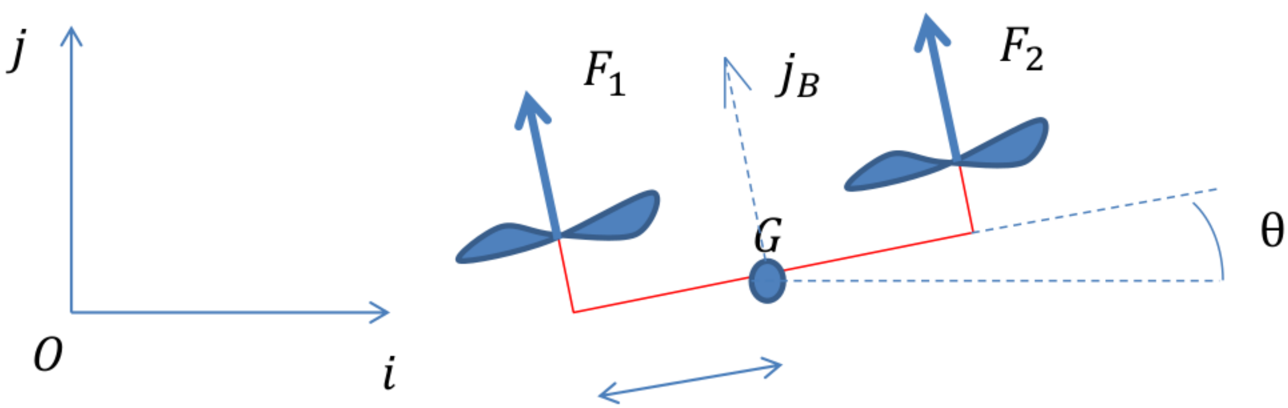
TD d'Automatique N° 1- Master 1 - Automatique Linéaire II

Exercice 1: Equilibres et linéarisés tangents

La figure ci-dessous représente la version planaire d'un drone multi-rotors. Il s'agit dans ce cas d'un robot aérien équipé de deux hélices et se déplaçant dans un plan vertical. Même si ce système est physiquement irréalisable, il permet d'étudier les phases de vol d'un vrai drone 3D lorsque celui-ci se déplace avec une direction constante.



Les variables suivantes sont définies:

- Le vecteur $p = (p_1, p_2)^T$ correspond aux coordonnées du centre de masse G du drone dans le repère $\{O, i, j\}$.
- L'angle θ correspond à l'inclinaison du drone
- Les forces $\vec{F}_1 = F_1\vec{j}_B$ et $\vec{F}_2 = F_2\vec{j}_B$ sont les forces aérodynamiques sur les hélices induites par la rotation de celles-ci, avec j_B l'axe vertical du repère drone (voir figure).

A partir de ces notations, on obtient le modèle suivant de la dynamique du robot (il s'agit évidemment d'un modèle un peu simplifié...):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\ddot{p} & = & -mg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \\ J\ddot{\theta} & = & \ell u_2 \end{array} \right. \tag{1}$$

avec:

- $u_1 = F_1 + F_2$,
- $u_2 = F_2 - F_1$,

- m la masse du drone,
- J l'inertie du drone,
- ℓ la distance entre le centre de masse G et l'axe de rotation des hélices.

Question 1: Mettre le modèle d'écrit par l'équation (1) sous la forme d'un système de commande non-linéaire $\dot{x} = f(x, u)$.

Question 2: Déterminer les points d'équilibre de ce système et en fournir une interprétation physique.

Question 3: Déterminer l'expression des linéarisés tangents du système en ses points d'équilibre.

Question 4: Afin de modéliser l'effet du vent sur la dynamique du drone, on modifie la première équation de (1) en ajoutant une force de perturbation F_p, i.e.,

$$m\ddot{p} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + F_p$$

En supposant que F_p est une constante, reprendre les questions 1-3 avec cette nouvelle équation.

Exercice 2: Commandabilité et observabilité:
Pour les systèmes qui suivent, déterminer si les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont satisfaites:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Exercice 1:

Question 1: On pose, par exemple, $x = (p_1, p_2, \theta, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{\theta})^T$. Les équations données par le modèle (1) peuvent alors s'écrire sous la forme $\dot{x} = f(x,u)$ où la fonction f est définie par l'équation suivante:

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\dfrac{u_1}{m}\sin x_3 \\ -g + \dfrac{u_1}{m}\cos x_3 \\ \dfrac{\ell u_2}{J} \end{pmatrix}$$

Question 2: Les équilibres du système sont par définition l'ensemble des couples (x_0, u_0) tels que $f(x_0, u_0) = 0$. En utilisant l'expression de f déterminée à la question précédente, on doit donc trouver toutes les solutions du système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} x_{0,4} &= 0 \\ x_{0,5} &= 0 \\ x_{0,6} &= 0 \\ -\frac{u_{0,1}}{m}\sin x_{0,3} &= 0 \\ -g + \frac{u_{0,1}}{m}\cos x_{0,3} &= 0 \\ \frac{\ell u_{0,2}}{J} &= 0 \end{aligned}$$

