

# 奇异等参元-调研报告

(黄轩宇, 力 6, 2016011542)

2019.5.19

## 目录

第一部分 奇异等参元简介	1
1 奇异等参元的提出背景	1
2 奇异等参元的构建	2
3 奇异等参元举例	3
4 奇异等参元的性质	4
第二部分 奇异等参元的可用性分析	4
5 奇异等参元的收敛性分析	4
6 奇异等参元的刚度阵 & 应变能分析	4
7 奇异等参元的精确性检验	4
第三部分 参考文献	6

## 第一部分 奇异等参元简介

### 1 奇异等参元的提出背景

在弹性和弹塑性范围内的尖端裂纹问题一直是断裂力学中非常重要的问题,而目前所建立的理论还只能分析并精确求解一些非常简单的二维模型;因此,如何得到一种精确可靠的数值计算方法就显得尤为重要。

而有限元法在断裂力学中已经得到了相当广泛的应用。已开发出许多特殊的裂纹尖端有限单元,其中位移法已经被普遍的使用 [2]。而混合单元也被用于开发特殊的裂纹尖端单元。但是这些特殊的裂纹尖端单元在裂纹尖端处包含应变场的奇点,其对应于理论上的不均匀性。而这些特殊裂纹尖端的缺点是不利于收敛和数值求解的,原因是它们缺乏恒定的应变和刚体运动模式。因此,它们没有通过分块检测 [3],并且没有必要的收敛条件 [4]。

从实际应用的观点来看,当上述的单元用于热应力问题的分析时,上述的一些假设就产生了问题。这将导致在计算热梯度的应力强度因子时获得完全错误的结果,除非进行特殊处理以消除存在奇点的单元上的对热场影响。例如,设计一种没有裂缝的模型和非奇异的单元,其进行两次独立的分析,该模型主要用于计算由于热梯度引起的沿裂缝的效应,然后在与裂纹单元相反的方向上再施加这些效应,其中使用了包含奇点的单元,而应力强度因子则需要最终来进行分析计算,并且来自两次分析结果叠加的应力。很明显,这种分析是不恒定的,但是,它给出了合理的结果。

另一种处理方法是选择热分布,使裂纹尖端处于零平均温度。这是通过从其他地方的温度中减去裂缝尖端的平均温度来完成的。因此,奇点单元之间不会有热膨胀。然而,这种处理在三维分析的情况下是不合适的,因为不存在可以对裂缝上的所有单元施加的平均温度。

因此为了解决裂纹尖端的奇异性问题,则需要提出一种奇异的单元,即其单元本身可以反应裂纹尖端处的应变奇异性,从而不需要再单独的进行奇异性处理,达到精确计算该类问题的效果,此即为奇异等参元

而众所周知,采用之前的等参元中的单元均满足基本的收敛标准,即元素间相容性,恒定应变模式,位移连续性和刚体运动模式。他们也通过了分块测试。并且由于它们几乎存在于所有通用程序中,因此此类单元非常容易得到应用,并且它们的收敛特性使得它们在线性断裂力学中的应用非常容易处理 [1]。

## 2 奇异等参元的构建

奇异等参元的构建仍然基于等参元的基本构建准则,即存在相应的母单元(即其所对应的坐标  $\eta, \xi$ )以及原物理空间,其之间对应于差值关系:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (1)$$

而相应的位移场也由 (1) 类似的公式得到;从而我们由位移场得到相应的应变关系:

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

而为了联系物理空间中的导数 (3) 与母单元空间中导数的关系,引入相应的雅可比行列式(及其相应的雅可比行列式):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

可见到目前为止,和传统的等参元构建方法一致,但是为了使得单元内部的应变场具有裂纹的性质,即应变具有:  $\varepsilon \sim 1/\sqrt{r}$  的性质,而  $r$  为到裂纹尖端的距离。因此我们需要构造特殊的节点为止,使得雅可比矩阵 (4) 中的某些元素在裂纹尖端处等于 0,从而构造裂纹尖端的奇异性,而同时需要满足应变场的分部和理论相契合。

