Examen ER1 – Master 1 – 4AI01, 27 octobre 2016

Durée 2h. Documents et supports électroniques interdits, excepté une "anti-sèche" au format A4

Exercice 1 : On considère le système sous forme représentation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1\ 0\ 0\ 0), \quad D = 1$$

1. Ce système est-il commandable ?
2. Ce système est-il observable ?
3. Déterminer les points d'équilibre du système.

Exercice 2 : La dynamique angulaire d'un pendule inversé auquel on applique une force de contrôle horizontale à sa base peut être représentée localement par le modèle linéarisé suivant :

$$\mathbb{I}\ddot{\theta} = a\theta + u$$

où $\mathbb{I} > 0$ est une constante désignant l'inertie du pendule, θ représente l'orientation du pendule par rapport à la verticale, $a > 0$ est une constante, et u est la variable de commande.

1. Mettre le modèle ci-dessus sous la forme "représentation d'état" $\dot{x} = Ax + Bu$.
2. En boucle ouverte (i.e., pour $u = 0$), le système est-il asymptotiquement stable ? stable ? instable ?
3. Proposer une commande par retour d'état de la forme $u = Kx$ qui donne comme ensemble de valeurs propres du système en boucle fermée $E = \{-3 + j, -3 - j\}$.
4. On suppose dans cette question que le paramètre a n'est pas connu précisément. On sait seulement que $a \in [1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2]$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Sous quelle condition sur $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ la commande proposée dans la question précédente assure t-elle encore la stabilité asymptotique du système dans le cas où cette commande a été calculée en supposant que $a = 1$?

Exercice 3 : On modélise la dynamique d'un véhicule se déplaçant en ligne droite par le système suivant :

$$m\dot{v} = -c_1 v - c_2 v|v| + \kappa u$$

où $m > 0$ désigne la masse du véhicule, $v \in \mathbb{R}$ désigne sa vitesse, c_1, c_2, κ sont trois constantes strictement positives, et u désigne la variable de commande, résultant de l'utilisation de l'accélérateur et du frein. Le terme $-c_1 v$ correspond aux efforts de frottement des pneus sur la route. Le terme $-c_2 v|v|$ correspond à la trainée aérodynamique sur le véhicule.

1. Vérifier que pour tout $v^* \geq 0$, (v^*, u^*) est un point d'équilibre du système ci-dessus pour $u^* = \frac{c_1 v^* + c_2 (v^*)^2}{\kappa}$.

2. Montrer que le linéarisé du système autour d'un de ces équilibres (v^*, u^*) est donné par

$$\dot{\tilde{v}} = a\tilde{v} + b\tilde{u} \tag{1}$$

avec $\tilde{v} = v - v^*$, $\tilde{u} = u - u^*$, et a, b des constantes que l'on spécifiera.

3. On considère dans toute la suite de l'exercice la dynamique linéarisée de $\tilde{v}$ donnée par l'équation (1). L'accélération fournie par le véhicule a une certaine dynamique que l'on souhaite prendre en compte. On modélise cette dynamique via un système du second-ordre :

$$\ddot{\tilde{u}} = -2\xi\varpi\dot{\tilde{u}} - \varpi^2(\tilde{u} - \tilde{u}_c) \tag{2}$$

où $\tilde{u}_c$ désigne l'accélération de consigne envoyée par le conducteur, et $\xi, \varpi > 0$ sont des constantes définissant la dynamique du système. Le système avec $x = (\tilde{v}, \tilde{u}, \dot{\tilde{u}})^T$ comme état et $\tilde{u}_c$ comme commande (i.e., equations (1)-(2)) est-il commandable ?

4. Est-il asymptotiquement stable en boucle ouverte (i.e., pour $\tilde{u}_c = 0$) ?

5. Déterminer la fonction de transfert entre $\tilde{v}$ et $\tilde{u}_c$ (i.e., $\tilde{V}(p) = H(p)\tilde{U}_c(p)$) et une réalisation sous forme canonique commandable de cette fonction de transfert.

