MO4RBR04: Automatique Linéaire II

Cours 5: De la représentation d'état à la représentation fréquentielle

Pascal Morin
ISIR, Sorbonne Université
pascal.morin@sorbonne-universite.fr

Systèmes linéaires

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- La représentation d'état permet d'avoir une description locale de n'importe quel système ; c'est donc une représentation générale
- L'approche fréquentielle est **complémentaire**. Elle fournit certains outils utiles pour l'étude de propriétés de robustesse (ex. marges de gain, marges de phase, etc)
- Objectif de cette séance: voir comment on peut passer de la représentation d'état à la représentation fréquentielle et vice-versa

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Rappel : système mono-entrée/mono-sortie

- **Système linéaire stationnaire** (mono-entrée/mono-sortie):

$$(**) \quad \boxed{\boldsymbol{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u}}$$

où

- les coefficients a_i, b_j sont constants
- $n \geq m$ (causalité)

Remarques:

1. L'équation ci-dessus peut s'écrire $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}$
2. Sans perte de généralité, on peut poser $a_n = 1$

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- **On suppose $\mathbf{dim}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{1}$.**
- Remarque: cela implique que :
  1. B est une matrice colonne,
  2. C est une matrice ligne,
  3. $D = d$ est un scalaire
- Comment passer de $(*)$ à $(**)$?

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

Proposition: y satisfait l'équation $(**)$ avec

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ les coefficients du polynôme caractéristique de A, i.e.
$$P_A(\lambda) := Det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
- $m = n$ et, pour tout $j = 0, \dots, n$,
$$b_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} a_{n-i}\alpha_{n-j-i} + da_j$$

avec

$$\alpha_q = CA^{q-1}B, \quad \forall q=1,2,\dots$$

Preuve:

1. On montre d'abord par récurrence que

$$\forall k, \qquad y^{(k)} = CA^k x + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u^{(k-j)} + du^{(k)}$$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

<u>Preuve:</u> (suite)

2. On utilise ensuite le théorème de Cayley-Hamilton: A est solution de son polynôme caractéristique, i.e.

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0 = A^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}A^{n-i}$$

Par conséquent,

$$y^{(n)} = CA^n x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, u^{(n-j)} + d\, u^{(n)} = C\left[-\sum_{i=1}^{n} a_{n-i}A^{n-i}\right]x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(n-j)} + du^{(n)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i}CA^{n-i}x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(n-j)} + du^{(n)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[y^{(n-i)} - \sum_{j=1}^{n-i} \alpha_j u^{(n-i-j)} + du^{(n-i)}\right] + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(n-j)} + du^{(n)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i}y^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\left(\sum_{j=1}^{n-i} \alpha_j u^{(n-i-j)} + du^{(n-i)}\right)$$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

<u>Preuve:</u> (suite)

D'où,

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} (\sum_{j=1}^{n-i} \alpha_j u^{(n-i-j)} + d u^{(n-i)})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} (\sum_{i+j=i+1}^{n} \alpha_{i+j-i} u^{(n-(i+j))} + d u^{(n-i)}) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} (\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_{k-i} u^{(n-k)} + d u^{(n-i)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i} \alpha_{k-i}) u^{(n-k)} + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} d u^{(n-i)}$$

Ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y^{(n-i)} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} u^{(n-k)}$$

où les $b_j$correspondent aux expressions de la page 5.

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- **Que se passe t-il si $\mathbf{dim}(\boldsymbol{y}) > \mathbf{1}$?**

  Facile: chaque composante y_i de y satisfait une équation scalaire du type $y_i = C_i\, x + d_i u$. On peut donc appliquer la proposition à chacune de ces équations scalaires.

- **Que se passe t-il si $\mathbf{dim}(\boldsymbol{u}) > \mathbf{1}$?**

  Un peu plus compliqué: La preuve s'établit de la même façon mais il faut décomposer Bu:

$$Bu = \sum_{k=1}^{m} g_k u_k$$

  où les g_k sont les vecteurs colonnes de B. Cela donne une expression plus compliquée des coefficients b_j .

