UV Automatique

Cours 5

Marges de stabilité et performances des systèmes linéaires asservis

ASI 3

Contenu

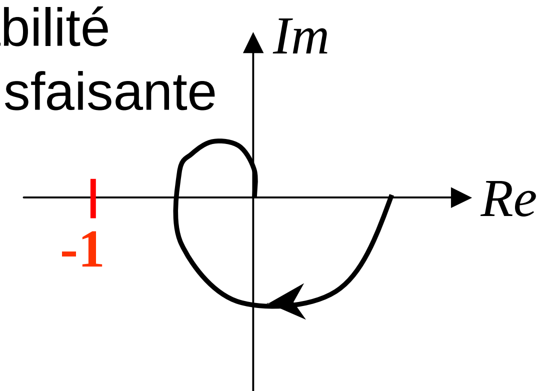
- Robustesse de la stabilité
  - Notion de robustesse de la stabilité
  - Marges de stabilité (marges de gain et de phase)
- Performances des systèmes asservis
  - Précision des systèmes asservis
    - Erreur en régime permanent liée à la consigne
    - Rejet des perturbations
  - Rapidité des systèmes asservis
  - Dilemme stabilité, rapidité, précision

Robustesse de la stabilité (1)

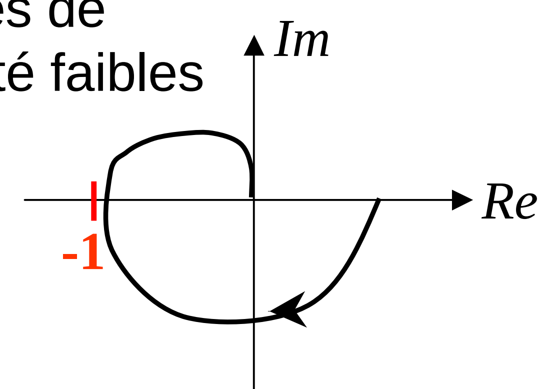
Introduction

- **Caractéristiques des critères de Routh et de Nyquist**
  - Déterminer si le système est stable, oscillant ou instable en BF
  - Déterminer les conditions limite de stabilité
  - Ne permettent pas de dire si le système stable en BF est plus ou moins proche de l'instabilité (point critique)
- **Concept de marges de stabilité (système à stabilité absolue)**
  - Intuitivement, la stabilité est satisfaisante si le lieu de Nyquist ou de Black du système en BO passe loin du **point critique -1**

Stabilité satisfaisante



Marges de stabilité faibles



Robustesse de la stabilité (2)

Marges de stabilité

Elles permettent d'estimer la proximité de la réponse fréquentielle $H_{BO}(j\omega)$ du point critique $-1 = 1^{\angle -\pi}$

- Marge de phase m_φ

Soit ω_{c0} la pulsation telle que $|H_{BO}(j\omega_{c0})|=1$. La marge de phase est la différence entre $\varphi_{BO}(\omega_{c0})$ et $-\pi$

$$\boxed{m_\varphi = \varphi_{BO}(\omega_{c0}) + \pi} \quad \text{avec} \quad \varphi_{BO}(\omega_{c0}) = \arg\big(H(j\omega_{C0})\big)$$

- Marge de gain m_g

Soit $\omega_{-\pi}$ la pulsation telle que $\arg H_{BO}(j\omega_{-\pi})=-\pi$. La marge de gain est l'écart entre 0dB et le gain à la pulsation $\omega_{-\pi}$

$$\boxed{m_g = -20\log_{10}\left|H_{BO}(j\omega_{-\pi})\right|} \quad \text{avec} \quad \varphi_{BO}(\omega_{-\pi}) = -\pi$$

Robustesse de la stabilité (3)

Interprétation des marges de stabilité

- *Un système est stable en BF si la marge de phase est positive*
- La marge de gain correspond au gain supplémentaire maximum que l'on peut donner au système en BO sans risquer de le rendre instable en BF
- Plus les marges sont grandes, plus robuste est la stabilité

Remarques

- Pour une bonne stabilité, on considère satisfaisantes les valeurs minimales : $m_\varphi = \pi/4$ à $\pi/3$ (45° à 60°) et m_g=10dB à 15dB
- On définit aussi la marge de retard m_r comme le retard maximal admissible sans déstabiliser le système en BF

