Automatique linéaire I

2021-2022

Notes de cours sur les caractéristiques fréquentielles d'un système du second ordre

Une fonction de transfert $H(p)$ d'un système linéaire invariant est du second ordre si la sortie $y(t)$ est liée à l'entrée $e(t)$ par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre.

A titre d'exemple, soit la fonction $H(p)$ suivante:

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}p + 1} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \tag{1}$$

ω_n: pulsation propre. ξ: coefficient d'amortissement.

La fonction $H(\omega)$ peut ainsi s'écrire sous la forme suivante:

$$H(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\xi\omega_n\omega)} \tag{2}$$

Avec: $p = j\omega$

0.1 Diagramme de Bode

- Equation du gain:

$$\begin{aligned}
|H(\omega)|_{db} &= 20\log_{10}|H(\omega)| && (3)\\
&= 20\log_{10}(K\omega_n^2) - 20\log_{10}(\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}) && (4)\\
&= 20\log_{10}(K) + 40\log_{10}(\omega_n) - 10\log_{10}((\omega_n^2-\omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2) && (5)
\end{aligned}$$

- Equation de la phase:

$$\begin{aligned}
\varphi(H(\omega)) &= arg(H(\omega)) && (6)\\
&= arg(K\omega_n^2) - arg((\omega_n^2-\omega^2) + j(2\xi\omega_n\omega)) && (7)\\
&= -arctg(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}) && (8)
\end{aligned}$$

- Calcul des asymptotes:

$\underline{\omega << \omega_n}$:

$$\begin{aligned}
|H(\omega)|_{db} &\to 20\log_{10}(K) + 40\log_{10}(\omega_n) - 10\log_{10}(\omega_n^4) && (9)\\
&\to 20\log_{10}(K) + 40\log_{10}(\omega_n) - 40\log_{10}(\omega_n) && (10)\\
&\to 20\log_{10}(K) && (11)
\end{aligned}$$

$$\varphi(H(\omega)) \to 0 \tag{12}$$

$\underline{\omega >> \omega_n}$:

$$|H(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K) + 40\log_{10}(\omega_n) - 10\log_{10}(\omega^4) \quad (13)$$
$$\to 20\log_{10}(K\omega_n^2) - 40\log_{10}(\omega) \quad (14)$$

$$\varphi(H(\omega)) \to -\pi \quad (15)$$

Quelque soit le régime de fonctionnement du système de second ordre, le gain tend vers une asymptote à pente nulle lorsque $\omega << \omega_n$ et vers une asymptote à pente égale à -40 db/décade lorsque $\omega >> \omega_n$. La phase quant à elle tend vers 0 lorsque $\omega << \omega_n$ vers $-\pi$ rad lorsque $\omega >> \omega_n$ (Fig.1). Au voisinage de ω_n la forme des diagrammes de gain et de phase dépendra du régime de fonctionnement et donc de la nature des pôles.

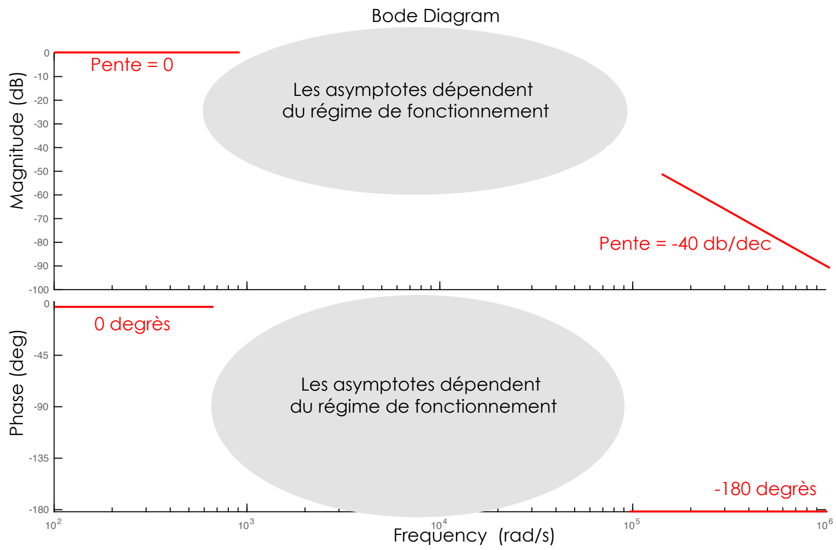

Fig. 1 – Asymptotes de gain et de phase d'un système du second ordre pour $\omega << \omega_n$ et $\omega >> \omega_n$.

0.1.1 Régime apériodique: $\xi > 1$

$H(p)$ possède deux pôles p_1 et p_2 réels négatifs.

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \quad (16)$$

La fonction $H(p)$ peut se décomposer en deux fonctions du premier ordre de fréquences de coupures $\omega_{c1} = -p_1$ et $\omega_{c2} = -p_2$, avec:

$\omega_{c1} = \omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$ et $\omega_{c2} = \omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$.

