第 七 讲

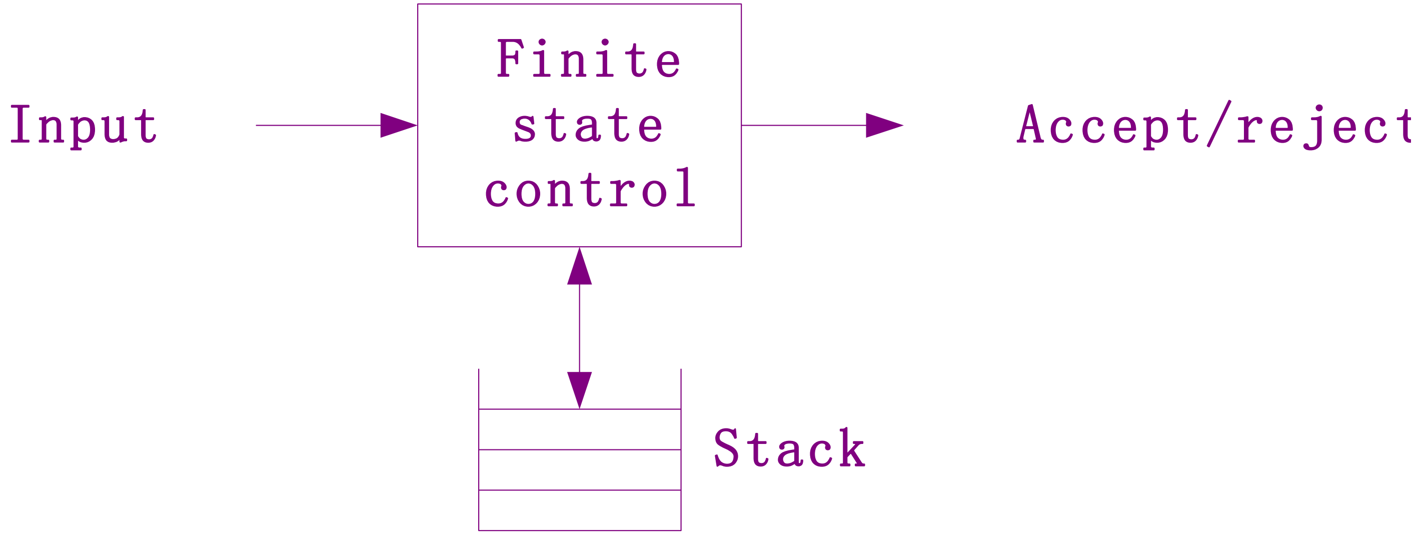
✧ 下推自动机

下推自动机

- ✧ 下推自动机的基本概念
- ✧ 下推自动机的语言：两种定义
- ✧ 两种定义的等价性

下推自动机的基本概念

✧ 下推自动机（*pushdown automaton*）是带有一个堆栈的有限状态自动机.



下推自动机的基本概念

✧ 形式定义 一个下推自动机 PDA 是一个七元组

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F).$$

✧ 有限状态集 — Q

✧ 有限输入符号集 — Σ

✧ 有限堆栈符号集 — Γ

✧ 转移函数 — δ

✧ 一个开始状态 — q_0

✧ 一个开始堆栈符号 — Z_0

✧ 终态集合 — F

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$$

$q_0 \in Q$

$Z_0 \in \Gamma$

$F \subseteq Q$

✧ 举例 所接受语言为$L = \{ 0^n1^n \mid n \geq 1\}$的一个 PDA

$$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{X,Z_0\}, \delta, q_0 , Z_0 , \{q_2\})$$

