TD d'Automatique N° 3- Master 1

Exercice 1: Etude d'un asservissement latéral pour un véhicule autonome
On considère un véhicule de type voiture, comme celui représenté sur la Figure 1. Le "modèle cinématique" relit la dérivée des variables de configuration du système aux vitesses instantanément réalisables. Pour ce véhicule, les variables de configuration sont les suivantes: x_1, x_2 désignent les coordonnées du point P par rapport à un repère fixe (quelconque); x_3 représente l'orientation du véhicule par rapport à ce même repère, et x_4 désigne l'angle de braquage du train avant. Les vitesses instantanément réalisables sont la vitesse d'avancement du véhicule, v, et la vitesse de braquage, ϖ. On peut les assimiler à des variables de commande. A partir de ces notations, on peut alors établir le modèle cinématique suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & v\cos x_3 \\ \dot{x}_2 & = & v\sin x_3 \\ \dot{x}_3 & = & \frac{v}{L}\tan x_4 \\ \dot{x}_4 & = & \varpi \end{array}\right. \qquad (1)$$

où L désigne la distance entre le train arrière et le train avant.

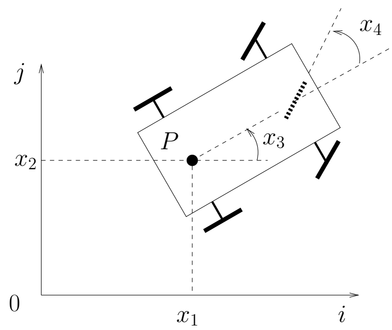

Figure 1

On suppose dans cet exercice que la vitesse d'avancement v du véhicule est imposée (par exemple par un régulateur de vitesse) à une valeur constante $v_0 \neq 0$. L'objectif est de synthétiser une commande qui permette d'asservir la distance latérale du véhicule au bord de la route. Pour simplifier on suppose que la route est rectiligne et que le bord de la route correspond à l'axe (O, i). Le problème peut donc être posé comme celui de stabiliser la variable x_2 à une valeur de référence x_2^* à partir de la commande ϖ.

1^o) En ne considérant que les trois dernières équations de (1) et l'état associé $\bar{x} = (x_2, x_3, x_4)^T$, déterminer les points d'équilibre de ce système (on supposera, ce qui est presque toujours le cas en pratique, que $|x_4| < \pi/2$).

2^o) On s'intéresse toujours aux trois dernières équations de (1).

a. Calculer les linéarisés du système en ses points d'équilibre.

b. Ces linéarisés sont-ils commandables?

3^o) Synthèse d'observateur. On suppose maintenant que la mesure disponible est $y = (x_2, x_4)^T$, i.e., on mesure la distance latérale à la route et l'angle de braquage, mais pas l'orientation du véhicule.

a. En considérant cette mesure et les linéarisés calculés dans la question 2, vérifier que le système est observable.

b. Synthétiser un observateur de l'état basée sur la mesure y.

c. Reconsidérer les questions *a.* et *b.* ci-dessus en supposant que $y = x_2$ (i.e., on ne mesure que la distance latérale à la route).

Exercice 2: Commande LQR en dimension 2

On souhaite appliquer la méthode LQR à un double intégrateur $\ddot{x}_1 = u$. On rappelle l'équation de Ricatti et l'expression du gain optimal:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$
$$K^* = -R^{-1}B^T P^*$$

On suppose que Q et R sont des matrices diagonales, i.e., $Q = \mathrm{Diag}(q_1, q_2)$, $R = r$.

1^o) Déterminer les solutions de l'équation de Ricatti.

2^o) On suppose dans cette question que $q_2 = 0$ et $r = 1$.

a) Que vaut l'expression du contrôleur optimal dans ce cas?

b) Que vaut l'ammortissement du système?

3^o) On suppose maintenant que $q_1 = 0$ et $r = 1$.

a) Que vaut l'expression du contrôleur optimal dans ce cas?

b) Le système en boucle fermée est-il asymptotiquement stable? Pourquoi?

