MO4RBR04: Automatique Linéaire II

Cours 3: Représentation d'état: Synthèse de correcteurs

Pascal Morin

ISIR, Sorbonne Université

pascal.morin@sorbonne-universite.fr

Systèmes linéaires

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Aujourd'hui: Nous allons aborder trois problèmes:

- Comment synthétiser une commande u assurant de bonnes propriétés de stabilité au système? (Synthèse du contrôleur)
- Comment estimer/reconstruire l'état x lorsque l'on ne mesure que la sortie y? (Synthèse de l'estimateur)
- Comment faire travailler ensemble le contrôleur et l'estimateur?

Synthèse de contrôleur

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- On rappelle qu'un point d'équilibre est un couple (x_0, u_0) tel que $Ax_0 + Bu_0 = 0$.
- Considérons un point d'équilibre et posons $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{u} = u - u_0$. On a alors:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} = Ax + Bu = Ax + Bu - (Ax_0 + Bu_0) = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

- Les nouvelles variables $\tilde{x}, \tilde{u}$ satisfont les mêmes équations que x, u. En particulier, $\tilde{x} = 0, \tilde{u} = 0$ est un point d'équilibre qui correspond à $x = x_0, u = u_0$.
- Ceci implique que l'étude d'un équilibre quelconque peut se ramener à l'étude de l'équilibre situé en zéro.
- Dans toute la suite nous considèrerons donc l'équilibre $(x_0, u_0) = (0,0)$.

Synthèse de contrôleur

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- En boucle ouverte (c'est-à-dire pour $u = u_0 = 0$), la dynamique du système est donnée par $\dot{x} = Ax$.
- Deux cas de figure:
  - Le comportement en boucle ouverte est satisfaisant. Dans ce cas, il n'y a rien à faire et l'on peut se satisfaire de la commande $u = 0$.
  - Le comportement en boucle ouverte n'est pas satisfaisant. Par exemple, le système est instable, marginalement stable, ou asymptotiquement stable avec une convergence très lente vers l'équilibre. Il faut alors améliorer les performances du système par le choix d'une commande adaptée.
- Nous allons voir sous quelles conditions on peut améliorer les performances du système par le choix d'une commande adaptée.

Synthèse de contrôleur

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Proposition: On suppose que le système $(*)$ est commandable. Alors, pour tout ensemble $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de valeurs réelles ou complexes telles que $\lambda \in E \Rightarrow \bar{\lambda} \in E$, il existe une matrice $K \in R^{m \times n}$ telle que les valeurs propres de la matrice $A + BK$correspondent aux valeurs λ_i de E.

Considérons une commande par retour d'état de la forme $u = Kx$. Par application de cette commande, i.e. **en boucle fermée**, le système devient $\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x$. Si le système est commandable, la proposition précédente garantit que l'on peut choisir la **matrice de gain** K de façon à imposer des valeurs propres de $A + BK$arbitraires. En choisissant ces valeurs propres à partie réelle strictement négative, on assure donc la stabilité asymptotique. De plus, la partie réelle de ces valeurs propres va déterminer la vitesse de convergence vers zéro (voir Preuve de C2-Pages 21-22).

Synthèse de contrôleur

Méthodes:

- Dès lors que le système $(*)$ est commandable, on est assuré de pouvoir placer les valeurs propres en boucle fermée arbitrairement. Se pose alors la question de savoir comment?
- Il existe plusieurs méthodes de synthèse de contrôleurs, plus ou moins sophistiquées, et plus ou moins bien adaptées à la dimension du système. Nous allons présenter la plus classique, appelée « Synthèse de commande par placement de pôles »

Méthode de synthèse par placement de pôles:

1. On se donne un ensemble de valeurs propres désirées pour le système $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tel que $\lambda \in E \Rightarrow \bar{\lambda} \in E$. La proposition de la page précédente garantit que l'on peut trouver un contrôleur imposant E comme ensemble de valeurs propres. On pose $P_s(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$.
2. On développe formellement le déterminant de $\lambda I - (A + BK)$, ce qui donne un polynôme $P(\lambda)$ dépendant des éléments $k_{i,j}$ de K.

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Synthèse de contrôleur

Méthode de synthèse par placement de pôles:

3. Suite… On identifie les polynômes $P_s(\lambda)$ et $P(\lambda)$ de façon à obtenir une expression explicite des éléments $k_{i,j}$ de K. Ceci termine la construction.

