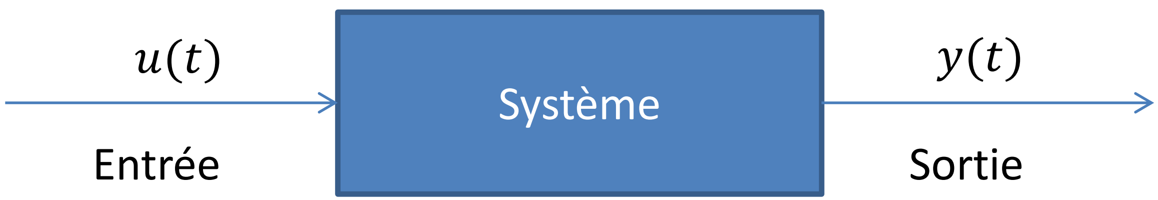
MO4RBR04: Automatique Linéaire II

Cours 1: Introduction -Représentation d'état

Pascal Morin
ISIR, Sorbonne Université
pascal.morin@sorbonne-universite.fr

De quoi s'agit t-il ?

- Cet enseignement fait suite à la partie **Automatique Linéaire I**
- **Automatique:** discipline des sciences de l'ingénieur qui concerne de façon générale la commande des systèmes dynamiques
- **Système dynamique**



  - Système **statique**: relation statique entre y et u:

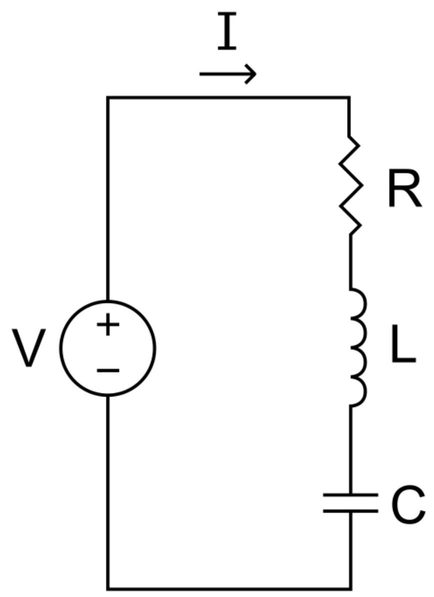
$$f(y,u) = 0$$

  - Système **dynamique**: relation dynamique entre y et u:

$$f\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}, \dots, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}, t\right) = 0$$

De quoi s'agit t-il ?

- Exemple de système dynamique:
  - Circuit RLC:



$$\begin{cases} v = Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} \\ i = \dfrac{dq}{dt} \end{cases}$$

D'où,

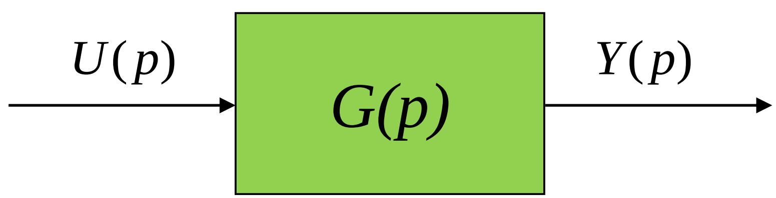
$$\mathrm{C}v = RC\ i + LC\frac{d\ i}{dt} + q$$

Ce qui équivaut à $\quad LC\dfrac{d^2q}{dt^2} + RC\dfrac{dq}{dt} + q = Cv$

De quoi s’agit t-il ?

- **Automatique linéaire I**: Systèmes mono-entrée/mono-sortie en représentation fréquentielle:

$$\boldsymbol{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0\, u}$$



$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

Objectifs du cours

- **Automatique Linéaire II**:
  - Voir une autre façon de traiter les problèmes d'automatique: « Automatique en représentation d'état »
  - Etendre les connaissances au cas des systèmes multi-entrées/multi-sorties (i.e., $y \in R^n, u \in R^m$)
    - Introduction de nouveaux concepts et méthodes
    - Modélisation et simplification de modèle
    - Analyse du système
  - Pourquoi l'automatique en représentation d'état?
    - Fournir des outils complémentaires (même en mono-entrée/mono-sortie)
    - Indispensable pour maîtriser les principales méthodes d'estimation/filtrage en robotique (filtre de Kalman)
    - Indispensable pour l'étude des systèmes non-linéaires

