第八讲

✧ 上下文无关文法 ⇔ 下推自动机

上下文无关文法 ⇔ 下推自动机

- ✧ 从上下文无关文法构造等价的下推自动机
- ✧ 从下推自动机构造等价的上下文无关文法

- 例：利用下推栈实现自上而下语法分析的过程
  - 语法分析基本问题：

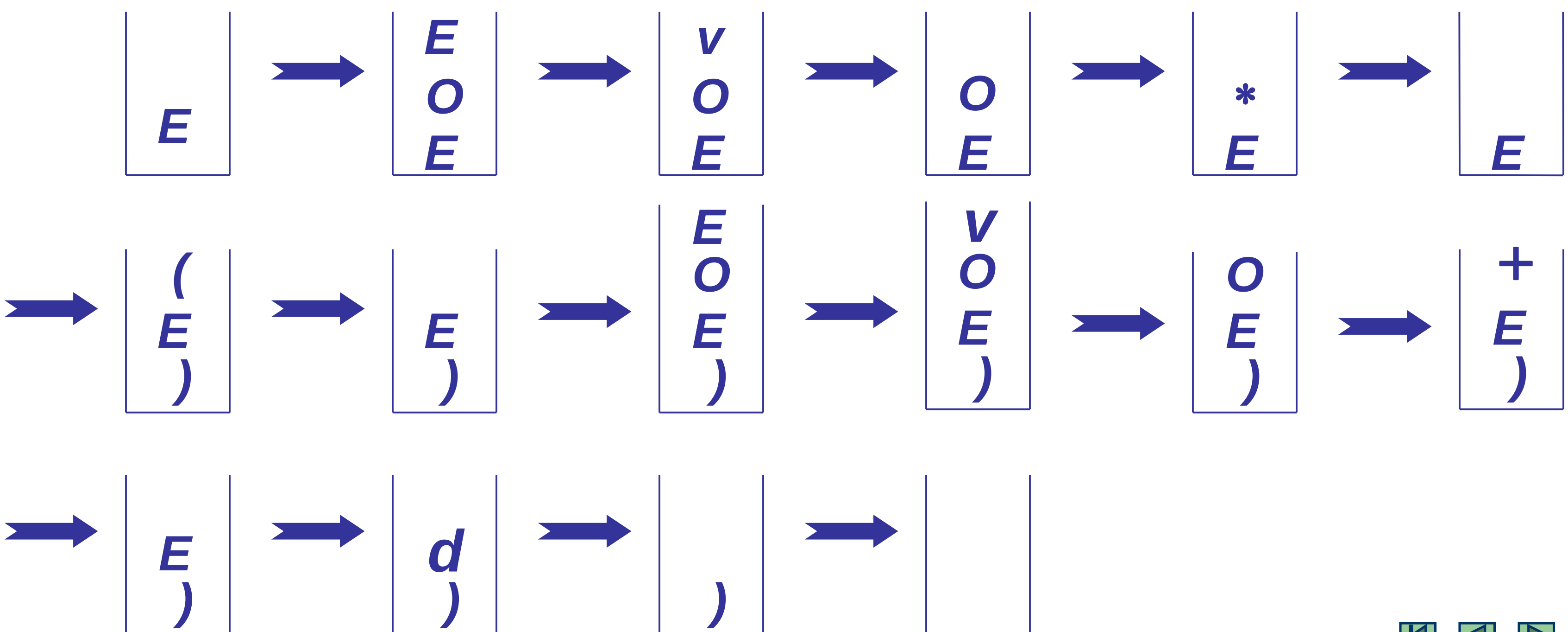
    对任意上下文无关文法 $G = (V, T, P, S)$ 和任意 $w \in T^*$，是否有 $w \in L(G)$? 若成立，则给出分析树；否则，进行报错处理。

✧ 利用下推栈进行自顶向下的分析过程举例

$E \rightarrow EOE \mid (E) \mid v \mid d$

$O \rightarrow + \mid *$

$v \; * \; (\; v \; + \; d \;)$



✧ 一种构造方法

设 CFG $G = (V, T, P, S)$，构造一个空栈接受方式的

PDA $E = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$,

转移函数 δ 定义如下:

(1) 对每一 $A \in V$, $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid \text{"}A \to \beta\text{"} \in P\}$;

(2) 对每一 $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{ (q, \varepsilon) \}$.

