

Chapitre 1

Matrices Rotation et Transformation Homogène

1.1 Matrice de changement de base

Soit un vecteur \vec{u} joignant l'origine à un point P , il peut être exprimé par ses coordonnées dans 2 bases, global $\{A\} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et local (lié au solide) $\{B\} = (\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z \quad (1.1)$$

$$\vec{u} = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + u_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (1.2)$$

où

$$\begin{aligned} u_x &= \vec{u} \cdot \vec{e}_x, & u_y &= \vec{u} \cdot \vec{e}_y, & u_z &= \vec{u} \cdot \vec{e}_z \\ u_\xi &= \vec{u} \cdot \vec{e}_\xi, & u_\eta &= \vec{u} \cdot \vec{e}_\eta, & u_\zeta &= \vec{u} \cdot \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les composantes du vecteur \vec{u} exprimées dans les deux systèmes de coordonnées peuvent être mises dans des matrices colonnes (vecteurs algébriques) qui sont

$${}^A\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \quad (1.4)$$

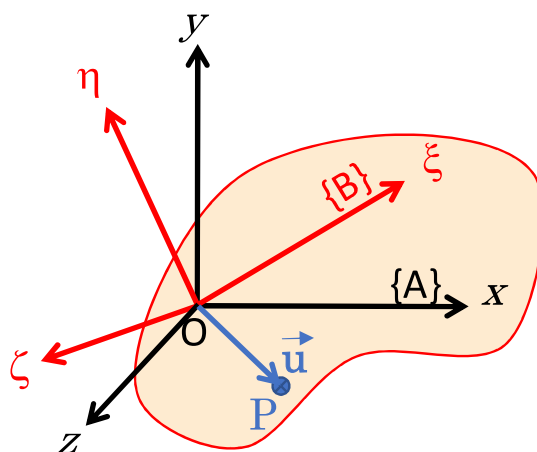


FIGURE 1.1 – Deux bases : $\{A\}$ global et $\{B\}$ local.

dans la base $\{A\}$, et

$${}^B\mathbf{u} = [u_\xi \ u_\eta \ u_\zeta]^T \quad (1.5)$$

dans la base $\{B\}$.

Pour exprimer la relation entre ${}^A\mathbf{u}$ et ${}^B\mathbf{u}$, on introduit les relations entre les vecteurs unitaires associés aux 2 repères

$$\vec{e}_\xi = a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y + a_{31}\vec{e}_z \quad (1.6)$$

$$\vec{e}_\eta = a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y + a_{32}\vec{e}_z \quad (1.7)$$

$$\vec{e}_\zeta = a_{13}\vec{e}_x + a_{23}\vec{e}_y + a_{33}\vec{e}_z \quad (1.8)$$

avec a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ les cosinus directeurs définis par

$$\begin{aligned} a_{11} &= \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_x = \cos(\vec{e}_\xi, \vec{e}_x), & a_{21} &= \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_y = \cos(\vec{e}_\xi, \vec{e}_y), & a_{31} &= \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_z = \cos(\vec{e}_\xi, \vec{e}_z) \\ a_{12} &= \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_x = \cos(\vec{e}_\eta, \vec{e}_x), & a_{22} &= \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_y = \cos(\vec{e}_\eta, \vec{e}_y), & a_{32} &= \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_z = \cos(\vec{e}_\eta, \vec{e}_z) \\ a_{13} &= \vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_x = \cos(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_x), & a_{23} &= \vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_y = \cos(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_y), & a_{33} &= \vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_z = \cos(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (1.9)$$