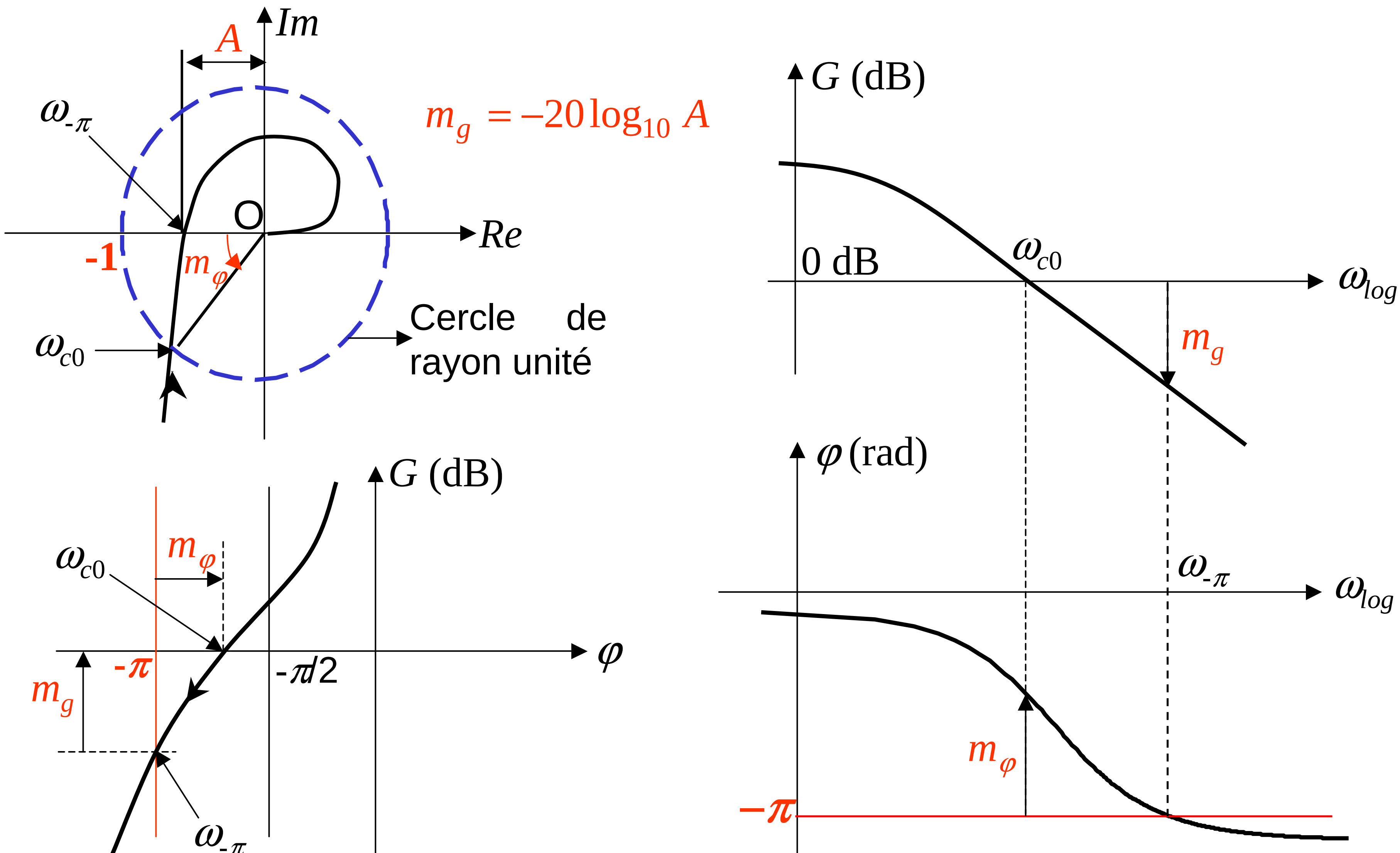
$$\boxed{m_r = \frac{m_\varphi}{\omega_{c0}}}$$

$e^{-\tau s}$ introduit un déphasage de $-\tau\omega$

Condition de stabilité : $-\tau\omega_{c0} + \varphi_{BO}(\omega_{c0}) \geq -\pi \Rightarrow \tau_{\lim} \leq \dfrac{m_\varphi}{\omega_{c0}}$

Robustesse de la stabilité (4)