Détails pratiques

- 6 séances de cours
- 4 séances de TD
- 1 séance de TP sur maquette (début janvier)
- 2 notes:
  - Examen écrit intermédiaire: 70%
  - Note d'examen de TP: 30%
- **Pour l'examen écrit:**
  - Documents interdits **sauf…**
  - **Une feuille A4** « anti-sèche » sur laquelle vous pouvez noter ce que bon vous semble…
- Supports de cours/TDs seront disponibles sur Moodle

Rappels mathématiques

Différentielle d'une fonction:

Soit f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$. On dit que f est différentiable en x s'il existe une application linéaire, notée $Df(x)$, telle que, pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ dans un voisinage de zéro,

$$\boldsymbol{f(x+h) = f(x) + Df(x).h + O^2(h)}$$

avec O^2: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ une fonction telle que, dans un voisinage de zéro,

$$\| O^2(h)\| \leqq K \, \|h\|^2 \quad , \; K \text{ constant}$$

$Df(x)$ est appelée « **Différentielle de f en x** ».

Rappels mathématiques

Différentielle d'une fonction/Matrice Jacobienne:

Soit f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ une fonction différentiable en x et $Df(x)$ sa différentielle en x. On appelle « **Matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$** » la matrice $p \times n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ la dérivée par rapport à x_j de la i-ème composante de f.

Rappels mathématiques

Différentielle d'une fonction/Matrice Jacobienne:

La matrice Jacobienne de f en x correspond à la représentation de $Df(x)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{\mathrm{p}}$, i.e.,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = < e_i, Df(x).e_j >$$

avec

- $e_i \in \mathbb{R}^p$: le vecteur avec un 1 sur la i-ème composante et des 0 partout ailleurs;
- $e_j \in \mathbb{R}^n$: le vecteur avec un 1 sur la j-ème composante et des 0 partout ailleurs;

Rappels mathématiques

Propriétés des matrices-Déterminant:

Soit A une matrice $n \times n$. On rappelle la formule du calcul du déterminant de A:

Développement suivant la ligne *i* (i quelconque):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{i,j} \det A_{\overline{i,j}}$$

avec $A_{\overline{i,j}}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Développement suivant la colonne *j* (j quelconque):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{i,j} \det A_{\overline{i,j}}$$

Rappels mathématiques

Propriétés des matrices-Inversibilité:

Soit A une matrice $n \times n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. La matrice A est inversible.
2. Le déterminant de A est différent de 0.
3. Les n lignes de la matrice A sont indépendantes, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0 \;\forall i$$

où A_i désigne la i-ème ligne de A.

4. Les n colonnes de la matrice A sont indépendantes, i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A^j = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_j = 0 \;\forall j$$

où A^j désigne la j-ème colonne de A.

Rappels mathématiques

Propriétés des matrices-Rang:

Soit A une matrice $n \times p$. On dit que **la matrice $\boldsymbol{A}$ est de rang $\boldsymbol{k}$** si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite:

1. Il existe k lignes de la matrice A indépendantes, et pas plus que k .
2. Il existe k colonnes de la matrice A indépendantes, et pas plus de k .
3. Il existe une sous-matrice $k \times k$ de A **inversible**, obtenue après avoir supprimé $n - k$ lignes et $p - k$ colonnes de A. De plus, si $k' > k$, alors toute sous-matrice $k' \times k'$ de A est non-inversible .

Rappels mathématiques

Propriétés des matrices-Rang:

Propriété: Soit A une matrice $n \times p$. Alors,

$$Rang(A) \leq \min(n, p)$$

Rappels mathématiques

Propriétés des matrices-Fonction exponentielle:

Soit M une matrice n × n. On définit « **l'exponentielle de la matrice $\boldsymbol{M}$** » de la façon suivante:

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \ \ldots$$

avec I la matrice n × n identité. La matrice e^Mest bien définie quelque soit M. De plus, on a les propriétés suivantes:

- $e^0 = I$
- $e^M e^{-M} = I$
- $\frac{d}{dt} e^{Mt} = M e^{Mt}$

Systèmes linéaires: définition

- On appelle **système de commande linéaire** (ou plus simplement **système linéaire**) un système de la forme

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

où,

- $x \ \in R^n$ désigne l'**état** du système
- $u \ \in R^m$ désigne l'**entrée** du système (aussi appelée « **commande** »)
- $y \ \in R^p$ désigne la **sortie** du système
- $A \ \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times m}$ désignent les **matrices d'état** du système

