TD d'Automatique N° 4- Master 1

Exercice 1: On considère un système linéaire défini par l'équation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 + \beta x_3 + u \end{cases}$$

avec u la variable de commande et α et β des paramètres constants.

1^o) Donner l'expression des matrices d'état A et B du système dans la représentation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$. Ce système est-il commandable?

2^o) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.

3^o) On considère dans cette question la sortie $y = x_1$.

a) Le système est-il observable avec cette sortie?

b) Montrer que y satisfait l'équation différentielle suivante:

$$\dddot{y} = \beta\ddot{y} - \dot{y} + (2\alpha + \beta)y + 2u$$

et en déduire l'expression de la fonction de transfert du système reliant y à u. Faire le lien entre cette fonction de transfert et la question 2.

c) Le système avec y comme sortie est-il asymptotiquement stable? (préciser si nécessaire les conditions de stabilité asymptotique en fonction des paramètres du système)

d) Donner une réalisation de la fonction de transfert du système sous forme canonique commandable.

Exercice 2: On souhaite estimer la dérivée d'une variable y, mesurée, via une synthèse d'observateur. Pour ce faire, on pose une hypothèse de vitesse constante, i.e., $\ddot{y} = 0$, de sorte que l'on peut écrire:

$$\begin{cases} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= 0 \end{cases}$$

1^o) Synthétiser un observateur de l'état $x = (y, v)^T$ du système ci-dessus à partir de la mesure y, et proposer un choix de réglage des gains de cet observateur.

2^o) Déterminer la fonction de transfert entre l'état $\hat{x}$ de cet observateur et la mesure y.

3^o) Déduire de la question précédente que l'observateur de vitesse construit précédemment est équivalent à un filtre de fonction de transfert

$$F(p) = \frac{p\varpi^2}{p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2}$$

4^o) Etendre la solution développée précédemment à la synthèse d'un estimateur d'accélération $a = \ddot{y}$ à partir d'une hypothèse d'accélération constante.

Corrigé

Exercice 1:

1^o) Par identification, on obtient l'expression suivante des matrices A et B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ \alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la comandbilité on applique le critère du rang. Il faut donc vérifier que

$$\text{Rang } \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = 3$$

On a

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2\beta \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible; le système est donc commandable.

2^o) On ne détaillera pas ce calcul, qui donne:

$$P_A(\lambda) = \text{Det}(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \beta\lambda^2 + \lambda - (2\alpha + \beta)$$

3^o)

a) Pour la sortie $y = x_1$ on obtient par identification $C = (1 \quad 0 \quad 0)^T$. Pour vérifier l'observabilité on applique le critère du rang. Il faut donc vérifier que

$$\text{Rang } \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = 3$$

On a

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible; le système est donc observable.

b) Puisque $y = x_1$ on a

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

et donc

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_3 = -y + 2x_3$$

et donc

$$\dddot{y} = -\dot{y} + 2\dot{x}_3 = -\dot{y} + 2\alpha x_1 + 2\beta x_3 + 2u = -\dot{y} + 2\alpha y + 2\beta x_3 + 2u$$

Les deux équations précédentes donnent

$$\dddot{y} = -\dot{y} + 2\alpha y + \beta(\ddot{y} + y) + 2u = \beta\ddot{y} - \dot{y} + (2\alpha + \beta)y + 2u$$

A partir de cette relation on déduit la fonction de transfert entre y et u ($Y = GU$):

$$G(p) = \frac{2}{p^3 - \beta p^2 + p - (2\alpha + \beta)}$$

On remarque que le dénominateur de cette fonction de transfert est égal au polynôme caractéristique de la matrice A, conformément à ce qui a été vu en cours.

c) On rappelle que pour un système d'ordre trois, de polynôme caractéristique $p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$, les conditions de stabilité sont $a_0, a_1, a_2 > 0$ et $a_0 < a_1a_2$. Si l'on applique ces conditions au système ci-dessus, on obtient donc des conditions sur les paramètres α et β:

$$\beta < 0, (2\alpha + \beta) < 0, -(2\alpha + \beta) < -\beta$$

Ces conditions sont équivalentes à

$$\beta < 0 < \alpha < -\frac{\beta}{2}$$

d) Le système admet la réalisation sous forme canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (2\alpha + \beta) & -1 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 0 \quad 0)^T$$

Exercice 2:

1^o) L'observateur est défini par les deux équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{y}} & = & \hat{v} - k_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{v}} & = & -k_2(\hat{y} - y) \end{array} \right. \tag{1}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $(\tilde{y}, \tilde{v}) = (\hat{y} - y, \hat{v} - v)$ est donc donnée par les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{y}} & = & \tilde{v} - k_1\tilde{y} \\ \dot{\tilde{v}} & = & -k_2\tilde{y} \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice associée à ce système est $P(\lambda) = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2$. Ceci conduit donc à choisir

$$k_1 = 2\xi\varpi\,, \quad k_2 = \varpi^2 \tag{2}$$

de façon à avoir $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\varpi\lambda + \varpi^2$. On prendra alors typiquement $\xi \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, et ϖ "grand", en fonction de la période d'échantillonage du capteur et des bruits de celui-ci.

2^o) Le système (1) peut s'écrire:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + By\,, \quad A = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la fonction de transfert entre $\hat{x}$ et y est donnée par

$$\begin{aligned} H(p) = (pI_2 - A)^{-1}B &= \begin{pmatrix} p+k_1 & -1 \\ k_2 & p \end{pmatrix}^{-1} B \\ &= \frac{1}{p^2+k_1p+k_2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -k_2 & p+k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{pk_1+k_2}{p^2+k_1p+k_2} \\ \dfrac{pk_2}{p^2+k_1p+k_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3^o) On déduit de la relation précédente, en considérant de plus le choix des gains (2), que la fonction de transfert entre $\hat{v}$ et y estimation

$$F(p) = \frac{p\varpi^2}{p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2}$$

On peut voir cette fonction de transfert comme la mise en série de deux fonctions de transfert:

$$F(p) = F_1(p) \times F_2(p) = p \times \frac{\varpi^2}{p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2}$$

La fonction de tranfert F_2 est un filtre passe-bas à large bande passante (ϖ "grand"). La fonction F_1 est un filtre dérivateur. Evidemment, il faut implémenter F telle quelle, et pas comme le produit de F_1 par F_2 puisque F_2 est non causale.

4^o) Laissée à l'attention des étudiants. Cette question ne pose pas de difficultés supplémentaires par rapport aux questions précédentes.