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$

Une autre méthode pour passer de $(*)$ **à** $(**)$:

On applique la transformée de Laplace à $(*)$ en supposant $x(0) = 0$:

$$pX = AX + BU, \qquad Y = CX + dU$$

Par conséquent, $Y = C(p\, I_d - A)^{-1}BU + dU$. Or pour toute matrice carrée M, $M^{-1} = \frac{1}{Det(M)}\, Cof(M)^T$ avec $Cof(M)$ la matrice des cofacteurs de M.

Par conséquent,

$$Y = C\frac{1}{Det(p\, I_d - A)}\, Cof(p\, I_d - A)^T BU + dU$$

Et donc,

$$Det(p\, I_d - A)Y = C\, Cof(p\, I_d - A)^T BU + Det(p\, I_d - A)\, dU$$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$Det(p\, I_d - A)Y = C\; Cof(p\, I_d - A)^T BU + Det(p\, I_d - A)\; dU$$

Mais $Det(p\, I_d - A)$ n'est autre que le polynôme caractéristique de A:

$$Det(p\, I_d - A) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

Par conséquent,

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)Y$$
$$= C\; Cof(p\, I_d - A)^T\;\; BU + d(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)\mathrm{U}$$

Si l'on applique la transformée de Laplace inverse, L^{-1}, on déduit que

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$
$$= L^{-1}[C\; Cof(p\, I_d - A)^T BU] + \mathrm{d}(a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u)$$

Il reste à identifier le terme de droite avec $b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0\, u.$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Une autre méthode pour passer de $(*)$ **à** $(**)$: Dernières remarques

1. La méthode que l'on vient de voir par transformée de Laplace s'applique de façon identique aux systèmes multi-entrées/multi-sorties:

On applique la transformée de Laplace à $(*)$ en supposant $x(0) = 0$:

$$pX = AX + BU, \qquad Y = CX + DU$$

D'où, $Y = C(p\, I_d - A)^{-1}BU + DU$. D'où,

$$Y = C\,\frac{1}{Det(p\, I_d - A)}\, Cof(p\, I_d - A)^T BU + DU$$

Et donc,

$$Det(p\, I_d - A)Y = C\, Cof(p\, I_d - A)^T BU + Det(p\, I_d - A)\, DU$$

etc etc…

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Une autre méthode pour passer de $(*)$ **à** $(**)$: Dernières remarques

2. On peut remarquer au passage que l'on a en chemin déterminé les fonctions de transfert (ou plutôt les matrices de transfert) de x et y:

$$H_X(p) \coloneqq X(p)U(p)^{-1} = (p\, I_d - A)^{-1}B$$

$$H_Y(p) := Y(p)U(p)^{-1} = C(p\, I_d - A)^{-1}B + D$$
$$= C\,\frac{1}{Det(p\, I_d - A)}\, Cof(p\, I_d - A)^T B + D$$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

Exemple/Exercice: On considère le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \quad , \qquad y = x_1 + u$$

1. Appliquer les deux méthodes vues précédemment pour montrer que

$$\ddot{y} + y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$$

2. Vérifier cette relation directement par le calcul

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

On a montré comment passer de la représentation

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

à la représentation $(**)$. Inversement, on peut montrer que toute équation $(**)$ peut être représentée sous la forme $(*)$, avec des matrices A, B, C, D adéquates. Plus précisément, si la fonction de transfert $H(p)$ de $(**)$ est écrite comme

$$H(p) = \overline{b}_n + \frac{\overline{b}_{n-1}\, p^{n-1} + \cdots + \overline{b}_1 p + \overline{b}_0}{p^n + \overline{a}_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 p + \overline{a}_0}$$

on peut montrer que l'équation $(**)$ est équivalente à $(*)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ -\overline{a}_0 & -\overline{a}_1 & \dots & \dots & & -\overline{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Système linéaire mono-entrée/mono-sortie

$$C = \left(\bar{b}_0 \;\; \bar{b}_1 \;\; \cdots \;\; \bar{b}_{n-2} \;\; \bar{b}_{n-1}\right), \qquad D = \bar{b}_n$$

Cette équivalence est à prendre au sens de la réalisation: les deux systèmes admettent la même fonction de transfert.