- Le système $(*)$ est aussi appelé **représentation d'état**

Systèmes linéaires: définition

$$(*)\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

La première équation de $(*)$ est une équation différentielle. Etant donnée une condition initiale au temps t_0, notée $x(t_0)$, et une entrée de commande continue par morceaux sur $[t_0, t_f]$, la solution de cette équation différentielle est définie de façon unique:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{A(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)\,d\tau$$

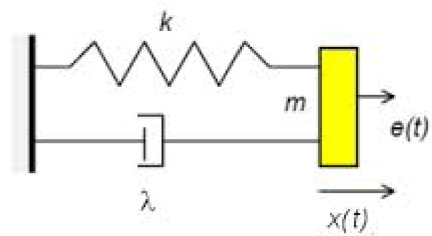
D'où,

$$y(t) = \underbrace{C\,e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{C\,e^{A(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)\,d\tau + D\,u(t)}_{\text{Réponse forcée}}$$

Systèmes linéaires: exemples

Exemple 1: Système Masse-Ressort-Ammortisseur:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt} + u$$



On pose

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

On a: $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\lambda}{m}x_2 + \frac{u}{m}$. D'où les matrices d'état:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\lambda}{m} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix},\ C = (1 \quad 0),\ \ D = 0$$

Systèmes linéaires: exemples

Exemple 2: Circuit RLC:

$$\begin{cases} v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

On pose

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

On a: $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{v}{L}$. D'où les matrices d'état:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

On peut aussi avoir $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, suivant que l'on considère q ou i comme sortie.

Au-delà du cas linéaire

- Le cas linéaire est très particulier
- On pourrait considérer une classe plus générale de systèmes

$$(**)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

- Intérêts:
  - De nombreux (la plupart) des systèmes sont non-linéaires
  - On pourrait traiter beaucoup plus d'exemples
- Inconvénient:
  - **Complexité**: sans hypothèses particulières sur f et g, on ne peut pas établir des propriétés intéressantes

Au-delà du cas linéaire

- Pour certains d'entre vous, l'étude des systèmes non-linéaires se fera en M2.
- Pour de nombreux systèmes linéaires, on peut se limiter, **localement**, à l'étude d'un **système linéarisé équivalent,** qu'on appelle **système linéarisé tangent:**

Soit le système non-linéaire $(**)$. On suppose que (x_0, u_0) est un **point d'équilibre**, ce qui signifie:

$$f(x_0, u_0) = 0$$

Posons $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{u} = u - u_0, \tilde{y} = y - g(x_0, u_0)$. En effectuant un développement limité au premier ordre, on a:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} = f(x, u) = f(x, u) - f(x_0, u_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\tilde{u}$$

$$\tilde{y} = g(x, u) - g(x_0, u_0) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, u_0)\tilde{x} + \frac{\partial g}{\partial u}(x_0, u_0)\tilde{u}$$

Au-delà du cas linéaire

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} = f(x,u) = f(x,u) - f(x_0,u_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0)\tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0)\tilde{u}$$

$$\tilde{y} = g(x,u) - g(x_0,u_0) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,u_0)\tilde{x} + \frac{\partial g}{\partial u}(x_0,u_0)\tilde{u}$$

Par conséquent,

$$(*)_L \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} \approx A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} \approx C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

avec

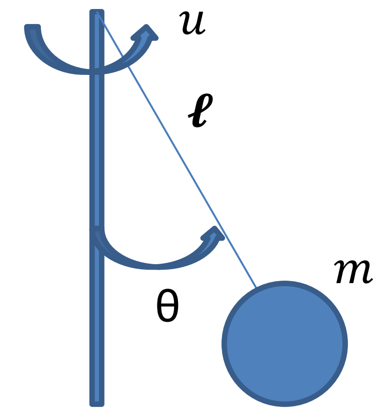
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0)\;, B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0), \qquad \mathrm{C} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,u_0)\;, D = \frac{\partial g}{\partial u}(x_0,u_0)$$

- Le système $(*)_L$ est le **système linéarisé tangent de** $(**)$ **autour du point d'équilibre** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{u_0})$.
- Il fournit une approximation locale de la dynamique
- Ceci explique en grande partie l'importance donnée aux systèmes linéaires

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 1: Le pendule

$$m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell \sin\theta + u$$
$$y = \theta$$



Avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

On a un système non-linéaire pour lequel

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 + \frac{u}{m\ell^2} \end{pmatrix}$$

Parmi les nombreux équilibres possibles, on s'intéresse à ceux pour lesquels la barre est verticale:

$$x_0^+ = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, u_0^+ = 0\,, \qquad x_0^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_0^- = 0$$

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 1: Le pendule

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\boldsymbol{\ell}} \sin x_1 + \frac{u}{m\boldsymbol{\ell}^2} \end{pmatrix}$$

Linéarisé tangent en (x_0^+, u_0^+)*:*

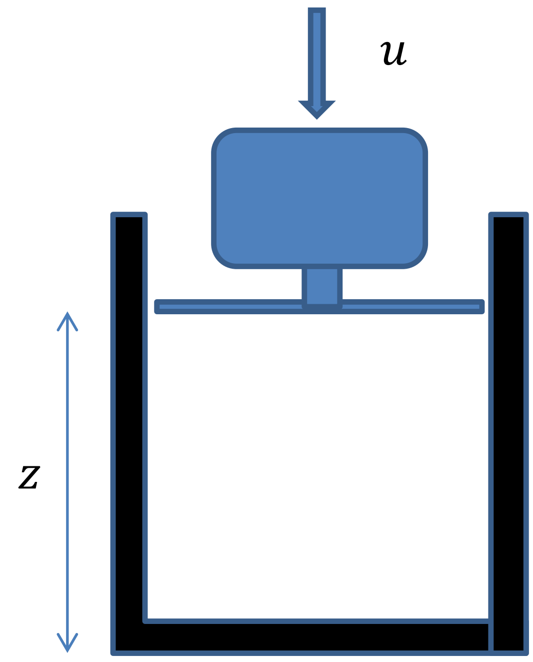
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\boldsymbol{\ell}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\boldsymbol{\ell}^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = (1 \;\; 0), \qquad \mathrm{D} = 0$$

Linéarisé tangent en (x_0^-, u_0^-)*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\boldsymbol{\ell}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\boldsymbol{\ell}^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = (1 \;\; 0), \qquad \mathrm{D} = 0$$

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 2: Système pneumatique



Une masse (en bleu) est portée par un piston de Section S, contenant un volume V d'un gaz parfait
La pression de ce gaz est notée p. On rappelle la loi de Boyle –Mariotte: « Pour une masse donnée de gaz parfait à température constante, pV est constante ».
La masse, lorsqu'elle glisse le long du piston, est soumise à une force de frottement visqueux. Elle est aussi soumise à une force externe u, ainsi qu'à la force de gravité.

Newton appliqué à la masse mobile donne:

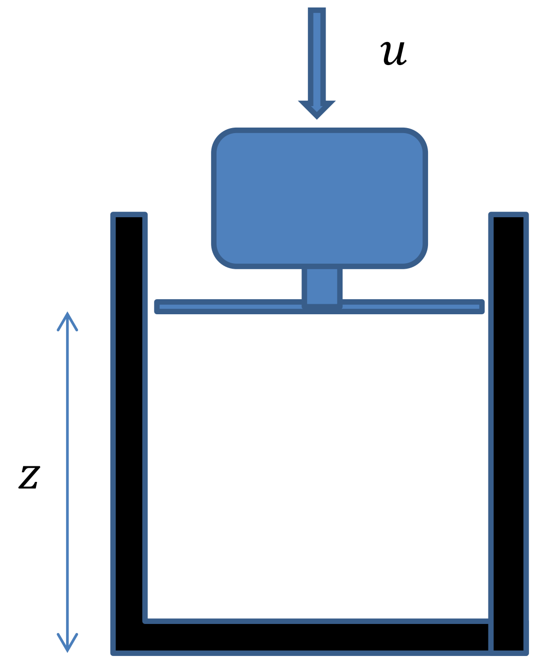
$$m\ddot{z} = -mg + F_P + F_f - u$$

Avec

- F_p: la force de pression exercée par le piston sur la masse mobile
- F_f: la force de frottement visqueux

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 2: Système pneumatique



$$m\ddot{z} = -mg + F_P + F_f - u$$

On a $F_p = pS$, où S désigne la section du piston, et $S = \frac{V}{z}$. Par conséquent, $F_p = p\frac{V}{z} = \frac{c}{z}$ avec c constante, par la loi de Boyle-Mariotte. La force de frottement est $F_f = -k\dot{z}$. Finalement, On obtient:

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{c}{z} - k\dot{z} - u$$

Il s'agit cette fois encore d'un système non-linéaire avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \qquad f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + \dfrac{c}{m\, x_1} - \dfrac{k}{m} x_2 - \dfrac{u}{m} \end{pmatrix}$$

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 2: Système pneumatique

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \qquad f(x,u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + \dfrac{c}{m\,x_1} - \dfrac{k}{m} x_2 - \dfrac{u}{m} \end{pmatrix}$$

Il existe une infinité d'équilibres. On s'intéresse à l'équilibre pour lequel $u_0 = 0$. D'après l'expression de f, on obtient:

$$x_{2,0} = 0, x_{1,0} = \frac{c}{m\,g}$$

Les matrices d'état du linéarisé sont donc données par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m\,g^2}{c} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

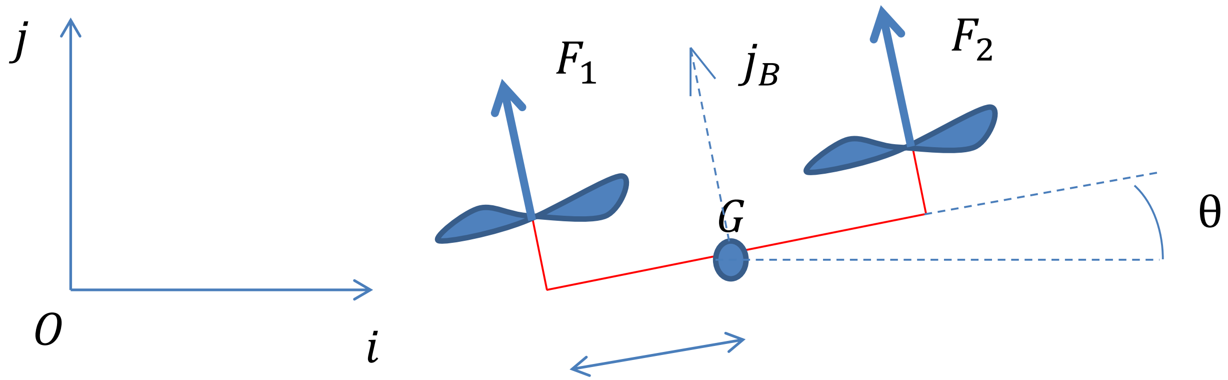
Si $y = z$, C et D sont les mêmes que pour l'exemple précédent.

Exercice: Déterminer l'ensemble des points d'équilibre du système ainsi que les linéarisés associés.

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 3: Modèle planaire de drone

On considère un modèle simplifié de drone se déplaçant dans un plan vertical. Le système est muni de deux hélices dont la rotation génère des forces F_1 et F_2sur le drone. Le schéma ci-dessous illustre le mécanisme.



On note:

- p: le vecteur des coordonnées du centre de masse G dans le repère inertiel $(0, i, j)$
- $v = \dot{p}$: la vitesse de G, exprimée dans dans le repère inertiel $(0, i, j)$
- Θ : l'orientation du drone, comme indiqué sur le schéma
- $\omega = \dot{\theta}$: la vitesse angulaire du drone

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 3: Modèle planaire de drone

Les équations de la dynamique nous donnent alors les relations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{p} = v \\ \dot{\theta} = \omega \\ m\dot{v} = -mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ J\dot{\omega} = \boldsymbol{\ell}\, u_2 \end{cases}$$

avec $u_1 = F_1 + F_2, u_2 = F_2 - F_1$. Ceci définit un système non-linéaire avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \theta \\ v_1 \\ v_2 \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad f(x,u) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\dfrac{u_1 \sin x_3}{m} \\ -g + \dfrac{u_1 \cos x_3}{m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\ell}\, u_2}{J} \end{pmatrix}$$

Systèmes non-linéaires: ex.

Exemple 3: Modèle planaire de drone

<u>Exercice 1:</u> Déterminer les points d'équilibre du système.

