Chapitre 3 : Cinématique des robots séries

Notion de tâche robotique

- Tâche de position : commande point-à-point
  - séquence de points de passage, pick and place, chargement-déchargement, soudage par points ...
- Tâche de trajectoire : commande de suivi de trajectoire
  - contrôle de la vitesse sur la trajectoire, suivi du chemin de référence, peinture par pulvérisation, soudage à l'arc, collage ...
- Tâche d'effort : commande de l'effort appliqué
  - assemblage de précision, ponçage, ébavurage, ...

Modèle géométrique d'un robot

- **Paramètres articulaires** $\mathbf{q}$ **:**
  angles ou déplacements dans les liaisons (resp. R ou P)
- **Paramètres opérationnels (de tâche)** $\mathbf{x}$ **:**
  position et orientation de l'effecteur
- **Modèle géométrique direct :**

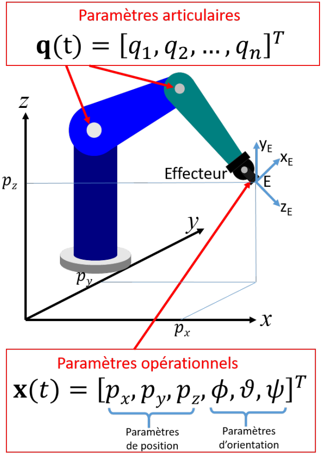
$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{q})$$

,

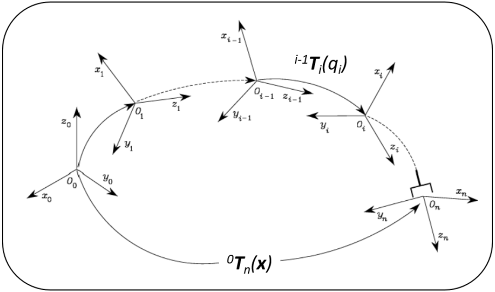
- **Modèle géométrique inverse :**

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$$

,



Modèle Géométrique Direct (MGD)



MGD = Postmultiplication des Transformations Homogènes

$$\boxed{{}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) \;=\; {}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) \;=\; {}^0\mathbf{T}_1(q_1)\,{}^1\mathbf{T}_2(q_2)\ldots{}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{q})}$$

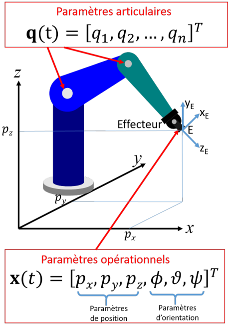
- $q_i(t) = \theta_i(t)$ si la liaison $L_i = R$ (Rotoïde)
- $q_i(t) = d_i(t)$ si la liaison $L_i = P$ (Prismatique)

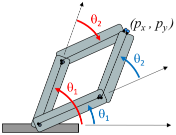
Modèle géométrique inverse

- **Objectif :** Trouver les paramètres de liaison qui permettent d'atteindre une pose donnée $\mathbf{x}$ de l'effecteur
- Pour une pose donnée de l'effecteur ($\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \vartheta, \psi]^T$), trouver les paramètres articulaires $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$$

- **Difficulté** :
  - Modèle direct non-linéaire
  - Solution non-explicite, ou non-analytique
  - Existence de plusieurs solutions
  - Robot redondant : infinité de solutions
  - Problème robot-dépendant

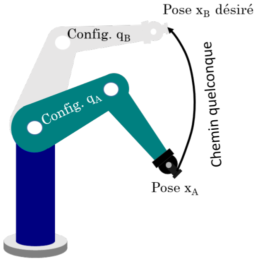


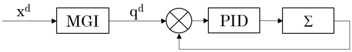


Solutions multiples du problème inverse

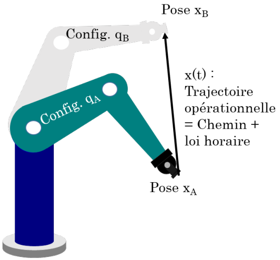
Modèle Géométrique Versus Modèle Cinématique