Remarques:

- La solution K du problème ci-dessus n'est pas nécessairement unique; il y a parfois plusieurs solutions, voir une infinité de solutions conduisant aux mêmes valeurs propres du système en boucle fermée.
- Cette méthode ne dit pas comment l'on doit choisir les valeurs propres. Ce choix est propre à chaque système et dépend du cahier des charges imposé. On rappelle des critères importants à ce niveau: amortissement, temps de réponse, bande passante, marge de gain, marge de phase, etc. Nous reviendrons sur ces aspects plus tard.
- Si certaines v.p. de A sont à parties réelles négatives et « grandes » (dynamiques asymptotiquement stable et rapide d'une partie du système), il convient souvent de garder ces valeurs propres pour le système en boucle fermée.

Synthèse de contrôleur-Exemple

Exemple: On considère le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \end{cases}$$

On souhaite synthétiser un contrôleur $u = Kx$ qui donne en boucle fermée l'ensemble des valeurs propres suivantes: $E = \{-1,\ -2,\ -3\}$.

Les matrices d'état du système sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie d'abord que le système est commandable. On calcule ensuite $P_s(\lambda)$ et $P(\lambda)$. On obtient, en notant $K = (k_1\ \ k_2\ \ k_3\ )$:

$$P_s(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6, \qquad P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 k_3 - \lambda(k_1 + k_2 + 1) - k_1$$

Par identification, on déduit les valeurs des k_i: $k_1 = -6, k_2 = -6, k_3 = -6.$

Synthèse d'observateur

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'un observateur?

- Un observateur pour le système $(*)$ est un algorithme qui va permettre d'estimer l 'état x du système à partir de la connaissance de la sortie y et de la commande u.
- Autrement dit, le but est de compenser l'absence de capteur permettant de mesurer tout l'état. Pourquoi?
  - Tout capteur a un coût et rajoute de la complexité au système, et donc des risques de pannes. S'il est possible d'éviter un capteur supplémentaire, cela peut être intéressant, en particulier pour des systèmes bas-coût ou lorsque le poids est un facteur critique (aéronautique par exemple).
  - Dans certains cas, le capteur mesurant directement tout l'état x n'existe pas!

Synthèse d'observateur

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Principe de synthèse d'un observateur linéaire:

- On définit un système dynamique (équation différentielle) de la forme suivante, aussi appelé **observateur**:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

- On définit **l'erreur d'estimation** $\tilde{x} = \hat{x} - x$. On a alors

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) - Ax - Bu$$
$$= A\tilde{x} + L(y - C\hat{x} - Du)$$

Puisque $y = Cx + Du$, on a donc

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

- On cherche alors une matrice L telles que les valeurs propres de $A - LC$ soient à partie réelle strictement négative. Dans ce cas, $\tilde{x}$ converge exponentiellement vers zéro, et donc $\hat{x}$ converge exponentiellement vers x.

Synthèse d'observateur

Interprétation:

- L'analyse précédente montre que si l'on est capable d'intégrer l'équation différentielle

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

quelque soit la condition initiale $\hat{x}(0)$, $\hat{x}(t)$ va converger exponentiellement vers $x(t)$. Ainsi, $\hat{x}(t)$ nous fournit une « estimation » de $x(t)$ qui va très rapidement devenir très précise.

- Comment intégrer cette équation différentielle?
  - Il est impossible de l'intégrer analytiquement car en pratique y et u ne sont pas connus à l'avance; ils sont seulement mesurés instant après instant, en « temps réel ».
  - En pratique, l'intégration sera faite numériquement à une fréquence donnée, par exemple de la façon suivante:

$$\hat{x}\big((k+1)T\big)$$
$$= \hat{x}(kT) + T * (A\hat{x}(kT) + Bu(kT) + L(y - C\hat{x} - Du)(kT))$$

Synthèse d'observateur

Interprétation:

$$\hat{x}\big((k+1)T\big) = \hat{x}(kT) + T * (A\hat{x}(kT) + Bu(kT) + L(y - C\hat{x} - Du)(kT))$$

- Cette fréquence est, par exemple, la fréquence à laquelle la sortie y est mesurée.
- Notons que dans ce cas, il faut aussi que l'entrée u soit mesurée aux mêmes instants d'échantillonnage; dans le cas contraire, il faudra éventuellement travailler avec deux fréquences d'échantillonnage.
- Un aspect essentiel est que cet algorithme ne repose que sur des informations connues: il nécessite seulement
  - Une initialisation $\hat{x}(0)$ qui peut être arbitraire
  - La suite des mesures des sorties $\hat{y}(0), \hat{y}(T), \dots, \hat{y}(kT), \dots$
  - La suite des mesures des entrées $u(0), u(T), \dots, u(kT), \dots$

