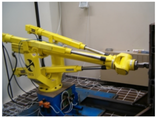
Petite Introduction

Les robots manipulateurs

- Robot série
  - \+ Espace de travail
  - \+ Simplicité mécanique, modèle de commande
  - – Flexibilité/précision, charge utile, dynamique faible (grande inertie)

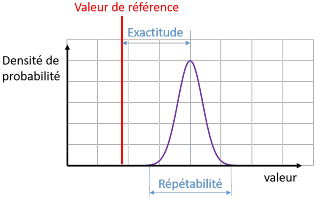
- Robot parallèle
  - \+ Rigidité, dynamique (forte accélération et cadence)
  - – Espace de travail, complexité mécanique et des modèles, singularités

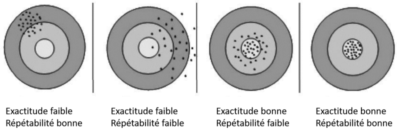
- Robot hybride série/parallèle



Caractéristiques d'un robot

- Charge utile : charge que peut transporter le robot sans dégradation
- Vitesse, Accélération : exprimées au niveau l'effecteur
- Espace de travail : la région de l'espace atteignable par l'effecteur
- Exactitude : regroupe les erreurs systématiques et identifiables (étalonnage, flexibilité, arrondi, ...)
- Répétabilité : regroupe les erreurs d'origine aléatoire (quantification des signaux, jeux dans les liaisons, ...)



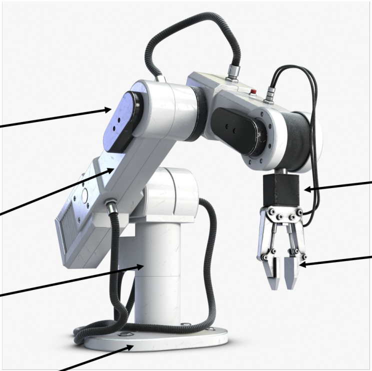


Terminologie

Axe (Articulation)
- Rotoïde (pivot)
- Prismatique (glissière)

Segment (Corps)

Actionneur (Moteur)
- Electrique
- Hydraulique
- Pneumatique



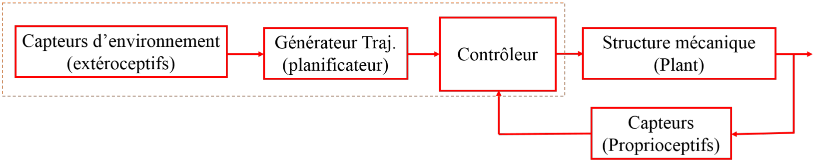
Base (Sol)

Organe terminal

Effecteur :
- Pince
- Torche
- Visseuse
- …

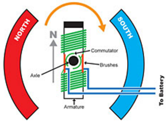
Architecture matérielle d'un robot

- Structure Mécanique (Géométrique ou dynamique)
- Actionneurs : électrique, hydraulique, pneumatique (muscle artificiel)
- Calculateur et contrôleur
- Capteurs
- Communications
- Interface utilisateur
- Convertisseur de puissance

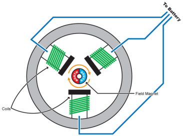


Actionneurs électriques

- Moteur à courant continu : Aimant sur le stator
  - \+ Electronique du variateur simple (PWM : Pulse Width Modulation)
  - – Frottement balai sur le collecteur
  - – Grande vitesse, faible couple

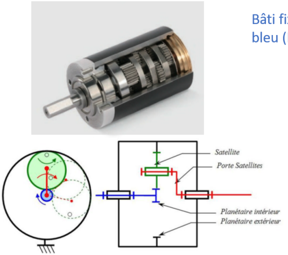


- Moteur sans balai (brushless) : Aimant sur le rotor
  - \+ Pas de balai, pas de frottement
  - \+ Bon rapport couple/poids
  - – Électronique plus complexe (commutation), prix
  - – Nécessite un capteur à effet hall de l'angle du rotor
  - – Risque d'instabilité si la commutation n'est pas adaptée à la charge

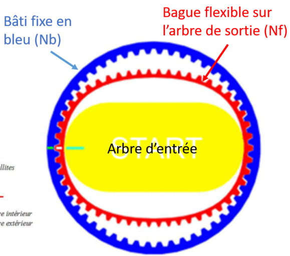


Eléments de transmission : Réducteurs

Réducteur multi-étages
à pignons droits



Réducteur planétaire
(ou épicycloïdal)

