MO4RBR04: Automatique Linéaire II

Cours 2: Représentation d'état: Notions de base

Pascal Morin
ISIR, Sorbonne Université
pascal.morin@sorbonne-universite.fr

Systèmes linéaires

Rappel: système de commande linéaire (ou plus simplement système linéaire)

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

où,

- $x \in R^n$ désigne l'état du système
- $u \in R^m$ désigne l'entrée du système (aussi appelée « commande »)
- $y \in R^p$ désigne la sortie du système
- $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$, $D \in R^{p\times m}$ désignent les matrices d'état du système

Systèmes linéaires

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Aujourd'hui: Nous allons introduire et développer trois notions:

- La **commandabilité** du système
- L'**observabilité** du système
- La **stabilité** du système

SORBONNE UNIVERSITÉ CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Commandabilité

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

La **commandabilité** du système ne concerne que la première partie du système, c'est-à-dire l'équation différentielle

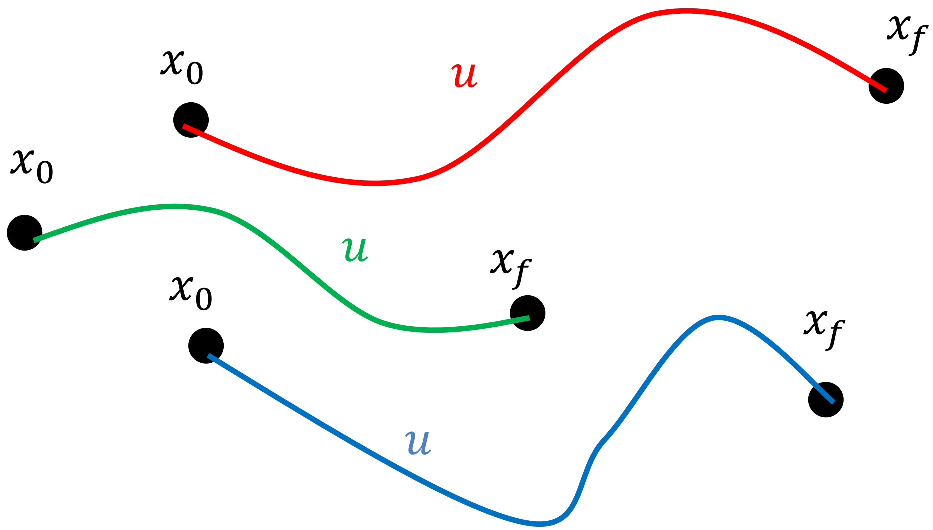
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Définition: On dit que le système est commandable si, pour tout couple (x_0, x_f), avec x_0 une condition initiale et x_f une condition finale, il existe une commande u continue par morceaux sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$ telle que, en appliquant cette commande sur cet intervalle à partir de la condition initiale $x(t_0) = x_0$, on obtient $x(t_f) = x_f$.

Remarque: Etant donné que les matrices d'état sont constantes, on peut dans cette définition, sans perte de généralité, imposer que $t_0 = 0$.

Commandabilité

Interprétation géométrique:



Interprétation pratique: En pratique, un système est commandable si de n'importe quel état on peut atteindre n'importe quel autre état dans un temps fini. Par exemple, sur le plan du sol, une voiture est commandable: on peut aller de n'importe quelle position/orientation, à n'importe quelle autre.

Commandabilité

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Comment savoir si un système est commandable ou non?

Il existe un critère algébrique très simple pour cela, appelé « **Critère du rang de Kalman** »

Proposition: Le système $(*)$ est commandable si et seulement si

$$Rang\ (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) = n$$

On rappelle que n désigne la dimension de l'état x.

<u>Remarques:</u>

- On peut montrer que si la condition de rang ci-dessus n'est pas satisfaite, alors les vecteurs orthogonaux aux vecteurs colonnes de $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ ne sont pas atteignables à partir de $x_0 = 0$.
- Puisque ce critère ne porte que sur les matrices A et B, on dira aussi que **la paire $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ est commandable** lorsque la condition de rang ci-dessus est satisfaite

Commandabilité - Exemples

Exemple 1: Circuit RLC

On rappelle l'expression des matrices d'état Aet B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

Puisque $n = 2$, le critère du rang s'écrit:

$$rang\ (B \quad AB) = 2$$

On a

$$(B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \end{pmatrix}$$

De façon générale, une matrice carrée $n \times n$ est de rang n si et seulement si elle est inversible, ou autrement dit si et seulement si son déterminant est non nul. C'est bien le cas de la matrice ci-dessus. Le système est donc commandable.