Synthèse d'observateur

Mise en œuvre sous la forme prédiction/correction: On préfère souvent au schéma

$$\hat{x}\big((k+1)T\big) = \hat{x}(kT) + T * (A\hat{x}(kT) + Bu(kT) + L(y - C\hat{x} - Du)(kT))$$

le schéma en deux temps suivant:

<u>Prédiction à partir de l'entrée</u>:

$$\hat{x}^{-}\big((k+1)T\big) = \hat{x}(kT) + T * (A\hat{x}(kT) + Bu(kT))$$

<u>Correction à partir de la dernière mesure:</u>

$$\hat{x}\big((k+1)T\big) = \hat{x}^{-}((k+1)T) + T * L(y - C\hat{x}^{-} - Du)((k+1)T)$$

- La phase de prédiction intègre la dynamique du système à partir de l'entrée $u(kT)$.
- La phase de correction prend en compte la dernière mesure qui vient d'arriver, $y((k+1)T)$, pour corriger la dérive de la phase précédente.
- Il faut noter que dans cette seconde phase, $u((k+1)T)$ n'est pas nécessairement connu. Dans ce cas, on le remplacera par $u(kT)$, ou par la commande qui serait calculée pour une valeur de l'état au temps $(k+1)T$ égale à $\widehat{x}^{-}((k+1)T)$.

Synthèse d'observateur

La convergence de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$ repose sur la possibilité de trouver une matrice L telles que les valeurs propres de $A - LC$ soient à partie réelle strictement négative. La propriété d'observabilité joue un rôle essentiel à cet égard.

Proposition: Si la paire (A, C) est observable alors, pour tout ensemble $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de valeurs réelles ou complexes telles que $\lambda \in E \Rightarrow \bar{\lambda} \in E$, il existe une matrice $L \in R^{m \times n}$ telle que les valeurs propres de la matrice $A - LC$ correspondent aux valeurs λ_i de E.

Ainsi, ce résultat garantit que l'on sera capable de construire un observateur de l'état dès lors que le système est observable.

Nous allons donner une preuve de cette proposition mettant en évidence la dualité qu'il y a entre commandabilité et observabilité.

Synthèse d'observateur

Preuve:

- Nous avons vu dans C2 que la paire (A, C) est observable si et seulement si la paire (A^T, C^T) est commandable.
- D'après la proposition de la Page 5, pour tout ensemble $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de valeurs réelles ou complexes telles que $\lambda \in E \Rightarrow \bar{\lambda} \in E$, il existe donc une matrice K telle que les valeurs propres de la matrice $A^T + C^T K$ correspondent aux valeurs λ_i de E.
- Or, les valeurs propres d'une matrice sont les mêmes que celles de la matrice transposée.
- Donc les valeurs propres de $A + K^T C$ correspondent aux valeurs λ_i de E.
- Il suffit alors de poser $L = -K^T$ pour conclure la preuve.

Synthèse d'observateur

- La preuve précédente conduit directement à une méthode de synthèse de la matrice de gains L de l'observateur: il suffit d'appliquer la méthode par placement de pôle à la paire (A^T, C^T) pour obtenir une matrice de gains K, puis de poser $L = -K^T$.
- De façon tout à fait équivalente, on peut aussi appliquer directement la méthode de placement de pôle à la paire (A, C) :
  – On développe formellement le déterminant de $\lambda I - (A - LC)$, ce qui donne un polynôme $P(\lambda)$ dépendant des éléments $\boldsymbol{\ell}_{i,j}$ de L.
  – On identifie le polynôme $P(\lambda)$ avec le polynôme désiré $P_s(\lambda)$, de façon à obtenir une expression explicite des éléments $\boldsymbol{\ell}_{i,j}$ de L.
- Les deux façons de faire sont complètement équivalentes, que ce soit en terme de quantité de calculs ou en terme de résultat obtenu.

