TD d'Automatique N° 2- Master 1

Exercice 1: Stabilisabilité:
Pour les systèmes en représentation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ définis par les matrices A, B ci-dessous, répondre aux questions suivantes:

a) Le système est-il stable, asymptotiquement stable, ou instabe en boucle ouverte, i.e., pour $u = 0$;

b) Le système est-il commandable?

c) Le système est-il asymptotiquement stabilisable? (i.e., existe t-il une commande par retour d'état $u = Kx$ permettant de rendre $x_0 = 0$ asymptotiquement stable?)

d) Si le système n'est pas asymptotiquement stable mais qu'il est asymptotiquement stabilisable, proposer un retour d'état $u = Kx$ permettant de rendre $x_0 = 0$ asymptotiquement stable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Exercice 2: Etude d'un système électro-mécanique
On considère le système suivant utilisé pour la lévitation magnétique. Ce système est composé d'un électro-aimant alimenté par une bobine, et d'une bille qui peut se déplacer verticalement: voir Figure ci-dessous.

La modélisation de ce système s'effectue de la façon suivante. On applique tout d'abord la loi de Newton à la bille, ce qui donne

$$m\ddot{p} = mg - F_m \tag{4}$$

où m désigne la masse de la bille, p la distance de la bille à l'électro-aimant (également appelée "enterfer"), g la constante de gravité, et F_m la force magnétique créée par l'électro-aimant. On peut montrer que $F_m = c_0\Phi^2$ où $c_0 > 0$ désigne une constante et Φ est le flux magnétique dans le circuit (flux traversant une spire). Afin de modéliser ce flux, on applique la loi de la tension induite aux bornes de la bobine de l'électro-aimant:

$$u = ri + N\dot{\Phi} \tag{5}$$

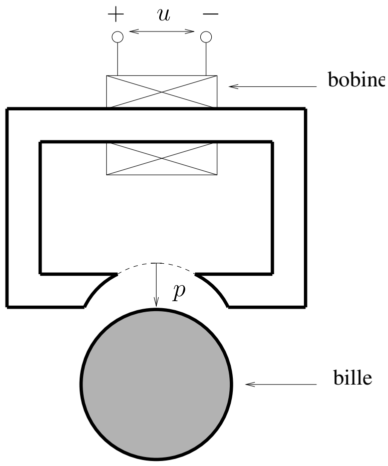

Figure 1

avec u la tension aux bornes de la bobine, i le courant circulant dans la bobine, r la résistance du circuit, et N le nombre de spires de la bobine. La relation entre i et Φ va dépendre des phénomènes que l'on prend en compte dans le modèle. Le modèle le plus simple, qui néglige les phénomènes de saturation magnétique, courants de Foucault, et hystérésis, donne

$$i = \frac{N\Phi}{L} = R(p)\frac{\Phi}{N^2} \tag{6}$$

avec L l'inductance du circuit et $R(p) > 0$ sa réluctance qui dépend de la position p (et augmente avec p).

1^o) A partir des équations (4)-(5)-(6), mettre la dynamique du système sous la forme classique

$$\dot{x} = f(x, u)$$

2^o) Déterminer les points d'équilibre du système.

3^o) Déterminer les linéarisés tangents en ces points d'équilibre.

4^o) Ces linéarisés tangents sont-il commandables? Sont-ils observables avec p comme mesure? Sont-il observables avec Φ comme mesure? Donner une interprétation de ces propriétés d'observabilité à partir des équations.

5^o) Synthétiser une commande par retour d'état permettant de rendre un équilibre du système localement asymptotiquement stable, en supposant que tout l'état du système est mesuré.

Corrigé

Exercice 1:

Système (1):

La trace de la matrice A est positive. Le système n'est donc pas asymptotiquement stable. Il est soit stable, soit instable. Pour statuer, on calcule le polynôme caractéristique. Celui-ci est égal à $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Les racines de ce polynôme sont données par $\{\frac{1+j\sqrt{3}}{2}, \frac{1-j\sqrt{3}}{2}\}$. Ces racines sont à partie réelle strictement positive. Le système est donc instable.

