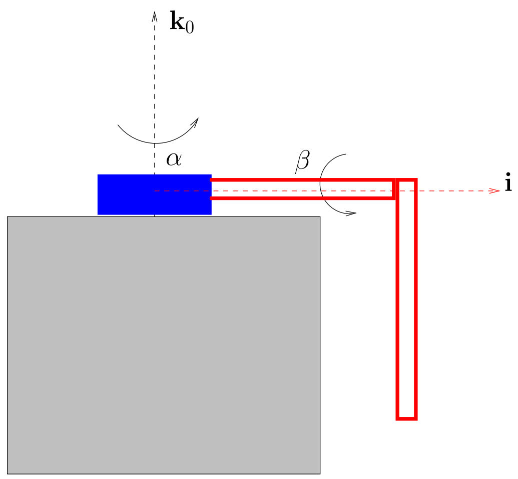
**TP - Automatique Linéaire II**

L'objectif de ce TP est d'étudier le contrôle d'une maquette de type "pendule rotatif". Le principe de ce système est schématisé sur la figure ci-dessous. Une base fixe, cubique, contient un moteur à courant continu qui génère un couple de rotation autour de l'axe vertical $k_0$. Ce couple fait tourner la pièce bleue que l'on appelera le "rotor". Le rotor entraine un pendule, schématisé en rouge, qui peut tourner librement autour de l'axe $i$ lié au rotor. Le pendule n'est donc pas directement actionné. L'objectif de ce TP est d'étudier le contrôle angulaire du rotor et du pendule, via la tension appliquée aux bornes du moteur. La maquette est équipée de deux codeurs **incrémentaux**, qui fournissent une mesure des angles $\alpha$ (angle de rotation du rotor) et $\beta$ (angle de rotation du pendule) à partir d'une position zéro définie au début de l'asservissement.




On définit les notations suivantes:

- Les paramètres liés au rotor sont indexés par $r$: masse $m_r$, longueur $L_r$, inertie par rapport à l'axe de rotation vertical $J_r$, et coefficient de frottement visqueux autour de cet axe $c_r$.
- Les paramètres liés au pendule sont indexés par $p$: masse $m_p$, longueur $L_p$, inertie par rapport à l'axe de rotation $J_p$, et coefficient de frottement visqueux autour de l'axe de rotation $c_p$.
- $g \approx 9.81$ est la constante de gravité.

A partir de ces notations, on obtient en appliquant les équations d'Euler-Lagrange le modèle dynamique suivant:

$$M(\beta)\begin{pmatrix}\ddot{\alpha}\\ \ddot{\beta}\end{pmatrix} + N(\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) + G(\beta) = \begin{pmatrix}\tau - c_r\dot{\alpha}\\ -c_p\dot{\beta}\end{pmatrix} \tag{1}$$

où $\tau$ représente le couple généré par le moteur, et

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} J_1 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2\beta & \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos\beta \\ \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos\beta & J_2 \end{pmatrix},$$

$$N(\beta, \dot\alpha, \dot\beta) = \frac{1}{2}m_p L_p \sin\beta \begin{pmatrix} L_p \dot\alpha \dot\beta \cos\beta - L_r \dot\beta^2 \\ -\frac{1}{2}L_p \dot\alpha^2 \cos\beta \end{pmatrix}, \quad G(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}m_p g L_p \sin\beta \end{pmatrix}$$

avec

$$J_1 = J_r + m_p L_r^2, \quad J_2 = J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2$$

On remarquera deux propriétés caractéristiques des bras articulés:

- $M(\beta)$ est symétrique et inversible (et elle est même symétrique définie positive);
- $N(\beta, \dot\alpha, \dot\beta)$ est quadratique en $\dot\alpha, \dot\beta$.

A cette équation de la dynamique, il faut ajouter le modèle du moteur. En supposant que la constante de temps du moteur est petite par rapport aux constantes de temps mécaniques du système, on obtient le modèle suivant:

$$\tau = \frac{k_t(-u - k_m \dot\alpha)}{R_m} \tag{2}$$

avec

- $k_t$ la constante de couple du moteur;
- $u$ la tension appliquée aux bornes du moteur;
- $k_m$ la constante de force contre-électromotrice;
- $R_m$ la résistance électrique

Le modèle complet est donc donné par (1) et (2), avec $u$ la variable de commande.

# 1 Préparation du TP

**Question 1:** Mettre les équations du modèle sous la forme "représentation d'état" $\dot x = f(x, u)$ avec

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix}$$

où $q = (\alpha, \beta)^T$.

**Question 2:** Déterminer les points d'équilibre

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ \dot q_0 \end{pmatrix}$$

du système. Pour cela, on vérifiera dans un premier temps que ces points d'équilibre satisfont la relation

$$G(q_0) = (-\frac{k_t}{R_m} u_0, 0)^T$$

**Question 3:** Déterminer l'expression des linéarisés tangents

$$\dot{\tilde{x}} = A_{x_0}\tilde{x} + B_{x_0}\tilde{u}$$

du système en ses points d'équilibre. Pour ce faire on procèdera en deux étapes:

1. On montrera d'abord que les matrices du linéarisé tangent à l'équilibre sont données par

$$A_{x_0} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & I_2 \\ -M(q_0)^{-1}\dfrac{\partial G}{\partial q}(q_0) & -M(q_0)^{-1}\begin{pmatrix} \bar{c}_r & 0 \\ 0 & c_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad B_{x_0} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 1} \\ M(q_0)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{k_t}{R_m} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

   On utilisera notamment le fait que $N$ est quadratique par rapport à $\dot{q}$ et donc les termes de $N$ disparaissent lors de la linéarisation.

2. On spécifiera ensuite l'expression de ces matrices en fonction de la valeur de $x_0$.

**Question 3:** Déterminer les valeurs numériques des matrices $A_{x_0}$ et $B_{x_0}$ des linéarisés tangents, pour les deux équilibres, en utilisant les valeurs numériques des paramètres du système données par le tableau ci-dessous.

**Question 4:** Pour chaque équilibre, le système est-il commandable? est-il observable à partir des mesures fournies par les deux codeurs incrémentaux? (on pourra, au choix, faire l'analyse mathématique ou utiliser les outils matlab pour répondre à cette question via une évaluation numérique; conseil: taper "lookfor rank" pour obtenir de l'information sur les fonctions matlab relatives au rang d'une matrice).

| Paramètre | Valeur | Unité |
|---|---|---|
| $m_r$ | 0.095 | kg |
| $L_r$ | 0.085 | m |
| $J_r$ | $\frac{m_r L_r^2}{12}$ | kg $\times$ m$^2$ |
| $c_r$ | $15 \times 10^{-4}$ | N $\times$ s $\times$ m$^{-1}$ |
| $m_p$ | 0.024 | kg |
| $L_p$ | 0.129 | m |
| $J_p$ | $\frac{m_p L_p^2}{12}$ | kg $\times$ m$^2$ |
| $c_p$ | $5 \times 10^{-4}$ | N $\times$ s $\times$ m$^{-1}$ |
| $k_t$ | 0.042 | N $\times$ m $\times$ A$^{-1}$ |
| $k_m$ | 0.042 | V $\times$ s $\times$ rad$^{-1}$ |
| $R_m$ | 8.4 | $\Omega$ |