<u>Exercice 2:</u> Vérifier que les matrices A, B du linéarisé au point d'équilibre

$$x_0 = (\,0, 0, 0, 0,0,0)^T, \qquad u_0 = (mg\,, 0)^T$$

sont données par:

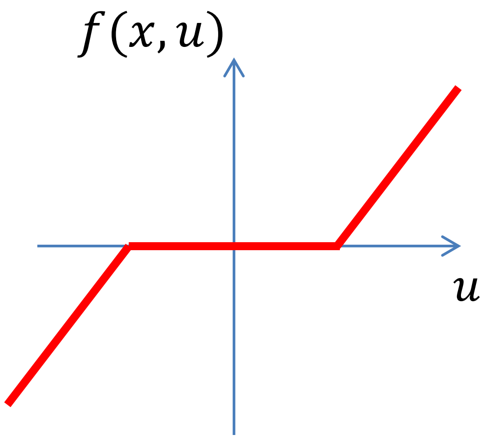
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\ell}}{J} \end{pmatrix}$$

Systèmes non-linéaires: fin

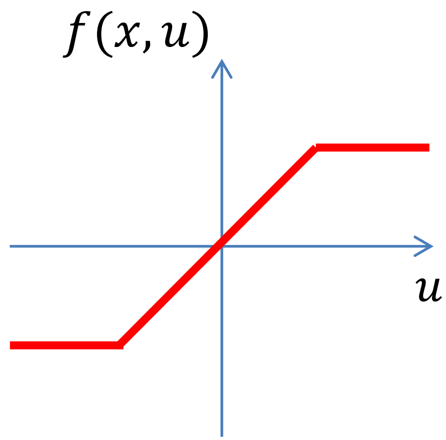
- L'approche consistant à déterminer le système linéarisé tangent et à baser l'étude sur ce système est très intéressante et puissante, mais il faut être conscient de ses limites (qui justifient l'utilisation d'autres méthodes non traitées dans ce cours):
  - Le linéarisé tangent est une approximation **locale,** autour d'un point d'équilibre. Si le système est amené à fonctionner « loin » de cet équilibre, l'approximation peut devenir mauvaise et une loi de commande synthétisée à partir de cette approximation peut donner de mauvais résultats
  - Pour certains systèmes, très non-linéaires, le linéarisé tangent n'est pas une bonne approximation du système de départ
  - L'hypothèse sous-jacente utilisée pour le calcul du linéarisé est que la fonction f est différentiable. Pour certaines non-linéarités, cette propriété n'est pas satisfaite et l'on ne peut donc pas calculer un linéarisé tangent. Exemples…

Systèmes non-linéaires: fin

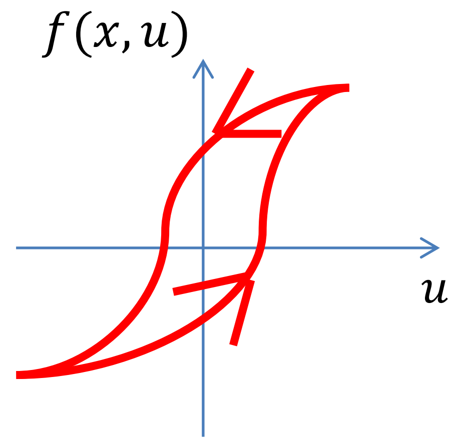
Exemples de systèmes non-linéaires pour lesquels on ne peut pas calculer de linéarisé tangent en tout point:



Zone morte



Saturation



Hystérésis

- Les zones mortes sont par exemples induites par le jeu mécanique
- Les saturations sont typiquement induites par les limites de puissance ou les seuils de sécurité à respecter
- Les phénomènes d'hystérésis sont souvent rencontrées dans les systèmes magnétiques (magnétisation et démagnétisation d'un matériau). Dans ce cas, f n'est plus une fonction: à une même valeur de (x,u) peuvent correspondre plusieurs valeurs de $f(x,u)$.

Systèmes non-linéaires: fin

- Ces phénomènes non-linéaires sont présents dans la plupart des systèmes
- Heureusement, il n'est pas toujours nécessaire de les prendre en compte, typiquement parce que:
  - Leur amplitude est limitée; par exemple, la taille de la zone morte est si petite qu'en pratique son impact sur la précision du système n'est pas perceptible (jeu mécanique très faible)
  - Le système n'est pas amené à fonctionner dans les zones de non-linéarité; par exemple, on ne demande jamais aux moteurs des vitesses conduisant à la saturation de la puissance
- L'art de la modélisation consiste à ne prendre en compte que les phénomènes nécessaires. Les tests sur le système physique permettent de savoir s'il faut, ou non, modéliser le système de façon plus fine (voir schéma de la Page 5)