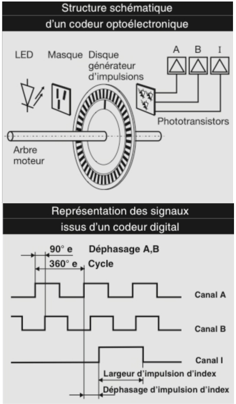


Harmonic drive
Rapport = (Nf-Nb)/Nf < 0

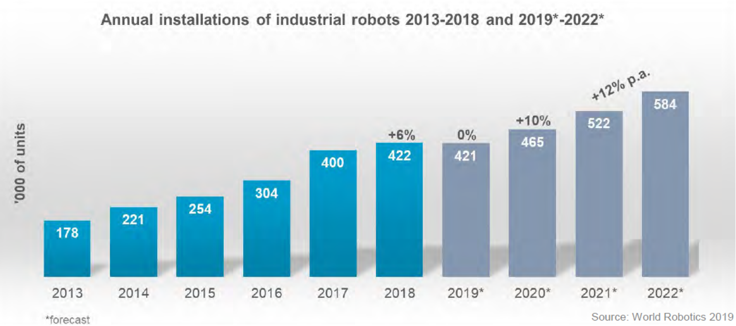
...

Codeur incrémental

- Fournit l'angle de rotation de l'articulation
- Codeur relatif (nécessite une initialisation avec d'autres capteurs)
- Piste A : Comptage des fronts montants
- Piste B : Déphasé de 90° par rapport à A, elle indique le sens de rotation
- Piste I : Elle compte le nombre de tour
- Existe aussi en version absolue (avec plus de pistes radiales)

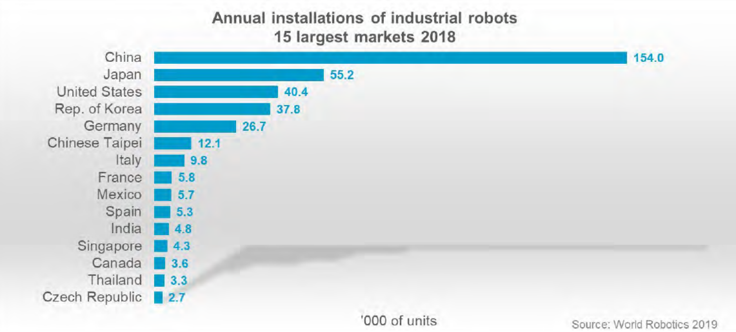


Marché des robots industriels



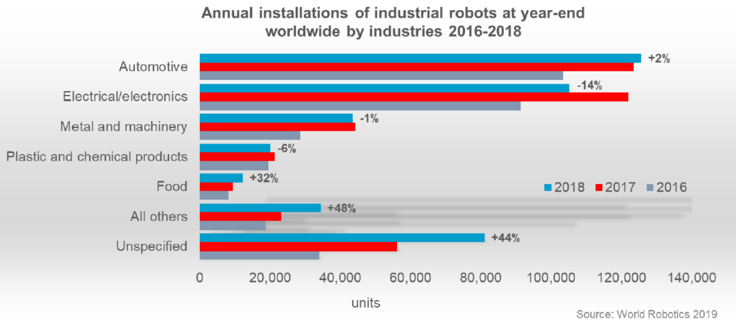
Marché des robots industriels

Marché des robots industriels



Marché des robots industriels par pays

Marché des robots industriels



Marché des robots industriels par secteur

et d'autres chiffres sur http://ifr.org

Bibliographie

- E. Dombre et W. Khalil, Modélisation et commande des robots, Hermes.
- M. W. Spong et M. Vidyasagar, Robot dynamics and control, John Wiley & sons.
- John J. Craig, Introduction to robotics - mechanics and control, Addison-Wesley.
- https ://ifr.org/worldrobotics/

Rappel de mathématiques

Base orthonormée directe

Les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ d'une base orthonormée directe vérifient :

- la norme unité

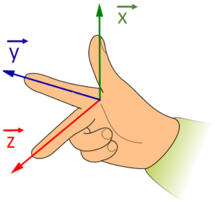
$$|| \ \vec{x} \ ||=|| \ \vec{y} \ ||=|| \ \vec{z} \ ||= 1$$

- l'orthogonalité

$$\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{z} = \vec{z}.\vec{x} = 0$$

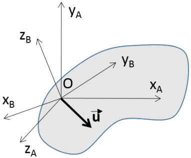
- le sens direct ou règle de la main droite

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}, \qquad \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}, \qquad \vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$$



Matrice de changement de base (matrice de passage)

Soit $(\vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$ and $(\vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B)$ 2 bases orthonormées directes. Soit $\vec{u}$ tel que



$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_A\vec{x}_A + v_A\vec{y}_A + w_A\vec{z}_A\\ \vec{u} &= u_B\vec{x}_B + v_B\vec{y}_B + w_B\vec{z}_B\end{aligned}$$