Corrigé

Exercice 1:

Question 1: On rappelle que $v = v_0 \neq 0$ est constante. La seule commande disponible est donc ϖ. Pour le modèle réduit avec $\bar{x} = (x_2, x_3, x_4)^T$ comme état on a donc les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= v_0 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{v_0}{L} \tan x_4 \\ \dot{x}_4 &= \varpi \end{cases}$$

Par définition, les points d'équilibre sont toutes les valeurs $(x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}, \varpi_0)$ telles que

$$\begin{cases} v_0 \sin x_{3,0} &= 0 \\ \frac{v_0}{L} \tan x_{4,0} &= 0 \\ \varpi_0 &= 0 \end{cases}$$

Puisque $v_0 \neq 0$ et $|x_{4,0}| < \pi/2$, ces équations impliquent:

$$x_{3,0} = 0 \text{ ou } \pi, \quad x_{4,0} = 0, \quad \varpi_0 = 0$$

Il n'y a aucune contrainte sur $x_{2,0}$: cette valeur peut être arbitraire. Les points d'équilibres sont donc toutes les valeurs $(x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}, \varpi_0)$ de la forme

$$(x_2^*, 0, 0, \varpi_0) \text{ ou } (x_2^*, \pi, 0, \varpi_0)$$

avec x_2^* arbitraire.

Question 2.a): Le linéarisé est toujours de la forme $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$. Les matrices du linéarisé sont données par les expressions suivantes:
<u>Equilibres de la forme $(x_2^*, 0, 0, \varpi_0)$:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_0}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Equilibres de la forme $(x_2^*, \pi, 0, \varpi_0)$:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -v_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_0}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Question 2.b): Pour étudier la commandabilité de ces systèmes linéarisés, on applique le critère du rang. Puisque $n = 3$, ce critère s'écrit: $\text{Rang}(B, AB, A^2B) = 3$. Les calculs

donnent:
<u>Equilibres de la forme $(x_2^*, 0, 0, \varpi_0)$:</u>

$$\text{Rang}(B, AB, A^2B) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_0^2}{L} \\ 0 & \frac{v_0}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

<u>Equilibres de la forme $(x_2^*, \pi, 0, \varpi_0)$:</u>

$$\text{Rang}(B, AB, A^2B) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_0^2}{L} \\ 0 & \frac{v_0}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Dans les deux cas le linéarisé est commandable.

Question 3.a): On va aussi faire l'analyse seulement pour les équilibres de la forme $(x_2^*, 0, 0, \varpi_0)$; l'analyse est tout à fait similaire pour les autres équilibres. On a $y = (x_2, x_4)^T$. On va faire un changement de variable pour prendre en compte la constante x_0: $\tilde{y} = (\tilde{x}_2, \tilde{x}_4)^T = (x_2 - x_2^*, x_4)^T$. Ceci permet d'écrire $\tilde{y} = C\tilde{x}$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et puisque y est connu (mesuré par les capteurs) et x_0 est connu (fixé par l'utilisateur), $\tilde{y}$ est également connu. Pour tester l'observabilité du système, on applique le critère du rang:

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = n = 3$$

On voit que C est déjà de rang 2. Il manque donc une dimension pour obtenir la condition de rang. D'après l'expression de A (voir Question 2.a)), on a:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $v_0 \neq 0$, cette matrice est de rang 3. Le système est donc bien observable.

Question 3.b): On va synthétiser un observateur de l'état, fournissant une estimée $\hat{x}$ de celui-ci. L'observateur s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\tilde{u} + L(\tilde{y} - C\hat{x})$$

Pour que l'état de cet observateur converge vers l'état réel, $\tilde{x}$, il faut que la matrice $A - LC$ soit Hurwitz-Stable. On a

$$A - LC = \begin{pmatrix} 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_0}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_{1,1} & v_0 & -\ell_{1,2} \\ -\ell_{2,1} & 0 & \frac{v_0}{L} - \ell_{2,2} \\ -\ell_{3,1} & 0 & -\ell_{3,2} \end{pmatrix}$$

Après quelques calculs, on obtient le polynôme caractéristique suivant de cette matrice:

$$P_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC)) =$$
$$\lambda^3 + \lambda^2(\ell_{1,1} + \ell_{3,2}) + \lambda(\ell_{1,1}\ell_{3,2} + v_0\ell_{2,1} - \ell_{1,2}\ell_{3,1}) + v_0\left(\ell_{2,1}\ell_{3,2} + \tfrac{v_0}{L}\ell_{3,1} - \ell_{3,1}\ell_{2,2}\right)$$