Commandabilité - Exemples

Exemple 2: Modèle planaire de drone

On rappelle l'expression des matrices d'état Aet Bdu linéarisé:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{J} \end{pmatrix}$$

Le critère du rang s'écrit

$$rang\ (B \ \ AB \quad \dots \quad A^5 B) = 6$$

<u>Exercice:</u> Vérifier que

$$rang\ (B \ \ AB \quad \dots \quad A^3 B) = 6$$

et donc que le système est commandable.

Morale: **Ne foncez pas dans les calculs tête baissée! Il n'est pas toujours nécessaire de calculer toutes les matrices du critère du rang!!!**

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Observabilité

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

L'**observabilité** du système concerne les deux équations du système.

Définition: On dit que le système est observable si, pour tout intervalle de temps $[t_0, t_f]$, avec t_0 un temps initial et $t_f > t_0$ un temps final, la connaissance de la sortie y et de la commande u sur $[t_0, t_f]$ permet de reconstruire (i.e., déterminer) l'état complet x sur cet intervalle de temps.

Remarque: 1. De même que pour la commandabilité, étant donné que les matrices d 'état sont constantes, on peut dans cette définition, sans perte de généralité, imposer que $t_0 = 0$.

2. Un corollaire de cette définition est que deux trajectoires x_1, x_2 différentes mais obtenues pour la même entrée u ne peuvent pas conduire à la même sortie.

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Observabilité

Interprétation pratique:

- Le sens de cette notion est que la connaissance de la sortie y (et de la commande) sont suffisantes pour remonter à la connaissance de l'état complet x.
- L'exemple intuitif le plus simple de cette propriété est l'équation de Newton en dimension 1:

$$m\ddot{p} = F$$

avec $p \in R$ représentant par exemple la position verticale d'un objet en chute libre.

Si la mesure est $y = p = x_1$, alors la connaissance de p et de F vont permettre de déterminer la vitesse: intuitivement, la connaissance de la position en tout temps permet d'estimer la vitesse; le système sera donc observable. Si la mesure est $y = \dot{p} = x_2$, le système ne sera pas observable: la connaissance de la vitesse ne permet pas de déterminer la position (même si l'on intègre la vitesse, la position initiale reste inconnue).

Observabilité

$$(*)\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Comment savoir si un système est observable ou non?

De même que pour la commandabilité, il existe un critère algébrique très simple pour cela, appelé aussi « **Critère du rang de Kalman** »

Proposition: Le système $(*)$ est observable si et seulement si

$$Rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

<u>Remarque</u>: Puisque ce critère ne porte que sur les matrices A et C, on dira aussi que **la paire $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ est observable** lorsque la condition de rang ci-dessus est satisfaite.

Observabilité

Remarques:

- Les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont duales. En particulier, on peut remarquer que la paire (A, C) est observable si et seulement si la paire (A^T, C^T) est commandable.
- Que ce soit pour la commandabilité ou pour l'observabilité, la matrice D n'a aucun impact sur ces propriétés

Observabilité-exemples

Exemple 1: Corps en chute libre

On reprend l'exemple du corps en chute libre introduit Page 10. Ce système peut s'écrire sous la forme linéaire classique $(*)$ avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Nous allons vérifier par le critère du rang que le système est observable avec la mesure $y = p = x_1$, et non-observable avec la mesure $y = \dot{p} = x_2$.

<u>Cas 1:</u> $y = p = x_1$. On a $C = (1 \quad 0)$, et donc

$$rang \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = \dim(x)$$

Le système est bien observable.

<u>Cas 2:</u> $y = \dot{p} = x_2$. On a $C = (0 \quad 1)$, et donc

$$rang \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < \dim(x)$$

Le système n'est pas observable.

Observabilité - Exemples

Exemple 2: Modèle planaire de drone

On rappelle l'expression des matrices d'état Aet Bdu linéarisé:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice: Vérifier que le système linéarisé est observable avec pour mesure

$$y = \begin{pmatrix} p \\ \theta \end{pmatrix}$$

et donner une interprétation intuitive de cette propriété. Le système est-il observable avec la mesure

$$y = \begin{pmatrix} p + v \\ \theta \end{pmatrix}$$

Stabilité

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

La **stabilité** du système ne concerne que la première partie du système, c'est-à-dire l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Il existe plusieurs notions de stabilité, mais elles recouvrent toutes la même idée selon laquelle un système est stable si, éloigné légèrement de son point de fonctionnement, il va en rester proche.