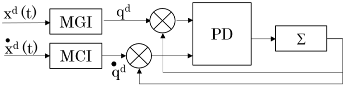
Commande Point à point





Commande en Suivi de trajectoire





Modèle Cinématique

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{F}(\mathbf{q}) \quad \equiv \begin{cases} p_x = F_1(q_1(t), \dots, q_6(t)) \\ p_y = F_2(q_1(t), \dots, q_6(t)) \\ p_z = F_3(q_1(t), \dots, q_6(t)) \\ \phi = F_4(q_1(t), \dots, q_6(t)) \\ \vartheta = F_5(q_1(t), \dots, q_6(t)) \\ \psi = F_6(q_1(t), \dots, q_6(t)) \end{cases} \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_x = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \\ \dot{p}_y = \frac{\partial F_2}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \\ \dot{p}_z = \frac{\partial F_3}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_3}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial F_4}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_4}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial F_5}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_5}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \\ \dot{\psi} = \frac{\partial F_6}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_6}{\partial q_6}\frac{dq_6}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \frac{\partial F_1}{\partial q_3} & \frac{\partial F_1}{\partial q_4} & \frac{\partial F_1}{\partial q_5} & \frac{\partial F_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial q_3} & \frac{\partial F_2}{\partial q_4} & \frac{\partial F_2}{\partial q_5} & \frac{\partial F_2}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial q_1} & \frac{\partial F_3}{\partial q_2} & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} & \frac{\partial F_3}{\partial q_4} & \frac{\partial F_3}{\partial q_5} & \frac{\partial F_3}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_4}{\partial q_1} & \frac{\partial F_4}{\partial q_2} & \frac{\partial F_4}{\partial q_3} & \frac{\partial F_4}{\partial q_4} & \frac{\partial F_4}{\partial q_5} & \frac{\partial F_4}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_5}{\partial q_1} & \frac{\partial F_5}{\partial q_2} & \frac{\partial F_5}{\partial q_3} & \frac{\partial F_5}{\partial q_4} & \frac{\partial F_5}{\partial q_5} & \frac{\partial F_5}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_6}{\partial q_1} & \frac{\partial F_6}{\partial q_2} & \frac{\partial F_6}{\partial q_3} & \frac{\partial F_6}{\partial q_4} & \frac{\partial F_6}{\partial q_5} & \frac{\partial F_6}{\partial q_6} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \left[\frac{\partial F}{\partial q}\right] \text{ Jacobienne de F (matrice des dérivées partielles)}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}}$$

Matrice Jacobienne

- Reliant les vitesses articulaires aux opérationnelles, $\mathbf{J}$ peut donner une information importante sur les vitesses nominales et maximales des moteurs à choisir. C'est une matrice de réduction ou de transmission.
- Elle est aussi appelé matrice de sensibilité car permet de connaître la sensibilité au niveau de la sortie connaissant celles des articulations (moteurs+transmission locale)
- La matrice Jacobienne n'est pas constante mais dépend de la configuration $\mathbf{J}(\mathbf{q})$
- Modèle Cinématique Direct

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

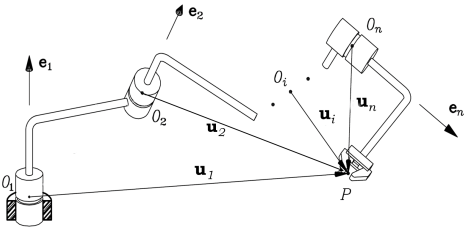
- Modèle Cinématique Inverse : Si $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est Carrée et Inversible

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$$

Jacobienne d'un manipulateur : Interprétation physique

Vitesse angulaire par rapport au bâti des solides 1,2, ..., n :

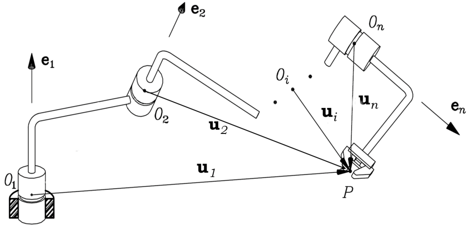
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{1/0} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \\
\boldsymbol{\omega}_{2/0} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\omega}_{n/0} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \dot{\theta}_n \mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$



Jacobienne d'un manipulateur : Interprétation physique

Vitesse linéaire par rapport au bâti du point P de l'effecteur :

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R}_n/\mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}(P \in \mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i-1})$$



$$\vec{V}(P \in \mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i-1}) = \vec{V}(O_i \in \mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i-1}) + \vec{\omega}(i/i-1) \times \vec{O_iP} = \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{u}_i$$

Jacobienne d'un manipulateur à liaisons rotoïdes (R)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{n/0} \\ \hline \mathbf{V}_{P/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_i & \dots & \mathbf{e}_n \\ - & & - & & - \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{e}_i \times \mathbf{u}_i & \dots & \mathbf{e}_n \times \mathbf{u}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_c\text{:Jacobienne cinématique}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_j \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}}$$

- La colonne $\mathbf{J}_{\mathbf{c}i} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$ est le vecteur des coordonnées de Plücker de l'axe i exprimé au point de l'effecteur P.

