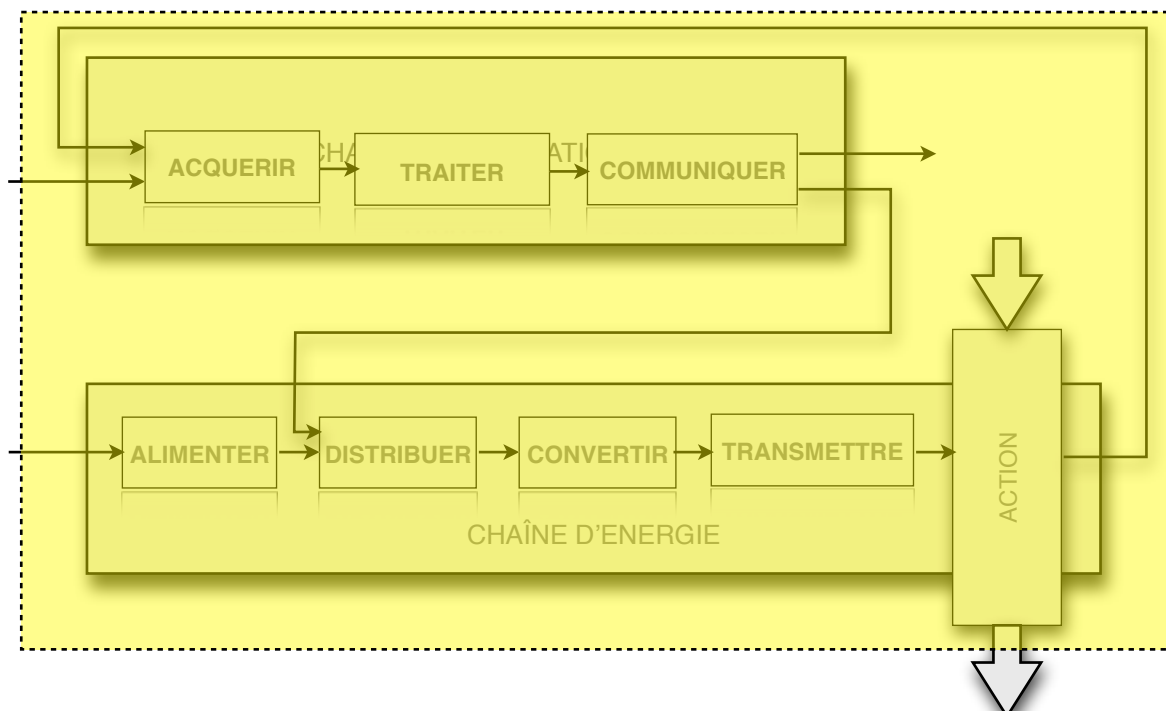
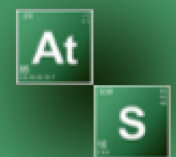


CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

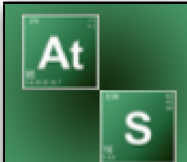


	CI1 : Analyse globale et performances d'un système	
	CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS	COURS
	Problématique	Edition 1 - 06/12/2017

PROBLEMATIQUE

« Les systèmes asservis doivent le plus souvent répondre à des critères de précision, rapidité et stabilité. Or un système satisfait rarement ces critères intrinsèquement, et il est alors nécessaire de corriger son comportement pour améliorer ses performances »

C - RESOUDRE	
C1 : Choisir une démarche de résolution	Proposer une démarche de réglage d'un correcteur proportionnel ou proportionnel-intégral
C2 : Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique	Prévoir les réponses temporelles des systèmes linéaires du premier et second ordre
	Justifier le choix d'un correcteur vis-à-vis des performances attendues

	CI1 : Analyse globale et performances d'un système	
	CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS	COURS
	Sommaire	Edition 1 - 06/12/2017

Sommaire

A.Généralités 4

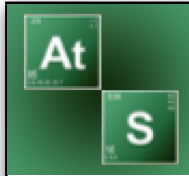
A.1.Structure d'un système asservi corrigé	4
A.2.Fonctions d'un correcteur	4
A.2.1. Correction proportionnelle	
A.2.2. Correction intégrale	
A.2.3. Correction dérivée	
A.3.Défaut de rapidité	6
A.4.Défaut de précision	7
A.5.Défaut de stabilité	8

B.Etude détaillée des correcteurs 9

B.1.Correcteur proportionnel P	9
B.2.Correcteur intégral I	11
B.3.Correcteur proportionnel-intégral PI	13
B.4.Correcteur Dérivateur pur D	16
B.5.Correcteur Proportionnel Intégrateur Dérivée PID théorique	17

C.Réglages des correcteurs 19

C.1.Réglage d'un correcteur proportionnel P	19
C.2.Réglage d'un correcteur proportionnel intégral PI	20
C.3.Réglage d'un correcteur PID	26
C.3.1. Méthode de Ziegler et Nichols	
C.3.2. Méthode de la réglabilité	

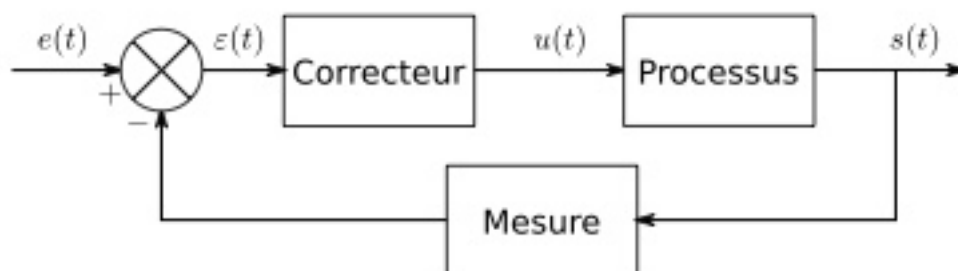


A. Généralités

A.1. Structure d'un système asservi corrigé

Afin d'améliorer les performances d'un système asservi, il va falloir agir sur l'écart entre la consigne et la sortie, afin de corriger sa valeur avant de piloter le système.

La structure globale d'un tel asservissement sera donc de la forme suivante :



La fonction de transfert du correcteur $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$ est implantée dans l'unité de traitement du système.

A.2. Fonctions d'un correcteur

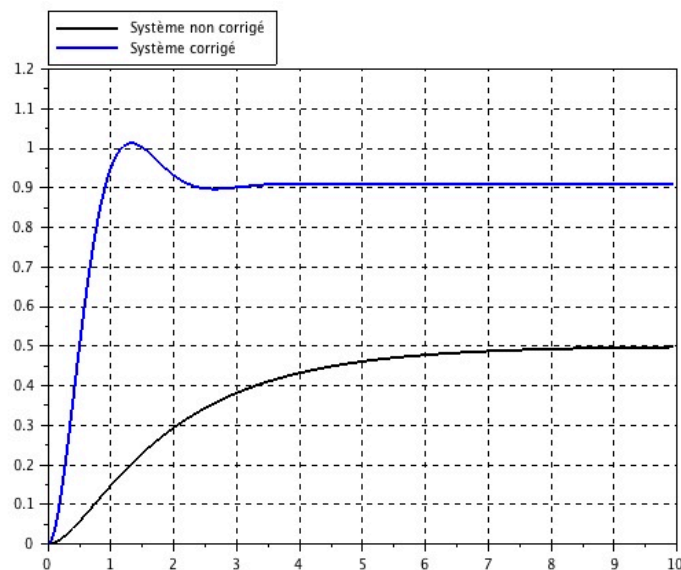
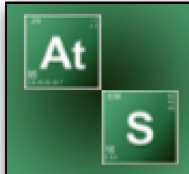
Un correcteur a pour rôle de contrer les défauts d'un système, en terme de rapidité, de précision et de stabilité. A chaque défaut correspond un correcteur, mais nous verrons qu'un type de correction peut faire apparaître un comportement indésirable, qu'il faudra alors également corriger.

A.2.1. Correction proportionnelle

D'une façon générale, on souhaite arriver rapidement à la valeur de consigne souhaitée. L'idée première sera donc de «faire croire» à la commande que l'écart est supérieur à sa valeur réelle pour le forcer à amplifier sa commande pour l'amener ainsi plus rapidement à la valeur souhaitée : il s'agit d'une **correction proportionnelle** dans laquelle l'écart sera multiplié.