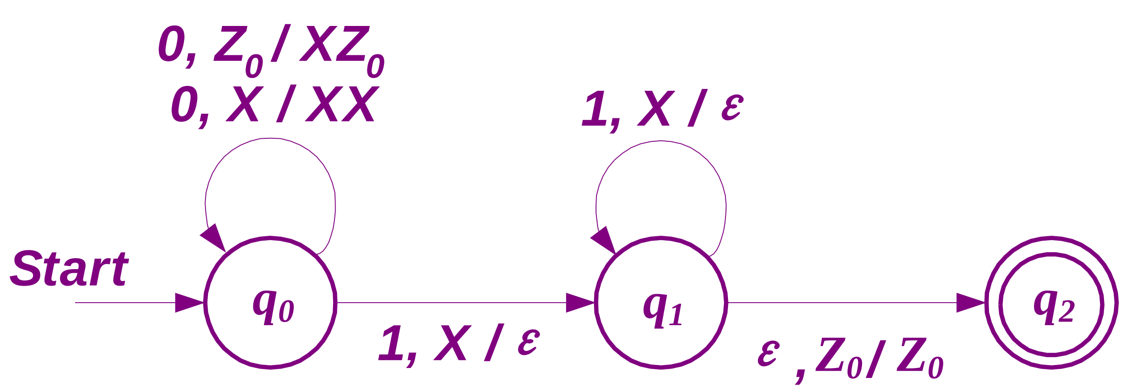
其中，转移函数定义如下

$\delta(q_0, 0, Z_0)=\{(q_0, XZ_0)\}$, $\delta(q_0, 0, X)=\{(q_0, XX)\}$,

$\delta(q_0, 1, X)=\{(q_1, \varepsilon)\}$, $\delta(q_1, 1, X)=\{(q_1, \varepsilon)\}$

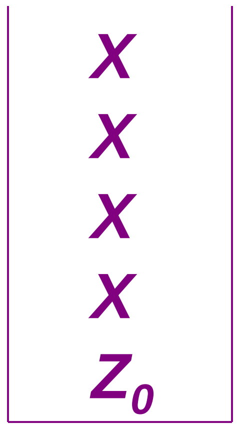
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0)=\{(q_2, Z_0)\}$

对其余的参数值， $\delta(q, a, Y)=\Phi$



下推自动机的基本概念

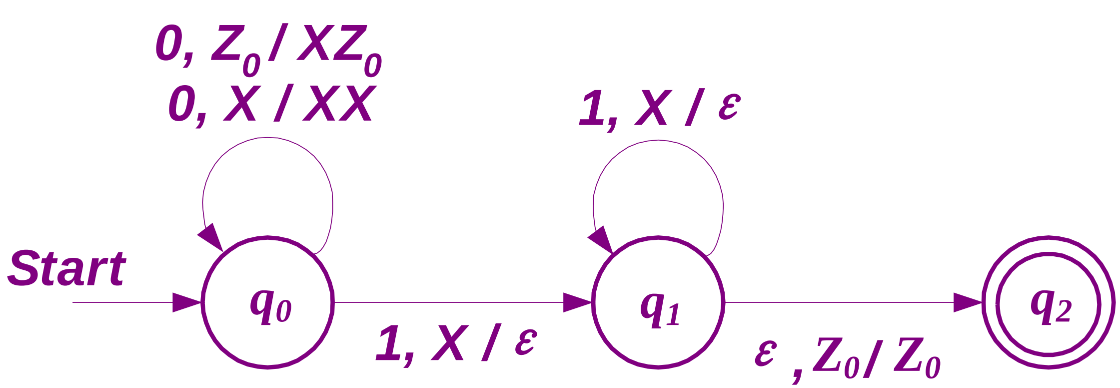
✧ 举例 上述 PDA 如何接受输入字符串？例如，00001111.



stack

0	0	0	0	1	1	1	1

当前状态: q_0 q_0 q_0 q_0 q_0



下推自动机的基本概念

✧ 举例 上述 PDA 如何接受输入字符串？例如，*00001111*.