En substituant les expressions (1.8) dans l'équation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_\xi(a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y + a_{31}\vec{e}_z) + u_\eta(a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y + a_{32}\vec{e}_z) + u_\zeta(a_{13}\vec{e}_x + a_{23}\vec{e}_y + a_{33}\vec{e}_z) \\ &= (a_{11}u_\xi + a_{12}u_\eta + a_{13}u_\zeta)\vec{e}_x + (a_{21}u_\xi + a_{22}u_\eta + a_{23}u_\zeta)\vec{e}_y + (a_{31}u_\xi + a_{32}u_\eta + a_{33}u_\zeta)\vec{e}_z \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Comparant les équations (1.10) et (1.1), on a

$$\begin{cases} u_x = a_{11}u_\xi + a_{12}u_\eta + a_{13}u_\zeta \\ u_y = a_{21}u_\xi + a_{22}u_\eta + a_{23}u_\zeta \\ u_z = a_{31}u_\xi + a_{32}u_\eta + a_{33}u_\zeta \end{cases} \quad (1.11)$$

ou sous forme matricielle

$$\boxed{{}^A\mathbf{u} = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{u}} \quad (1.12)$$

avec

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

${}^A\mathbf{R}_B$ est la matrice de changement de base de $\{B\}$ vers $\{A\}$. Notons ${}^A\mathbf{e}_\xi$ le vecteur des coordonnées de \vec{e}_ξ dans $\{A\}$, idem pour ${}^A\mathbf{e}_\eta$ et ${}^A\mathbf{e}_\zeta$:

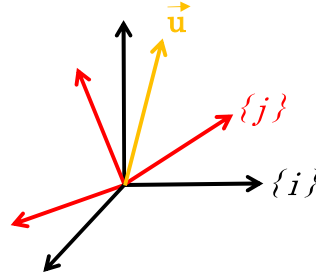
$${}^A\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad {}^A\mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad {}^A\mathbf{e}_\zeta = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et la matrice \mathbf{R} peut s'écrire

$$\mathbf{R} = [{}^A\mathbf{e}_\xi \mid {}^A\mathbf{e}_\eta \mid {}^A\mathbf{e}_\zeta] \quad (1.15)$$

Résumé :

Soient deux bases orthonormées directs $\{i\}$ et $\{j\}$, le changement de coordonnées d'un vecteur \vec{u} fixe s'écrit



$$\underbrace{{}^i\mathbf{u}}_{\vec{u} \text{ exprimé dans } \{i\}} = {}^i\mathbf{R}_j \underbrace{{}^j\mathbf{u}}_{\text{base } \{j\} \text{ exprimée dans } \{i\}} \quad \text{avec} \quad {}^i\mathbf{R}_j = \underbrace{[{}^i\mathbf{x}_j \mid {}^i\mathbf{y}_j \mid {}^i\mathbf{z}_j]}_{\text{base } \{j\} \text{ exprimée dans } \{i\}}$$

1.2 Matrice Rotation défini par un Angle-Vecteur

La matrice de changement de base est en fait une matrice rotation car son déterminant est égal à 1. Nous allons écrire dans cette section l'expression d'une matrice de transformation correspondant à une rotation définie par son axe et son angle.

Soit $\mathbf{u} = \vec{OP}$ un vecteur quelconque représenté par ses coordonnées dans la base globale fixe xyz . Après une rotation autour de la droite passant par O et dirigée par le vecteur unitaire \vec{v} et d'un angle θ , le point P occupe la nouvelle position P' de coordonnées \mathbf{u}' (fig.1.2), d'où

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (1.16)$$

Or $\Delta\mathbf{u}$ peut s'écrire comme la somme de 2 vecteurs (fig.1.2)

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \quad (1.17)$$

où \mathbf{b}_1 est perpendiculaire au plan (OCP) et donc porté par $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. On peut écrire la norme de \mathbf{b}_1

$$b_1 = |\mathbf{b}_1| = a \sin \theta \quad (1.18)$$

Soit α l'angle entre \mathbf{v} et \mathbf{u} et a le rayon du cercle CP

$$a = |\mathbf{u}| \sin \alpha = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| \quad (1.19)$$

donc

$$\mathbf{b}_1 = a \sin \theta \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{u}|} = \sin(\theta) \mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (1.20)$$