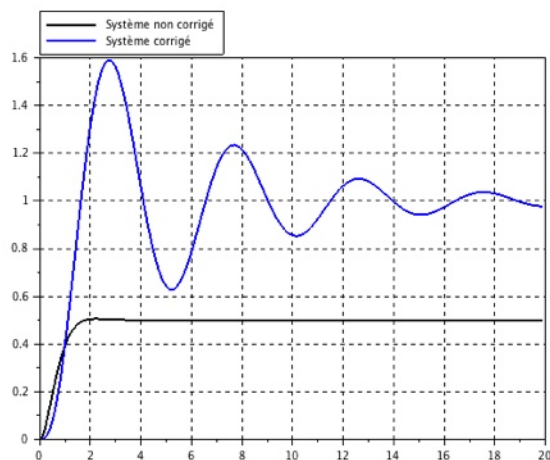
Toutefois, une fois la consigne obtenue, l'écart est annulé et par suite la commande également, qui va alors laisser le système évoluer de lui-même. Au final, la valeur stabilisée présente une erreur, et risque de devenir instable si la correction est trop importante

Notes



Réponse à un échelon unitaire d'un système non corrigé et corrigé

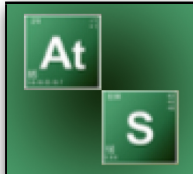
A.2.2. Correction intégrale



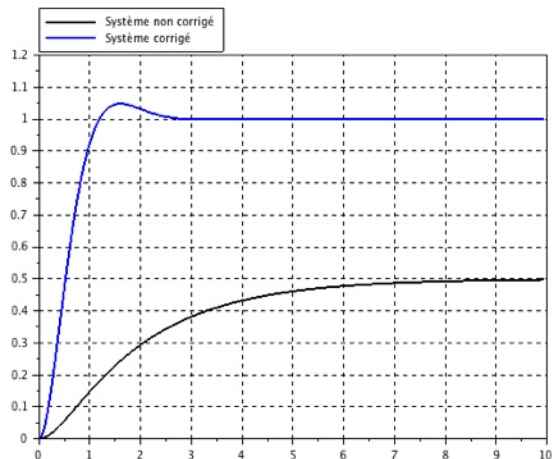
Afin de remédier à cet inconvénient, le correcteur devra «mémoriser» depuis combien de temps l'écart est négatif, et pour cela va sommer les erreurs accumulées : plus le nombre d'erreurs cumulées est important, plus le système devra réagir. Il s'agit là d'une **correction intégrale**, qui va sommer les erreurs.

En contrepartie, lorsque la consigne sera atteinte, ce correcteur va continuer un certain temps à agir sur le système, provoquant ainsi un dépassement de la consigne. Ce dépassement s'atténuera au fur et à mesure le temps que la somme des écarts s'annule. Ce correcteur implique un système précis, mais provoque un dépassement de la consigne et donc une augmentation du temps de réponse.

Notes



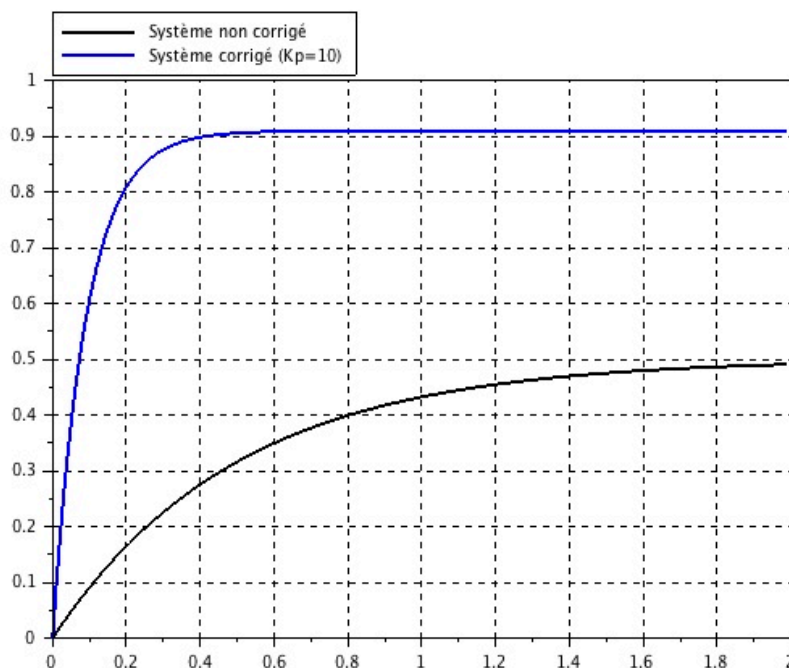
A.2.3. Correction dérivée



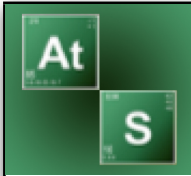
La solution à apporter sera alors de «tempérer» l'action du correcteur sur le système en fonction de la vitesse de rapprochement de la consigne : il faudra dériver la valeur de l'écart et agir en conséquence. Il s'agit de la **correction dérivée**

A.3. Défaut de rapidité

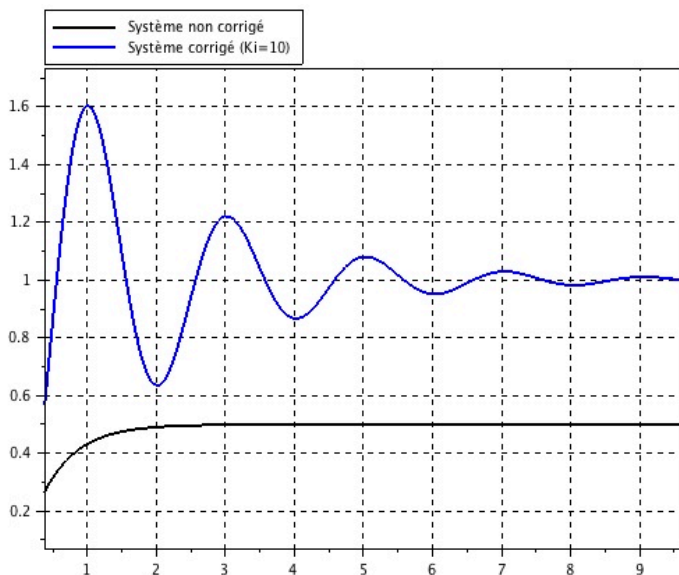
Ce défaut est donc résolu par insertion d'une **correction proportionnelle** qui va artificiellement multiplier l'écart pour forcer le système à réagir de façon plus importante



Notes



A.4. Défaut de précision



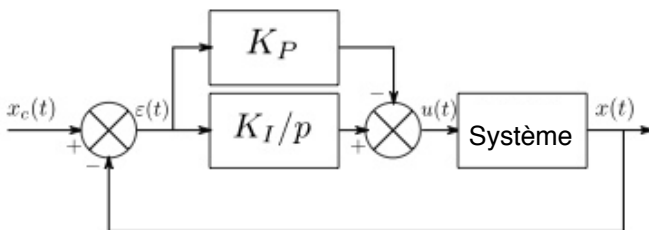
Le système n'arrive pas à converger vers la valeur de consigne, soit de façon intrinsèque à cause de sa fonction de transfert, soit parce que les perturbations modifient son comportement.

Ce type de système a besoin d'énergie pour maintenir la sortie à la valeur de consigne. Il faut donc augmenter la correction de façon proportionnelle à la quantité d'erreurs accumulées, par **action d'intégration** de ces erreurs.

Mais en contrepartie, la correction ne s'annulera qu'après avoir dépassé la consigne, lorsque la somme des écarts négatifs compensera la somme des écarts positifs précédents.

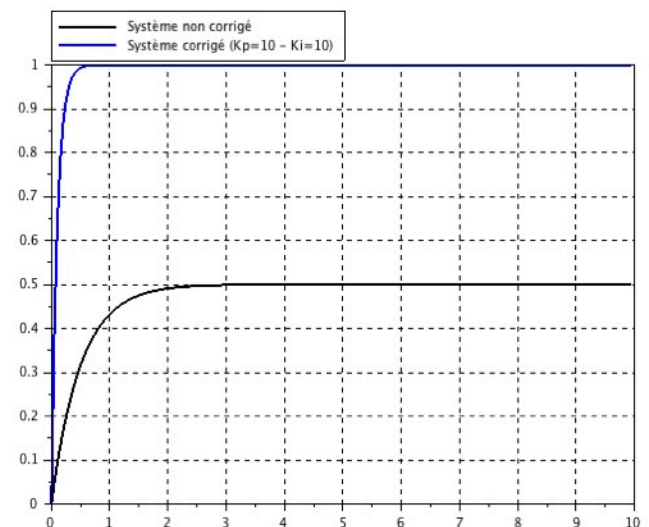
Si le système devient précis, c'est donc au détriment d'une augmentation sensible du temps de réponse

Pour remédier à cet inconvénient, il sera de mise de joindre au correcteur intégral un correcteur proportionnel afin d'améliorer le temps de réponse :

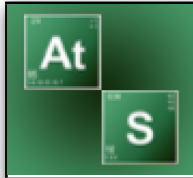


L'action proportionnelle est prépondérante au début de la réponse (l'intégration est encore minime), et apporte l'énergie au système pour le rendre rapide.

La précision est apportée en fin de réponse, lorsque l'action proportionnelle est minime mais que la somme des erreurs contribue à faire converger le système vers la consigne

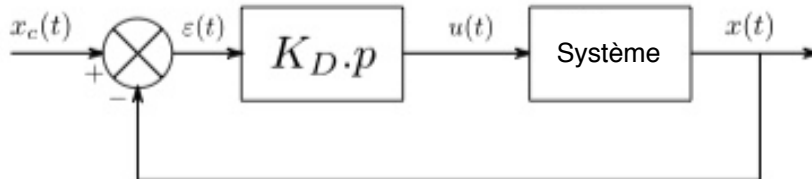


Notes

**A.5. Défaut de stabilité**

Des oscillations peuvent apparaître avant d'obtenir une réponse stable, même avec le seul correcteur proportionnel, lorsque l'inertie du système est importante.