❑ Détermination des marges de stabilité



Performances des systèmes asservis

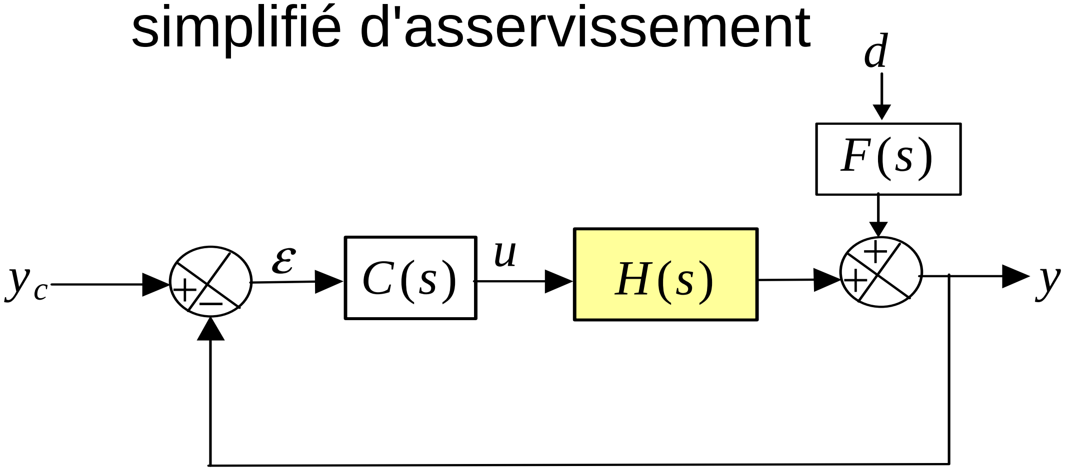
❑ Introduction

En boucle fermée, on désire que :

- le système suive la consigne en régime établi (précision)
- le système élimine les perturbations (rejet des perturbations)
- le système ait une dynamique rapide

❑ Précision des systèmes asservis

Considérons le schéma simplifié d'asservissement



La précision est définie à partir du signal d'erreur ε :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$$

On s'intéresse à l'erreur en régime permanent : $\varepsilon_\infty = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$

Précision des systèmes asservis (1)

Sortie du système asservi

$$Y(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{F(s)}{1 + H_{BO}(s)} D(s)$$

avec $H_{BO}(s) = C(s)H(s)$

TL de l'erreur

$$E(t) = Y_c(s) - Y(s)$$

$$E(t) = Y_c(s) - \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)} Y_c(s) - \frac{F(s)}{1 + H_{BO}(s)} D(s)$$

$$\boxed{E(s) = \frac{1}{1 + H_{BO}(s)} Y_c(s) - \frac{F(s)}{1 + H_{BO}(s)} D(s)}$$

$$\boxed{H_{BO}(s) = C(s)H(s)}$$

Précision des systèmes asservis (2)

- Erreur d'asservissement

$$E(s) = \frac{1}{1+H_{BO}(s)} Y_c(s) - \frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)} D(s)$$

L'erreur est fonction de deux termes :

- Un terme relatif à l'écart avec la consigne

$$E_c(s) = \frac{1}{1+H_{BO}(s)} Y_c(s)$$

- Un terme d'erreur dû à la perturbation

$$E_d(s) = -\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)} D(s)$$

Le système est d'autant plus précis que l'erreur en régime permanent est proche de 0 $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon(t) \to 0$

Précision des systèmes asservis (3)

- Erreur relative à la consigne ε_c

$$\varepsilon_c(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_c(t) \Rightarrow \varepsilon_c(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_c(s)$$

$$\varepsilon_c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+H_{BO}(s)} Y_c(s)$$

Ecrivons $H_{BO}(s)$ sous la forme $H_{BO}(s) = \dfrac{K_0}{s^{\alpha_0}} \dfrac{N_0(s)}{D_0(s)}$

avec $\dfrac{N_0(s)}{D_0(s)} = \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + 1}{a_{n-\alpha_0} s^{n-\alpha_0} + \cdots + a_1 s + 1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} \dfrac{N_0(s)}{D_0(s)} = 1$

$$\varepsilon_c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\dfrac{K_0}{s^{\alpha_0}} \dfrac{N_0(s)}{D_0(s)}} Y_c(s) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\dfrac{K_0}{s^{\alpha_0}}} Y_c(s)$$

$$\boxed{\varepsilon_c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{\alpha_0+1}}{s^{\alpha_0}+K_0} Y_c(s)}$$