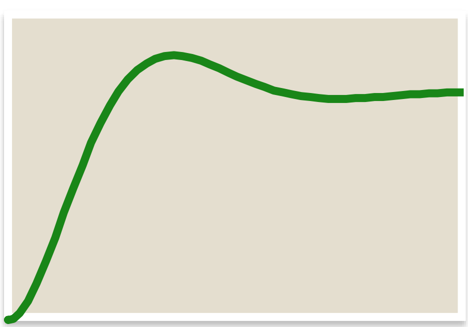
Nous allons uniquement nous intéresser aux notions de stabilité dites « au sens de Lyapunov », qui concernent la stabilité de points d'équilibre pour des systèmes sans entrée. On va donc s'intéresser dans ce qui suit au point d'équilibre $x_0 = 0$ du système $\dot{x} = Ax$.

Remarque importante: **Stabilité et Feedback** Si l'on a choisi $u = Kx$ pour une certaine matrice K, alors $\dot{x} = \overline{A}\,x$ avec $\overline{A} = A + BK$. Tout ce qui suit va donc aussi s'appliquer à ce cas en remplaçant A par $\overline{A}$.

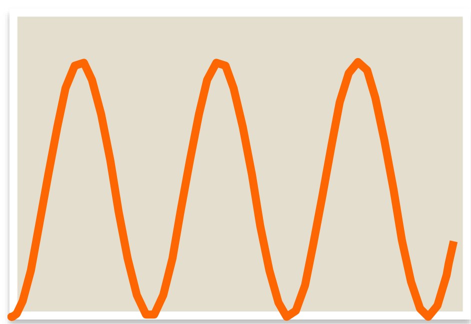
Stabilité-Définitions

Définitions: Considérons le système $\dot{x} = Ax$. On dit que $x_0 = 0$ est un point d'équilibre:

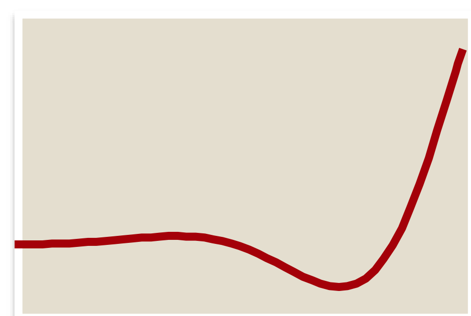
- **Asymptotiquement stable:** si toutes les solutions du système convergent asymptotiquement vers $x_0$quand $t \rightarrow +\infty$.
- **Stable:** si toutes les solutions du système sont bornées.
- **Instable:** s'il n'est pas stable



Asymptotiquement Stable



Stable



Instable

Stabilité

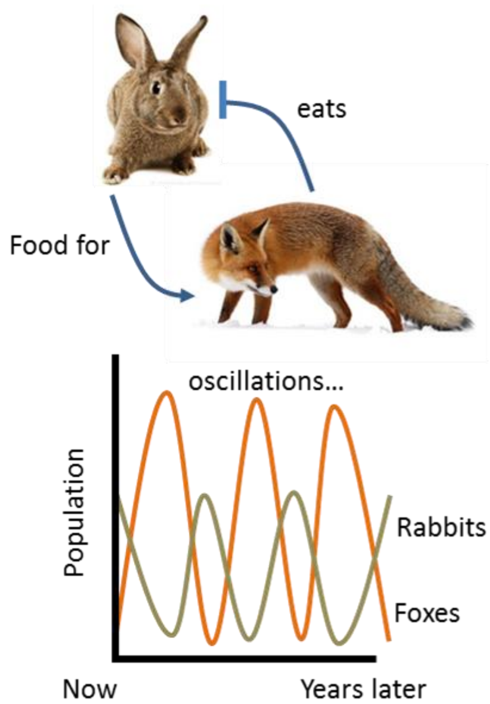
Remarques:

1. Asymptotiquement stable ⇒ Stable. L'inverse n'est évidemment pas vrai.
2. L'usage a introduit certain flou dans la terminologie au sens où, souvent, le terme «Stable » est utilisé pour des systèmes asymptotiquement stables, et les systèmes qui sont seulement stables (donc pour lesquels les solutions ne tendent pas toutes vers x_0) sont appelés « **Marginalement stables** ». Il faut être conscient de cette difficulté pour préciser les choses si nécessaire.
3. En pratique, la propriété souhaité pour un système asservi est la **stabilité asymptotique.** En effet, pour un système seulement stable, de petites perturbations suffisent pour éloigner l 'état du point d'équilibre, et donc du point de fonctionnement désiré. Le système peut aussi devenir très oscillatoire ce qui est rarement une propriété souhaitable (penser à une voiture avec des amortisseurs usés).