Pour tester la commandabilité, on calcule

$$M_C = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible, et donc de rang 2. Le système est donc commandable.

Puisque le système est commandable, il est asymptotiquement stabilisable.

Soit $u = Kx = k_1x_1 + k_2x_2$. La matrice $\bar{A} := A + BK$ du système en boucle fermée est:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

Le critère de stabilité pour cette matrice 2×2 est:

$$\text{Trace}(\bar{A}) = k_2 + 1 < 0\,, \quad \text{Det}(\bar{A}) = k_2 - k_1 + 1 < 0$$

Par conséquent, en boucle fermée $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable pour tout choix des gains tel que $k_1 > k_2 + 1$ et $k_2 < -1$.

Système (2): En regardant la première colonne de A, on voit immédiatement que $\lambda = 1$ est une valeur propre de A. Puisque cette valeur propre est strictement positive, le système est instable en boucle ouverte.

Pour avoir la commandabilité, on doit avoir

$$\text{Rang}(M_C) = 3 \text{ avec } M_C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}$$

En calculant AB, on trouve $AB = B$. M_C est donc de rang 1 et le système n'est pas commandable.

Pour voir si le système est asymptotiquement stabilisable, on considère une commande $u = Kx = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, et l'on va essayer de voir s'il existe des gains qui rendent $x_0 = 0$ asymptotiquement stable. La matrice $\bar{A} := A + BK$ du système en boucle fermée est:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 + k_1 & 1 + k_2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donc $P(\lambda) = (\lambda - 1 - k_1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$. Le polynôme $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ admet -1 comme racine double. Par conséquent, toutes les racines de P sont à partie réelle négative dès que $k_1 < -1$, et le système est donc asymptotiquement stabilisable.

Système (3): La matrice A est triangulaire supérieure. Par conséquent, les valeurs propres de la matrice sont les termes sur la diagonale. Deux de ces termes sont strictement positifs. Le système est donc instable.

Pour avoir la commandabilité, on doit avoir

$$\text{Rang}(M_C) = 3 \text{ avec } M_C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}$$

On a

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne étant une ligne de zéros, le rang de cette matrice est strictement inférieur à 3 (égal à 2). Le système n'est donc pas commandable.

La deuxième équation du sytème s'écrit $\dot{x}_2 = x_2$, et ceci quelle que soit la commande u. C'est l'équation d'un système instable et il n'y a donc aucun moyen de rendre le système asymptotiquement stable.

<u>**Exercice 2:**</u>

Question 1: On considère le vecteur

$$x = (p, \dot{p}, \Phi)^T$$

On a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ g - \frac{c_0 \Phi^2}{m} \\ -rR(p)\frac{\Phi}{N^3} + \frac{u}{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{c_0 x_3^2}{m} \\ -rR(x_1)\frac{x_3}{N^3} + \frac{u}{N} \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{c_0 x_3^2}{m} \\ -rR(x_1)\frac{x_3}{N^3} + \frac{u}{N} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Question 2: Par définition, les points d'équilibre sont tous les couples (x_0, u_0) tels que $f(x_0, u_0) = 0$. Soit $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})^T$. D'après (7), la relation $f(x_0, u_0) = 0$ est équivalente à

$$\begin{cases} x_{0,2} & = & 0 \\ x_{0,3} & = & \pm\sqrt{\frac{mg}{c_0}} \\ u_0 & = & rR(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^2} \end{cases}$$

On voit par ces relations qu'il n'y a aucune condition sur $x_{0,1}$, i.e., la distance de la bille à l'électro-aimant peut être quelconque, c'est la valeur u_0 de la tension qui va déterminer la position $x_{0,1}$ d'équilibre. Les autres composantes de l'état, en revanche, sont toujours les mêmes quelque soit l'équilibre.