X

X

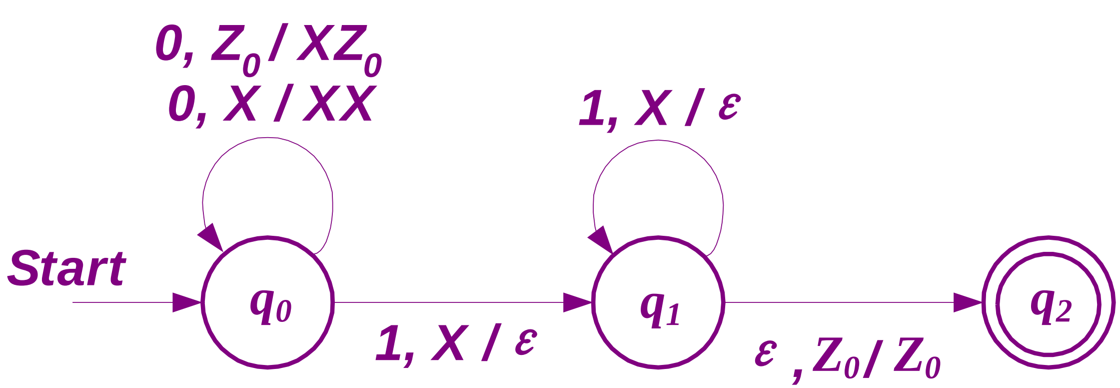
X

Z_0

stack

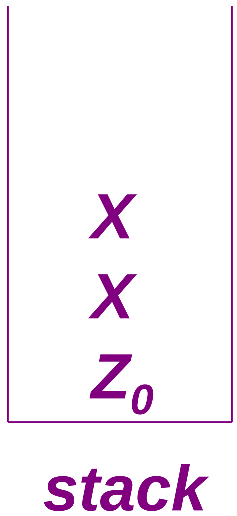
0	0	0	0	1	1	1	1

当前状态: q_1



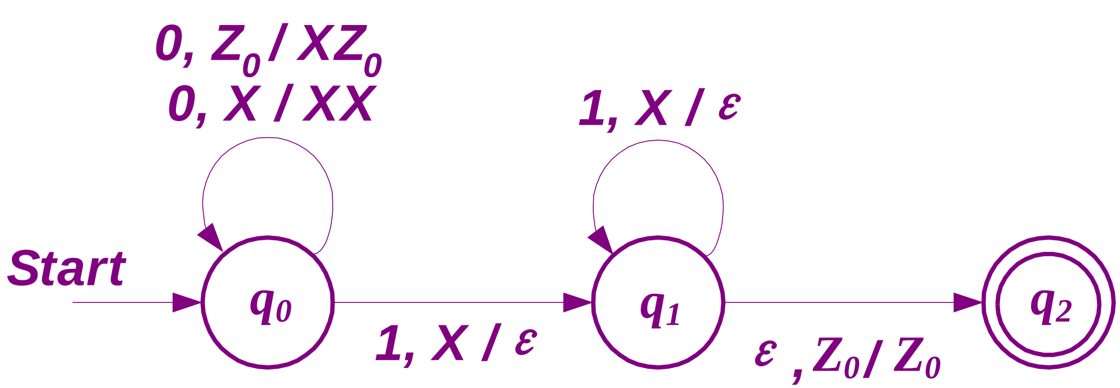
下推自动机的基本概念

✧ 举例 上述 PDA 如何接受输入字符串？例如，00001111.



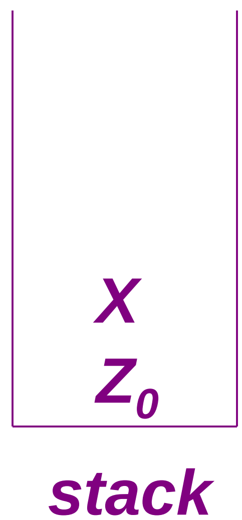
0	0	0	0	1	1	1	1

当前状态: q_1



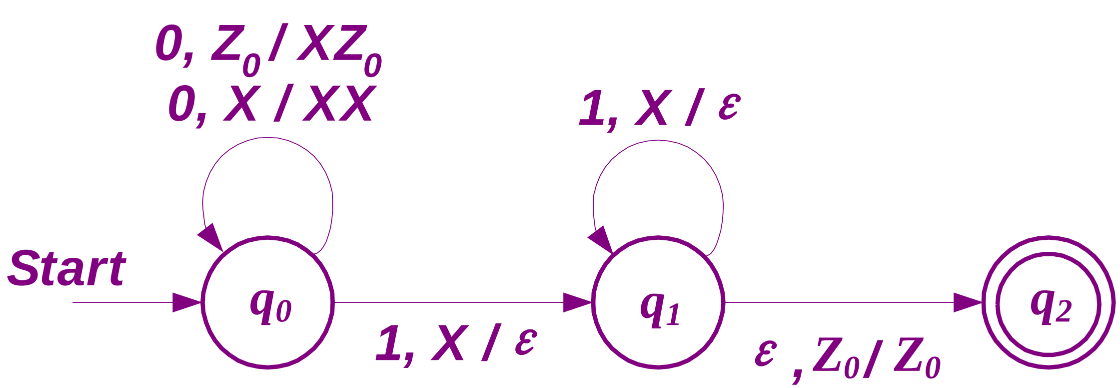
下推自动机的基本概念

✧ 举例 上述 PDA 如何接受输入字符串？例如，00001111.