Précision des systèmes asservis (4)

Erreur relative à la consigne ε_c

L'étude peut être menée pour tout signal de consigne. En pratique, on s'intéresse à l'erreur pour des consignes suivantes :

- $y_c(t) = \Gamma(t)$: consigne échelon. On parle d'erreur de position ou erreur statique
- $y_c(t) = v(t)$: consigne rampe. On parle d'erreur de vitesse ou erreur de traînage
- $y_c(t) = \frac{1}{2}t^2$: consigne parabole. On parle d'erreur d'accélération

Remarque

Un système ayant α_0 intégrateurs est dit de classe α_0 ou de type α_0

Précision des systèmes asservis (5)

❑ Erreur relative à la consigne ε_c

◆ Consigne échelon (erreur statique ou de position)

$$y_c(t) = \Gamma(t) \Rightarrow Y_c(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \varepsilon_{c,p}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^{\alpha_0}}{s^{\alpha_0} + K_0}$$

➢ $\alpha_0 = 0$ (pas d'intégrateur en BO, système de classe 0)

$$\varepsilon_{c,p}(\infty) = \frac{1}{1 + K_0} = \frac{1}{Kp} \quad \text{avec} \quad Kp = \lim_{s \to 0}\left(1 + H_{BO}(s)\right)$$

Si le système n'a pas d'intégrateur en BO, le système en BF présente une erreur statique permanente. Cette erreur est d'autant plus petite que le gain en BO K_0 est grande

➢ $\alpha_0 \geq 1$ (au moins un intégrateur en BO)

$\varepsilon_{c,p}(\infty) = 0$ Si le système a au moins un intégrateur en BO, le système en BF a une erreur statique nulle.

Précision des systèmes asservis (6)

Erreur relative à la consigne ε_c

- Consigne rampe (erreur de vitesse)

$$y_c(t) = v(t) \Rightarrow Y_c(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \varepsilon_{c,v}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{\alpha_0 - 1}}{s^{\alpha_0} + K_0}$$

- $\alpha_0 = 0$ (système de classe 0, pas d'intégrateur en BO)

$$\varepsilon_{c,v}(\infty) = \infty$$

- $\alpha_0 = 1$ (système de classe 1, 1 intégrateur en BO)

$$\varepsilon_{c,v}(\infty) = \frac{1}{K_v}$$ avec $K_v = \lim_{s\to 0} sH_{BO}(s)$ Gain en vitesse

- $\alpha_0 \geq 2$ (système de classe 2 ou supérieure)

$$\varepsilon_{c,v}(\infty) = 0$$

Précision des systèmes asservis (7)

❑ Erreur relative à la consigne ε_c

- Consigne parabole (erreur d'accélération)

$$y_c(t) = \frac{1}{2}t^2 \;\Rightarrow Y_c(s) = \frac{1}{s^3} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{c,a}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{\alpha_0 - 2}}{s^{\alpha_0} + K_0}$$

  - $\alpha_0 \leq 1$ (au plus 1 intégrateur en BO)

$$\varepsilon_{c,a}(\infty) = \infty$$

  - $\alpha_0 = 2$ (système de classe 2, 2 intégrateurs en BO)

$$\varepsilon_{c,a}(\infty) = \frac{1}{K_a}$$ avec $$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 H_{BO}(s)$$ Gain en accélération

  - $\alpha_0 \geq 3$ (plus de 2 intégrateurs en BO)

$$\varepsilon_{c,a}(\infty) = 0$$

Précision des systèmes asservis (8)

❑ Récapitulation (erreur due à la consigne)

ε \ α_0	0	1	2	$\alpha_0 > 2$
$\varepsilon_{c,p}$	$\frac{1}{K_p}$	0	0	0
$\varepsilon_{c,v}$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0	0
$\varepsilon_{c,a}$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$	0

Ces résultats sont valables si le système est stable en BF !!