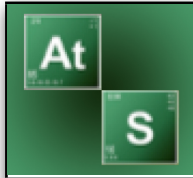
La solution à apporter consiste à diminuer la correction lorsque la variation d'erreur diminue : une **action dérivatrice** des erreurs permettra d'anticiper la capture de la consigne.



Un tel correcteur n'est jamais utilisé seul, car il induit une diminution de la classe du système en boucle ouverte, et dégrade par conséquent la précision. En effet, le correcteur réagit en fonction de la variation des écarts, mais pas en fonction de l'écart. Si la sortie est stable mais éloignée de la valeur de la consigne, ce correcteur ne le verra pas.

Il est donc systématiquement associé à un autre type de correcteur, proportionnel ou intégral.

Notes

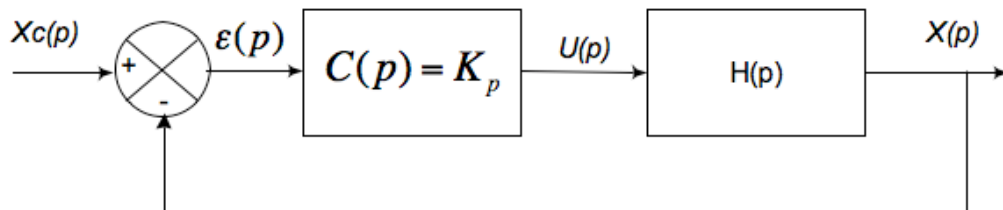


Dans toute la suite, on notera $FTBO(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi non corrigé, associée à son gain $G_{dB}(\omega)$ et à sa phase $\varphi(\omega)$. Sa pulsation de coupure sera notée ω_c , telle que $G_{dB}(\omega_c) = 0 \text{ dB}$

On notera de même $FTBO_c(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée, avec son gain $G_{dBc}(\omega)$ et sa phase $\varphi(\omega)$

B. Etude détaillée des correcteurs

B.1. Correcteur proportionnel P



La fonction de transfert du correcteur proportionnel est $C(p) = K_p$

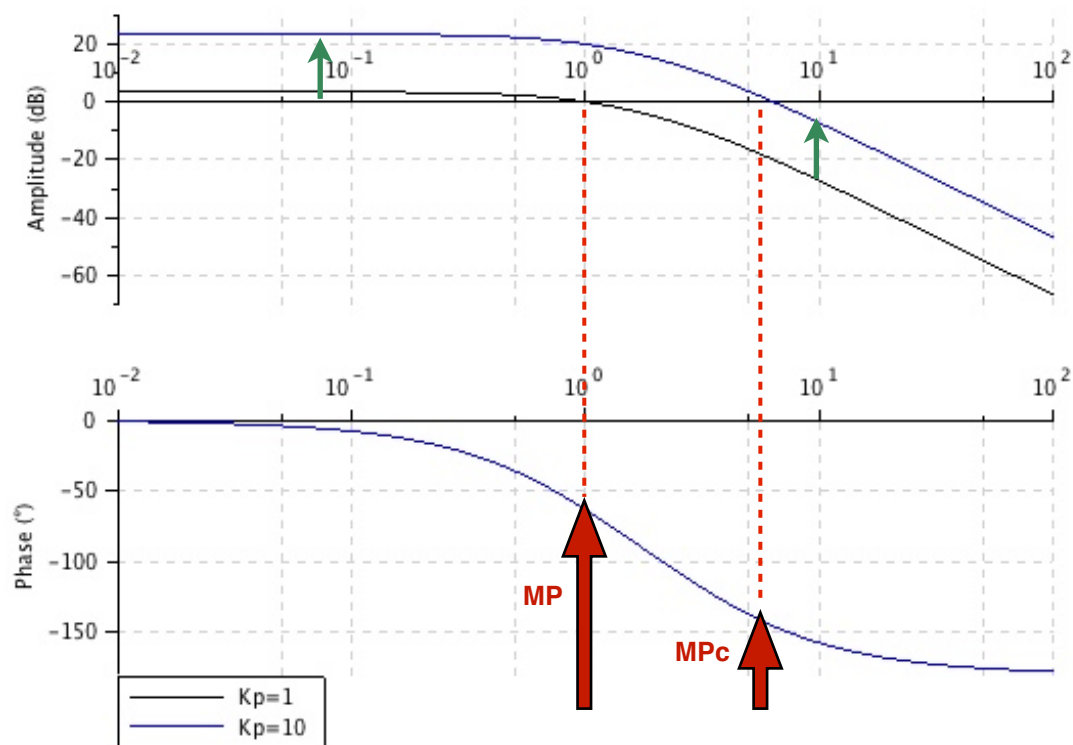
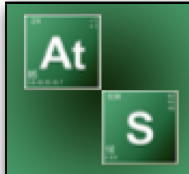
Le gain et la phase de ce correcteur sont respectivement $20 \log K_p$ et 0° : ce correcteur ne modifie pas la phase, mais décale le diagramme de gain de $H(p)$:

$$FTBO_c(p) = C(p)FTBO(p) \Rightarrow \begin{cases} G_{dBc} = G_{dB} + 20 \log K_p \\ \varphi_c = \varphi \end{cases}$$

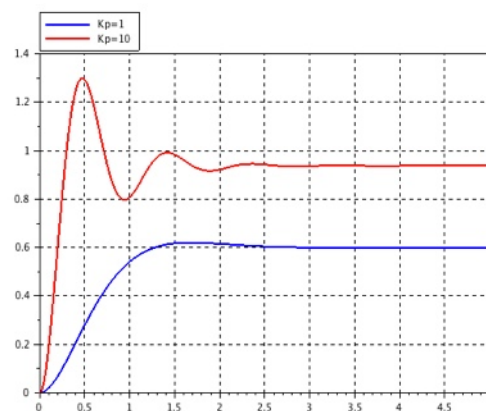
Ce correcteur améliore la rapidité du système, car l'augmentation du gain apporte de l'énergie au système, d'autant plus que les hautes fréquences sont moins filtrées et contribuent à la rapidité.

En revanche, la marge de phase se retrouve diminuée, et rapproche le système de l'instabilité

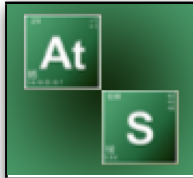
Notes

**En résumé :**

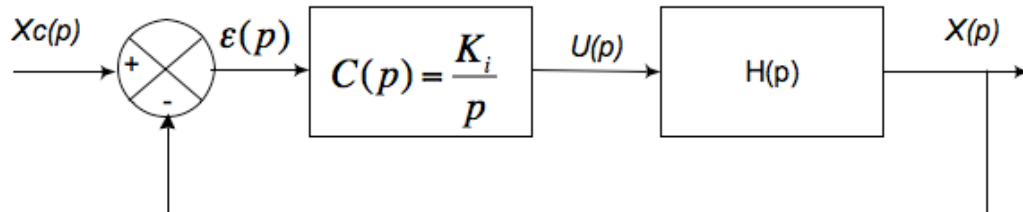
- * Le correcteur proportionnel améliore sensiblement la rapidité
- * la précision augmente lorsqu'il n'est pas précis
- * la stabilité se dégrade



Notes



B.1. Correcteur intégral I



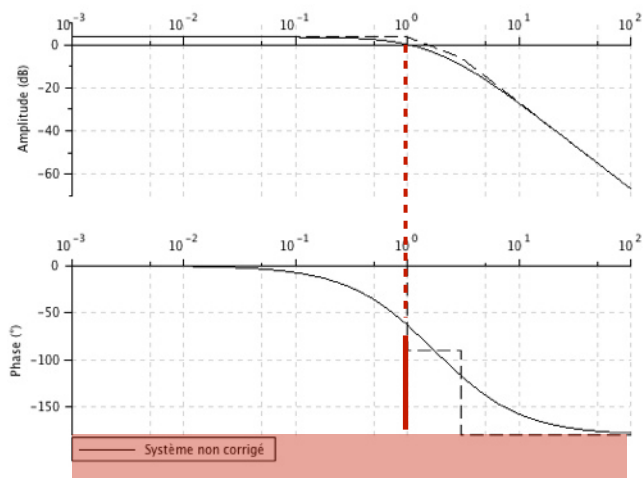
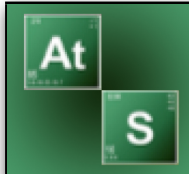
La fonction de transfert du correcteur proportionnel est $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Le gain et la phase de ce correcteur sont respectivement -20 dB/décade et -90° : ce correcteur décale la phase de -90° , et augmente le gain dans les basses fréquences, sa pulsation de coupure étant $\omega_c = K_i$:

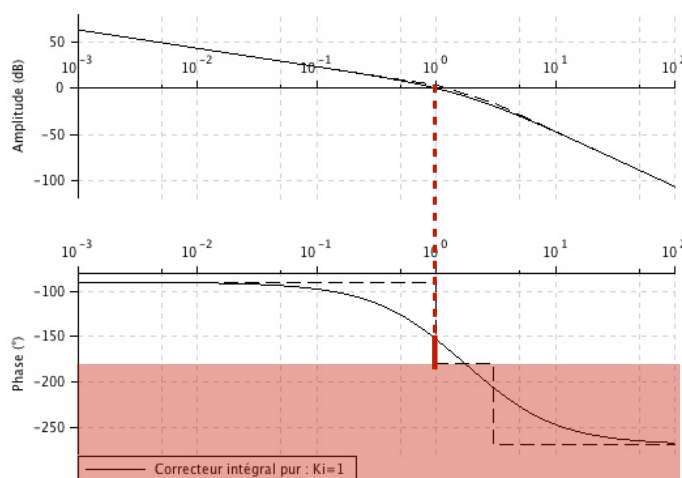
$$FTBO_c(p) = C(p)FTBO(p) \Rightarrow \begin{cases} G_{dBc} = G_{dB} - 20 \log \omega \\ \varphi_c = \varphi - 90^\circ \end{cases}$$

Ce correcteur amplifie donc les basses fréquences, mais diminue les hautes fréquences (supérieures à la pulsation de coupure). L'amplification des basses fréquences a pour conséquence de faire converger le système vers la valeur de consigne, et rend ce système précis.