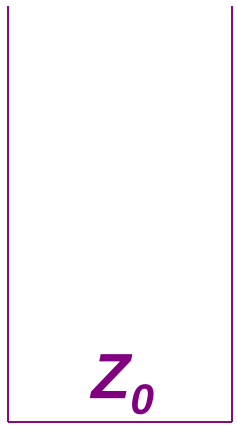
0	0	0	0	1	1	1	1

当前状态: q_1



下推自动机的基本概念

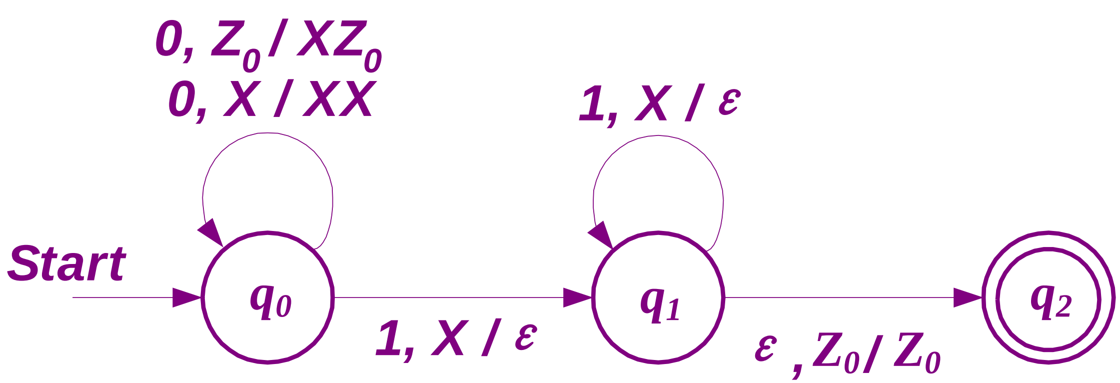
✧ 举例 上述 **PDA** 如何接受输入字符串？例如，**00001111.**



stack

0	0	0	0	1	1	1	1

当前状态: q_1



下推自动机的基本概念

✧ 举例 上述 PDA 如何接受输入字符串？例如，*00001111*.

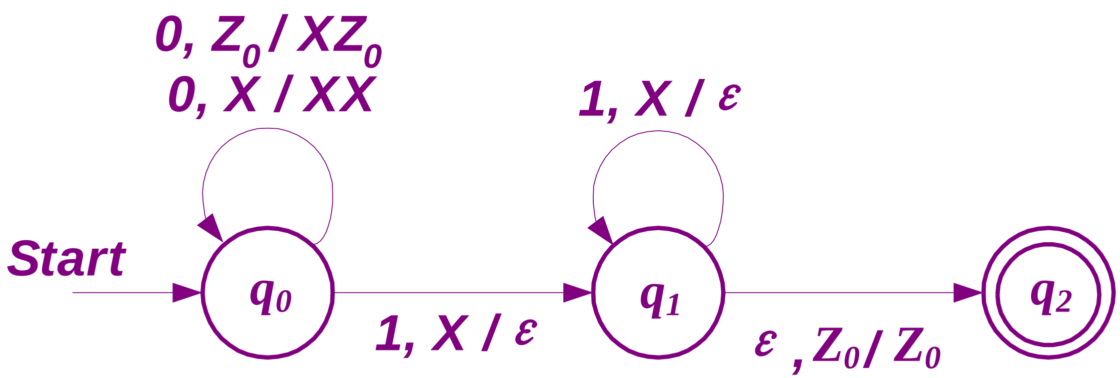
0	0	0	0	1	1	1	1

☺

Z_0

stack

当前状态: q_2



下推自动机的语言：两种定义

- ✧ 用 *ID*（*instantaneous descriptions*）表达当前格局

  PDA 的当前格局用三元组（q,w,γ）表示，称为 *ID*，其中 q 为当前状态，w 为剩余的输入串，γ 为当前栈中的内容.