Jacobienne : liaison j de type (P)

Vitesse linéaire et angulaire par rapport au bâti du solide n :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{n/0} &= \dot{\theta}_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \dot{q}_j\mathbf{0} + \ldots + \dot{\theta}_n\mathbf{e}_n \\ \mathbf{V}_{P/0} &= \dot{\theta}_1\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_1 + \ldots + \dot{q}_j\mathbf{e}_j + \ldots + \dot{\theta}_n\mathbf{e}_n \times \mathbf{u}_n\end{aligned}$$

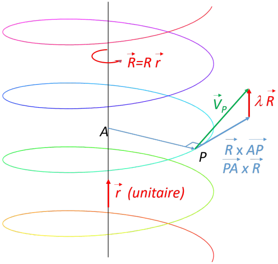
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{n/0} \\ \hline \mathbf{V}_{P/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{e}_n \\ - & & - & & - \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_1 & \ldots & \mathbf{e}_j & \ldots & \mathbf{e}_n \times \mathbf{u}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_c:\text{Jacobienne cinématique}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{d}_j \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}}$$

- **si la liaison i est de type Prismatique (P)** la colonne $\mathbf{J}_{\mathbf{c}i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}$ et l'angle $\theta_i(t)$ est à remplacer par le paramètre de liaison $d_i(t)$

Jacobienne fonction des torseurs géométriques des liaisons

Rappel la définition d'un torseur :

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{T}\}_P &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \lambda\vec{R} + \vec{PA}\times\vec{R} \end{array} \right\}_P \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{PA}\times\vec{R} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda\vec{R} \end{array} \right\}_P \\
&= R\left\{ \begin{array}{c} \vec{r} \\ \vec{PA}\times\vec{r} \end{array} \right\}_P + R\lambda\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{r} \end{array} \right\}_P
\end{aligned}
$$



Le torseur cinématique correspond à un vissage d'axe $(A, \vec{r})$ et de pas λ, qui est la somme d'un glisseur (Mouvement d'une liaison Rotoïde **R**) et d'un torseur Couple (Mouvement d'une liaison Prismatique **P**).

Jacobienne : Torseur géométrique d'une liaison **R** ou **P**

Pour une liaison Rotoïde **R**, le torseur cinématique $\{\mathcal{T}\}_P = \dot{q}\$_P = \dot{\theta}\$_P$. Le torseur géométrique $\$$ (de type glisseur, $\lambda = 0$) s'écrit

$$\$_0 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{r} \\ \vec{r} \times \vec{AP} \end{array} \right\}_P$$

Pour une liaison Prismatique **P**, le torseur cinématique $\{\mathcal{T}\}_P = \dot{q}\$_P = \dot{d}\$_P$. Le torseur géométrique $\$$ (de type couple, $\vec{R} = \vec{0}$, $\lambda = \infty$) s'écrit

$$\$_\infty = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{r} \end{array} \right\}_P$$

Jacobienne cinématique fonction des torseurs géométriques des liaisons

$$\boxed{\mathbf{J}_c = [\$_1 \;, \; \$_2, \ldots \;, \; \$_n]}$$

Chaque torseur géoémtrique $\$_i$ représente l'axe d'une liaison **R** ou **P** et tous exprimés au point P de l'organe terminal du manipulateur.

Relations entre les 2 Jacobiennes $\mathbf{J}, \mathbf{J}_c$

Cette reation dépend du paramétrage de l'orientation de l'effecteur.