Notes



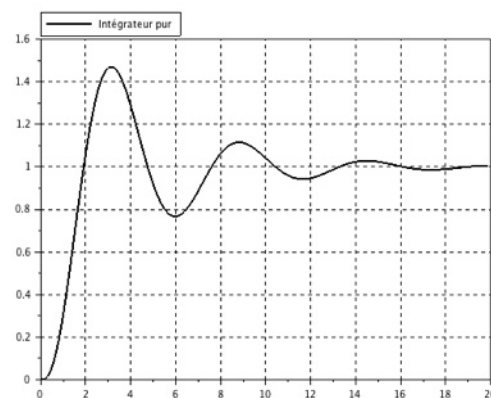
Système non corrigé



Système corrigé avec intégrateur pur

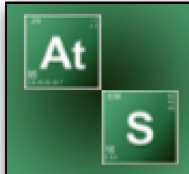
En résumé :

- * Le correcteur intégral rend le système précis, par forte amplification des basses fréquences précision augmente lorsqu'il n'est pas précis
- * la stabilité est fortement dégradée
- * le temps de réponse est fortement augmenté

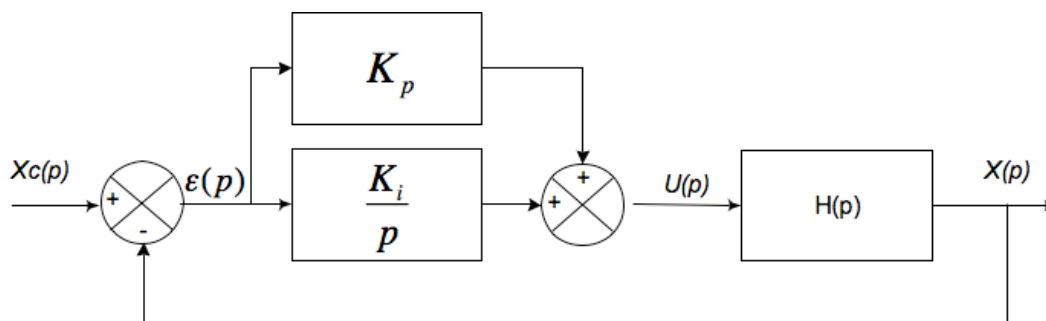


Les inconvénients cités font qu'on associe très souvent un correcteur proportionnel à ce correcteur intégral.

Notes

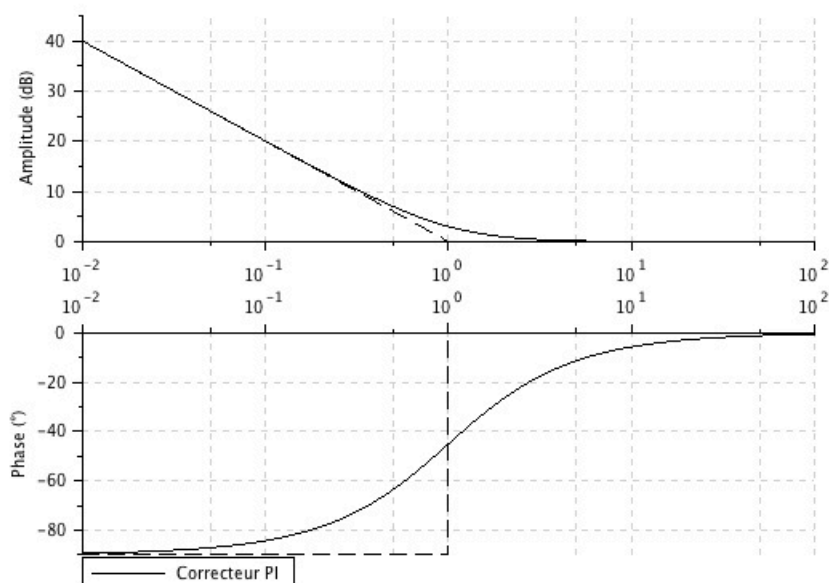


B.1. Correcteur proportionnel-intégral PI



La fonction de transfert du correcteur proportionnel est $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p}$

Ce correcteur peut s'écrire également $C(p) = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} p}{p}$: produit d'un polynôme du 1er ordre au numérateur, et d'un intégrateur



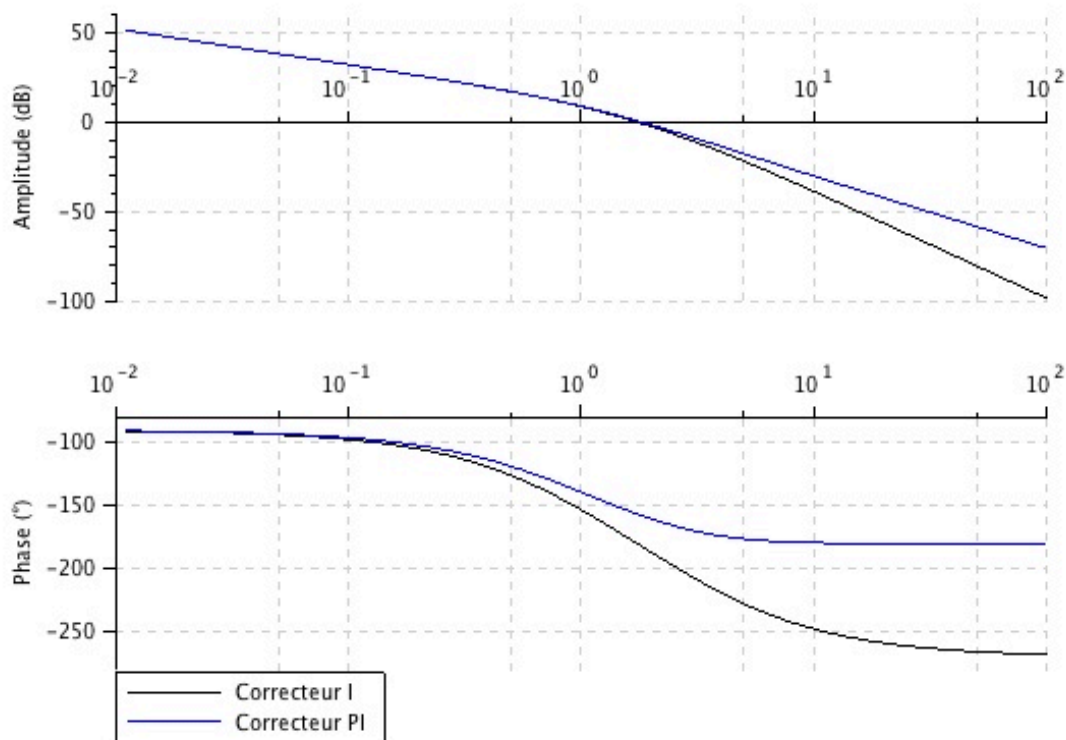
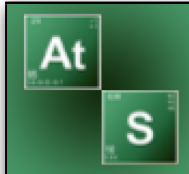
Traçons le diagramme de Bode de ce correcteur seul :

* Il amplifie les basses fréquences, ce qui contribue à la précision

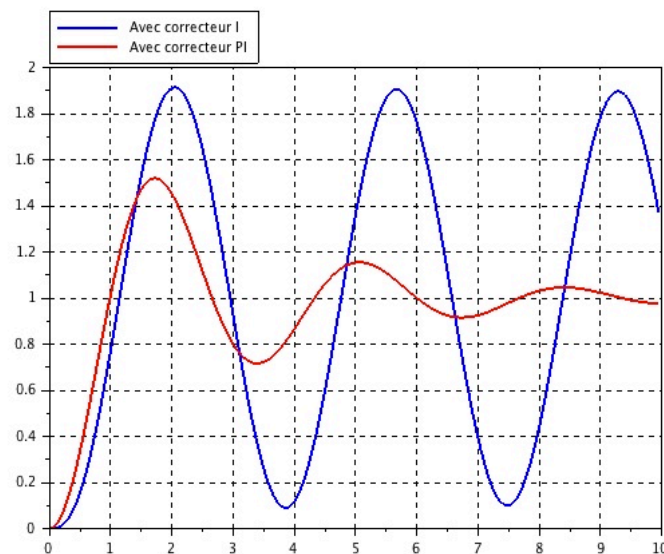
* La phase à hautes fréquences, pour $\omega > \frac{K_i}{K_p}$, s'annule, contribuant ainsi à