Stabilité

Retour sur les liens entre stabilité et feedback: Pour des systèmes complexes, constitués de plusieurs composantes, la stabilité est souvent fonction du feedback induit par chaqu'un des systèmes entre eux.

Exemple: Système prédateur/proie: feedback négatif, effet stabilisant

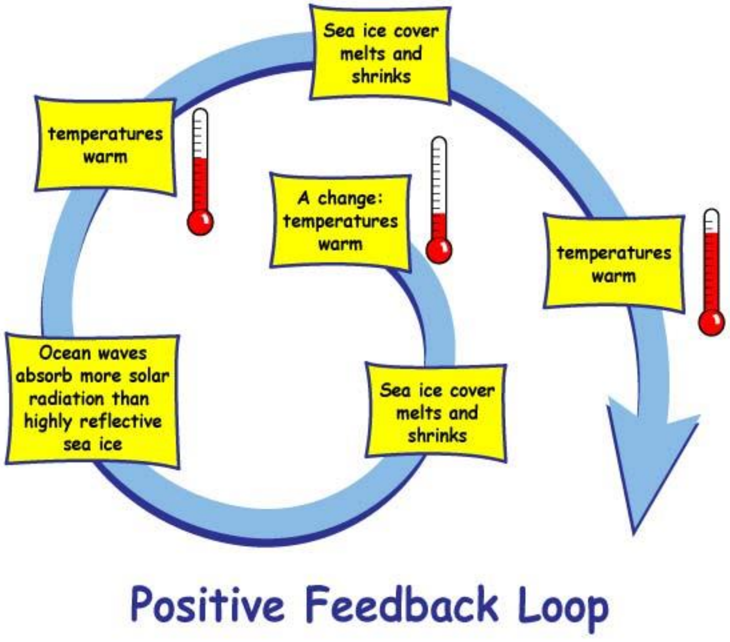


$$\begin{cases} \dot{x}_L = -k_1(x_L - x^*) - \alpha x_R \\ \dot{x}_R = -\beta(x_R - \tau x_L) \end{cases}$$

Stabilité

Retour sur les liens entre stabilité et feedback: Pour des systèmes complexes, constitués de plusieurs composantes, la stabilité est souvent fonction du feedback induit par chaqu'un des systèmes entre eux.

Exemple: Réchauffement climatique: feedback positif, effet déstabilisant



$$\begin{cases} \dot{x}_W = -k(x_W - x^*) + \alpha\theta \\ \dot{\theta} = -\beta(\theta - \tau x_W) \end{cases}$$

Stabilité-Caractérisation

Proposition: Considérons le système $\dot{x} = A\,x$.

1. Le point d'équilibre $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative (On dit alors que $\boldsymbol{A}$ **est Hurwitz-Stable**)
2. S'il existe une valeur propre de A à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre $x_0 = 0$ est instable.
3. Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative, avec au moins une valeur propre à partie réelle nulle, le point d'équilibre $x_0 = 0$ est soit stable, soit instable (mais pas asymptotiquement stable).

Le résultat précédent donne une caractérisation de la stabilité en fonction des valeurs propres de A , ce qui permet, au moins en petite dimension, de vérifier assez facilement si le système est stable ou non. Avant de traiter des exemples, nous allons expliquer pourquoi les valeurs propres de A sont déterminantes pour la stabilité.

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Stabilité-Caractérisation

Nous allons établir la preuve de la proposition précédente dans un cas particulier.

<u>Hypothèse</u>: La matrice A est diagonalisable (i.e., il existe une matrice inversible M et une matrice diagonale D telles que $A = M^{-1}DM$).

Remarquons que cette hypothèse est satisfaite si la matrice A est symétrique, ou si toutes les valeurs propres de A sont réelles et différentes (i.e., il n'y a pas de valeur propre multiple)

<u>Preuve de la proposition sous cette hypothèse</u>: Puisque $A = M^{-1}DM$, on a

$$\dot{x} = M^{-1}DMx$$

En notant $\overline{x} = Mx$, on a donc $\dot{\overline{x}} = D\overline{x}$. Puisque Dest diagonale, chaque composante $\overline{x}_i$ de $\overline{x}$ satisfait donc l'équation $\dot{\overline{x}}_i = d_i\, \overline{x}_i$ dont la solution est

$$\overline{x}_i(t) = \ e^{d_i t}\, \overline{x}_i(0)$$

Par ailleurs, on remarque que les constantes d_i ne sont autres que les valeurs propres de A. Elles sont donc toutes réelles. D'où les trois cas possibles…

Stabilité-Caractérisation

<u>Cas 1:</u> Toutes les valeurs propres sont strictement négatives $(d_i < 0)$

Dans ce cas, chaque composante $\overline{x}_i$ tend exponentiellement vers zéro. Donc $x = M^{-1}\overline{x}$ tend aussi exponentiellement vers le vecteur nul x_0. Le système est donc asymptotiquement stable.