Si celle-ci est paramétrée par les angles d'Euler de type 3 rotations successives x,y',z'' d'angle ϕ, ϑ, ψ

$$^0\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\vec{x}, \phi)\mathbf{R}(\vec{y}, \vartheta)\mathbf{R}(\vec{z}, \psi)$$

$$^0\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} C_\psi C_\vartheta & -C_\vartheta S_\psi & S_\vartheta \\ C_\phi S_\psi + C_\psi S_\phi S_\vartheta & C_\phi C_\psi - S_\phi S_\psi S_\vartheta & -C_\vartheta S_\phi \\ S_\phi S_\psi - C_\phi C_\psi S_\vartheta & C_\psi S_\phi + C_\phi S_\psi S_\vartheta & C_\phi C_\vartheta \end{bmatrix}$$

La vitesse angulaire de l'organe terminal par rapport au bâti

$$\omega_{n/0} = \dot{\phi}\vec{x}_0 + \dot{\vartheta}\vec{y}' + \dot{\psi}\vec{z}'' = \omega_x\vec{x}_0 + \omega_y\vec{y}_0 + \omega_z\vec{z}_0$$

après projection dans la base 0

$$^0\omega_{n/0} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\psi}S_\vartheta \\ \dot{\vartheta}C_\phi - \dot{\psi}C_\vartheta S_\phi \\ \dot{\vartheta}S_\phi + \dot{\psi}C_\phi C_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & S_\vartheta \\ 0 & C_\phi & -C_\vartheta S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Relations entre $\mathbf{J}, \mathbf{J}_c$

Si $\vartheta \neq \pm\pi/2$, $\mathbf{N}$ est inversible et on peut écrire

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_{n/0} \\ {}^0\mathbf{V}_{P/0} \end{bmatrix}$$

Relation entre la Jacobienne $\mathbf{J}$ et la Jacobienne cinématique $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{J}_c$$

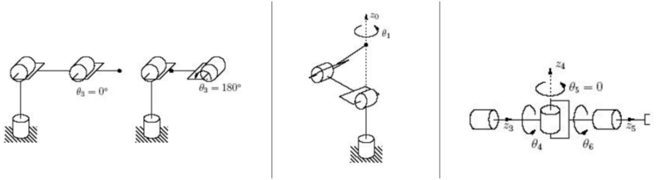
Modèle cinématique Inverse MCI

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}}$$

- Linéarité entre les vitesses articulaires et vitesses opérationnelles,
- $\mathbf{J}^{-1}$ existe si det$(\mathbf{J}) \neq 0$,
- Le déterminant de la matrice ne change pas avec le choix du point de l'effecteur,
- $\mathbf{J}$ permet la projection des forces entre les deux espaces articulaires et outil,
- $\mathbf{J}$ permet de connaître et de maîtriser les singularités du robot
- $\mathbf{J}$ est en général déterminée avec les torseurs géométriques des axes et non avec les dérivées partielles
- $\mathbf{J}$ Permet d'inverser numériquement le modèle géométrique directe (ie. par l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson) pour obtenir le modèle géométrique inverse (ou vice-versa) .

Singularités de la Jacobienne du 6R antropomorphe

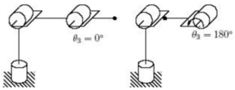
Singularité : $\boxed{\det(\mathbf{J}) = 0}$



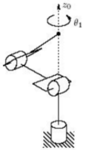
Singularité du Coude — Singularité de la taille — Singularité du poignée

- A la position singulière, le robot perd un (ou plusieurs) degrés de liberté
- La transformation de coordonnées inverse possède parfois un nombre infini de solutions.
- A proximité d'une singularité, de petites vitesses dans l'espace cartésien peuvent conduire à de très grandes vitesses dans les articulations donc des instabilités.

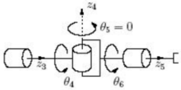
Singularités du robot anthropomorphe



Singularité du Coude

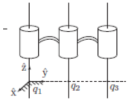


Singularité de la taille

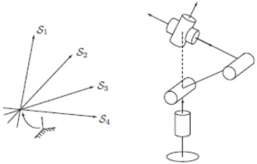


Singularité du poignée

Autres types de singualrités



3 axes de liaisons
rotoïde coplanaires



4 axes de liaisons
rotoïdes concourants

Inversion numérique de la Jacobienne

Pour éviter les éventuelles instabilités dues aux singularités, il vaut mieux vérifier d'abord le conditionnement de $\mathbf{J}$.