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

$E \to EOE \mid (E) \mid v \mid d$
$O \to + \mid *$

✧ 举例 对右边产生式所代表的CFG，依上述方法构造 *PDA* 为 $(\{q\}, \{v,d,+,*\}, \{E,O,v,d,+,*\}, \delta, q, E)$，

其中δ定义为

$$\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q,EOE), (q,(E)), (q,v),(q,d)\},$$
$$\delta(q, \varepsilon, O) = \{(q,+), (q,*)\},$$
$$\delta(q, v, v) = \{(q, \varepsilon)\},$$
$$\delta(q, d, d) = \delta(q,+,+) = \delta(q,*,*) = \{(q, \varepsilon)\}$$

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

✧ **结论** 依上述构造方法，从 CFG $G = (V, T, P, S)$ 构造一个空栈接受方式的 PDA $E = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$，则有 $N(E) = L(G)$.

✧ **证明思路** 欲证，对任何 $w \in T^*$，$w \in L(G) \Leftrightarrow w \in N(E)$.

$\Rightarrow$ 先证明如下结论, *if* $A \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$, *then* $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
归纳于 $A \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$ 的步数 n.

基础 $n=1$，$A \rightarrow w$ 必为产生式，$(q,w,A) \vdash (q,w,w) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳 设第一步使用产生式 $A \rightarrow X_1X_2\ldots X_m$，必有 $w=w_1w_2\ldots w_m$，
$(q,w,A) \vdash (q,w, X_1X_2\ldots X_m) \vdash^* (q, w_2\ldots w_m, X_2\ldots X_m)$
$\vdash^* (q, w_3\ldots w_m, X_3\ldots X_m) \vdash^* \ldots \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

所以有如下结论, *if* $S \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$, *then* $(q,w,S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
即, $w \in L(G) \Rightarrow w \in N(E)$.

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

✧ **证明思路** 欲证，对任何 $w\in T^*$, $w\in L(G) \Leftrightarrow w\in N(E)$.

$\Leftarrow$ 先证明如下结论： *if* $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $A \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$.

归纳于 $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的步数 n.

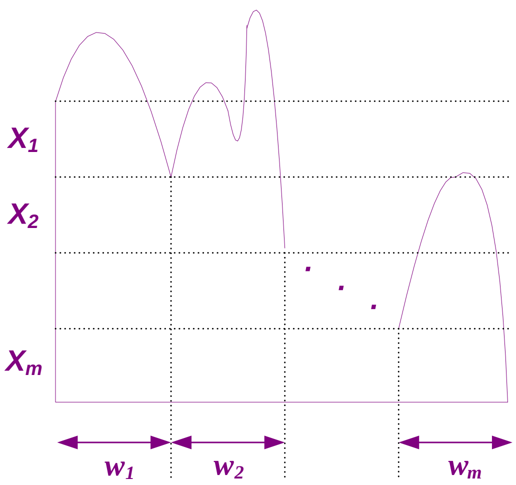
基础 $n=1$，必有 $w = \varepsilon$ ，且 $A\to\varepsilon$ 为 G 的产生式，所以 $A \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$.

归纳 $n>1$，设第一步使用产生式 $A\to X_1X_2\ldots X_m$ ，

可以将 w 分为 $w=w_1w_2\ldots w_m$ ，满足 $(q, w_i, X_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$，无论 X_i 为终结符，还是非终结符，都有 $X_i \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w_i$.

因此， $A \Rightarrow X_1X_2\ldots X_m$

$$\overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w_1w_2\ldots w_m = w$$



所以有如下结论,对任何 $w\in T^*$,

if $(q,w,S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $S \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$.

即, $w\in N(E) \Rightarrow w\in L(G)$.

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ 一种构造方法 设 PDA $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, 构造CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$，其中

$$V = \{S\} \cup \{ [pXq] \mid p,q \in Q \wedge X \in \Gamma \}$$

产生式集合 *P* 定义如下:

(1) 对每一 $p \in Q$, G 包含产生式

$$S \to [q_0 Z_0 p];$$

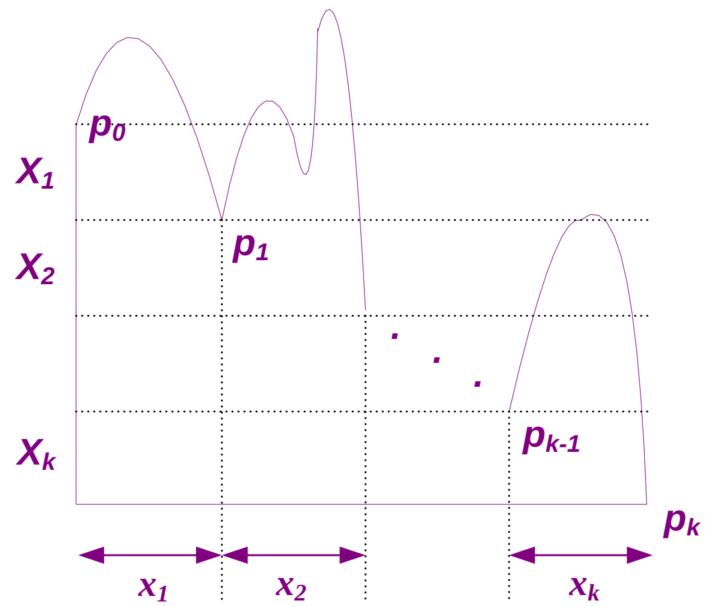
(2) 若 $(q, X_1 X_2 \ldots X_k) \in \delta(p, a, X)$,

则G 包含产生式

$$[pXp_k] \to a[qX_1p_1]\,[p_1X_2p_2] \ldots [p_{k-1}X_kp_k].$$

其中，$a \in \Sigma$ 或 $a = \varepsilon$,

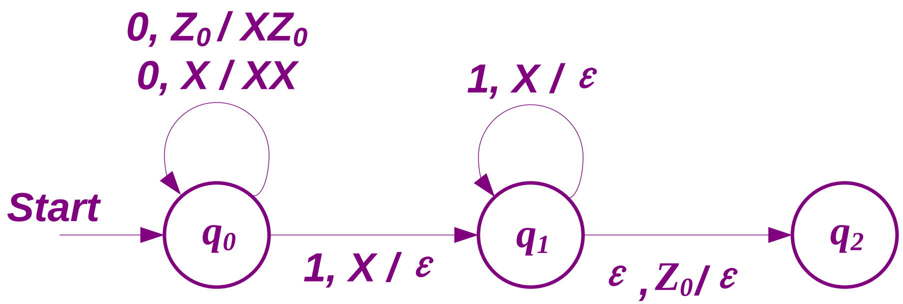
(参见右图，其中p_0=q)



从下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ 举例 对于右下图的 PDA，构造CFG $G = (V,\{0,1\},P,S)$，其中 $V = \{S\} \cup \{ [pYq] \mid p,q \in \{q_0,q_1,q_2\} \wedge Y \in \{Z_0,X\} \}$

产生式集合 P 定义如下:



(1) $S \rightarrow [q_0Z_0q_0]$;
$S \rightarrow [q_0Z_0q_1]$;
$S \rightarrow [q_0Z_0q_2]$;

(2) $[q_0Z_0q_j] \rightarrow 0[q_0Xq_i]\,[q_iZ_0q_j]$, $i, j = 0,1,2$; $((q_0,XZ_0) \in \delta(q_0, 0, Z_0))$

(3) $[q_0Xq_j] \rightarrow 0[q_0Xq_i]\,[q_iXq_j]$, $i , j = 0,1,2$; $((q_0,XX) \in \delta(q_0, 0, X))$

(4) $[q_0Xq_1] \rightarrow 1$; $((q_1,\varepsilon) \in \delta(q_0, 1, X))$

(5) $[q_1Xq_1] \rightarrow 1$; $((q_1,\varepsilon) \in \delta(q_1, 1, X))$

(6) $[q_1Z_0q_2] \rightarrow \varepsilon$; $((q_2,\varepsilon) \in \delta(q_1, \varepsilon, Z_0))$

注意：对于(4),(5),(6)，前一页的$[qXp_k]$中，$k=0$，p_0分别为q_1,q_1, q_2 .

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

- **结论** 依上述构造方法，从 PDA $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ 构造一个 CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$，则有 $N(E) = L(G)$.

- **证明思路** 欲证，对任何 $w \in \Sigma^*$，$w \in N(E) \Leftrightarrow w \in L(G)$.
即证明: 存在 $p \in Q$. $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ *iff* $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

先证明对 $q, p \in Q$, $X \in \Gamma$，$(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ *iff* $[qXp] \overset{*}{\Rightarrow} w$.

这样, *if* $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $[q_0Z_0p] \overset{*}{\Rightarrow} w$.

因为 G 中包含产生式 $S \rightarrow [q_0Z_0p]$, 所以 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

反之, 若 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, 由 G 的构造过程,
存在 p, 满足 $[q_0Z_0p] \overset{*}{\Rightarrow} w$, 从而有 $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$

•

从下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ 证明思路 (续前)

现证明对$q,p\in Q$, $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ **iff** $[qXp]\overset{*}{\Rightarrow}w$.