<u>Cas 2:</u> Il existe une valeur propre strictement positive $(d_{i_0} > 0)$. Si $\overline{x}_{i_0}(0)$ est différent de zéro, alors $|\overline{x}_{i_0}(\mathrm{t})|$ tend exponentiellement vers l'infini. En considérant la condition initiale telle que $\overline{x}_i(0) = 0$ pour tout $i \neq i_0$, on a donc $\overline{x}(\mathrm{t}) = \left(0, \dots, 0, \overline{x}_{i_0}(\mathrm{t}), 0, \dots 0\right)^T$ pour tout t. Par conséquent, la norme de $\overline{x}(t)$ tend vers l'infini, et donc celle de $x(t) = M^{-1}\overline{x}(t)$ également.

<u>Cas 3:</u> Il existe une ou plusieurs valeurs propres nulles $(d_{i_0} = \cdots = d_{i_K} = 0)$ et toutes les autres sont strictement négatives. Alors, $\overline{x}_{i_k}(\mathrm{t}) = \overline{x}_{i_k}(0)$ pour tout t et pour tout $k = 0, \dots, K$. Par ailleurs, $\overline{x}_i(\mathrm{t})$ tend exponentiellement vers zéro pour toutes les autres valeurs de i. Donc, $x(t) = M^{-1}\overline{x}(t)$ tend vers $M^{-1}(0, \dots, \overline{x}_{i_0}(0), 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_1}(0), 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_K}(0), 0, \dots, 0)$. Le système est donc stable dans ce cas, mais pas asymptotiquement stable.

Ceci conclut la preuve.

Stabilité-Caractérisation

Pour des matrices de petite dimension, la vérification de la stabilité asymptotique est immédiate:

$\boldsymbol{n = 1}$: Dans ce cas, $A = a$ est simplement un scalaire. La valeur propre de A est donc le scalaire a**.** Si $a < 0$ le système est asymptotiquement stable. Si $a = 0$ le système est stable. Si $a > 0$ le système est instable.

$\boldsymbol{n = 2}$: Dans ce cas, A est une matrice 2×2**.** On peut alors vérifier que:

<u>Exercice:</u> Les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative (i.e., le système est asymptotiquement stable), si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

$$Trace(A) < 0, \quad Det(A) > 0$$

$\boldsymbol{n > 2}$: Dans ce cas, il faut passer par le calcul du polynôme caractéristique et utiliser le critère de Routh-Hurwitz (vu en L3). Nous allons le rappeler…

Stabilité-Caractérisation

Comment vérifier la stabilité: Critère de Routh-Hurwitz

Soit le polynôme $Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ ... + a_1 p + a_0$

Soit le tableau

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$		

où chaque nouvelle ligne est construite à partir des deux lignes précédentes, et la construction se poursuit tant que c'est possible (dénominateur $a_{n-1} \neq 0$)

Stabilité-Caractérisation

Théorème de Routh-Hurwitz:

1. Les racines de $Q(p)$ sont à partie réelle strictement négative si et seulement si les $n+1$ premiers coefficients de la première colonne du tableau sont non nuls et de même signe.
2. Une condition **nécessaire** pour cela est que tous les coefficients a_j de $Q(p)$ soient non nuls et de même signe.

<u>Exercice:</u> A partir de ce critère, on déterminera les conditions nécessaire et suffisante pour que les racines du polynôme suivant soient à partie réelle strictement négative:

$$Q(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + +a_1 p + a_0$$

Stabilité-Caractérisation

<u>Exemple:</u> Soit le polynôme $Q(p) = p^3 + a_2 p^2 + \ a_1 p + a_0$. Le tableau est alors défini par

$a_3 = 1$	a_1	0	$\ldots$
a_2	a_0	0	$\ldots$
$-\dfrac{a_0 - a_1 a_2}{a_2}$	0	0	$\ldots$
a_0	0	…	

On obtient alors les conditions nécessaires et suffisantes suivantes:

$$a_0 > 0, \qquad a_2 > 0, \qquad a_0 < a_1 a_2$$

Notons que ces conditions impliquent, comme prévu, que $a_1 > 0$.