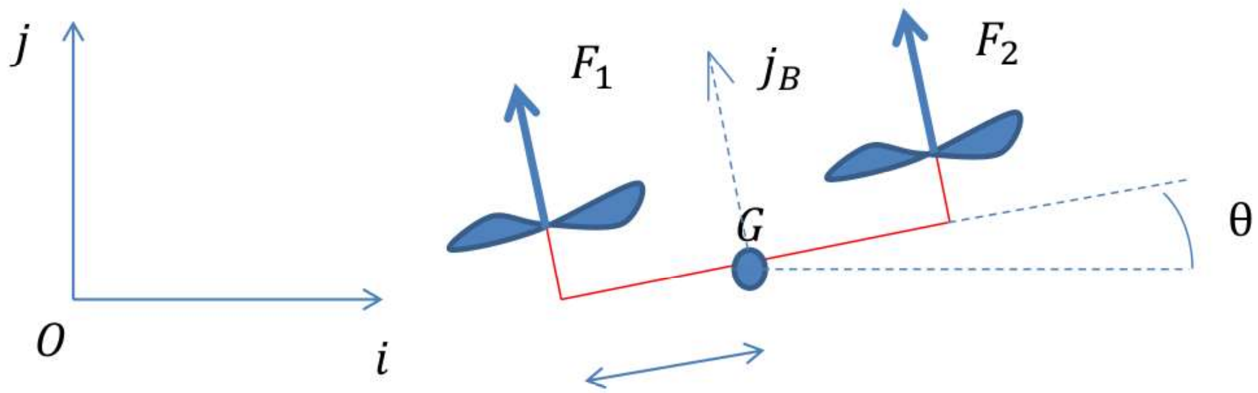
TD d'Automatique N° 1- Master 1 - Automatique Linéaire II

Exercice 1: Equilibres et linéarisés tangents

La figure ci-dessous représente la version planaire d'un drone multi-rotors. Il s'agit dans ce cas d'un robot aérien équipé de deux hélices et se déplaçant dans un plan vertical. Même si ce système est physiquement irréalisable, il permet d'étudier les phases de vol d'un vrai drone 3D lorsque celui-ci se déplace avec une direction constante.



Les variables suivantes sont définies:

- Le vecteur $p = (p_1, p_2)^T$ correspond aux coordonnées du centre de masse G du drone dans le repère $\{O, i, j\}$.
- L'angle θ correspond à l'inclinaison du drone
- Les forces $\vec{F_1} = F_1 \vec{j}_B$ et $\vec{F_2} = F_2 \vec{j}_B$ sont les forces aérodynamiques sur les hélices induites par la rotation de celles-ci, avec j_B l'axe vertical du repère drone (voir figure).

A partir de ces notations, on obtient le modèle suivant de la dynamique du robot (il s'agit évidemment d'un modèle un peu simplifié...):

$$\begin{cases} m\ddot{p} &= -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ J\ddot{\theta} &= \ell u_2 \end{cases} \tag{1}$$

avec:

- $u_1 = F_1 + F_2$,
- $u_2 = F_2 - F_1$,

- m la masse du drone,
- J l'inertie du drone,
- ℓ la distance entre le centre de masse G et l'axe de rotation des hélices.

Question 1: Mettre le modèle d'écrit par l'équation (1) sous la forme d'un système de commande non-linéaire $\dot{x} = f(x, u)$.

Question 2: Déterminer les points d'équilibre de ce système et en fournir une interprétation physique.

Question 3: Déterminer l'expression des linéarisés tangents du système en ses points d'équilibre.

Question 4: Afin de modéliser l'effet du vent sur la dynamique du drone, on modifie la première équation de (1) en ajoutant une force de perturbation F_p, i.e.,

$$m\ddot{p} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + F_p$$

En supposant que F_p est une constante, reprendre les questions 1-3 avec cette nouvelle équation.

Exercice 2: Commandabilité et observabilité:
Pour les systèmes qui suivent, déterminer si les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont satisfaites:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$