- ✧ 设 *PDA* $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，定义 *ID* 推导关系 $\vdash_P$（在不至于混淆时用 $\vdash$ 表示）为

  $$(q,aw,X\beta) \vdash (p,w,\alpha\beta) \text{ iff } (p, \alpha) \in \delta(q,a,X),$$

  其中 $p,q \in Q$，$a \in \Sigma \cup \{ \varepsilon \}$，$w \in \Sigma^*$，$X \in \Gamma$，$\alpha,\beta \in \Gamma^*$.

- ✧ 上述 *ID* 推导关系的自反传递闭包 $\vdash^*_P$（或 $\vdash^*$）定义为

  基础 对任意 *ID* I, $I \vdash^* I$.
  归纳 对任意 *ID* I,J,K, 如果 $I \vdash K$, $K \vdash^* J$, 则 $I \vdash^* J$.

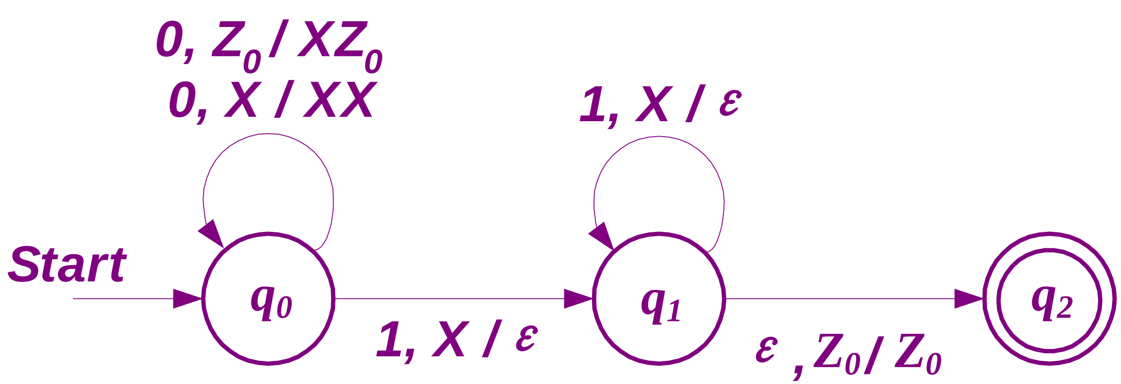
下推自动机的语言：两种定义

✧ **结论** 设 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，如果 $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$，则对任何 $w \in \Sigma^*$ 和 $\gamma \in \Gamma^*$，$(q,xw,\alpha\gamma) \vdash^* (p,yw,\beta\gamma)$.

证明思路：归纳于 $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$ 的步数.

✧ **举例** 下图 PDA 接受输入串 **000111** 的 ID 推导过程.

$$(q_0,000111,Z_0) \vdash^* (q_0,111,XXXZ_0) \vdash^* (q_1,\varepsilon,Z_0) \vdash^* (q_2,\varepsilon,Z_0)$$



下推自动机的语言：两种定义

✧ 终态接受的定义方法 设 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，定义 $L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)\}$，其中$q \in F$，$\alpha \in \Gamma^*$.

✧ 空栈接受的定义方法 设 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$，定义 $N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$，其中$q \in Q$.