6. Afin de modifier l'asservissement en vitesse du véhicule, on choisit un asservissement $\tilde{u}_c = k\tilde{v}$. Sous quelle(s) condition(s) sur k assure t-on la stabilité asymptotique du système ? Que doit-on connaître sur la dynamique du système (Eq. (2)) pour assurer cette (ces) condition(s) ?

Correction

Exercice 1 :

1. Le critère du rang est donné dans ce cas par

$$\text{Rang}(B\ AB\ A^2B\ A^3B) = 4$$

On a

$$(B\ AB\ A^2B\ A^3B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire. Son déterminant est le produit des termes diagonaux, c'est à dire 1. Le système est donc commandable.

2. Le critère du rang est donné dans ce cas par

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = 4$$

On a

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est aussi triangulaire. Son déterminant est aussi égal à 1. Le système est donc observable.

3. Les points d'équilibre sont donnés par tous les couples (x_0, u_0) tels que $Ax_0 + Bu_0 = 0$.

$$Ax_0 + Bu_0 = \begin{pmatrix} x_{0,2} + u_0 \\ -x_{0,1} + x_{0,3} \\ x_{0,2} + x_{0,4} \\ -x_{0,3} \end{pmatrix}$$

La dernière égalité de l'équation $Ax_0+Bu_0 = 0$ implique que $x_{0,3} = 0$. D'après la deuxième égalité, on déduit alors que $x_{0,1} = 0$. La première égalité implique que $u_0 = -x_{0,2}$ et la troisième que $x_{0,4} = -x_{0,2}$. Donc $x_{0,2}$ est arbitraire, et pour $x_{0,2}$ donné, le point d'équilibre est de la forme :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{0,2} \\ 0 \\ -x_{0,2} \end{pmatrix}, \quad u_0 = -x_{0,2}$$

Exercice 2 :

1. On pose $x = (\theta, \dot{\theta})^T$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \dot{x}_1 & = & \dot{\theta} & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \ddot{\theta} & = & \frac{a}{\mathbb{I}}\theta + \frac{u}{\mathbb{I}} & = & \frac{a}{\mathbb{I}}x_1 + \frac{u}{\mathbb{I}} \end{array} \right.$$

   On en déduit les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{\mathbb{I}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathbb{I}} \end{pmatrix}$$

2. D'après l'expression de A ci-dessus, le polynôme caractéristique de A est

$$P_\lambda(A) = \mathrm{Det}(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{a}{\mathbb{I}}$$

   Puisque $a, \mathbb{I} > 0$, les racines de ce polynôme caractéristique sont $\lambda_1 = \sqrt{a/\mathbb{I}}$, $\lambda_2 = -\sqrt{a/\mathbb{I}}$. Puisqu'il y a une racine strictement positive, le système est instable en boucle ouverte.

3. On pose $u = Kx$ avec $K = (k_1\ k_2)$. La matrice du système en boucle fermée est

$$\bar{A} := A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a+k_1}{\mathbb{I}} & \frac{k_2}{\mathbb{I}} \end{pmatrix}$$

   Le polynôme caractéristique de $\bar{A}$ est donc

$$P_\lambda(\bar{A}) = \mathrm{Det}(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^2 - \lambda\frac{k_2}{\mathbb{I}} - \frac{a+k_1}{\mathbb{I}}$$