### 3 奇异等参元举例

取一个简单的例子，我们先分析平面二维问题，我们构造一个 8 节点等参元，其物理空间的节点分布如图1所示 [1]：

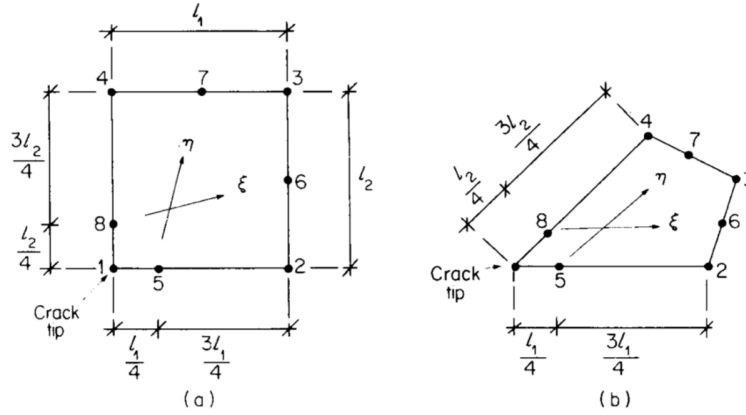


图 1: 8 节点奇异等参元节点分布

其中 (a) 为矩形的单元, (b) 为任意形状的直边单元, 而 1 号节点对应相应的裂纹尖端位置 (奇异点), 而在物理空间中把原本靠近 1 号节点并且应该在中点处的 5, 8 号节点挪到距离 1 号节点  $1/4$  边长处的位置。

为了分析简便, 我们先考虑 1, 5, 2 节点对应的  $x$  方向的差值, 我们假设物理空间中 1 号节点对应原点位置, 而在母单元中 5 号节点仍然是中点位置  $\xi = 0$ , 而 1, 2 号节点分别对应:  $\xi = -1, 1$  因此相应的形函数仍然为:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ N_5 &= (1-\xi^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1, 2, 5 节点对应的坐标为:  $x_1 = 0, x_2 = L, x_5 = L/4$ , 因此我们由公式 (1) 得到相应的物理空间坐标的差值表达式:

$$x = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)L + (1-\xi^2)\frac{L}{4} \quad (6)$$

求解得到:

$$\xi = \left( -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \quad (7)$$

联立方程: (6),(7) 得到:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1+\xi) = \sqrt{xL} \quad (8)$$

可见其在 1 号节点也就是裂纹尖端处 ( $\xi = -1, x = 0$ ) 的值为 0, 由公式 (4) 可以得知相应的雅可比矩阵的逆出现奇异性。

进一步的计算相应的位移场:

$$u = -\frac{1}{2} \left( -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \left[ 2 - 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right] u_1 + \frac{1}{2} \left( -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \left[ 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right] u_2 + \left( 4\sqrt{\frac{x}{L}} - 4\frac{x}{L} \right) u_5 \quad (9)$$

得到应变  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{3}{\sqrt{(xL)}} - \frac{4}{L} \right] u_1 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(xL)}} + \frac{4}{L} \right] u_2 + \left[ \frac{2}{\sqrt{(xL)}} - \frac{4}{L} \right] u_5 \quad (10)$$

可见其服从  $1/\sqrt{r}$  即  $1/\sqrt{x}$  的变化规律。

## 4 奇异等参元的性质

从 3 中的简单例子的分析可以推广一下奇异等参元的特点和性质，其主要包括：

1. 几何特征：单元中的某一个节点对应裂纹尖端，而与之想靠近的中间节点需要移动到边长的  $1/4$  的位置
2. 差值函数特点：和传统单元一致，其在各自节点位置处取 1，其他节点位置取 0，并且各个节点的形函数之和为 1。
3. 雅可比行列式和矩阵的奇异性：雅可比行列式在裂纹尖端处取 0，雅可比矩阵中出现 0 元素
4. 单元应变场分布：在裂纹尖端对应的节点处为无穷大，在其他位置呈现  $1/\sqrt{r}$  分布

## 第二部分 奇异等参元的可用性分析

### 5 奇异等参元的收敛性分析

虽然奇异等参数元包含奇点，但它们满足收敛的必要条件。由于元素是等参数的，即我们对于位置和位移有相同的差值关系 (1)，因此可以证明其满足单元间的相容性和连续性 [4]。此外，由于  $\sum_i N_i = 1$ ，因此元件满足恒定应变和刚体运动条件，因此其符合收敛性的充要条件。

### 6 奇异等参元的刚度阵 & 应变能分析

由于单元的雅可比矩阵中 0 元素的存在，将导致  $\mathbf{B}$  矩阵也将出现奇异性，从而相应的单元刚度阵：

$$[\mathbf{K}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (11)$$

也有可能出现奇异性，换言之，相应的单元应变能有可能趋于无限大，因此需要对其刚度阵的奇异性的进一步分析，以及提出对于奇异性的解决方案 [6]。

然而，对于三角形和棱柱元素，刚度阵是有限。而 Hibbitt[5] 证明了矩形和砖单元的刚度阵在裂纹尖端具有奇点。

当然，如果使用数值积分可以消除这个问题，但是三角形和棱柱形元素的数值结果比矩形和砖形元素的值结果要好得多（和奇异性有很大的关系）。

### 7 奇异等参元的精确性检验

对于一个带有裂纹的平面应变矩形杆问题，裂缝在对称的两侧，如图2所示：[1]

