Systèmes non Linéaires

Chapitre 1 : Généralités sur les Systèmes non Linéaires

B. Boukhezzar

boubekeur.boukhezzar@umc.edu.dz

Laboratoire d'Automatique et de Robotique de Constantine (LARC)
Département d'électronique, Université Constantine 1
Route de Aïn-El-Bey, Constantine 25017, Algérie
https://sites.google.com/site/bboukhezzar/enseignement/snl

19 mars 2019

Plan du Cours

- Modéliser un processus $\Longrightarrow$
  - Evaluation des performances.
  - Analyse.
  - Simulation.
  - Synthèse de correcteurs.

Mais ...

Systèmes physiques $\triangleq$
- non linéaires.
- à paramètres distribués.
- complexes.

$\Longrightarrow$
- Modèles lourds.
- Inutilisables par un automaticien.

Solution : l'automaticien doit faire une série d'hypothèses, justifiées par des considérations pratiques, pour aboutir à un modèle de complexité convenable.

- Après modélisation, l'automaticien doit :

1. Analyser le modèle.
2. Étudier le cahier de charges.
3. Concevoir un système de commande pour répondre au cahier de charges.

Deux façons de faire :

1. Faire l'hypothèse que le système est linéaire autour d'un point de fonctionnement (point de repos) $\Longrightarrow$ Calculer le linéarisé tangent autour du point de fonctionnement.
2. Utiliser directement le modèle non linéaire $\Longrightarrow$ Développer un correcteur non linéaire.

Correcteurs linéaires

- Avantages :
  - Le modèle linéaire est simple.
  - On dispose de beaucoup de méthodes de synthèse à partir de ce modèle :
    1. Commandes classiques PI, PID, avance de phase, retard de phase, placement de poles, synthèse par les lieux de Bode, Nyquist, Black.
    2. Commandes basées sur la représentation d'état (LQ, LQR, LQG).
    3. Commandes linéaires robustes (μ analyse-synthèse, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
  - Simplicité d'implementation des correcteurs développés (Ampli. Op,capacités, résistances, ...).
- Inconvénients :
  - Performances limitées : Les performances des correcteurs se dégradent dès que le système s'éloigne du point de repos.
  - Ne permettent pas d'expliquer certains problèmes (pompage, cycles limites, ...).

Correcteurs non linéaire

- Avantages :
  - Le modèle non linéaire prend en compte les non linéarités.
  - Plage de validité d modèle plus large.
  - Correcteurs plus performants que les correcteurs linéaires.
- Inconvénients :
  - correcteurs plus complexe que les correcteurs linéaires.
  - Plus difficile à implementer.
  - Plus coûteux.

Plan du Cours

Système physique-Système dynamique

Définition 1 (Système Physique-Processus)

Un système physique (processus) est un ensemble d'éléments reliés les uns aux autres afin de former un tout et de réaliser un certain objectif.

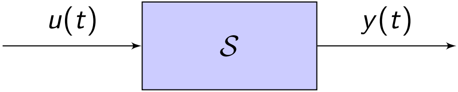
Système physique-Système dynamique

Définition 2 (Système dynamique)

Un système dynamique est un modèle de processus physique évoluant dans le temps, donné sous forme d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, reliant les différentes variables décrivant le phénomène. Ces équations sont appelées équations d'évolution

- Le système $\mathcal{S}$ joue donc le role d'opérateur qui transforme les variables d'entrée $u(t)$ en variables de sortie $y(t)$.

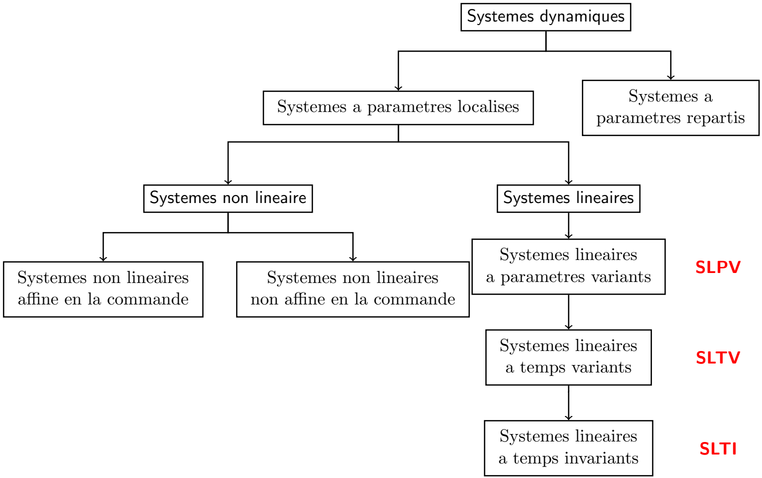
$$y(t) = \mathcal{S}\left(u(t)\right)$$



Plan du Cours

Classification des systèmes dynamiques

- Classifier le systèmes $\Longleftrightarrow$ Définir des propriétés pour chaque classe