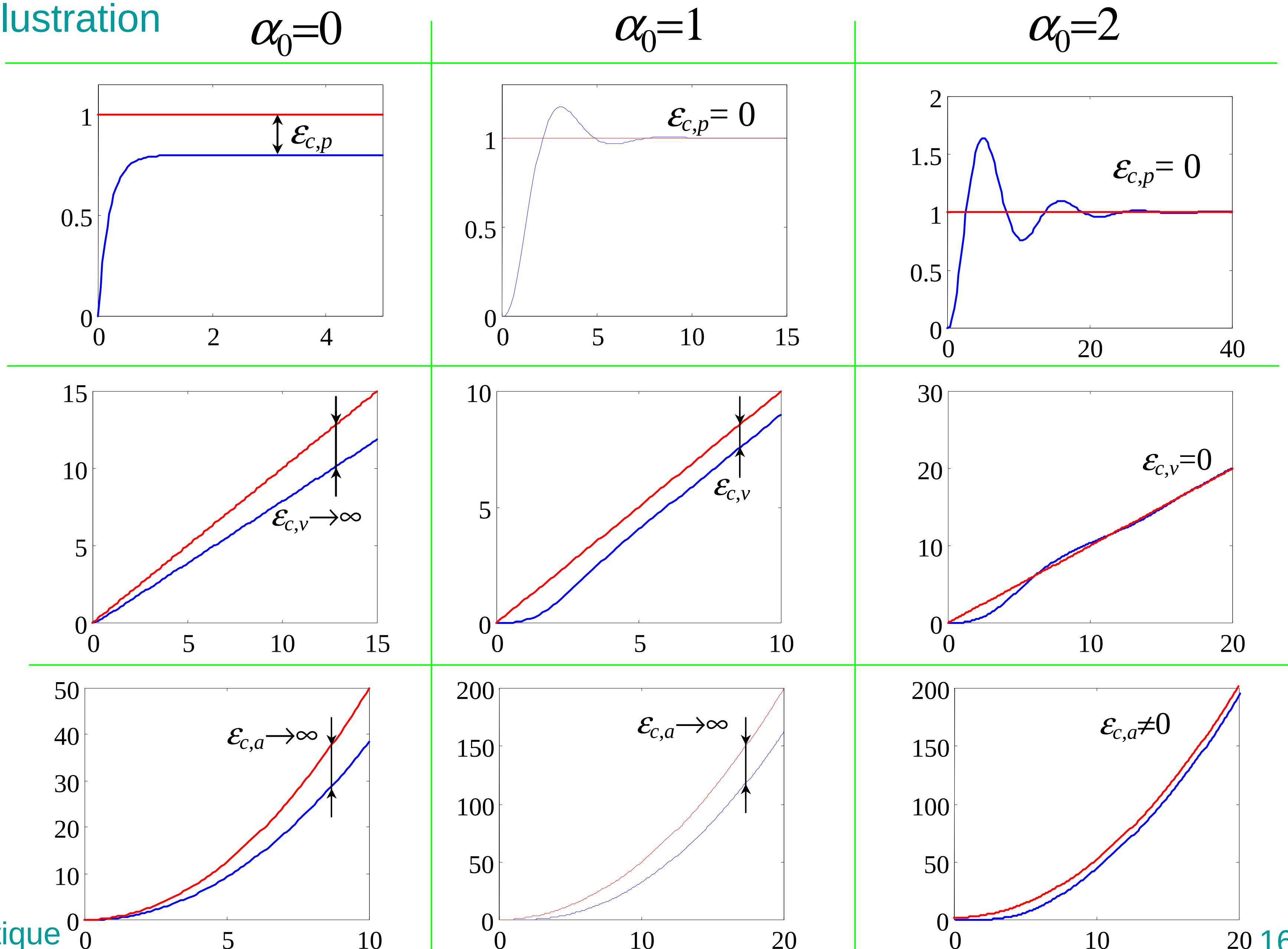
α_0 : nombre d'intégrateurs de la fonction de transfert en BO

Remarques

- Dans le cas où l'erreur est non nulle mais bornée, cette erreur est d'autant plus petite que le gain en BO est grand
- Si le gain en BO est grand, il y a risque d'instabilité (cf Routh) : c'est le dilemme stabilité - précision

Précision des systèmes asservis (9)

- Illustration



Précision des systèmes asservis (10)

Erreur relative à la perturbation ε_d

On parle de rejet asymptotique de la perturbation si l'erreur due à la perturbation ε_d tend vers 0 en régime permanent

$$E_d(s) = -\frac{F(s)}{1 + H_{BO}(s)} D(s)$$

$$\varepsilon_d(\infty) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_d(t) \Rightarrow \varepsilon_d(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_d(s)$$