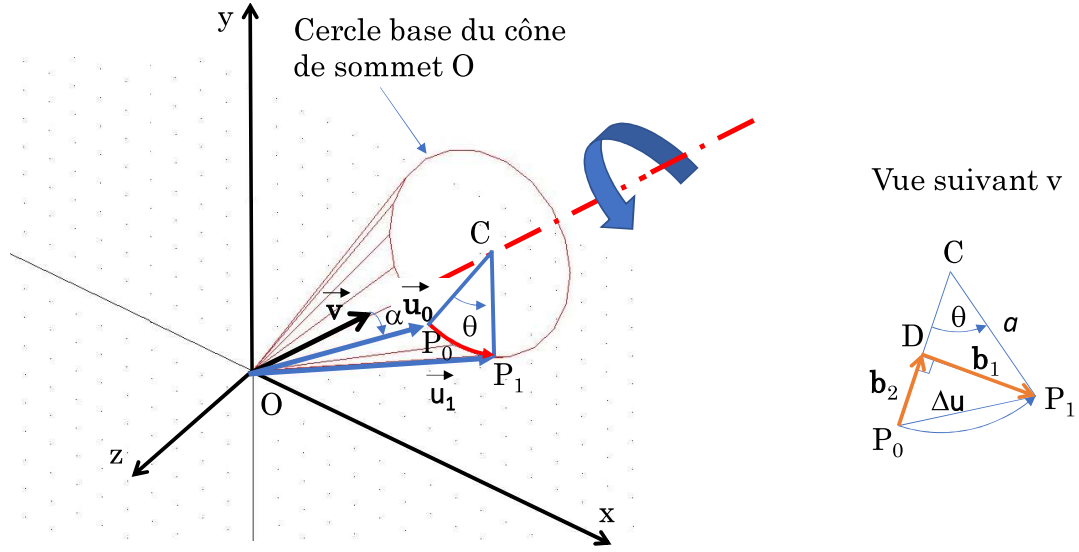


FIGURE 1.2 – Rotation finie autour d'un axe (O, \mathbf{v}) et d'angle θ .

Le vecteur \mathbf{b}_2 entre les points P_0 et D a une norme

$$|\mathbf{b}_2| = a - a \cos \theta = (1 - \cos \theta)a = 2a \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.21)$$

Ce vecteur est perpendiculaire à la fois OC et à DP' , et donc porté par le vecteur unitaire $(\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}))/a$

$$\mathbf{b}_2 = 2a \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})}{a} \quad (1.22)$$

D'où

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} \sin \theta + 2[\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})] \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.23)$$

En utilisant la matrice du pré-produit vectoriel à gauche $\mathbf{S}(\mathbf{v})$ (Skew-matrix pour anti-symétrique), définie telle que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{v})}_{\mathbf{S}(\mathbf{v})} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (1.24)$$

où v_1, v_2, v_3 sont les composantes du vecteur \mathbf{v} , l'équation (1.23) devient

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \sin(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{u} + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2 \mathbf{u} \quad (1.25)$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{v}) \sin \theta + (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \mathbf{u} \quad (1.26)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité 3×3 . Cette dernière équation se met sous la forme d'une transformation linéaire

$$\mathbf{u}' = \mathbf{R}(\mathbf{v}, \theta) \mathbf{u} \quad (1.27)$$

avec \mathbf{R} est la matrice rotation

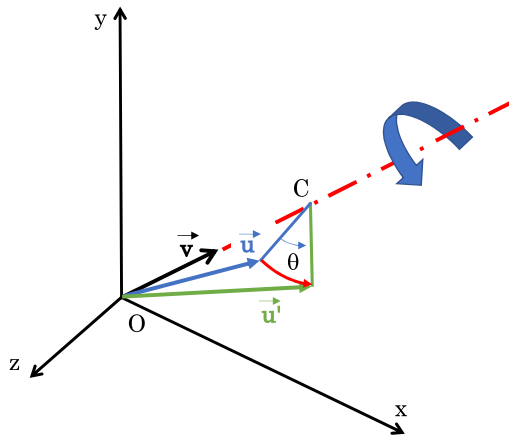
$$\mathbf{R}(\mathbf{v}, \theta) = \left[\mathbf{I} + \sin(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2 \right] \quad (1.28)$$

Cette équation est dite *formule de Rodrigues* ; elle dépend de l'angle de rotation et d'un vecteur unitaire de l'axe de rotation.