éloigner le système de l'instabilité créée par l'intégrateur pur

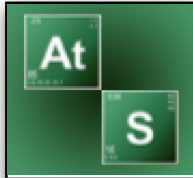
Notes

**En résumé :**

- * Le correcteur proportionnel-intégral améliore la précision
- * la stabilité n'est pas trop affectée

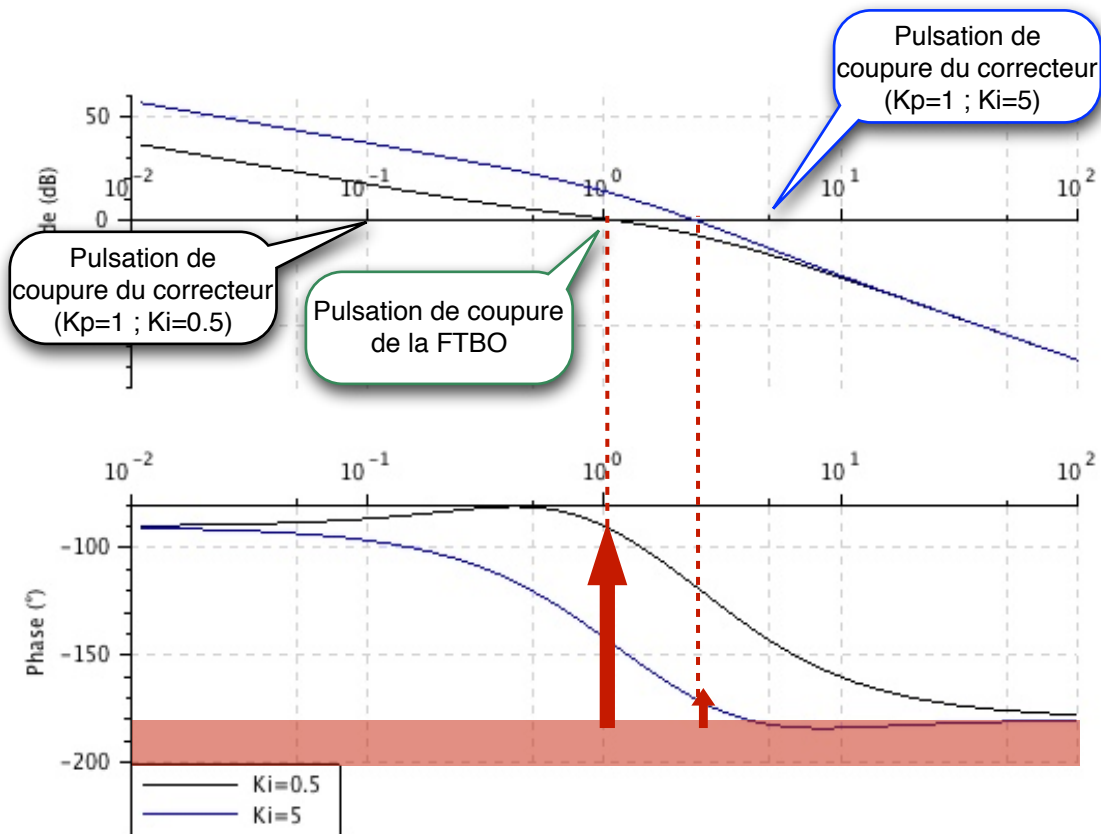


Notes

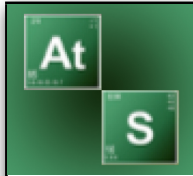


Pour garantir la stabilité, il faut que la pulsation de coupure de la FTBO soit très grande devant la pulsation de coupure du correcteur, afin de se placer dans la zone où la phase du correcteur est nulle :

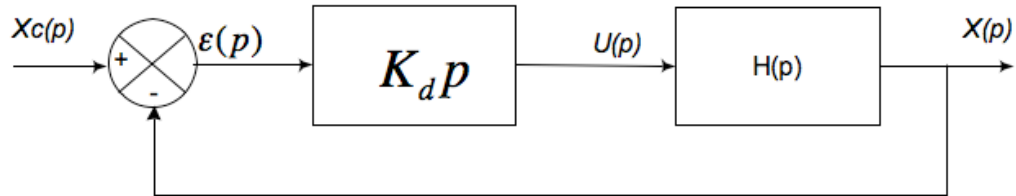
$$\omega_c \gg \frac{K_i}{K_p}$$



Notes



B.1. Correcteur Dérivateur pur D



La fonction de transfert du correcteur proportionnel est $C(p) = K_d p$

Le gain et la phase de ce correcteur sont respectivement $+20 \text{ dB/décade}$ et $+90^\circ$.

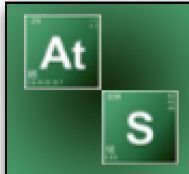
$$FTBO_c(p) = C(p)FTBO(p) \Rightarrow \begin{cases} G_{dBc} = G_{dB} + 20 \log \omega \\ \varphi_c = \varphi + 90^\circ \end{cases}$$

Ce correcteur décale la phase de $+90^\circ$, ce qui contribue de façon significative sur la stabilité.

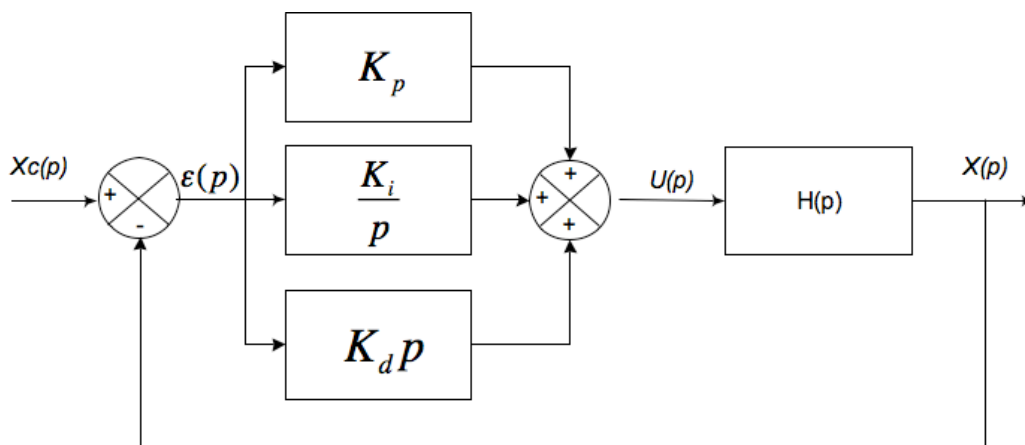
Il amplifie en revanche les hautes fréquences, dans lesquelles sont localisées les bruits. Ces bruits amplifiés vont dégrader le comportement du système.

Par ailleurs, la présence d'un dérivateur annule l'effet d'un intégrateur, et rend ainsi le système moins précis. Ce dernier inconvénient impose l'utilisation conjointe d'un autre correcteur

Notes

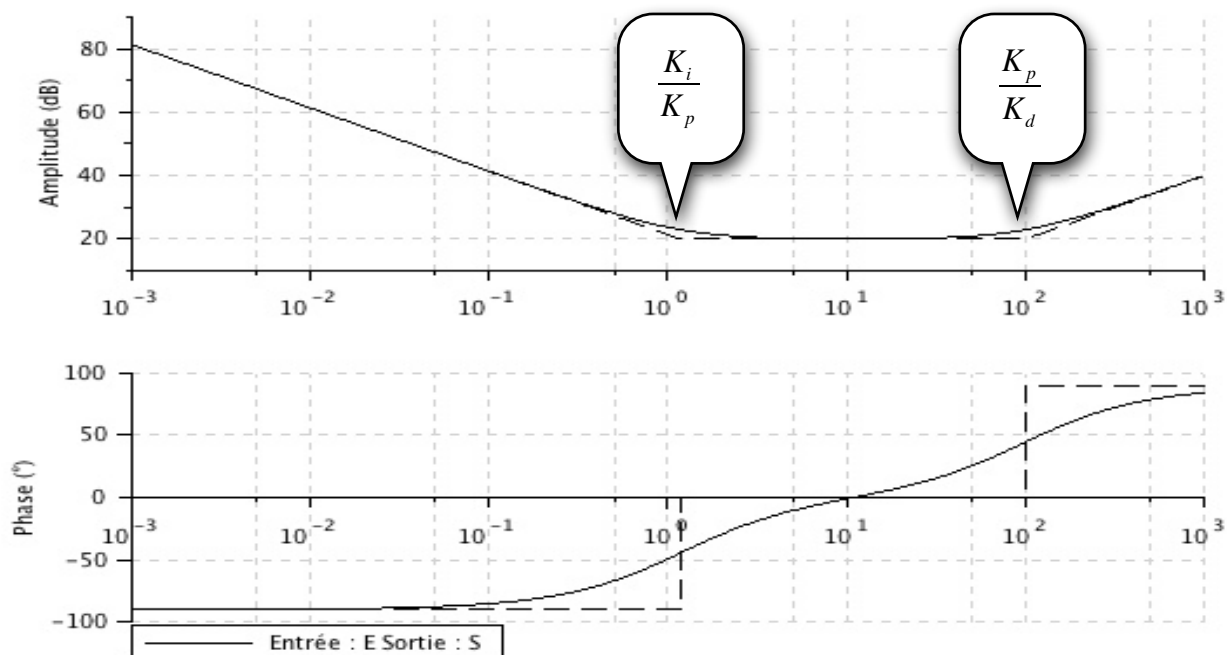


B.2. Correcteur Proportionnel Intégrateur Dérivée PID théorique

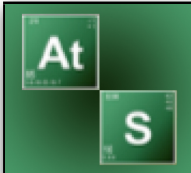


La fonction de transfert du correcteur proportionnel est $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$