Notons ${}^A\mathbf{u} = [u_A \ v_A \ w_A]^T, {}^B\mathbf{u} = [u_B \ v_B \ w_B]^T$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans les bases (A) et (B)

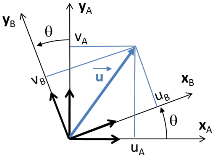
alors $\boxed{{}^A\mathbf{u} = {}^A\mathbf{R}_B \, {}^B\mathbf{u}}$

où

$${}^A\mathbf{R}_B = \left[\begin{array}{c|c|c} {}^A\mathbf{x}_B & {}^A\mathbf{y}_B & {}^A\mathbf{z}_B \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \vec{x}_B.\vec{x}_A & \vec{y}_B.\vec{x}_A & \vec{z}_B.\vec{x}_A \\ \vec{x}_B.\vec{y}_A & \vec{y}_B.\vec{y}_A & \vec{z}_B.\vec{y}_A \\ \vec{x}_B.\vec{z}_A & \vec{y}_B.\vec{z}_A & \vec{z}_B.\vec{z}_A \end{bmatrix}$$

Exemple : Changement de base dans un plan

$$ {}^{A}\mathbf{u} = {}^{A}\mathbf{R}_{B}\,{}^{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\mathbf{u} $$



Matrice colonne, ligne et Matrice

Vecteur algébrique et Matrice colonne (minuscule gras)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$$

Matrice ligne (minuscule gras)

$$\mathbf{a}^T = [a_x \quad a_y \quad a_z]$$

Matrice (majuscule gras)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Produit scalaire

- Forme vectorielle :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Propriétés :
  - $\vec{a}.\vec{a} = a^2$
  - $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
  - $\vec{a}.\vec{b} = ab \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$
  - $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$
- Forme matricielle :

$$\vec{a}.\vec{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

Produit vectoriel

- Forme vectorielle :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$

- Propriétés :
  - $\vec{a} \times \vec{b}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ alors $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires
  - $\vec{a} \times \lambda\vec{a} = \vec{0} \quad \lambda \in \mathbb{R}$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
  - $|| \vec{a} \times \vec{b} || = ab \mid \sin \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \mid$
  - $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- Forme matricielle :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b}$$

$\mathbf{S}(\mathbf{a})$ est la matrice de pré-produit vectoriel (à gauche) du vecteur $\mathbf{a}$.

Matrice

Une **matrice** $\mathbf{A}$ de dimension $m \times n$ est notée

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La **transposée** de la matrice $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^T$, consiste à permuter les lignes et les colonnes, et donc de dimension $n \times m$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit u une application linéaire de E vers F.

$$u : E \to F$$

avec E un espace vectoriel de dimension m muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ et F un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$.
On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice à n lignes et m colonnes dont la i-ème colonne est constitué par les coordonnées de $u(\vec{e}_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & \cdots & u(\vec{e}_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{array}$$

Matrice d'une fonction composée

- Composition de deux applications linéaires

$$f : E \to F, \qquad g : F \to G, \qquad h : E \to G$$

tel que $h = gof$ ou $h(x) = g(f(x))$

ou sous forme matricielle

$$\mathsf{Mat}(h, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathsf{Mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)\mathsf{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

Propriétés des matrices

- La somme de deux matrices - de même dimension - est **commutative**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

- Le produit de 2 matrices $\mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n}=\mathbf{C}_{m\times n}$ tels que $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ip}b_{pj}$. Le produit n'est pas commutatif :

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

- La somme et le produit des matrices sont **associatifs**

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}\\ (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{ABC}\end{aligned}$$

On a aussi, quand les dimensions sont compatibles,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

Quand la matrice $\mathbf{A}$ est **carrée et inversible** (det$(\mathbf{A}) \neq 0$), son inverse est noté $\mathbf{A}^{-1}$. Nous avons les identités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1})^T &= (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T} \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

$\mathbf{I}$ est la matrice identité.
Une matrice est dite **orthogonale** quand

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

Dérivée % temps d'un fonction scalaire

Dérivée % temps d'un fonction scalaire $f = f(q_1(t), \ldots, q_n(t), t)$ qui dépend de paramètres $\mathbf{q}(t)$ et du temps t

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = f_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + f_t \end{aligned}$$

avec

$$f_{\mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Dérivée % temps d'un fonction vectoriel

Pour une fonction vectoriel $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m](q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, sa dérivée % temps

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \\ &= \mathbf{f}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_t \end{aligned}$$

avec $\mathbf{f}_{\mathbf{q}}$ la Jacobienne de $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$