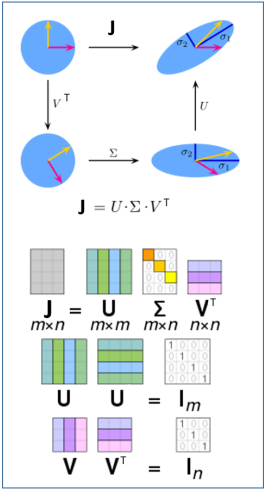
$$\text{cond}(\mathbf{J}) = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{min}}}$$

$\sigma_{\text{max}}, \sigma_{\text{min}}$ les valeurs singulères max et min de $\mathbf{J}$, équivalents aux valeurs propres quand la matrice est carrée.

Décomposition SVD (Singular Value Decomposition) d'une matrice quelconque

$$\mathbf{J}_{(m,n)} = \mathbf{U}_{(m,m)} \mathbf{\Sigma}_{(m,n)} \mathbf{V}^T_{(n,n)}$$

- $\mathbf{U}_{(m,m)}$ et $\mathbf{V}_{(n,n)}$ orthogonale (déterminant égal à 1)
- $\mathbf{\Sigma}(m,n)$ matrice contenant les valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ $(r = \min(m,n))$



Inversion numérique de la Jacobienne

$$\mathbf{J}^{-1}_{(n,m)} = \mathbf{V}_{(n,n)}\mathbf{\Sigma}^{+}_{(n,m)}\mathbf{U}^{T}_{(m,m)}$$

$\mathbf{\Sigma}^{+}_{(n,m)} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r})$.
Si une valeur singulière σ_i est nulle, une méthode (dite de damping) consiste à régulariser

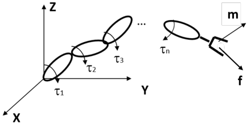
$$\frac{1}{\sigma_i} \rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$$

avec λ (facteur d'amortissement) choisi assez petit devant σ_i

Analyse statique des manipulateurs

On considère le manipulateur en équilibre statique, sous l'effet des couples actionneurs $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, ..., \tau_n]^T$ et des efforts d'interaction avec l'environnement au niveau de l'effecteur. On note $\mathcal{F} = [\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T]^T$ le torseur des actions mécaniques de l'environnement sur le robot (exprimé au point E de l'effecteur),

- $\mathbf{f}$ étant la force résultante
- $\mathbf{m}$ étant le moment des efforts exprimé en E



On montre que le travail virtuel des ces efforts d'interaction s'écrit $\tilde{\mathcal{F}}^T \delta\boldsymbol{\xi}$, où $\delta\boldsymbol{\xi}$ est le torseur de déplacement virtuel (en rotation et en translation) de l'effecteur par rapport à l'environnement.
Le travail total s'écrit

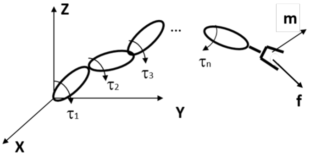
$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta\mathbf{q} + \tilde{\mathcal{F}}^T \delta\boldsymbol{\xi}$$

$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$ le torseur d'effort commuté (la commutation provient du produit croisé du comoment de 2 torseurs).

Transmission de forces

Sachant $\delta\boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}_c \delta\mathbf{q}$, et comme le travail total est nulle $\forall \mathbf{q}$, alors on obtient le modèle de transmission de forces

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_c^T \tilde{\mathcal{F}} = \mathbf{J}_c^T \tilde{\mathcal{F}}'}$$



$\mathcal{F}'$: Torseur d'effort que crée le robot sur l'environnement.
Si de plus on considère le poids propre des segments du robot, alors on obtient le modèle statique du manipulateur

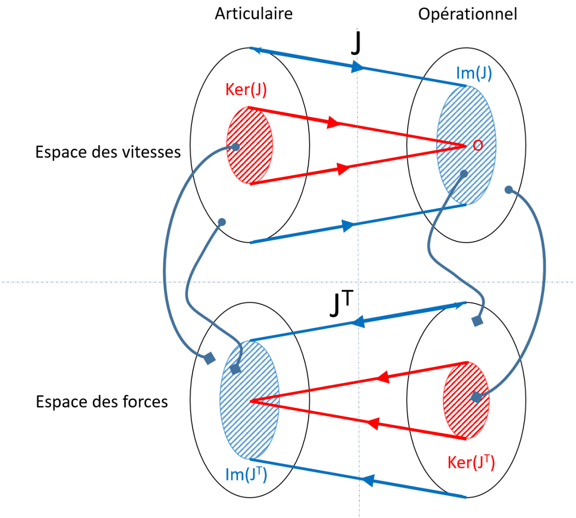
$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_c^T \tilde{\mathcal{F}}' + \left(\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}}\right)^T}$$

où E_p est l'énergie potentielle de gravité.