$\omega_{c1} < \omega_n$ et $\omega_{c2} > \omega_n$

Ainsi

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \quad (17)$$

avec:

$H_1(\omega) = K_0\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{c1}}}$ et $H_2(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{c2}}}$.

$K_0 = \frac{K\omega_n^2}{\omega_{c1}\omega_{c2}}$

- Equations du gain:

$$
\begin{aligned}
|H_1(\omega)|_{db} &= 20\log_{10}|H_1(\omega)| && (18)\\
&= 20\log_{10}(K_0) - 20\log_{10}(\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_{c1}})^2}) && (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|H_2(\omega)|_{db} &= 20\log_{10}|H_2(\omega)| && (20)\\
&= -20\log_{10}(\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_{c2}})^2}) && (21)
\end{aligned}
$$

- Equation de la phase:

$$
\begin{aligned}
\varphi(H_1(\omega)) &= arg(H_1(\omega)) && (22)\\
&= arg(K_0) - arg(1+j\frac{\omega}{\omega_{c1}}) && (23)\\
&= -arctg(\frac{\omega}{\omega_{c1}}) && (24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(H_2(\omega)) &= arg(H_2(\omega)) && (25)\\
&= -arg(1+j\frac{\omega}{\omega_{c2}}) && (26)\\
&= -arctg(\frac{\omega}{\omega_{c2}}) && (27)
\end{aligned}
$$

- Calcul des asymptotes:

$\underline{\omega << \omega_{c1}}$:

$$|H_1(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K_0) \qquad (28)$$

$$\varphi(H_1(\omega)) \to 0 \qquad (29)$$

$\underline{\omega >> \omega_{c1}}$:

$$|H_1(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K_0) - 20\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_{c1}}) \qquad (30)$$

$$\varphi(H_1(\omega)) \to -\frac{\pi}{2} \qquad (31)$$

$\underline{\omega << \omega_{c2}}$:

$$|H_2(\omega)|_{db} \to 0 \qquad (32)$$

$$\varphi(H_2(\omega)) \to 0 \qquad (33)$$

$\underline{\omega >> \omega_{c2}}$:

$$|H_2(\omega)|_{db} \to -20\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_{c2}}) \qquad (34)$$

$$\varphi(H_2(\omega)) \to -\frac{\pi}{2} \qquad (35)$$

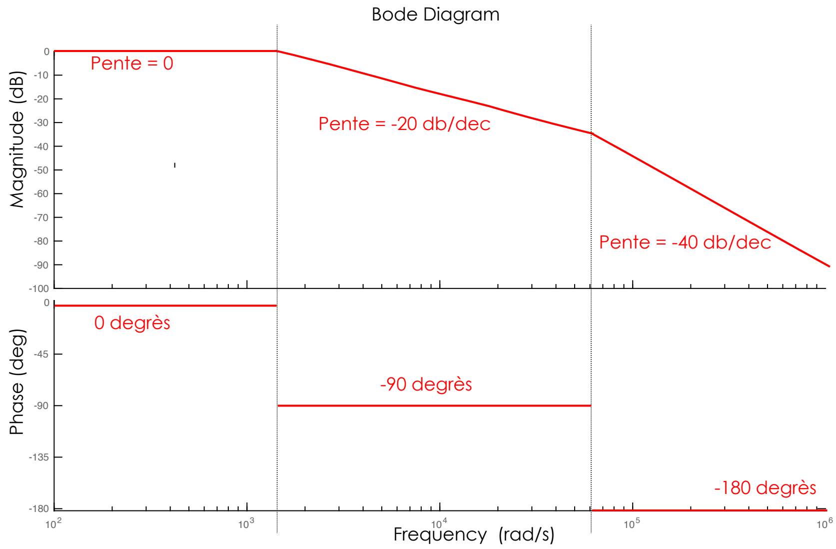

Fig. 2 – Asymptotes de gain et de phase d'un système du second ordre avec un régime apériodique: $\xi > 1$.

0.1.2 Régime critique: $\xi = 1$

$H(p)$ possède un pôle double $p_1 = p_2 = -\omega_n$.

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)^2} \tag{36}$$

$$= \frac{K}{(1+\frac{p}{\omega_n})^2} \tag{37}$$

$$H(\omega) = \frac{K}{(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \tag{38}$$

- Equations du gain:

$$|H(\omega)|_{db} = 20\log_{10}(K) - 40\log_{10}(\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_n})^2}) \tag{39}$$

- Equation de la phase:

$$\varphi(H(\omega)) = -2arctg(\frac{\omega}{\omega_n}) \tag{40}$$

- Calcul des asymptotes:

$\underline{\omega << \omega_n}$:

$$|H(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K) \tag{41}$$

$$\varphi(H(\omega)) \to 0 \tag{42}$$

$\underline{\omega >> \omega_n}$:

$$|H(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K) - 40\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_n}) \tag{43}$$

$$\varphi(H(\omega)) \to -\pi \tag{44}$$

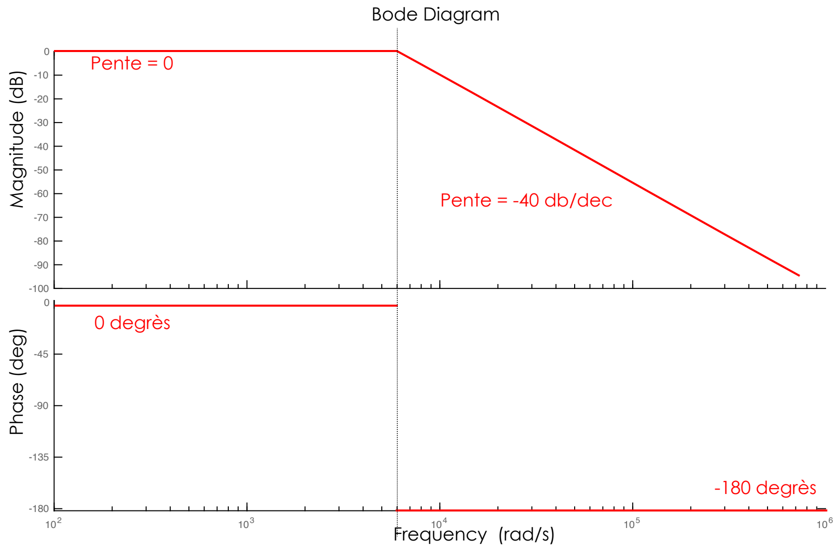

Fig. 3 – Asymptotes de gain et de phase d'un système du second ordre avec un régime critique: $\xi = 1$.

0.1.3 Régime oscillatoire amorti: $\xi < 1$

$H(p)$ possède deux pôles complexes conjugués.

$$p_1 = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \tag{45}$$
$$p_2 = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \tag{46}$$

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \tag{47}$$

$$H(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(\xi\omega_n + j(\omega - \omega_n\sqrt{1-\xi^2}))(\xi\omega_n + j(\omega + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}))} \tag{48}$$

- Equations du gain:

$$|H(\omega)|_{db} = 20\log_{10}|H(\omega)| \tag{49}$$
$$= 20\log_{10}(K) + 20\log_{10}(\omega_n^2) - 20\log_{10}(\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + (\omega - \omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}) \tag{50}$$
$$- 20\log_{10}(\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + (\omega + \omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}) \tag{51}$$

- Equation de la phase:

$$\varphi(H(\omega)) = -arctg(\frac{\omega - \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}) - arctg(\frac{\omega + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}) \tag{52}$$

- Calcul des asymptotes:

$\underline{\omega << \omega_n}$:

$$|H(\omega)|_{db} \to 20\log_{10}(K) + 40\log_{10}(\omega_n) - 20\log_{10}(\omega_n) - 20\log_{10}(\omega_n) \tag{53}$$
$$\to 20\log_{10}(K) \tag{54}$$

$$\varphi(H(\omega)) \rightarrow 0 \tag{55}$$

<u>$\omega >> \omega_n$</u>:

$$|H(\omega)|_{db} \rightarrow 20\log_{10}(K) - 40\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_n}) \tag{56}$$

$$\varphi(H(\omega)) \rightarrow -\frac{pi}{2} - \frac{pi}{2} \tag{57}$$

$$\rightarrow -\pi \tag{58}$$

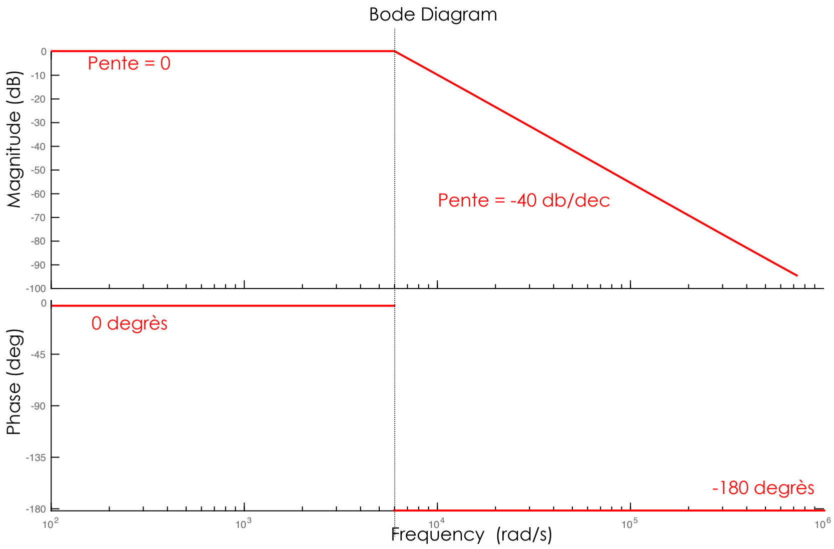

Fig. 4 – Asymptotes de gain et de phase d'un système du second ordre avec un régime oscillatoire amorti: ξ<1.

Le maximum de $|H(\omega)|_{db}$ est obtenu à la pulsation ω_r, appelée pulsation de résonance.

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \tag{59}$$

Avec:

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{60}$$