Résumé :

La transformation correspondant à une rotation d'axe dirigé par \vec{v} unitaire et d'angle θ s'écrit par sa matrice 3x3

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}, \theta) = \left[\mathbf{I} + \sin(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2 \right] \quad \text{où} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$



1.3 Paramètres d'Euler-Rodrigues (Quaternion)

En utilisant l'identité

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

l'équation (1.39) devient

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2\mathbf{S}(\mathbf{v}) \sin \frac{\theta}{2} \left(\mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{S}(\mathbf{v}) \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.29)$$

En posant les 4 paramètres d'Euler-Rodrigues

$$\begin{cases} p_1 = e_0 = \cos \frac{\theta}{2} \\ p_2 = e_1 = v_1 \sin \frac{\theta}{2} \\ p_3 = e_2 = v_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ p_4 = e_3 = v_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (1.30)$$

la formule de Euler-Rodrigues (1.39) devient

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2\mathbf{S}(\mathbf{e}) (e_0 \mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{e})) \quad (1.31)$$

où $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$ et

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Il est à noter que les 4 paramètres d'Euler ne sont pas indépendants mais reliés par l'équation

$$\sum_{k=0}^3 (p_k)^2 = \mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1 \quad (1.33)$$

avec $\mathbf{p} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$. Vue que les paramètres sont dépendants, la matrice rotation peut prendre plusieurs formes, une d'elles est

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2[(e_0)^2 + (e_1)^2] - 1 & 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) & 2(e_1 e_3 + e_0 e_2) \\ 2(e_1 e_2 + e_0 e_3) & 2[(e_0)^2 + (e_2)^2] - 1 & 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) \\ 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) & 2(e_2 e_3 + e_0 e_1) & 2[(e_0)^2 + (e_3)^2] - 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Remarques :

— Les paramètres d'Euler-Rodrigues définissent un quaternion unitaire

$$\mathbf{q} = \cos(\theta/2).\mathbf{1} + v_1 \sin(\theta/2).\mathbf{i} + v_2 \sin(\theta/2).\mathbf{j} + v_3 \sin(\theta/2).\mathbf{k} \quad (1.35)$$

où $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$.

Les quaternions peuvent être vues comme une extension des nombres complexes (à 3 paramètres indépendants), ils permettent de construire une structure de groupe vérifiant plusieurs propriétés tel que la fermeture, l'associativité, la conjugaison, ...

— Les 4 paramètres d'Euler-Rodrigues est l'unique façon minimaliste pour paramétrer l'orientation d'un repère ou d'un solide dans l'espace 3D **et sans singularité**.

— L'ensemble des matrices de rotation forme un groupe appelé $SO(3)$ (Special Orthogonal dans \mathbb{R}^3), dont l'élément neutre est la matrice identité.

1.4 Propriétés de la matrice rotation

$\mathbf{S}(\mathbf{v})$ est une matrice anti-symétrique $(\mathbf{S}(\mathbf{v}))^T = -\mathbf{S}(\mathbf{v})$, donc $(\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2$ est une matrice symétrique. De même que

$$(\mathbf{S}(\mathbf{v}))^3 = -\mathbf{S}(\mathbf{v}), \quad (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^4 = -(\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2, \quad (1.36)$$

En utilisant ces équations et l'équation (1.39), on montre

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad (1.37)$$

Ceci prouve que la matrice \mathbf{R} est une matrice orthogonale et que

$$\mathbf{R}^{-1} = \left[\mathbf{I} - \sin \theta \mathbf{S}(\mathbf{v}) + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (\mathbf{S}(\mathbf{v}))^2 \right] = \mathbf{R}^T \quad (1.38)$$

ainsi que son déterminant est égale 1. On note que la rotation inverse est d'angle opposée $-\theta$ et suivant le même axe \mathbf{v} .