$$E_p = \sum_{i=1}^{N_c} m_i g (z_{cdg})_i$$

- $-g\vec{z}$ est l'accélération de la pesanteur
- m_i masse du corps i
- $(z_{cdg})_i$ hauteur de son centre de gravité

Interprétation Jacobienne/Dualité cinémato-statique



Ellipsoïde de manipulabilité

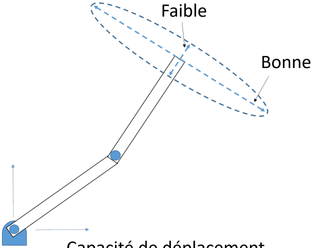
Si on suppose que $\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} \leq 1$ (norme du vecteur vitesse articulaire inclue dans la sphère unité) alors

$$\left(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}\right)^T\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} \leq 1$$

En s'aidant de la SVD

$$\dot{\mathbf{x}}^T\left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-2}\mathbf{U}^T\right)\dot{\mathbf{x}} \leq 1$$

C'est l'équation d'une ellipsoïde de demi-axes σ_i (valeurs singulières de $\mathbf{J}$) et d'axes principaux les colonnes de $\mathbf{U}$.
C'est l'espace des vitesses opérationnelles faisables.

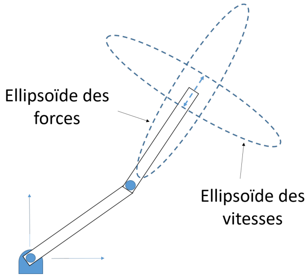


L'indice de manipulabilité de Yoshikawa est défini par le volume de l'ellipsoïde $\sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^\mathbf{T})}$.
Une autre méthode propose le conditionnement de la Jacobienne $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$.

Ellipsoïdes de transmission des vitesses et des efforts

Idem si on part de $\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{\tau} \leq 1$ (norme du vecteur effort articulaire inclue dans la sphère unité), on peut définir l'ellispoïde de la transmission d'effort.

- On peut appliquer la force opérationnelle maximale suivant la direction de la vitesse op. minimale.
- La vitesse opérationnelle est maximale suivant la direction de l'effort op. minimal.



Cas des robots redondants : Solution de moindre carrée

Si $\mathbf{J}$ n'est pas carrée, cas des robots redondants, c-à-d plus de liaisons que de paramètres de tâche, il y a une infinité de solutions pour réaliser la tâche.
La solution de moindre carrée qui minimise $\| \dot{\mathbf{q}} \|^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}$

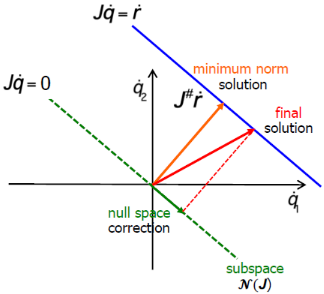
$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{J}^T \left[\mathbf{J}\mathbf{J}^T\right]^{-1}}_{\mathbf{J}^\sharp} \dot{\mathbf{x}}$$

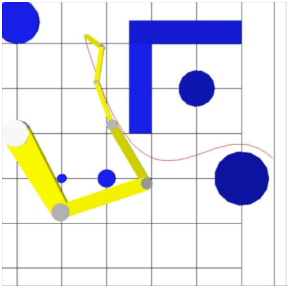
- $\mathbf{J}^\sharp$ est appelée pseudo-inverse (Inverse Généralisé de Moore-Penrose) (pinv avec Matlab)
- $\mathbf{J}^\sharp$ existe si $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \neq 0$, c-à-d $\mathbf{J}$ de rang plein

Cas des robots redondants : correction dans l'espace nul

- Solution générale

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\sharp}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^{\sharp}\mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}^{\sharp}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^{\sharp}\mathbf{J})\nabla_{\mathbf{q}}(\Phi)$$





$\dot{\mathbf{q}}_0$ peut être choisi pour optimiser un critère secondaire $\Phi(\mathbf{q})$: par ex. éviter des obstacles, s'éloigner des butées articulaires, optimiser la manipulabilité ...