Classification des système dynamiques

- Système Déterministe : Pour une valeur donnée de l'entrée u, il n'y a qu'une valeur possible de la sortie y, et *Stochastique* sinon ;
- Système Causal : La sa sortie à l'instant t, $y(t)$, ne dépend que des valeurs précédentes (antérieurs) de l'entrée ; *i.e.* $u(\tau)$ pour $\tau \leqslant t$;
- Système Stationnaire (à temps invariants) : Les paramètres du systèmes sont constants (ne varient pas dans le temps)$\Leftrightarrow$ $y(t)$ est la sortie du systèmes pour l'entrée $u(t)$, alors la réponse du système à l'entrée $u(t-\tau)$ sera $y(t-\tau)$. $y(t-\tau)$.

Classification des système dynamiques

- à paramètres localisés : Il est dimension finie, $i.e.$ son comportement est régis par des *équations différentielles ordinaires*. Sinon, il est à *paramètres distribués* et décrit par de *équations aux dérivées partielles*..
- Système Statique : Il est décrit par une équation différentielle de dimension nulle (ne faisant intervenir aucune des dérivées), *dynamique* sinon.
- Système Monovariable : $u(t)$ et $y(t)$ sont scalaires, *multivariable* sinon.

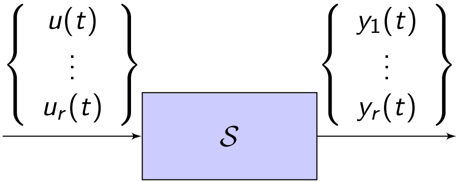
Plan du Cours

Principe de superpostion

Définition 3 (Principe de superposition)

Le système $\mathcal{S}$ répond au principe de superposition si sa sortie à la somme pondérées de ces entrées $\sum_{i=1}^{r} a_i u_i(t)$ est égale à la sommes pondérées par les mêmes coefficients des sorties obtenues précédemment $\sum_{i=1}^{r} a_i y_i(t)$, soit

$$\mathcal{S}(\sum_{i=1}^{r} a_i u_i(t)) = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathcal{S}(u_i(t)) = \sum_{i=1}^{r} a_i y_i(t), \forall a_i \in \mathbb{R}$$



Systèmes linéaires

Définition 4 (Système linéaire)

Un système linéaire est un système qui vérifie le principe de superposition. Son comportement est décrit par une équation (ou un système d'équations) différentielle linéaire.

Exemple 1 (Système linéaire stationnaire d'ordre n)

Le comportement d'un SLTI d'ordre n est décrit par l'équation différentielle suivante

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{(i)}{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i \overset{(i)}{u}(t)$$

Systèmes linéaires : exemples

Exemple 2 (Système linéaire à coefficients variables)

Le système

$$5\cos(t)\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 10u(t)$$

est linéaire à coefficients variables (non stationnaire).

Exemple 3 (Système linéaire à coefficients variables : Cas général)

Tout système décrit par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\overset{(i)}{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\overset{(i)}{u}(t)$$

est linéaire non stationnaire.

Systèmes non linéaires

Définition 5 (Système non linéaire)

Un Système non linéaire est un système qui ne vérifie pas le principe de superposition. Son comportement est décrit par une équation (ou un système d'équations) différentielle non linéaire.

Exemple 4 (Système non linéaire)

Le système

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + 5y(t) = 6u(t)$$

est non linéaire à cause du terme $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2$.

Systèmes non linéaires : Exemple

Exemple 5 (Véhicule sous marin)

Le comportement simplifié d'un véhicule sous-marin peut être décrit par l'équation différentielle

$$\dot{v} + |v|\, v = u$$

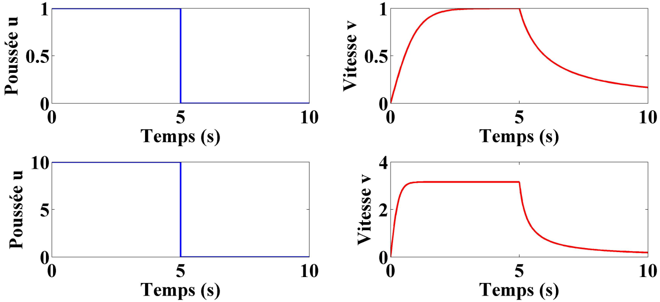
où v est la vitesse du véhicule et u l'entrée de commande (la poussée de l'hélice).