Posons $\quad H_{BO}(s) = \frac{K_0}{s^{\alpha_0}} \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$ avec $\frac{N_0(0)}{D_0(0)} = 1$

$$F(s) = \frac{K_d}{s^{\beta}} \frac{N_d(s)}{D_d(s)} \quad \text{avec} \quad \frac{N_d(0)}{D_d(0)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_d(\infty) = \lim_{s \to 0} -\frac{K_d s^{\alpha_0 - \beta + 1}}{s^{\alpha_0} + K_0} D(s)}$$

Précision des systèmes asservis (11)

- Erreur relative à la perturbation ε_d
  - Perturbation de type échelon ($D(s)=\frac{1}{s}$)

$$\varepsilon_{d,p}(\infty)=\lim_{s\to 0}-\frac{K_d s^{\alpha_0-\beta}}{s^{\alpha_0}+K_0}$$

- $\alpha_0=0$ (système de classe 0). On a : $\varepsilon_{d,p}(\infty)=\lim_{s\to 0}-\frac{K_d s^{-\beta}}{1+K_0}$
  - Si $\beta=0$, on obtient $\varepsilon_{d,p}(\infty)=-\frac{K_d}{1+K_0}=-\frac{K_d}{K_p}$

    L'erreur est bornée si $F(s)$ n'a pas d'intégrateur

  - Si $\beta\neq 0$, on obtient $\varepsilon_{d,p}(\infty)=-\infty$

La présence d'intégrateurs dans $F(s)$ ne contribue pas à l'élimination asymptotique de la perturbation

Précision des systèmes asservis (12)

❑ Erreur relative à la perturbation ε_d

- Perturbation de type échelon

  - $\alpha_0 \geq 1$ (au moins un intégrateur)

    On a $\varepsilon_{d,p}(\infty) = \lim_{s \to 0} -\frac{K_d s^{\alpha_0 - \beta}}{K_0}$

    - Si $\alpha_0 - \beta = 0$, on obtient $\varepsilon_{d,p}(\infty) = -\frac{K_d}{K_0}$

    - Si $\alpha_0 - \beta \geq 1$, on obtient $\varepsilon_{d,p}(\infty) = 0$

L'erreur de position $\varepsilon_{d,p}$ due à la perturbation est diminuée voire annulée si on augmente le nombre d'intégrateurs α_0 en amont du point d'application de la perturbation tout en veillant à ne pas déstabiliser le système

Précision des systèmes asservis (13)

Erreur relative à la perturbation ε_d

α_0	β	$\varepsilon_{d,p}$	$\varepsilon_{d,v}$	$\varepsilon_{d,a}$
0	0	$-\frac{K_d}{K_p}$	$-\infty$	$-\infty$
1	0	0	$-\frac{K_d}{K_v}$	$-\infty$
1	1	$-\frac{K_d}{K_v}$	$-\infty$	$-\infty$
2	0	0	0	$-\frac{K_d}{K_a}$
2	1	0	$-\frac{K_d}{K_a}$	$-\infty$
3	0	0	0	0

Avec

$$K_p = \lim_{s \to 0} \left(1 + H_{BO}(s)\right)$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s H_{BO}(s)$$

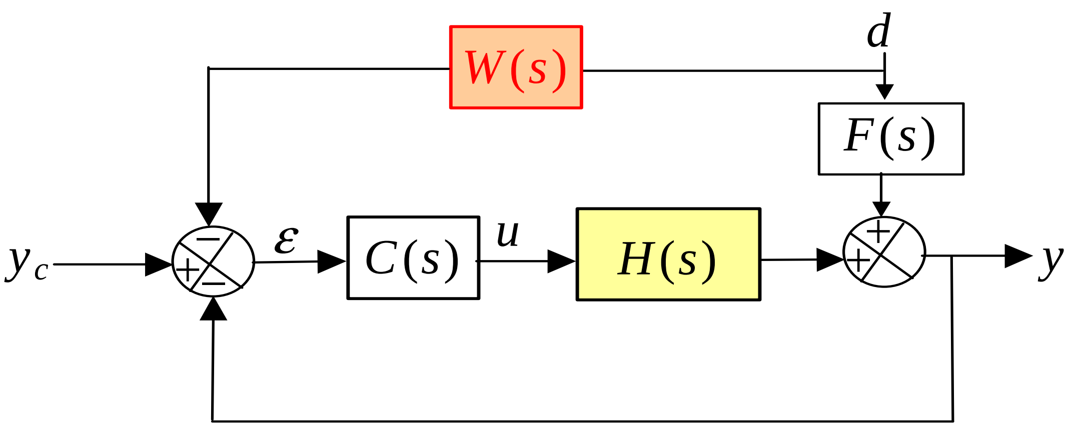
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 H_{BO}(s)$$