Le diagramme de Bode de ce correcteur est le suivant :



Notes

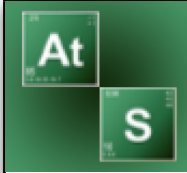
	CI1 : Analyse globale et performances d'un système	
	CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS	COURS
	<i>Etude détaillée des correcteurs</i>	Edition 2 - 02/12/2018

L'action intégrale est positionnée sur les basses fréquences, amplifiant ainsi les basses fréquences afin d'augmenter la précision, et en s'assurant pour que la pulsation critique de la FTBO seule soit supérieure à la pulsation de coupure du correcteur PI

L'action dérivée est positionnée sur les hautes fréquences, augmentant ainsi la phase et contribuant à améliorer la stabilité du système en ajoutant de la phase à la pulsation critique de la FTBO corrigée

L'action proportionnelle est enfin placée de façon à régler la pulsation critique.

Notes



C. Réglages des correcteurs

C.1. Réglage d'un correcteur proportionnel P

Si les fonctions de transfert sont connues, le calcul de la valeur de K_p se fera en adoptant un critère :

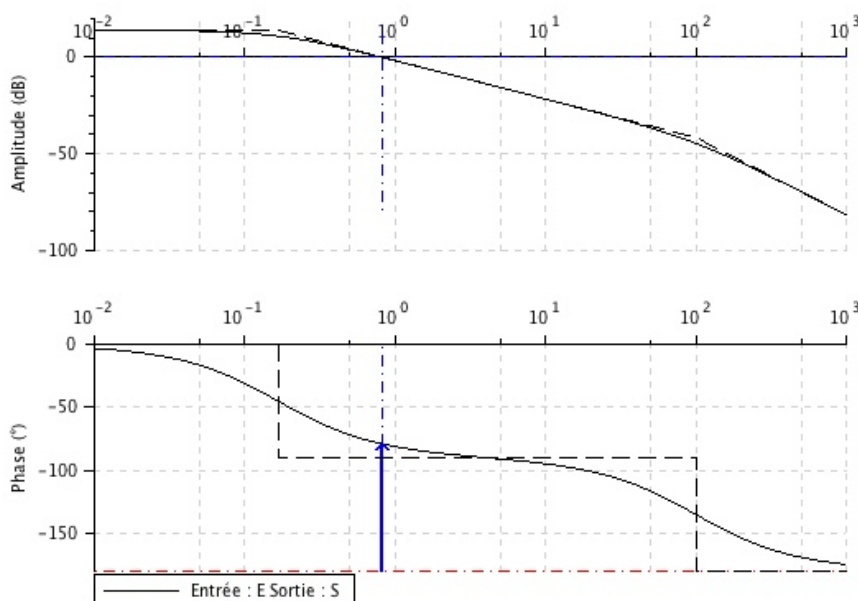
* valeur du coefficient d'amortissement $m=0,7$ pour un système du second ordre pour obtenir le meilleur temps de réponse

* valeur de la marge de phase $MP=45^\circ$ pour un système d'ordre quelconque

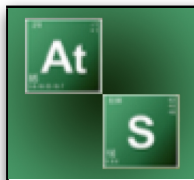
Exemple : considérons la fonction en boucle ouverte suivante :

$$FTBO(p) = \frac{5}{(1+6p)(1+10^{-2}p)}$$

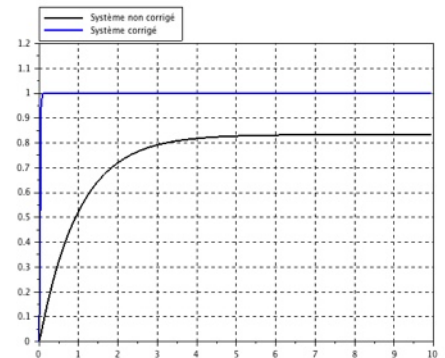
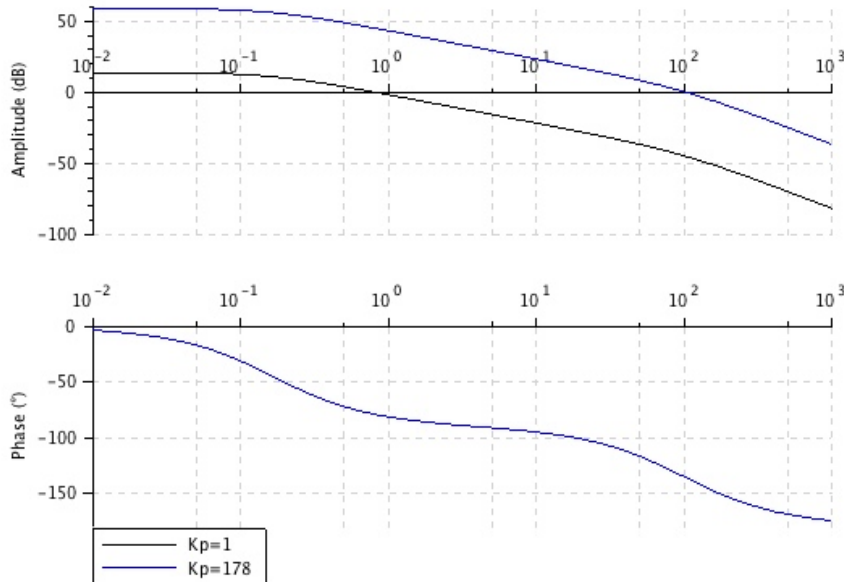
Son diagramme de Bode montre que la marge de phase est égale à 100° , et qu'il est possible de rajouter 45 dB avant que cette marge de phase soit égale à 45° .



Notes



Nous allons donc adopter une correction proportionnelle $K_p = 10^{45/20} = 178$:



C.2. Réglage d'un correcteur proportionnel intégral PI

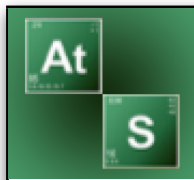
Le réglage d'un correcteur PI $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ nécessite de déterminer la valeur du gain K_p et de la constante de

temps d'intégration $T_i = \frac{1}{K_i}$.

Nous retiendrons deux méthodes de réglage d'un tel correcteur :

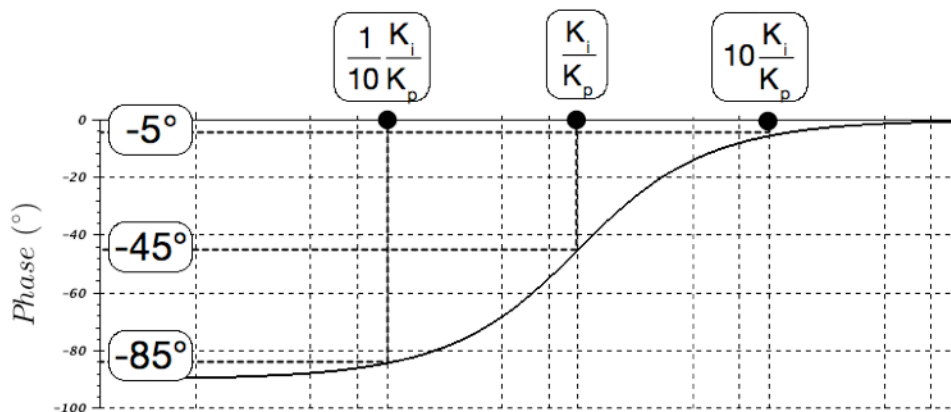
- avec critère de marge de phase,
- avec compensation du pôle dominant.

Notes



Rappelons au préalable quelques caractéristiques du diagramme de phase d'un correcteur PI, dont la pulsation de cassure est $\omega_{c,PI} = \frac{K_i}{K_p}$ (voir diagramme page suivante) :

- la phase de ce correcteur est égale à -45° pour $\omega = \omega_{c,PI}$;
- la phase est égale à -5° pour une pulsation supérieure d'une décade ($\omega = 10 \cdot \omega_{c,PI}$) ;
- la phase est égale à -85° pour une pulsation inférieure d'une décade ($\omega = 0,1 \cdot \omega_{c,PI}$).



