高为 m ，根节点度较小的树的结构为 $L_a = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ ，较大的为 $L_b = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ ，新结构为 $L_0 = \{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ 。对每个节点标有序数对 (i, j) ，其中 i 为节点在 L_a 中的层号， $m-j+1$ 为节点在 L_b 中的层号。分配时先将 (i, j) 点分配进 N_i ，余下的节点为子图 C_1, C_2, \dots, C_t （按节点数排列）。对每个子图，依次计算此时每层按照数对前

一个数和后一个数进入该层的节点数 $l_1, \dots, l_m, m_1, \dots, m_m$ 。取 l 和 m 的最大值，若前者大则该子图所有节点的后一个数分配，反之按照前一个节点分配。

3) 重编号。编号顺序为优先按层编号，层内查找已编号结点中对应原编号最小的一个，然后在本层中对与其相邻的结点按度增的顺序依次编号。若层内还有剩余节点则再次查找原编号最小的重复。

相比于 CM 算法，GPS 算法明显更为复杂，计算量也更大，使用时需要充分的优化。此外，有一些 GPS 算法的改型也被提出，如借鉴 AD 迭代算法，用节点的跨距和节点商代替度进行重编号等。

3.3. AD 算法

AD 算法是一种迭代算法。核心思路是通过迭代过程使输出网络编号具有半带宽最优网络编号的某些特征，达到半带宽优化的目的。对于特别网络的分析可以得出，在半带宽最优的网络中，节点跨距常随节点编号单调递增，节点商随节点编号震荡上升。因此可以通过迭代使节点跨距或节点商具有上升的特点，使得半带宽得到优化。

常用的迭代算法过程非常简单：首先计算当前编号方式各节点的跨距、节点商和度，之后按照跨距上升排序（跨距相等排节点商，节点商相等排度）。按照排序的顺序重新编号。检查半带宽情况，若不满意则重复该过程。

AD 算法的优势在于编程相对容易，相比于复杂的 GPS 算法也比较好理解。不足的是作为迭代算法其计算效率不是很高，更重要的是其无法保证收敛性和单调性，可能造成半带宽不降反升的问题。但在大多数情况下，AD 算法能够有比较不错的表现。

4. 总结

倘若不限于有限元的范围，半带宽也可以看做是大规模稀疏矩阵求解加速的有效手段，具有更广的应用价值。然而现有的算法虽然将半带宽问题有效地抽象为一个图论问题，但对这个图论问题的求解却仍然停留在经验理解的层次，没有更加深入地从图论的本质对这个问题作出全新的诠释。希望在未来的某天能够有一种更为高效的半带宽优化的方法能够适应更多的求解场景，在更短的时间内给出更好的优化结果。

参考文献

- [1]杜宪亭,夏禾,龙佩恒,余竹,王少钦.一种 RCM 有限元带宽优化改进算法[J].计算力学学报,2010,27(04):694-697.
- [2]姜涛,王安麟,朱灯林.有限元结点编号的综合带宽优化算法[J].机械设计,2005(11):3-6.
- [3]余雄鹰.使刚度矩阵带宽最小的节点标号算法、程序及应用[J].江汉石油学院学报,1989(01):81-87.
- [4]王新荣,梁迎春,王细洋.有限元网格节点优序标号的 WGPS 法[J].哈尔滨工业大学学报,1992(04):99-103.
- [5] Cuthill E , McKee J . Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices[J] . Proc. ACM . National Conference, Association for Computing Machinery , New York , 1969 :157 - 172.
- [6] Gibbs N E , Poole W G , Stockmeyer P K. An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix[J] . SIAM J. Nu mer. Anal. 1976 , 13(2):236 - 250.
- [7] Akhras G , Dhatt G. An automatic node relabeling scheme for minimizing a matrix or network bandwidth [J] . Int. J . Num. Meth. Eng. 1976(10):787 - 797.
- [8] Souza L T , Murray D W .A unified se t of resequencing algorithms[J] .International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1995 , 38:565-581 .