L'erreur totale en régime permanent est la somme de l'erreur par rapport à la consigne et de l'erreur due à la perturbation

Précision des systèmes asservis (14)

❑ Rejet de la perturbation par compensation

Si $F(s)$ est connue, on peut éliminer totalement la perturbation en réalisant une correction par compensation



$$H_{BO}(s) = C(s)H(s)$$

$$Y(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{F(s) - W(s)H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)} D(s)$$

On élimine totalement la perturbation en prenant $\boxed{W(s) = \frac{F(s)}{H_{BO}(s)}}$

Le hic! $W(s)$ n'est pas toujours stable ou physiquement réalisable (contrainte de causalité)

Performances dynamiques (1)

Performances

On apprécie le comportement dynamique des systèmes asservis en termes de (cf cours 1 à 3) :

- rapidité : temps de montée t_m, temps de réponse t_r
- dépassement
- résonance

Ces performances peuvent être évaluées sur la réponse indicielle ou fréquentielle du système asservi

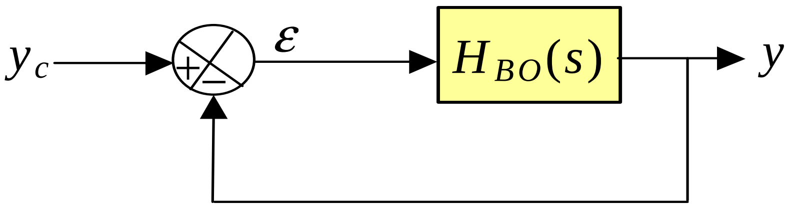
Résultats qualitatifs

Peut-on déduire les performances des systèmes asservis à partir de la connaissance de $H_{BO}(s)$?

- Oui pour les systèmes du 1^{er} ordre
- Des résultats qualitatifs pour les systèmes du 2^{e} ordre

Performances dynamiques (2)

❑ Système du premier ordre en BF



$$H_{BO}(s) = \frac{K_0}{1+T_0 s}$$

◆ Fonction de transfert en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_0}{1+K_0+T_0 s} \quad \Rightarrow \quad H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}\, s}$$

avec $K_{BF} = \dfrac{K_0}{1+K_0}$ et $T_{BF} = \dfrac{T_0}{1+K_0}$

K_{BF} : gain statique en BF

T_{BF} : constante de temps en BF

Quand on boucle un système du 1er ordre, on obtient en BF un système ayant le comportement d'un 1er ordre

Performances dynamiques (3)

Système du premier ordre en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}s} \qquad \text{avec} \quad K_{BF} = \frac{K_0}{1+K_0} \quad \text{et} \quad T_{BF} = \frac{T_0}{1+K_0}$$

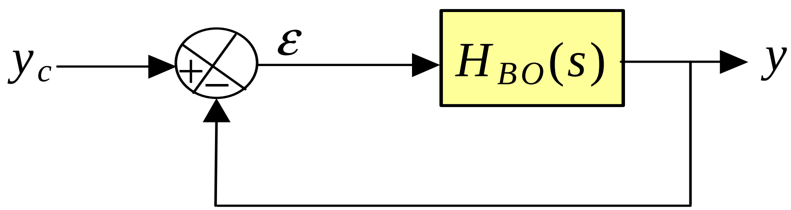
- Remarques
  - Le système du 1er ordre en BF présente en régime permanent, une erreur statique non nulle. Cette erreur est d'autant plus petite que le gain K_0 est grand (mais attention à la saturation des actionneurs !!)
  - Temps de réponse en BF

$$t_{r,BF} = 3T_{BF} = \frac{3T_0}{1+K_0}$$

- Le système est plus rapide en BF qu'en BO
- Le temps de réponse est d'autant plus petit que K_0 est grand

Performances dynamiques (4)

Système du deuxième ordre en BF



$$H_{BO}(s) = \frac{K_0}{\frac{s^2}{\omega_{n,0}^2} + 2\frac{\xi_0}{\omega_{n,0}}s + 1},$$