C.2.1. Méthode par critère de marge de phase

C.2.1.1. Méthode

Il s'agit ici de régler le correcteur de façon à s'assurer une marge de stabilité suffisante.

La méthode consistera donc à :

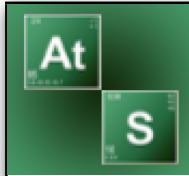
- régler dans un premier temps l'action proportionnelle K_p de façon à garantir la marge de phase souhaitée,
- puis régler l'action intégrale K_i de telle sorte que la cassure soit située une décade en amont de la pulsation de coupure.

Ce dernier réglage diminue de 5° la marge de phase choisie. On peut le cas échéant anticiper cette diminution en réglant l'action proportionnelle de façon à obtenir une marge de phase égale à la marge souhaitée $+5^\circ$.

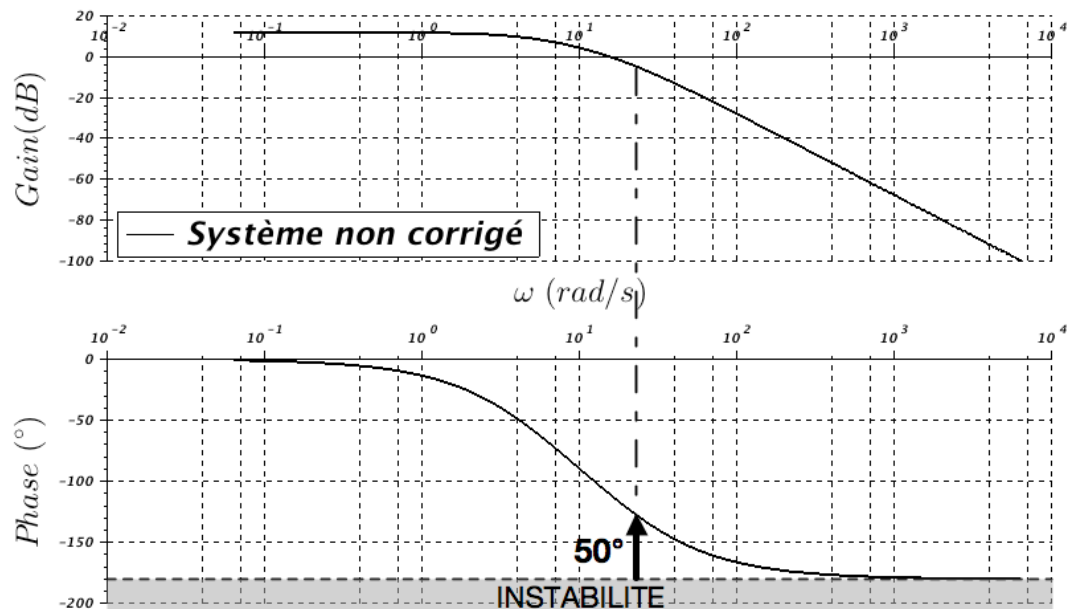
C.2.1.2. Exemple

Un système est décrit par sa fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{4}{1 + 0,24p + 10^{-2}p^2}$.

Notes



Son diagramme de Bode est représenté ci-dessous :



On souhaite dimensionner un correcteur pour ce système tel que la marge de phase du système corrigé soit égale à 45° .

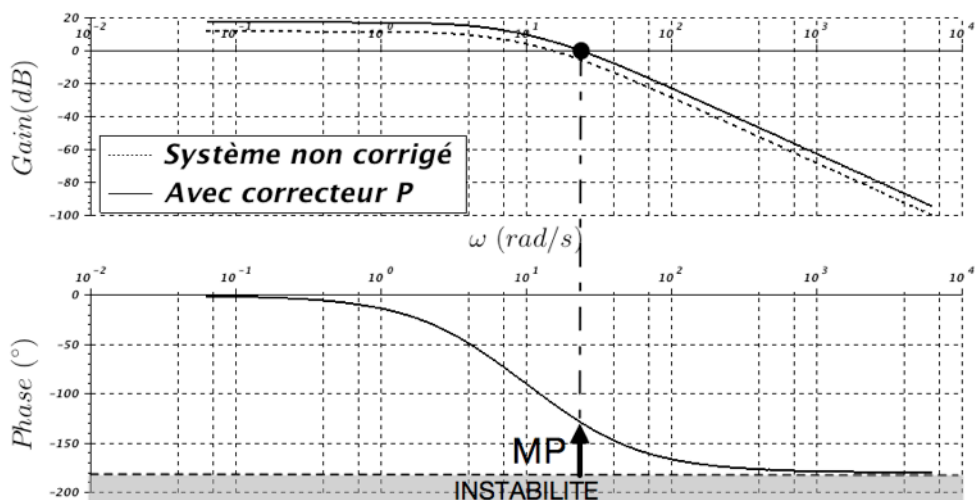
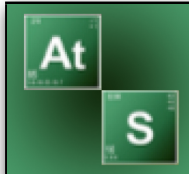
Dimensionnement de l'action proportionnelle

La marge de phase du système non corrigée est égale à 70° . Il est possible de rajouter 5,6 dB afin de bénéficier d'une marge de phase de 50° (correspondant aux 45° de marge de phase souhaitée à laquelle on rajoute 5° pour anticiper la diminution due à l'action intégrale).

On adopte donc un gain $K_p = 10^{5,6/20} = 1,9$.

Le diagramme de Bode du système corrigé par l'action proportionnelle seule confirme la nouvelle marge de phase de 50° , à la pulsation de coupure $\omega = 24,3 \text{ rad.s}^{-1}$.

Notes

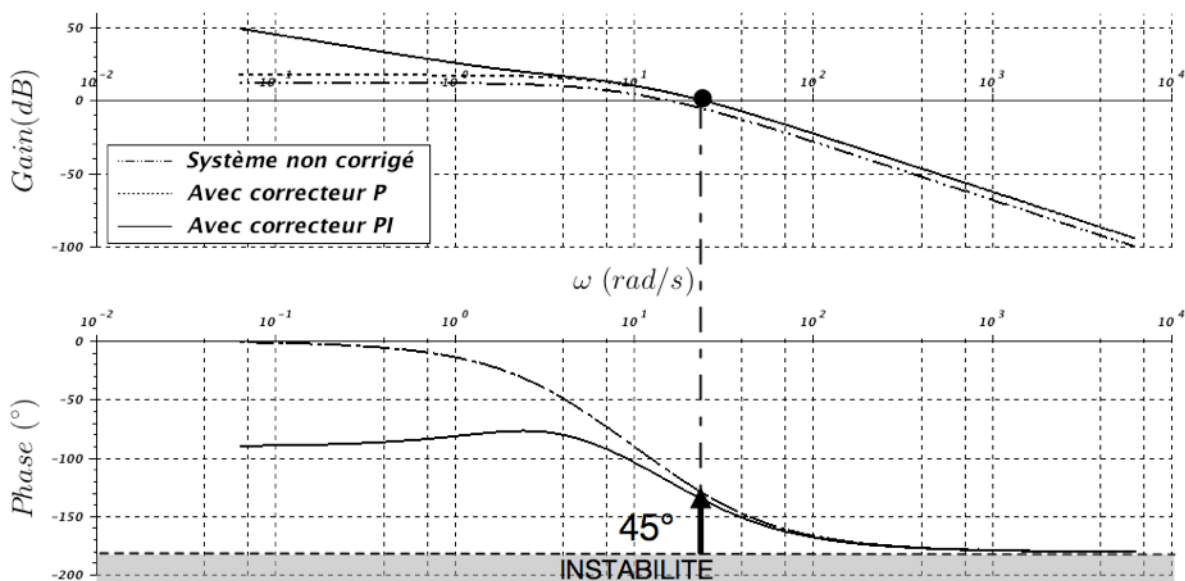


Dimensionnement de l'action intégrale

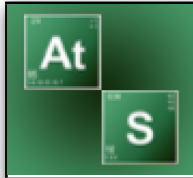
Afin de ne pas dégrader la stabilité du fait de l'intégrateur, on choisit de positionner la pulsation de cassure K_i/K_p une décade en amont de la pulsation de coupure.

On choisit donc $\frac{K_i}{K_p} = 2,43 \text{ rad.s}^{-1}$, soit $K_i = 4,6$

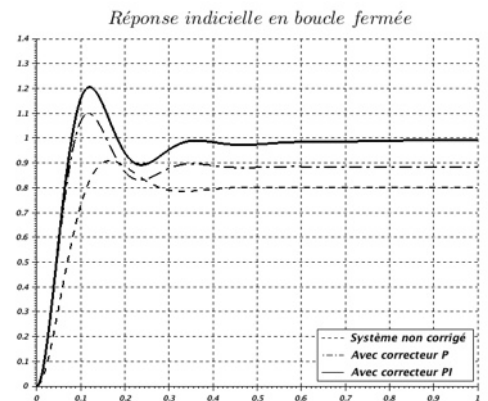
Le diagramme de Bode du système corrigé confirme la marge de phase de 45° :



Notes



La réponse indicielle ci-contre montre l'influence du correcteur ainsi dimensionné sur le comportement du système.