$\Rightarrow$ 归纳于 $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ 的步数 n.

基础 $n=1$，必有 w 或为 ε 或为单个符号, 且 $(p,\varepsilon)\in\delta(q,w,X)$.
由G 的构造，$[qXp]\to w$ 为一个产生式, 所以 $[qXp]\overset{*}{\Rightarrow}w$.

归纳 $n>1$，设第一步推导为 $(q,w,X)\vdash(p_0,x,X_1X_2\ldots X_k)$，其中 $w=ax$, a 或为 ε 或为单个符号,且 $(p_0,X_1X_2\ldots X_k)\in\delta(q,a,X)$.

可以将x 分为 $x=x_1x_2\ldots x_k$，存在$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}$, 满足
$(p_{i-1},x_i,X_i)\vdash^*(p_i,\varepsilon,\varepsilon)$, $1\le i<k$; $(p_{k-1},x_k,X_k)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$,

由归纳假设, $[p_{i-1}X_ip_i]\overset{*}{\Rightarrow}x_i$, $1\le i<k$; $[p_{k-1}X_kp]\overset{*}{\Rightarrow}x_k$.

由G 的构造，$[qXp]\to a[p_0X_1p_1][p_1X_2p_2]\ldots[p_{k-1}X_kp]$为产生式.

所以, $[qXp]\overset{*}{\Rightarrow}ax_1x_2\ldots x_k=w$.

✧ 证明思路 (续前)

继续证明对 $q,p\in Q$, $(q,w,X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ iff $[qXp] \overset{*}{\Rightarrow} w$.

$\Leftarrow$ 归纳于 $[qXp] \overset{*}{\Rightarrow} w$的步数 n.

基础 $n=1$， $[qXp]\to w$ 必为一个产生式，由G 的构造，w 或为 ε 或为单个符号，且 $(p, \varepsilon) \in \delta(q, w, X)$. 所以 $(q,w,X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳 $n>1$,设第一步推导为 $[qXp] \vdash a[p_0X_1p_1]\,[p_1X_2p_2]\ldots[p_{k-1}X_kp]$. 可以将w 分为 $w = ax_1x_2\ldots x_k$， 使得 $[p_{i-1}X_ip_i] \overset{*}{\Rightarrow} x_i$, $1\le i<k$; $[p_{k-1}X_kp] \overset{*}{\Rightarrow} x_k$.

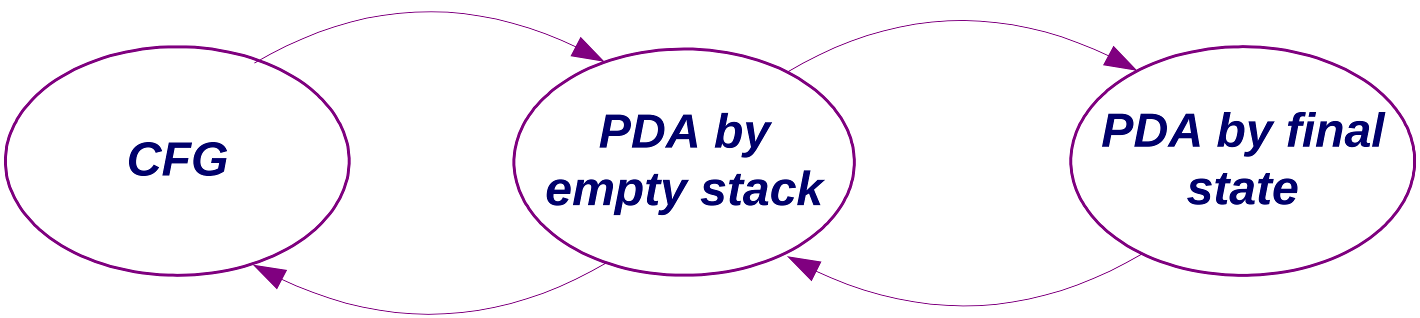
由归纳假设,

$$(p_{i-1},x_i,X_i) \vdash^* (p_i, \varepsilon, \varepsilon),\ 1\le i<k;\quad (p_{k-1},x_k,X_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon),$$

由G 的构造， $(p_0, X_1X_2 \ldots X_k) \in \delta(q, a, X)$.

所以, $(q,w,X) \vdash (p_0, x_1x_2\ldots x_k, X_1X_2 \ldots X_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

✧ 小结



课后练习

✧ 必做题:

- ***Ex.6.3.2***
- ***Ex.6.3.4***
- ***!Ex.6.3.5 (c)***

清華大學

That's all for today.

Thank You