La relation de Euler-Rodrigues peut être utilisée pour exprimer les matrices de rotation autour des 3 vecteurs de base $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Après un peu de calcul, on obtient

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

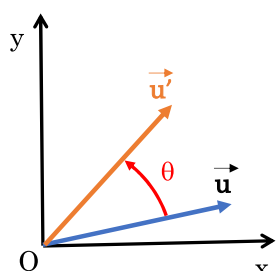
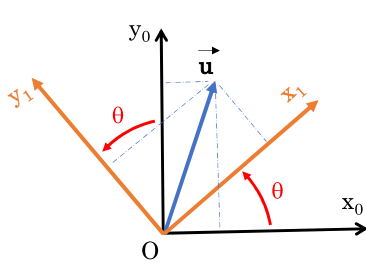
Résumé :

La matrice rotation est une matrice orthogonale

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

1.5 Composition des Rotations

Pour résumer les deux parties précédentes, on peut utiliser la même matrice de rotation \mathbf{R} soit pour effectuer une transformation d'un vecteur vers un autre soit pour changer de base pour un vecteur donné fixe, qui peut être résumé dans ce tableau

Base fixe	Vecteur fixe
une base, deux vecteurs	un vecteur, deux bases
$\mathbf{u}' = \mathbf{R} \mathbf{u}$	${}^i\mathbf{u} = {}^i\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{u}$
Tout est exprimé dans la même base	
${}^i\mathbf{u}' = {}^i\mathbf{R} {}^i\mathbf{u}$	
Exemple de la rotation suivant \mathbf{z} d'angle θ	
$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$ 	${}^0\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^1\mathbf{u}$ 

1.5.1 Base fixe

La première façon de voir la composition de rotation est de les voir par rapport à une unique base fixe. Si toutes les rotations sont exprimées dans la même base alors le résultat est une matrice rotation qui est le **produit pré-multiplié** des matrices de rotation.

Prenons l'exemple de la composition de deux rotations $\mathbf{R}_1(\mathbf{v}_1, \theta_1)$ puis $\mathbf{R}_2(\mathbf{v}_2, \theta_2)$. Soient f_1, f_2 les applications linéaires correspondantes respectives de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 . La fonction composée est donc $g = f_2 \circ f_1$ telle que $g(x) = f_2(f_1(x))$ et d'après l'algèbre linéaire est décrite par la matrice

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_2(\mathbf{v}_2, \theta_2) \mathbf{R}_1(\mathbf{v}_1, \theta_1) \quad (1.39)$$

Par exemple, le résultat des deux rotations de la figure (1.3) est une rotation dont la matrice représenté dans la base fixe xyz est

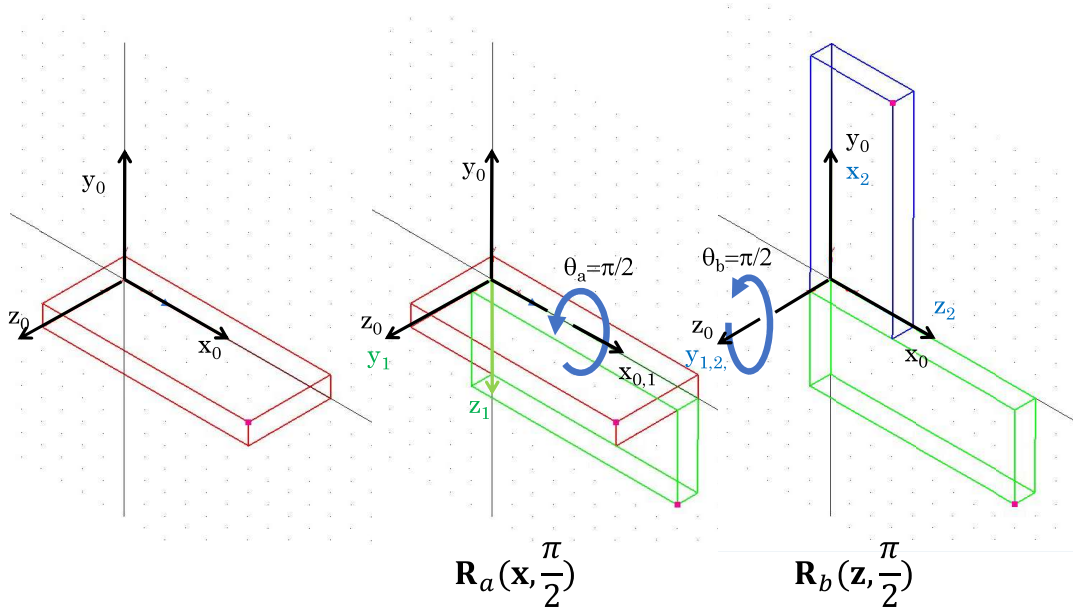


FIGURE 1.3 – Composition de deux rotations en base fixe.