Les trois premières équations et la dernière équation donnent directement:

$$x_{0,4} = x_{0,5} = x_{0,6} = u_{0,2} = 0$$

La quatrième équation implique nécessairement que $u_{0,1} = 0$ ou $\sin x_{0,3} = 0$. Si $u_{0,1} = 0$ alors la cinquième équation n'admet pas de solution. Par conséquent, il faut nécessairement que $\sin x_{0,3} = 0$, ce qui donne deux possibilités:

$$x_{0,3} = 0 \; mod \, 2\pi \,, \text{ ou } x_{0,3} = \pi \; mod \, 2\pi$$

Si $x_{0,3} = 0 \; mod \, 2\pi$, alors $\cos x_{0,3} = 1$ et la cinquième équation donne $u_{0,1} = mg$. Si $x_{0,3} = \pi \; mod \, 2\pi$, alors $\cos x_{0,3} = -1$ et la cinquième équation donne $u_{0,1} = -mg$.

Il n'y a pas d'autres contraintes sur x_0, u_0, et l'on remarque donc qu'il n'y a aucune contrainte sur $x_{0,1}, x_{0,2}$. En résumé, on obtient deux types de points d'équilibre:

Type 1:

$$x_{0,1} \text{ arbitraire}\,,\ x_{0,2} \text{ arbitraire}\,,\ x_{0,3} = 0\ mod\, 2\pi, x_{0,4} = x_{0,5} = x_{0,6} = 0\,,\ u_{0,1} = mg, u_{0,2} = 0$$

Type 2:

$$x_{0,1} \text{ arbitraire}\,,\ x_{0,2} \text{ arbitraire}\,,\ x_{0,3} = \pi\ mod\, 2\pi, x_{0,4} = x_{0,5} = x_{0,6} = 0\,,\ u_{0,1} = -mg, u_{0,2} = 0$$

L'interprétation physique de ces équilibres est la suivante. Pour les équilibres de type 1, le drone est horizontal avec les hélices pointant vers le haut. Les forces générées par les hélices sont dirigées vers le haut pour compenser les efforts de gravité, i.e., $u_{0,1} = mg$. Pour les équilibres de type 2, le drone est horizontal mais retourné, i.e., avec les hélices pointant vers le bas. Les forces générées par les hélices sont aussi dirigées vers le haut pour compenser les efforts de gravité, et donc $u_{0,1} = -mg$. Pour tous ces équilibres, les vitesses linéaires et angulaire sont nulles à l'équilibre et le couple de commande à l'équilibre $u_{0,2} = 0$.

Question 3: Le système linéarisé tangent autour d'un équilibre (x_0, u_0) est le système linéaire $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$, avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\,, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

En reprenant l'expression de f, on obtient donc l'expression suivante de A et B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{u_{0,1}}{m}\cos x_{0,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_{0,1}}{m}\sin x_{0,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{\sin x_{0,3}}{m} & 0 \\ \frac{\cos x_{0,3}}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{m} \end{pmatrix}$$

On remarque que ces expressions dépendent du type de point d'équilibre: en remplaçant $x_{0,3}$ et $u_{0,1}$ par leur expression, on obtient une expression des matrices A et B valide pour tous les équilibres de type 1, et une autre expression de ces matrices valide pour tous les équilibres de type 2.

Question 4: La question est laissée au lecteur. La démarche est exactement la même que pour le cas traité précédemment. La principale différence est que les points d'équilibre vont changer. Plus précisément, l'angle à l'équilibre $x_{0,3}$ ne sera plus nécessairement égal à 0 ou π. La valeur de $u_{0,1}$ sera aussi modifiée. L'interprétation physique de ce changement de point d'équilibre est que le drone devra, afin de rester immobile, s'incliner pour que les efforts aérodynamqiues sur les héices compensent, en plus de la gravité la force générée par le vent.

Exercice 2:

On calcule dans chaque cas les matrices

$$M_C = \begin{pmatrix} B & AB \cdots A^{n-1}B \end{pmatrix}, \text{et } M_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Système 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_O = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M_C a pour déterminant -2. La matrice M_O a pour déterminant 0. On en déduit que le système est commandable mais pas observable.

Système 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculé le déterminant de ces matrices, on en déduit que le système est observable mais pas commandable.

Système 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le système est commandable mais pas observable.

Système 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la commandabilité, nous devons normalement calculer la matrice

$$M_C = (B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B)$$

Nous allons en fait vérifier que la condition de rang est satisfaite juste avec la sous-matrice $(B \quad AB \quad A^2B)$. Puisque rajouter des colonnes à une matrice ne peut pas faire baisser son rang, cela suffira à montrer que le système est commandable. On a

$$(B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La sous-matrice formée des colonnes $1, 2, 4$, et 5 est donc la matrice carrée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que cette matrice est inversible. Par conséquent le système est commandable. Concernant l'observabilité, on a

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que cette matrice est aussi inversible. Par conséquent le système est observable.