- Fonction de transfert en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_0}{\frac{s^2}{\omega_{n,0}^2} + 2\frac{\xi_0}{\omega_{n,0}}s + (1 + K_0)} \Rightarrow H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{\frac{s^2}{\omega_{n,BF}^2} + 2\frac{\xi_{BF}}{\omega_{n,BF}}s + 1}$$

$K_{BF} = \dfrac{K_0}{1 + K_0}$: gain statique en BF

$\xi_{BF} = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{1 + K_0}}$: facteur d'amortissement en BF ($0 < \xi_{BF} < 1$)

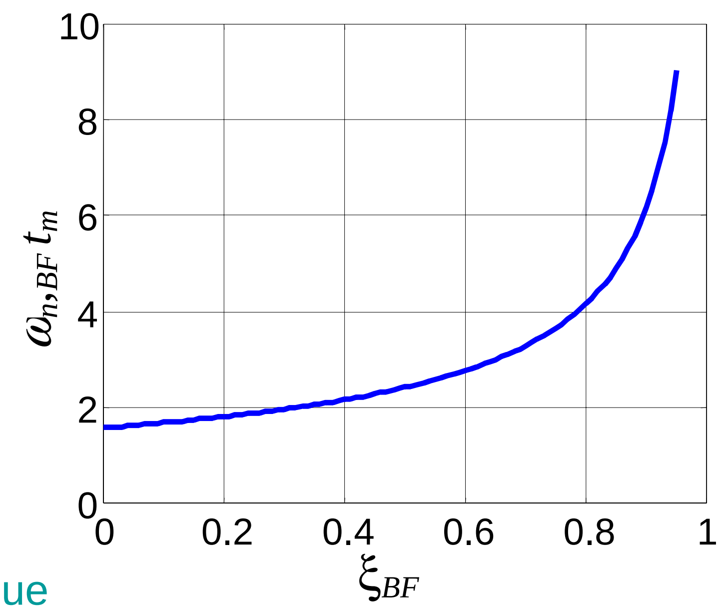
$\omega_{n,BF} = \omega_{n,0}\sqrt{1 + K_0}$: pulsation naturelle en BF

Performances dynamiques (5)

Système du deuxième ordre en BF

Remarques

- Le système en BF a une erreur statique non nulle
- Le système en BF a un comportement oscillatoire amorti
- Le facteur d'amortissement ξ_{BF} est faible si K_0 est grand
  $\Rightarrow$ la réponse indicielle a un fort dépassement
- Le temps de montée t_m est rapide si K_0 grand



Pour $0.2 < \xi_{BF} < 0.8$ on a

$$2 < \omega_{n,BF}\, t_m < 4$$

Pour les valeurs courantes de ξ_{BF}, on peut obtenir un *ordre de grandeur du temps de montée en BF* à partir des éléments de la BO

Performances dynamiques (6)

Système du deuxième ordre en BF

- Relation empirique 1

Si K_0 >> 1, on montre que $\omega_{n,BF} = \omega_{n,0}\sqrt{1+K_0} \approx \omega_{c0}$

avec ω_{c0} la pulsation telle que $|H_{BO}(j\omega_{c0})|=1$ ou $G(\omega_{c0})=0\text{dB}$

ω_{c0} est appelée aussi pulsation de coupure à 0dB

- Relation empirique 2 : relation entre marge de phase et facteur d'amortissement en BF

$$\xi_{BF} \approx \frac{m_\varphi(\deg ré)}{100}$$

m_φ : marge de phase $m_\varphi = \varphi_{BO}(\omega_{c0}) + 180°$

Ces deux relations permettent de déduire les performances du système en BF à partir de la connaissance des caractéristiques fréquentielles de H_{BO}

Performances dynamiques (7)

Système du deuxième ordre en BF

- Influence du gain statique K_0 en BO sur la BF
  - Augmentation de $K_0 \Rightarrow$
    - diminution de ξ_{BF}, augmentation de $\omega_{n,BF}$ (donc de la BP)
    - dépassement D_{BF} important
    - diminution de la marge de phase (stabilité moins bonne)
    - augmentation du temps de montée en BF et de la précision
  - Diminution de $K_0 \Rightarrow$
    - augmentation de ξ_{BF}, diminution de $\omega_{n,BF}$ (donc de la BP)
    - diminution du dépassement D_{BF}
    - augmentation de la marge de phase (stabilité améliorée)
    - diminution du temps de montée en BF et de la précision

Il y a un compromis à trouver entre
la rapidité, la stabilité et la précision