On effectue les deux essais en échelon suivants :

- Échelon unité pendant 5 secondes.
- Échelon d'amplitude 10 pendant 5 secondes.

Systèmes non linéaires : Exemple

- Résultats de simulation :



Systèmes non linéaires : Exemple

Exemple 5 (Véhicule sous-marin (suite))

- *On observe les propriétés suivantes :*

1. *Le temps de descente est plus important que le temps de montée* $\Rightarrow$ *Comportement disymétrique*.
2. *Dans le deuxième cas, la réponse en régime permanent n'est pas égale à* 10 *fois la réponse en régime permanent du premier test* $\Rightarrow$ *Le principe de superposition n'est pas respecté*.

Plan du Cours

Rappel sur la notion d'état

Définition 6 (État d'un système)

L' état l'un système dynamique est un ensemble de variables qui, connues à un instant donné, permettent de décrire l'évolution du système les instants suivants. Le vecteur d'état x représente en pratique la mémoire du système ou l'évolution des conditions initiales.

- Les variables d'état sont un ensemble de variables intermédiaires entre les variables d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.
- Ces variables donnent des informations sur l'état internes du système variables internes.

Classification des systèmes linéaires

Système linéaires à temps invariants

La forme générale est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{(Equation d'état)} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \qquad \text{(Equation de sortie)} \end{aligned}$$

avec

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \quad , u(t) \in \mathbb{R}^m \quad , y(t) \in \mathbb{R}^p$

et

- $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad C \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \quad D \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m,$

Classification des systèmes linéaires

Système linéaire à temps variant (SLTV)

- Les matrices de la représentation d'état sont des fonctions du temps.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \text{(Equation d'état)} \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad \text{(Equation de sortie)} \end{aligned}$$

Classification des systèmes linéaires

Système linéaire à paramètres variant (SLPV)

- Les matrices de la représentation d'état dépendent d'un vecteur de paramètres $\theta(t) \in \mathbb{R}^l$ variable dans le temps.

$$\begin{array}{rcll} \dot{x}(t) & = & A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) & \qquad \text{(Equation d'état)} \\ y(t) & = & C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) & \qquad \text{(Equation de sortie)} \end{array}$$

- Les SLTV sont un cas spécial des SLPV : $\theta(t) = t, \quad l = 1$

Plan du Cours

Forme générale

La forme générale d'une représentation d'état d'un système non linéaire de dimension finie est donnée par les deux équation suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{f}(x(t), u(t), t) && \text{(Equation d'état)} \\ y(t) &= \tilde{h}(x(t), u(t), t) && \text{(Equation de sortie)} \end{aligned}$$

Les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$ sont définies comme suit
$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$

Système non linéaire affine en la commande

Cas monovariable SISO

Le système possède une seule entrée $u(t) \in \mathbb{R}$, une seule sortie $y(t) \in \mathbb{R}$ et n états $x(t) = [x_i(t), \cdots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

Les fonctions f, g et h sont définies comme suit

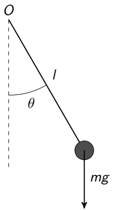
$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Exemple : Pendule simple

Exemple 6 (Pendule simple : Cas général)

Il s'agit d'un système monovariable non linéaire du second ordre. En choisissant comme vecteur d'état $x = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^t$*, on aboutit à la représentation d'état suivante :*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}\Gamma$$



Système non linéaire affine en la commande

Cas multivariable MIMO

Le système possède m entrées $u(t) \in \mathbb{R}^m$, n états $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et p sorties $y(t) \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x(t)) \cdot u_i(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

Les fonctions f, g et h sont définies comme suit

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$

Plan du Cours

Points d'équilibre isolés multiples

- Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre isolés.
- Un point d'équilibre est un point où le système peut demeurer infiniment s'il n'est pas excité.

Exemple 7 (Points d'équilibre multiples)

Soit le système non linéaire du premier ordre donné par

$$\dot{x} = -x + x^2$$

avec comme condition initiale $x(0) = x_0$.

Linéarisé autour de l'origine

$$\dot{x} = -x$$

$\Rightarrow$ *Un seul point d'équilibre* $x_e = 0$.