Définition: Etant donné une fonction de transfert $H(p)$, tout quadruplet (A, B, C, D) tel que $\mathrm{H(p)} = C(p\, I_d + A)^{-1}B + D$ est appelé **réalisation** de la fonction de transfert $H(p)$.

La représentation particulière de la page précédente est appelée **forme canonique commandable**.

Exercice: On considère à nouveau l'exemple de la Page 13.

1. Déterminer la fonction de transfert à partir de la relation entrée sortie.
2. A partir du résultat précédent déterminer une réalisation du système sous forme canonique commandable.
3. Faire le lien avec les équations d'état de la Page 13 (on vérifiera que l'état $\bar{x}$ de la réalisation est lié à l'état x du système de la Page 13 par une transformation linéaire inversible: $x_1 = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2, x_2 = 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1$).

Forme canonique commandable

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ -\overline{a}_0 & -\overline{a}_1 & \dots & \dots & & -\overline{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition: Soit A, B les matrices d'état du système mono-entrée $(*)$. On suppose que ce système est commandable et que le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0$$

Alors, il existe une matrice inversible Q telle que $z = Qx$ satisfasse l'équation $\dot{z} = A_c z + B_c u$. Autrement dit, $A_c = QAQ^{-1}$ et $B_c = QB$.

Forme canonique commandable

Exercice: Calculer la matrice de commandabilité associée a la forme canonique commandable, et retrouver la propriété de commandabilité du système.

Corollaire: Etant donné un polynôme caractéristique désiré pour le système en boucle fermée, i.e., $P_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$

Alors, la commande $u = Kz = KQx$ avec

$$K = \left(\bar{a}_0 - \bar{d}_0\,, \bar{a}_1 - \bar{d}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1} - \bar{d}_{n-1}\right)$$

Assure le placement des pôles du système aux pôles associés à $P_d(\lambda)$.

Preuve: Exercice.

Remarque: Ce résultat indique que l'on a souvent intérêt à représenter un système sous sa forme canonique commandable.

Forme canonique observable

Extension à l'observabilité: Définissons les matrices

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{a}_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -\bar{a}_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad C_0 = (0\ 0\ \dots 0\ 1)$$

Proposition: Soit A, C les matrices d'état du système mono-sortie $(*)$. On suppose que ce système est observable et que le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0$$

Alors, il existe une matrice inversible R telle que $A_o = R^{-1}AR$ et $C_o = CR$.

Preuve: Conséquence de la fome canonique commandable et du principe de dualité.

Forme canonique observable

Corollaire: Etant donné un polynôme caractéristique désiré pour un observateur de l'état x, i.e., $P_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$

Alors, la matrice de gain $L = RL_0$ de l'observateur avec L_0définie par:

$$L_0 = \left(\bar{d}_0 - \bar{a}_0\,, \bar{d}_1 - \bar{a}_1, \ldots, \bar{d}_{n-1} - \bar{a}_{n-1}\right)^T$$

assure pour l'erreur d'estimation le placement des pôles de système aux pôles associés à $P_d(\lambda)$.

Preuve: Exercice.

Remarque: Ce résultat indique que l'on a souvent intérêt à représenter un système sous sa forme canonique observable pour la synthèse d'observateur.

Autre forme canonique observable

Extension à l'observabilité: Définissons les matrices

$$A_o = \begin{pmatrix} -\bar{a}_{n-1} & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ -\bar{a}_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ -\bar{a}_1 & 0 & & & 0 & 1 \\ -\bar{a}_0 & 0 & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_0 = (1\ 0\ \dots 0\ 0)$$

Proposition: Soit A, C les matrices d'état du système mono-sortie $(*)$. On suppose que ce système est observable et que le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0$$

Alors, il existe une matrice inversible R telle que $A_o = R^{-1}AR$ et $C_o = CR$.

Preuve: On renverse l'ordre des composantes de l'état: $x_k \ \rightarrow x_{n+1-k}$.