Synthèse d'observateur-Exemple

Exemple: On considère à nouveau l'exemple de la page 8 avec pour mesure

$$y = x_1 + x_2$$

On souhaite synthétiser un observateur qui donne en boucle fermée l'ensemble des valeurs propres suivantes: $E = \{-6 \quad -8 \quad -10\}$. Les matrices A et C du système sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = (1 \quad 1 \quad 0)$$

On vérifie d'abord que le système est bien observable. On va appliquer directement la méthode de placement de pôles à la paire (A, C). On doit donc calculer $P_s(\lambda)$ et $P(\lambda)$. On obtient, en notant $L = (\boldsymbol{\ell}_1 \;\; \boldsymbol{\ell}_2 \;\; \boldsymbol{\ell}_3)$:

$$P_s(\lambda) = \lambda^3 + 24\lambda^2 + 188\lambda + 480,$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2) + \lambda(\boldsymbol{\ell}_2 + 2\boldsymbol{\ell}_3 - 1) + \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{\ell}_3 - \boldsymbol{\ell}_1$$

Par identification, on déduit les valeurs des $\boldsymbol{\ell}_i$: $\boldsymbol{\ell}_1 = -249, \boldsymbol{\ell}_2 = 273, \boldsymbol{\ell}_3 = -42$.

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Principe de séparation

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- Nous avons considéré indépendamment le problème de synthèse de contrôleur en supposant l ’état complet x connu, et le problème de synthèse d’observateur de l’état.
- En pratique, ces deux problèmes doivent être résolus conjointement: on cherche un contrôleur qui permette de faire converger x vers zéro, et qui ne repose que sur la mesure y et la connaissance de u.
- Un résultat important, appelé **principe de séparation,** montre qu’il suffit d’utiliser le contrôleur synthétisé en remplaçant l’état x par l’estimation $\hat{x}$ issue de l’observateur.

Principe de séparation

Proposition: Soit K et L deux matrices telles que $A + BK$ et $A - LC$ soient deux matrices Hurwitz-Stable. On applique la loi de commande $u = K\hat{x}$ avec $\hat{x}$ issu de l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

Alors, toutes les solutions du système $(*)$ convergent vers zéro.

Preuve: On a

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} = (A + BK)x + BK(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \end{cases}$$

et donc, en notant $\tilde{x} = \hat{x} - x$ l'erreur d'estimation,

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + BK\tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \end{cases}$$

Ces deux équations peuvent donc se mettre sous la forme

Principe de séparation

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont l'union des valeurs propres de la matrice $A + BK$et de celle de $A - LC$, car cette matrice est triangulaire par blocs. Puisque $A + BK$et $A - LC$ sont deux matrices Hurwitz-stable, on en déduit donc que la matrice d'état du système ci-dessus est Hurwitz-Stable. Par conséquent, x (et aussi $\tilde{x}$ bien sûr) converge exponentiellement vers zéro.

Ceci conclut la preuve.

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Considérations pratiques

- D'après ce qui précède, la synthèse du correcteur consiste essentiellement à choisir les deux matrices de gain K et L telles que les matrices $A + BK$ et $A - LC$ soient Hurwitz-stables.
- En théorie, pour un système commandable et observable, les valeurs propres de $A + BK$ et $A - LC$ peuvent être choisies arbitrairement.
- En pratique, il convient de respecter certaines règles:
  - Les valeurs propres de ces deux matrices ne doivent pas être du même ordre de grandeur, ceci afin de découpler la dynamique des deux systèmes (contrôleur/observateur);
  - La plupart du temps, on fera en sorte que les valeurs propres de $A - LC$ soient nettement plus grandes, en valeur absolue, que celles de $A + BK$;
  - Dans quelques cas (très rares), ce sont les les valeurs propres de $A + \mathrm{BK}$ qui seront choisies nettement plus grandes, en valeur absolue, que celles de $A - LC$;
  - Typiquement, on imposera au moins un rapport 4 entre les grandes valeurs propres (en valeur absolue) et les petites;
  - Exemple: Valeurs propres de $A + BK =$ {-1, -1.2, -1.4}; Valeurs propres de $A - LC =$ {-7, -8, -9};

Considérations pratiques

- En théorie également, on souhaiterait que les valeurs propres soient grandes (en valeur absolue), afin d'assurer une convergence rapide des erreurs d'estimation et de l'état vers zéro
- En pratique, certaines règles doivent aussi être respectées à ce niveau:
  - De grandes valeurs propres sont synonymes de grands gains.
  - L'utilisation de grands gains n'est possible que si les mesures sont obtenues à haute fréquence; sinon, le système devient instable. Il y a donc des limites à ne pas dépasser
  - Une autre source d'instabilité, avec de grands gains, vient des retards qu'il peut y avoir au niveau de l'acquisition ou de la transmission de la mesure
  - De grands gains réduisent aussi souvent les marges de stabilité (marge de phase, marge de gain)
  - Enfin, les grands gains tendent à amplifier les bruits de mesure (amplification des hautes fréquences); ceci peut conduire à un comportement du système en boucle fermée très chahuté, et à une sollicitation excessive des actionneurs.