   Puisque l'on souhaite comme ensemble de valeurs propres en boucle fermée $E = \{-3 + j, -3 - j\}$, le polynôme caractéristique désiré est $P_d(\lambda) = (\lambda+3-j)(\lambda+3+j) = \lambda^2+6\lambda+10$. Par identification, on obtient comme valeurs des gains :

$$k_1 = -a - 10\mathbb{I}, \quad k_2 = -6\mathbb{I}$$

4. Puisque la commande a été synthétisée en supposant que $a = 1$, on a d'après l'expression ci-dessus :

$$k_1 = -1 - 10\mathbb{I}, \quad k_2 = -6\mathbb{I}$$

   Par conséquent, d'après l'expression ci-dessus de $\bar{A}$, on a

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a-1-10\mathbb{I}}{\mathbb{I}} & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 + \frac{a-1}{\mathbb{I}} & -6 \end{pmatrix}$$

   Les conditions de stabilité pour un système de deuxième ordre sont : $\mathrm{Trace}(\bar{A}) < 0, \mathrm{Det}(\bar{A}) > 0$. La condition sur la trace est toujours satisfaite. La condition sur le déterminant devient

$$10 - \frac{a-1}{\mathbb{I}} > 0$$

   ce qui est équivalent à $a < 1 + 10\mathbb{I}$. Puisque $a \leq 1 + \varepsilon_2$, la condition sur ε_2 est donc $\varepsilon_2 < 10\mathbb{I}$. Il n'y a aucune condition sur ε_1.

Exercice 3 :

1. Puisque $m\dot{v} = -c_1 v - c_2 v|v| + \kappa u$, si l'on remplace v et u par v^* et u^* on a

$$m\dot{v} = -c_1 v^* - c_2 v^*|v^*| + \kappa \frac{c_1 v^* + c_2 (v^*)^2}{\kappa} = -c_1 v^* - c_2 v^*|v^*| + c_1 v^* + c_2 (v^*)^2$$

   Puisque v^* est supposé positif, on a donc $m\dot{v} = 0$ et donc $\dot{v} = 0$. Par conséquent, (v^*, u^*) est bien un point d'équilibre.

2. On a $\dot{v} = f(v,u)$ avec $f(v,u) = \frac{1}{m}(-c_1 v - c_2 v|v| + \kappa u)$. Par définition, le linéarisé en (v^*, u^*) est donné par $\dot{\tilde{v}} = a\tilde{v} + b\tilde{u}$ avec

$$a := \frac{\partial f}{\partial v}(v^*, u^*) = \frac{1}{m}(-c_1 - 2c_2 v^*)\,, \quad b := \frac{\partial f}{\partial u}(v^*, u^*) = \frac{\kappa}{m}$$

   On remarquera que l'on a utilisé encore le fait que $v^* \geq 0$.

3. Si l'on pose $x = (\tilde{v}, \tilde{u}, \dot{\tilde{u}})^T$, on a d'après les équations (1)-(2) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\varpi^2 x_2 - 2\xi\varpi x_3 + \varpi^2 \tilde{u}_c \end{cases}$$

   Les matrices d'état associées sont donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varpi^2 & -2\xi\varpi \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varpi^2 \end{pmatrix}$$

   Le critère du rang est donné par

$$\mathrm{Rang}(B\ AB\ A^2B) = 3$$

   On a

$$(B\ AB\ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b\varpi^2 \\ 0 & \varpi^2 & -2\xi\varpi^3 \\ \varpi^2 & -2\xi\varpi^3 & \varpi^4(4\xi^2 - 1) \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est inversible puisque b et ϖ sont non nuls. Le système est donc commandable.

4. On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda I - A) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda - a & -b & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & \varpi^2 & \lambda + 2\xi\varpi \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda^2 + 2\xi\varpi\lambda + \varpi^2)$$

   Les valeurs propres de A sont donc a et les racines du plynôme $\lambda^2 + 2\xi\varpi\lambda + \varpi^2$. Ces dernières sont à partie réelle strictement négative car $\xi, \varpi > 0$. Puisque $a < 0$, le système est donc asymptotiquement stable.