Il reste à identifier ce polynôme avec un polynôme désiré. Il y a trois coefficients à identifier, et 6 variables libres. Il existe une infinité de solutions. Par exemple, on peut imposer $\ell_{1,1} = \ell_{1,2} = \ell_{2,2} = 0$, ce qui donne:

$$P_{A-LC}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\ell_{3,2}) + \lambda(v_0\ell_{2,1}) + v_0\left(\ell_{2,1}\ell_{3,2} + \tfrac{v_0}{L}\ell_{3,1}\right)$$

L'identification avec un polynôme désiré $P_d(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ est alors immédiate:

$$\ell_{3,2} = a_2\,, \quad \ell_{2,1} = \frac{a_1}{v_0}\,, \quad \ell_{3,1} = \frac{L}{v_0^2}(a_0 - a_1a_2)$$

Une autre possibilité consiste à imposer $\ell_{1,2} = \ell_{2,2} = \ell_{3,2} = 0$, ce qui revient à ne pas utiliser la mesure de l'angle de braquage (cf Question 3.c). On vérifiera que l'identification avec un polynôme désiré est aussi possible dans ce cas.

Question 3.c): On applique la même méthode que ci-dessus, après avoir vérifié que le système est observable.

Exercice 2:

Question 1: D'après la dynamique du système, les matrices A et B sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, puisque que l'on cherche une matrice P symétrique, on peut poser

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{pmatrix}, \quad A^TP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$$

et

$$PBR^{-1}B^TP = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

L'équation de Ricatti donne donc lieu aux trois équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q_1 - \frac{1}{r}p_{12}^2 & = & 0 \\ p_{11} - \frac{1}{r}p_{12}p_{22} & = & 0 \\ 2p_{12} + q_2 - \frac{1}{r}p_{22}^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit donc les solutions suivantes:

- Cas $q_2 \geq 2\sqrt{rq_1}$:

$$p_{12} = \pm\sqrt{rq_1}\,, \quad p_{22} = \pm\sqrt{r(q_2 + 2p_{12})}\,, \quad p_{11} = \frac{1}{r}p_{12}p_{22}$$

ce qui fait jusqu'à 4 matrices P possibles.

- Cas $q_2 < 2\sqrt{rq_1}$:

$$p_{12} = \sqrt{rq_1}\,, \quad p_{22} = \pm\sqrt{r(q_2 + 2p_{12})}\,, \quad p_{11} = \frac{1}{r}p_{12}p_{22}$$

ce qui fait 2 matrices possibles.

Question 2: Puisque $q_2 = 0$ et $r = 1$, on est (avec $q_1 > 0$) nécessairement dans le cas 1:

$$p_{12} = \sqrt{q_1}\,, \quad p_{22} = \pm\sqrt{2\sqrt{q_1}}\,, \quad p_{11} = \frac{1}{r}p_{12}p_{22}$$

De plus, puisque $K^* = -R^{-1}B^T P^*$, on a

$$K^* = -(p^*_{12} \quad p^*_{22})$$

Pour que $A + BK^*$ soit Hurwitz-stable, il faut $p^*_{12} > 0$ et $p^*_{22} > 0$, d'où l'unique solution

$$p^*_{12} = \sqrt{q_1}\,, \quad p^*_{22} = \sqrt{2\sqrt{q_1}}\,, \quad p^*_{11} = \frac{1}{r}p_{12}p_{22}$$

D'après l'expression de K^*, l'ammortissement naturel et la pulsation en boucle fermée sont données par

$$\varpi^2 = p^*_{12}\,, \quad 2\xi\varpi = p^*_{22}$$

ce qui donne

$$\xi = \frac{p^*_{22}}{2\sqrt{p^*_{12}}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{q_1}}}{2\sqrt{\sqrt{q_1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Question 3: Puisque $q_1 = 0$ et $r = 1$, on est (avec $q_2 > 0$) dans le cas 1 avec

$$p_{12} = 0\,, \quad p_{22} = \pm\sqrt{q_2}\,, \quad p_{11} = 0$$

Puisque $K^* = -R^{-1}B^T P^*$, on a

$$K^* = -(0 \quad p^*_{22})$$

Le système en boucle fermée n'est pas asymptotiquement stable. La raison en est que la condition que la paire (A, E) soit observable, avec $Q = E^T E$, n'est pas satisfaite puisque

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2} \end{pmatrix}$$