✧ 举例 所接受语言为$N(P) = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$的一个 PDA

$$P = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0)$$

其中，转移函数定义如下

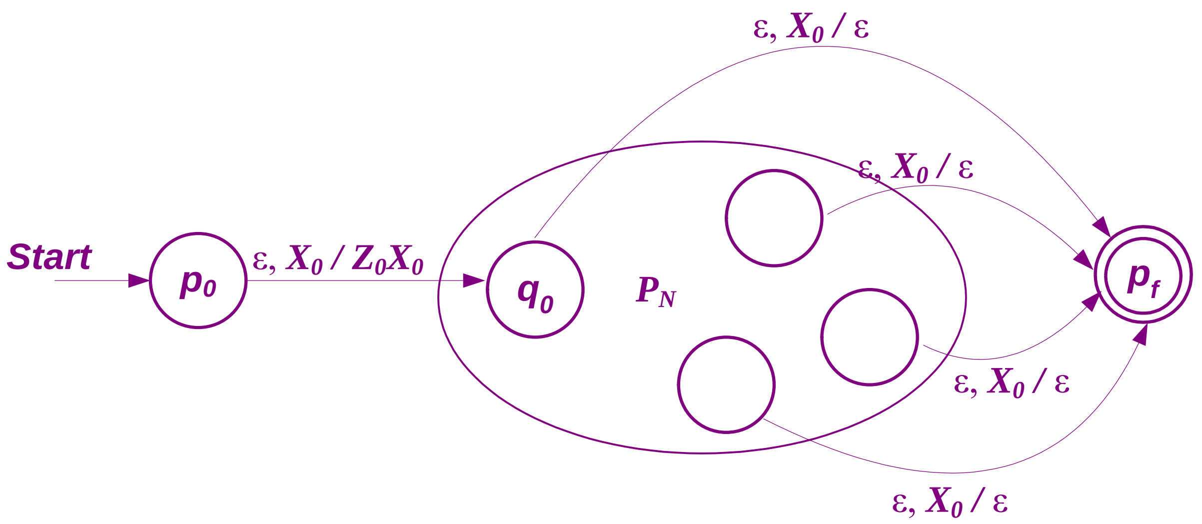
$\delta(q_0, 0, Z_0)=\{(q_0, XZ_0)\}$，$\delta(q_0, 0, X)=\{(q_0, XX)\}$，
$\delta(q_0, 1, X)=\{(q_1, \varepsilon)\}$，$\delta(q_1, 1, X)=\{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0)=\{(q_1, \varepsilon)\}$，对其余的参数值，$\delta(q, a, Y)=\Phi$

两种定义的等价性

✧ 从空栈接受到终态接受

设 PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, $L=L(P_N)$, 则存在 PDA P_F, 满足$L=L(P_F)$.

证明思路:



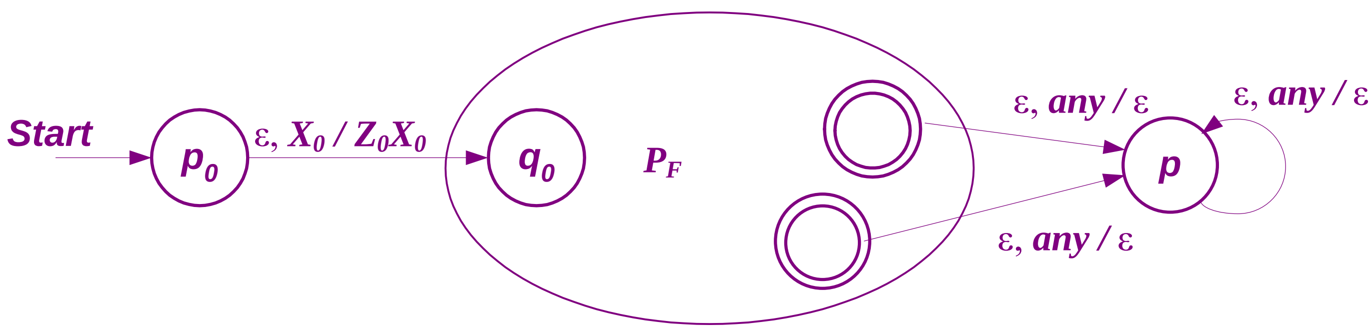
$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

两种定义的等价性

✧ 从终态接受到空栈接受

设 PDA $P_F=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, $L=L(P_F)$, 则存在PDA P_N, 满足$L=N(P_N)$.

证明思路:



$$P_N = (Q\cup\{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma\cup\{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

课后练习

✧ 必做题:

- *Ex.6.2.1 (b), (c)*
- *Ex.6.2.6*

✧ 思考题:

- *!Ex.6.2.2(b)*

课后练习

- 自测题:
  - 试构造接受下列语言的一个 PDA（空栈接受或终态接受均可）:

1）$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*$, 且 w 的任何前缀中 a 的数目至少 2 倍于 b 的数目$\}$

2）$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*$, 且 w 中 a 的数目不等于 b 的数目$\}$

3）$L = \{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*$，$w$ 中 a 和 b 的个数相同且不含连续的 c $\}$

4）$L = \{ a^n b^m c^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0$, 以及 $n + 2m = k \}$

That's all for today.

Thank You