Choix des valeurs propres

Rappel:

- Les parties réelles des valeurs propres du système vont donner le taux de décroissance du terme exponentielle de la réponse du système.
- Ceci permet de fixer l'ordre de grandeur des (parties réelles) des pôles en fonction du temps de réponse souhaité
- Mais attention:
  - La réponse n'est pas toujours simplement une somme d'exponentielles élémentaires $e^{-\alpha_i t}$;
  - Il peut aussi y avoir des termes en $t^k e^{-\alpha_i t}$ (pôles multiples),
  - des termes en $e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \gamma_i)$ (pôles complexes),
  - ou des termes en $t^k e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \gamma_i)$ (pôles complexes multiples)

Choix des valeurs propres

Quelques principes de base:

- Si certains pôles sont asymptotiquement stables avec une rapidité suffisante, il faut les garder!
- S'il n'y a pas de raison d'imposer une dynamique plus rapide sur certaines variables que sur d'autres, un premier réglage possible est $\lambda_i = \lambda_1 \; \forall i$ avec λ_1 réel.
- Sinon,
  - On pourra imposer des dynamiques rapides sur les variables mesurées et contrôlées à haute fréquence;
  - On choisira des dynamiques plus lentes sur les variables mesurées à + basse fréquence
- Quelques exemples…

Choix des valeurs propres

Un exemple: Dynamique d'un drone multirotor (voir Cours C1):

- Sur chaque direction horizontale, on se ramène essentiellement au système linéarisé suivant:

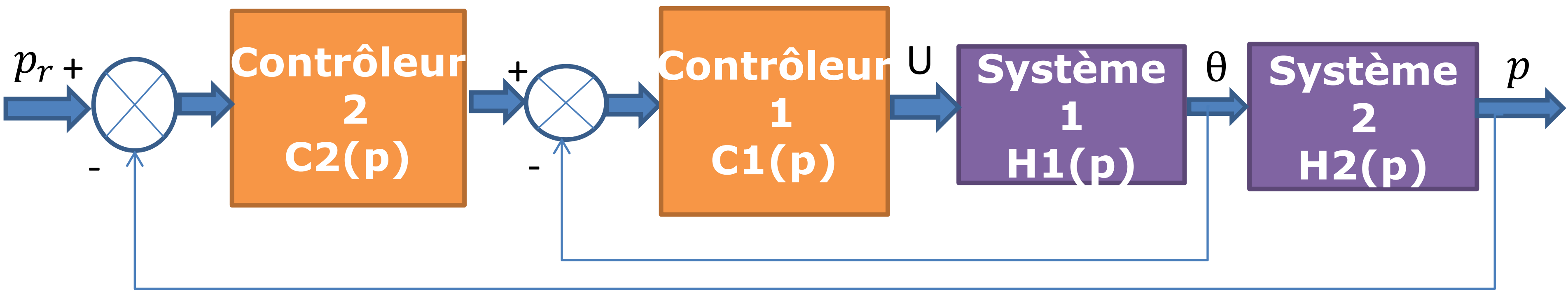
$$\begin{cases} m\ddot{p} = g\,\theta \\ J\ddot{\theta} = u \end{cases}$$

- $p, \dot{p}$ sont mesurées par GPS à 10hz
- $\theta, \dot{\theta}$ sont mesurées/estimées via une centrale inertielle à 100Hz
- On choisit par exemple:
  - Valeurs propres sur position/vitesse: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
  - Valeurs propre sur orientation/vitesse angulaire: $\lambda_3 = \lambda_4 = -10$
- Comment?

Choix des valeurs propres

Un exemple: Dynamique d'un drone multirotor

Boucle interne/boucle externe:



La loi de commande s'écrit:

$$u = -k_\theta\,(\theta - \theta_r) - k_w\,\dot{\theta} \quad \text{(boucle interne)}$$

avec

$$\theta_r = -k_p(p - p_r) - k_v\,\dot{p} \quad \text{(boucle externe)}$$

et $k_\theta, k_w \gg k_p, k_v$.