Exemple : Points d'équilibre multiples

Exemple 8 (Points d'équilibre multiples (suite))

En intégrant l'équation $dx \big/ (-x + x^2) = dt$*, la réponse du système non linéaire es donnée par*

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

Le système possède alors deux position d'équilibre $x = 0$ *et* $x = 1$*. Sa réponse dépend fortement des conditions initiales.*

Cycles limies

- Cycles limites $\triangleq$ Oscillations d'amplitude et période fixes sans excitation extérieure.
- L'amplitudes des oscillation de cycles limites dans le cas non linéaire sont indépendantes des conditions initiales.
- L'amplitudes des oscillations d'un système linéaire marginalement stable dépendent des conditions initiales.
- Les oscillations auto entretenues d'un système linéaire sont très sensibles aux variation de paramètres du système.
- Les cycles limite ne sont pas aussi sensibles aux variations de paramètres.

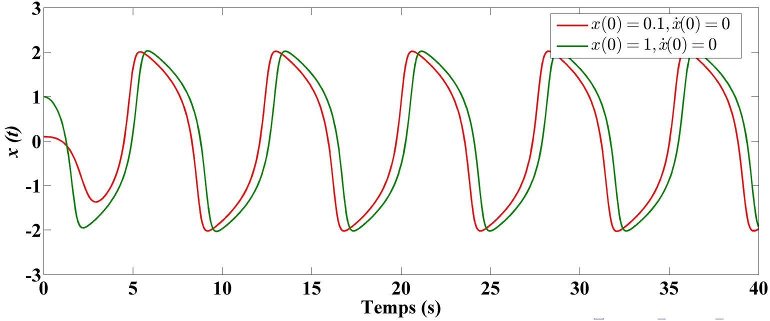
CExemple : Oscillateur de Van der Pol

Exemple 9 (Equation de Van der Pol)

L'équation différentielle du second ordre non linéaire

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

où m,c et k son des constantes positives.



Bifurcations

- Le phénomène de bifurcation concerne un changement quantitatif des paramètres du système menant à un changement qualitatif des propriétés du système.
- Les valeurs des paramètres pour lesquelles la nature qualitative de la trajectoire dud système change sont appelées valeurs critiques de bifurcation.

Bifurcations

Exemple 10 (Bifurcation de Pitchfork)

Équation de Duffing non amortie

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0$$

• Si on représente les points d'équilibre e fonction de α, en passant des valeur positive au valeurs négative,le point d'équilibre unique $x = 0$ s'éclate en trois points d'équilibre

1. $x_e = 0$
2. $x_e = \sqrt{-\alpha}$
3. $x_e = -\sqrt{-\alpha}$

Chaos

• Système linéaire : faible changement dans les conditions initiales ⇒ faibles changement dans la sortie.

Définition 7 (Système chaotique)

Un système est chaotique si sa sortie est extrêmement sensible aux conditions initiales

• La sortie d'un système chaotique est imprévisible même si nous avons un modèle non linéaire exact et un outil de simulation (ordiateur) extrêmement puissant.

• La réponse du système après un horizon suffisamment grand ne peut pas être prédite

Chaos

Exemple 11 (Système chaotique)

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6 \sin t$$

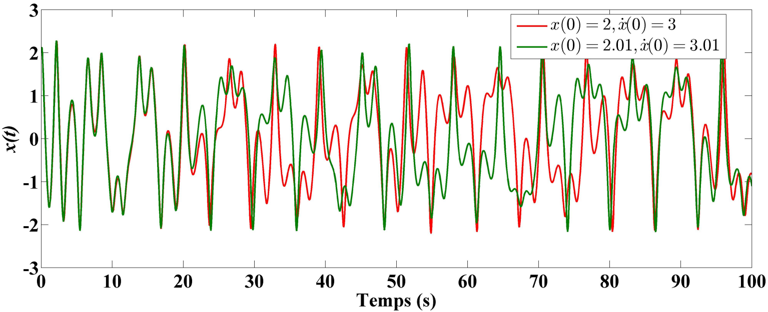
Concrètement il peut s'agir du modèle d'une structure mécanique faiblement atténués, subissant de grandes déflections élastiques et forcés par une excitation sinusoïdale.

Deux conditions initiale très proches

1. $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 3$
2. $x(0) = 2.01, \dot{x}(0) = 3.01$

• A cause de la présence de la non linéarité dure x^5, les deux réponses sont radicalement différentes après un certain temps.

Chaos



- Le phénomène du chaos peut être observé dans plusieurs systèmes physiques.
- Les plus connus sont ceux reliés aux turbulences en mécanique des fluides et en dynamique atmosphérique (météorologie).