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_b(\mathbf{z}, \pi/2) \mathbf{R}_a(\mathbf{x}, \pi/2) \quad (1.40)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

On vérifie bien que la première colonne est ${}^0\mathbf{x}_2$ (\vec{x}_2 exprimé dans $\{0\}$), suivie de ${}^0\mathbf{y}_2$ et ${}^0\mathbf{z}_2$.

1.5.2 Base non-fixe

Considérons la même composition de 2 rotations que précédemment (Figure 1.3), sauf que cette fois-ci on considère la seconde rotation autour de \vec{y}_1 image de \vec{y}_0 après la première rotation, et on va décrire cette rotation dans sa base locale $\{1\}$, qu'on note ${}^1\mathbf{R}_2$; pour cela on parle de base non-fixe.

On peut écrire le changement de base entre $\{1\}$ et $\{0\}$ puis $\{2\}$ et $\{1\}$

$${}^0\mathbf{u} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u} \quad (1.43)$$

$${}^1\mathbf{u} = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}, \quad (1.44)$$

En remplaçant dans la première l'expression de ${}^1\mathbf{u}$, on obtient

$${}^0\mathbf{u} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}, \quad (1.45)$$

$$= {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}, \quad (1.46)$$

Finalement, on peut écrire la relation de **post-multiplication** des matrices de rotation quand elles sont décrites dans les bases locales donc non-fixes

$${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 \quad (1.47)$$

Pour l'exemple de la figure particulière on aura

$${}^0\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_a(\mathbf{x}, \pi/2) \mathbf{R}_b(\mathbf{y}, \pi/2) \quad (1.48)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

On vérifie qu'on obtient le même résultat qu'avec les rotations en base fixe.

Pour résumer la composition des rotations :

Base fixe	Base non-fixe (locale)
Pré-Multiplication des Matrices	Post-Multiplication des Matrices
Deuxième x Première	Première x Deuxième

1.6 Paramétrage de l'orientation spatiale par les angles d'Euler

Les quaternions forment un paramétrage universel et complet de l'orientation d'un solide ou d'un repère dans l'espace. Pour certaines applications (automobile, bateau et aviation) où certains angles restent limités, on peut utiliser une autre méthode qui est plus simple et qui consiste à paramétrer cette orientation par 3 angles (ϕ, θ, ψ) , qui sont les angles de rotation autour de 3 axes différents, qui peuvent être fixes ou non-fixes. Pour les corps flottants, les rotations autour d'axes non-fixes sont plus commodes et pratiques car au moins deux des trois rotations (la première et la dernière) peuvent être visualisées plus ou moins facilement.

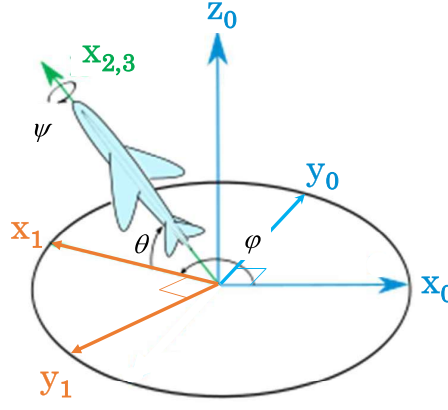


FIGURE 1.4 – Les angles de Lacet-Tangage-Roulis

Prenons la convention Lacet-Tangage-Roulis très utilisé en aviation (Fig.1.4). Elle considère 3 rotations successives, d'abord autour de z_0 d'angle φ , ensuite autour de y_1 d'angle θ et enfin autour de x_2 d'angle ψ . Dans ce cas la matrice rotation résultat de la composition des 3 transformations