Question 3: On doit calculer le linéarisé en un point d'équilibre (x_0, u_0). Par définition, les matrices A, B du linéarisé sont définies par:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\,, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

On obtient donc:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2c_0 x_{0,3}}{m} \\ -r\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^3} & 0 & -\frac{r}{N^3}R(x_{0,1}) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Question 4: On commence par tester la commandabilité. Le critère du rang s'écrit:

$$\text{Rang}(B \quad AB \quad A^2B) = 3$$

On a

$$(B\ AB\ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2c_0x_{0,3}}{mN} \\ 0 & -\frac{2c_0x_{0,3}}{mN} & * \\ \frac{1}{N} & -\frac{r}{N^4}R(x_{0,1}) & ** \end{pmatrix}$$

où les termes $*$ et $**$ n'ont pas besoin d'être précisés. En effet, puisque toutes les constantes m, N, c_0, et $x_{0,3}$ sont non nulles, la matrice ci-dessus est inversible quelque soit la valeur de $*$ et $**$. Le linéarisé est donc commandable.

On teste maintenant l'observabilité. Le critère du rang s'écrit:

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = 3$$

Lorsque la mesure est p on a $C = (1 \quad 0 \quad 0)$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2c_0x_{0,3}}{m} \end{pmatrix}$$

Ce linéarisé est donc observable. Interprétation: si l'on mesure p, on peut estimer $\dot{p}$, puis $\ddot{p}$. D'après l'expression de $\ddot{p}$, on obtient donc une estimation du flux Φ. On estime alors tout l'état.

Lorsque la mesure est Φ on a $C = (0 \quad 0 \quad 1)$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -r\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^3} & 0 & -\frac{r}{N^3}R(x_{0,1}) \\ \frac{r^2}{N^3}R(x_{0,1})\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^3} & -r\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^3} & * \end{pmatrix}$$

où le terme $*$ n'a pas besoin d'être précisé. En effet, quel que soit la valeur de ce terme, le système est observable si et seulement si $\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1}) \neq 0$. Cette propriété est en général satisfaite car la réluctance magnétique varie en fonction de l'entrefer. Interprétation: si l'on mesure Φ, on peut estimer $\dot{\Phi}$. D'après l'expression de $\dot{\Phi}$, on voit que si $\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1}) \neq 0$ alors p va pouvoir se déduire de l'expression de $\dot{\Phi}$. Une fois p connue, on peut estimer $\dot{p}$. On estime alors tout l'état. Attention! ce raisonnement (comme pour la mesure p) est basé sur le système linéarisé.

Question 5: On repart de l'expression du linéarisé tangent donnée par l'équation (8). Afin d'alléger l'écriture, on va ré-écrire A et B comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ b & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} \tag{9}$$

avec

$$a = -\frac{2c_0 x_{0,3}}{m}, \quad b = -r\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_{0,1})\frac{x_{0,3}}{N^3}, \quad c = -\frac{r}{N^3}R(x_{0,1}),$$

Soit $u = K(x - x_0)$ une commande par retour d'état. La matrice $\bar{A} = A + BK$ du système en boucle fermée est donc:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ b + \frac{k_1}{N} & \frac{k_2}{N} & c + \frac{k_3}{N} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donc donné par:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2(c + \frac{k_3}{N}) - \lambda a\frac{k_2}{N} - a(b + \frac{k_1}{N})$$

Les conditions pour que ce polynôme soit Hurwitz-stable sont:

$$c + \tfrac{k_3}{N} < 0, \quad a\tfrac{k_2}{N} < 0, \quad a(b + \tfrac{k_1}{N}) < 0, \quad -a(b + \tfrac{k_1}{N}) < [c + \tfrac{k_3}{N}][a\tfrac{k_2}{N}]$$

Puisque $a \neq 0$, il est facile de vérifier que toutes ces conditions peuvent être réunies et n'importe quel choix de gains tel que ces conditions soient satisfaites assure la stabilité asymptotique du point d'équilibre x_0.