5. La fonction de transfert peut être obtenue directement à partir des équation (1) et (2) : en passant en transformée de Laplace, l'équation (1) donne

$$(p-a)\tilde{V}(p) = b\,\tilde{U}(p)$$

et donc

$$\tilde{V}(p) = \frac{b}{p-a}\,\tilde{U}(p) \tag{3}$$

L'équation (2) donne

$$(p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2)\,\tilde{U}(p) = \varpi^2\,\tilde{U}_c(p)$$

et donc

$$\tilde{U}(p) = \frac{\varpi^2}{p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2}\,\tilde{U}_c(p) \tag{4}$$

En rassemblant (3) et (4), on obtient donc

$$\tilde{V}(p) = \frac{b\varpi^2}{(p-a)(p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2)}\,\tilde{U}_c(p)$$

D'où la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{b\varpi^2}{(p-a)(p^2 + 2\xi\varpi p + \varpi^2)}$$

En développant l'expression de $H(p)$ on obtient :

$$H(p) = \frac{b\varpi^2}{p^3 + p^2(2\xi\varpi - a) + p(\varpi^2 - 2a\xi\varpi) - a\varpi^2}$$

Cette expression est associée à l'équation différentielle

$$\tilde{v}^{(3)} + (2\xi\varpi - a)\tilde{v}^{(2)} + (\varpi^2 - 2a\xi\varpi)\tilde{v}^{(1)} - a\varpi^2\tilde{v} = b\varpi^2\tilde{u}_c$$

D'où la réalisation sous forme canonique commandable

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a\varpi^2 & -(\varpi^2 - 2a\xi\varpi) & -(2\xi\varpi - a) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_c\,, \quad y = (b\varpi^2 \quad 0 \quad 0)x$$

avec $y = \tilde{v}$ et $x = \frac{1}{b\varpi^2}(\tilde{v}, \dot{\tilde{v}}, \ddot{\tilde{v}})^T$.

6. En utilisant les expressions de la question 3), on déduit que pour une commande $\tilde{u}_c = k\tilde{v}$ la matrice d'état du système en boucle fermée est

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k\varpi^2 & -\varpi^2 & -2\xi\varpi \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donc

$$\begin{aligned} P_{\bar{A}}(\lambda) &= \mathrm{Det}(\lambda I - \bar{A}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda - a & -b & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k\varpi^2 & \varpi^2 & \lambda + 2\xi\varpi \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(2\xi\varpi - a) + \lambda(\varpi^2 - 2a\xi\varpi) - (a + bk)\varpi^2 \end{aligned}$$

Les conditions pour que toutes les valeurs propres de ce polynôme soient à partie réelle strictement négative sont :

$$\begin{cases} 2\xi\varpi - a > 0 \\ \varpi^2 - 2a\xi\varpi > 0 \\ -(a + bk)\varpi^2 > 0 \\ -(a + bk)\varpi^2 < (2\xi\varpi - a)(\varpi^2 - 2a\xi\varpi) \end{cases}$$

Les deux premières conditions sont toujours satisfaites puisque $\xi, \varpi > 0$ et $a < 0$. La troisième condition est équivalente à $bk < -a$. La dernière condition, après développement et simplification, devient

$$-bk\varpi < 2\xi(\varpi^2 + a^2 - 2a\xi\varpi)$$

Puisque $a < 0$ et $b, \varpi > 0$, on obtient finalement la condition

$$-\frac{2\xi(\varpi^2 + a^2 - 2a\xi\varpi)}{b\varpi} < k < -\frac{a}{b}$$

On peut vérifier que $\varpi^2 + a^2 - 2a\xi\varpi > 0$ pour tout $\varpi > 0$, parce que $a < 0$. Comme $\xi, b > 0$, on en déduit donc que

$$-\frac{2\xi(\varpi^2 + a^2 - 2a\xi\varpi)}{b\varpi} < 0$$

Une condition suffisante de stabilité est donc que

$$0 \leq k < -\frac{a}{b}$$

Néanmoins, pour assurer cette condition, il faut en général connaitre le rapport $-a/b$.