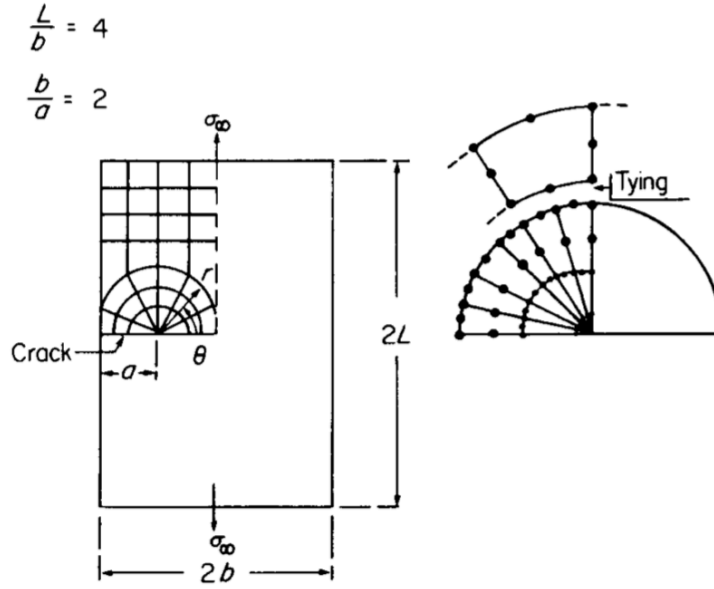


图 2: 对称裂纹平面应变问题结构示意图

这种情况下的应力强度因子的理论公式:

$$K_I = \left[ 2G \left( \frac{2\pi}{r} \right)^{\frac{1}{2}} / f_y(\theta) \right] u_y(r, \theta) \quad (12)$$

而在此问题中:

$$K_I = \sigma_\infty (\pi a)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right) \cdot C \quad (13)$$

若采用奇异等参元来计算此问题, 其中采用包含了 252 个单元, 300 个节点和 548 个自由度的网格进行测试, 并且在第三和第四环之间使用特殊的节点位移连接来满足单元间的相容性。

其中应力的理论结果和有限元计算结果的对比如图3所示:

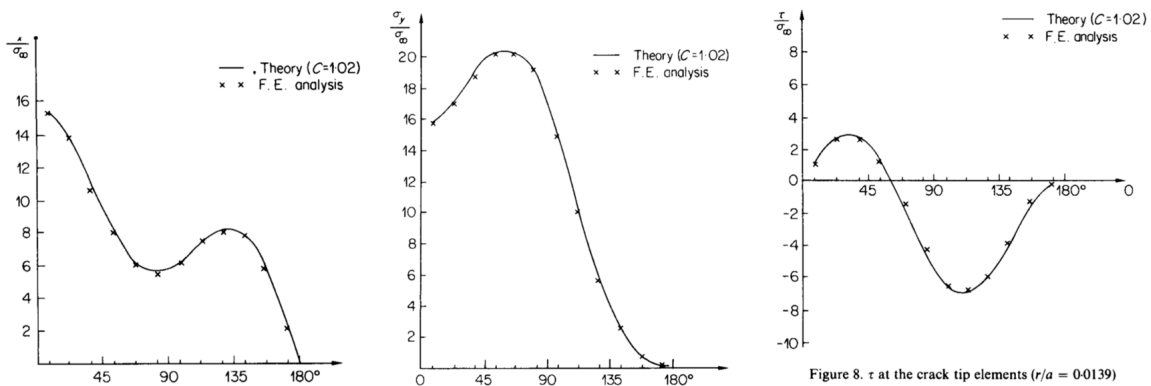


图 3: 对称裂纹平面应变问题的有限元结果和理论结果对比

其中应力计算中的误差在-9%至+4%之间, 可见和理论符合的非常好, 此类单元能够非常高效的应用在断裂力学的裂纹问题中, 并且从单元本身解决应变的奇异性问题。

### 第三部分 参考文献

- [1]Barsoum R S . On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, 10(1):25-37.
- [2]Byskov E. The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements[J]. International Journal of Fracture Mechanics, 1970, 6(2):159-167.
- [3]Irons B M, Razzaque A. EXPERIENCE WITH THE PATCH TEST FOR CONVERGENCE OF FINITE ELEMENTS[J]. 1972.
- [4]Hellen T K. On the method of virtual crack extensions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 9(1):187-207.
- [5]Barsoum R S. Discussion: “Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements,” C. F. Shih et al[J]. International Journal of Fracture, 1976, 12(5):763-763.
- [6]Hibbitt H D . Some properties of singular isoparametric elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(1):180-184.