C.2.2. Méthode par critère de compensation du pôle dominant

C.2.2.1. Méthode

Le temps de réponse d'un système dépend de la valeur des pôles de sa fonction de transfert. Plus la partie réelle du pôle est faible, plus ce pôle retarde le système. La méthode de compensation du pôle dominant consiste à supprimer le pôle de valeur réelle la plus faible, appelé pôle dominant, qui retarde le système.

Un correcteur PI sera alors dimensionné de façon que la constante de temps de l'intégrateur compense le pôle dominant de la fonction de transfert.

La méthode de réglage par compensation du pôle dominant consiste donc à :

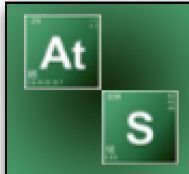
- régler la pulsation de coupure de l'intégrateur afin qu'elle soit égale à la pulsation de coupure la plus faible de la fonction de transfert,
- puis régler le coefficient K_p de façon à assurer la marge de phase souhaitée.

C.2.2.2. Exemple

Reprenons le système étudié précédemment, dont l'expression de sa fonction de transfert en boucle ouverte est $H_{BO}(p) = \frac{4}{1 + 0,24p + 10^{-2}p^2}$.

Les pôles de cette fonction de transfert valent $p_1 = -5,37 \text{ rad.s}^{-1}$ et $p_2 = -18,63 \text{ rad.s}^{-1}$:

Notes



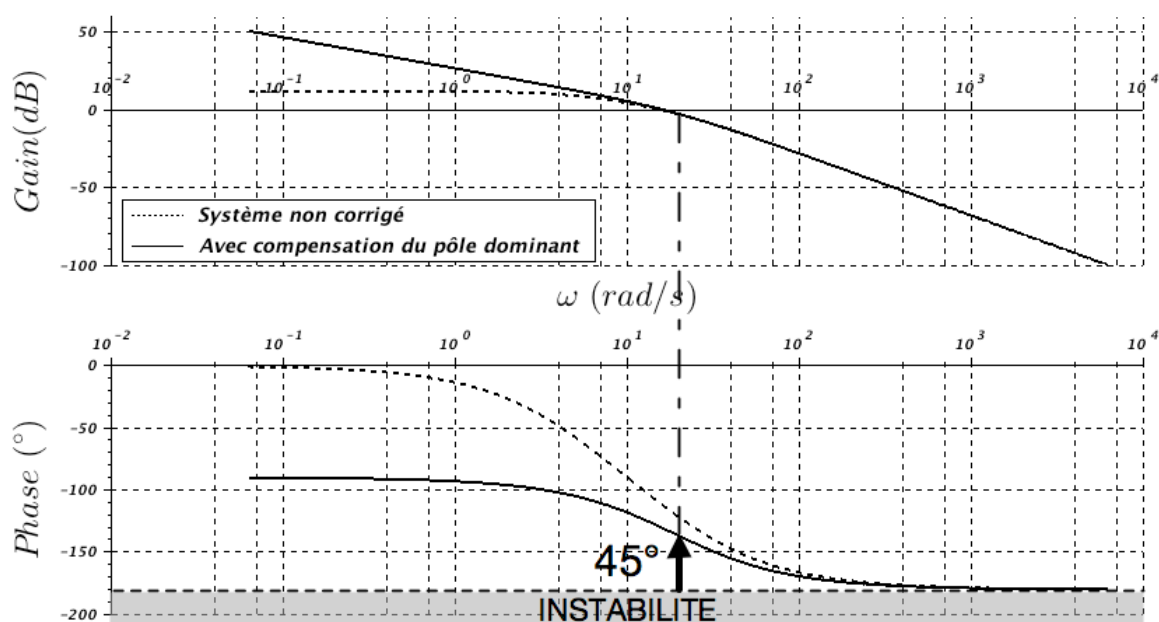
$$H_{BO}(p) = \frac{400}{(p+5,37)(p+19,63)} = \frac{4}{\left(1+\frac{p}{5,37}\right)\left(1+\frac{p}{18,63}\right)}$$

Le pôle dominant est ici le pôle p_1 , que nous allons compenser par la correction intégrale en adoptant $K_i=p_1=5,37$.

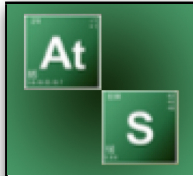
$$\text{Avec } K_i=p_1 \text{ et } K_p=1, \text{ le correcteur s'écrit alors } C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p p}{K_i}\right) = \frac{5,37}{p} \left(1 + \frac{p}{5,37}\right).$$

$$\text{La FTBO corrigée est alors } C(p) \cdot H_{BO}(p) = \frac{5,37}{p} \left(1 + \frac{p}{5,37}\right) \frac{4}{\left(1+\frac{p}{5,37}\right)\left(1+\frac{p}{18,63}\right)} = \frac{21,47}{p \left(1+\frac{p}{18,63}\right)}$$

Le diagramme de Bode du système ainsi corrigé est le suivant :

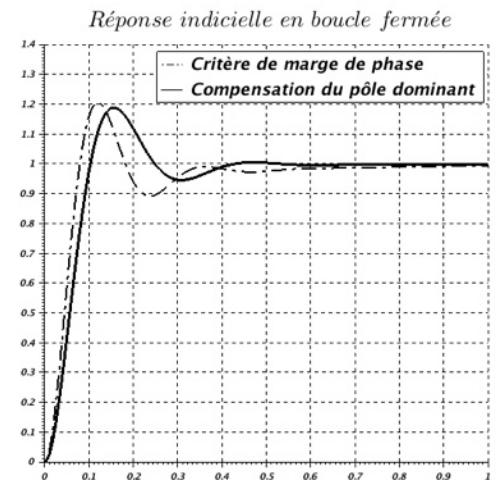


Notes



Il est alors possible de rajouter 1,8 dB pour obtenir une marge de phase de 45°. On adopte donc finalement $K_p = 10^{1,28/20} = 1,23$.

Le figure ci-contre montre la réponse du système en fonction des deux méthodes exposées plus haut : critère de marge de phase et compensation du pôle dominant.



C.3. Réglage d'un correcteur PID

il n'existe pas de méthode théorique pour le réglage d'un tel correcteur. Il faudra alors utiliser des méthodes empiriques.

C.3.1. Méthode de Ziegler et Nichols

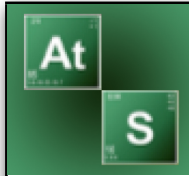
La méthode la plus répandue est la méthode de Ziegler-Nichols, qui présente toutefois l'inconvénient d'être agressive. Elle se fait sur un système qui supporte les dépassements.

Elle consiste à faire un essai de «pompage» sur le système en boucle fermée : en augmentant progressivement le gain, on recherche la valeur pour laquelle le système entre en oscillations permanentes. On relève alors le gain limite $K_{p\lim}$ et la période des oscillations T_{osc} .

Les valeurs à injecter dans les correcteurs sont alors les suivantes :

Correcteur	P	P.I	P.I.D
Kp	$0.5 \cdot K_{\lim}$	$0.45 \cdot K_{\lim}$	$0.6 \cdot K_{\lim}$
Ti	∞	$0.83 \cdot T_{osc}$	$0.5 \cdot T_{osc}$
Td	0	0	$0.125 \cdot T_{osc}$

Notes

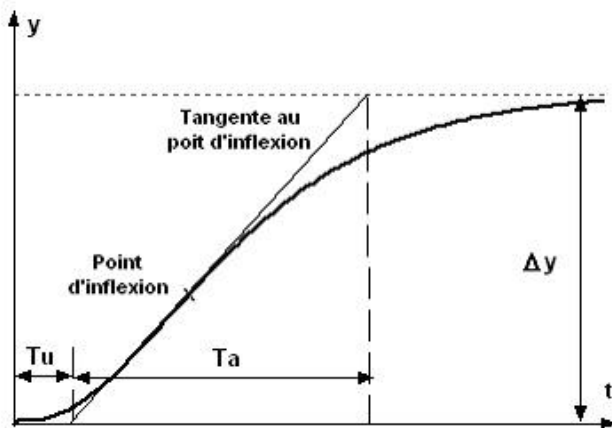


Le correcteur est alors de la forme $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

C.3.2. Méthode de la réglabilité

Cette méthode, basée sur la méthode de Ziegler-Nichols, est moins agressive que cette dernière, et se mène à partir de l'étude du système en boucle fermée.

On s'intéresse à la forme de la réponse en boucle ouverte, suite à une consigne en échelon :



On identifie dans cet essai :

*le gain statique K

* l'influence du retard de la réponse par le facteur $r = \frac{T_u}{T_a}$

Les valeurs proposées à affecter dans le correcteur PID sont alors les suivantes :

r	Kp	Ti	Td
0,05 à 0,1	$\frac{5}{K}$	Ta	0
0,1 à 0,2	$\frac{0,5}{Kr}$	Ta	0
0,2 à 0,5	$\frac{0,5(1+0,5r)}{Kr}$	$T_a(1+0,5r)$	$T_a \frac{0,5r}{1+0,5r}$
> 0,5	PID non recommandé		

Notes