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi) \mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta) \mathbf{R}(\mathbf{x}, \psi) \quad (1.51)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Ces 3 angles peuvent représenter des rotations de liaisons mécaniques de type pivot imaginaires disposées sur une chaîne cinématique. Historiquement, les 3 angles d'Euler représentaient l'orientation spatiale d'un gyroscope, où les axes de rotations sont dans l'ordre z_0 , x_1 et z_2 (Fig.1.5). Dans ce cas la matrice de rotation est

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi) \mathbf{R}(\mathbf{x}, \theta) \mathbf{R}(\mathbf{z}, \psi) \quad (1.53)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si les 3 angles d'Euler sont donnés, il y a qu'une matrice de rotation correspondante. Est-ce que l'inverse l'est aussi vrai ? Pas toujours. Supposons que les termes de la matrice rotation sont R_{ij} , pour exprimer φ, θ, ψ en fonction de R_{ij} on peut utiliser ces formules

— Si $R_{33} \neq \pm 1$,

$$\begin{cases} \phi = \arctan 2(R_{13}, -R_{23}) \\ \theta = \arccos R_{33} \\ \psi = \arctan 2(R_{31}, R_{32}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \phi = \arctan 2(R_{13}, -R_{23}) \pm \pi \\ \theta = -\arccos R_{33} \\ \psi = \arctan 2(R_{31}, R_{32}) \pm \pi \end{cases}$$

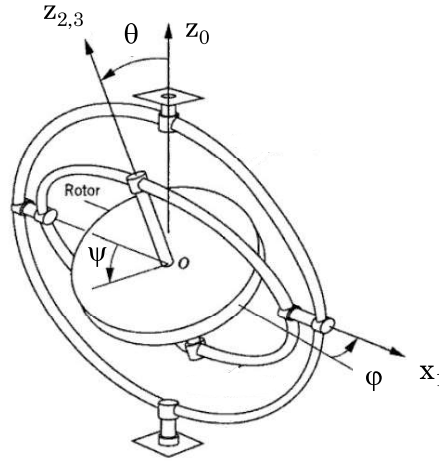


FIGURE 1.5 – Les 3 angles d'Euler historiques.

— Si $R_{33} = \pm 1$,

$$\begin{cases} \theta = \pi(1 - R_{33})/2 \\ \psi + R_{33}\phi = \arctan 2(R_{12}, R_{11}) \end{cases}$$

Dans ce cas, ϕ et ψ sont indéterminés. On parle de singularité de paramétrage des configurations $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Remarques :

- $\arctan 2(y, x)$ est une fonction à 2 arguments, renvoie l'angle en radians entre l'axe des x positifs d'un plan, et le point de ce plan de coordonnées (x, y) .
- On voit à partir de ces équations qu'on obtient plusieurs solutions (deux triplets sur $[-\pi, \pi]$) au problème inverse, ces solutions sont situées symétriquement à la configuration singulière.
- Cette singularité se produit avec toutes les compositions possibles autour d'axes fixes ou non-fixes. Prenons par exemple 3 rotations autour des axes fixes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ d'angles φ, θ, ψ . La singularité se produit toujours quand le premier axe se confond avec le troisième, ici donc pour $\theta = \pm\pi/2$. Si on est dans la configuration singulière, les deux configurations du problème inverse sont à π près, comme le montre la figure (1.6). Celle-ci illustre deux triplets d'angles différents qui aboutissent à la même matrice de transformation et la même configuration finale.

1.7 Transformation Homogène

1.7.1 Changement de repères

On considère maintenant un point fixe P et deux repères $\{A\}$ et $\{B\}$ ayant comme origines O_A et O_B (Fig.1.7). Ses vecteurs position dans ces deux repères et exprimés dans les bases respectives, sont notés ${}^A\mathbf{r}_P = {}^A(\overrightarrow{O_AP})$ et ${}^B\mathbf{r}_P = {}^B(\overrightarrow{O_BP})$. On peut écrire

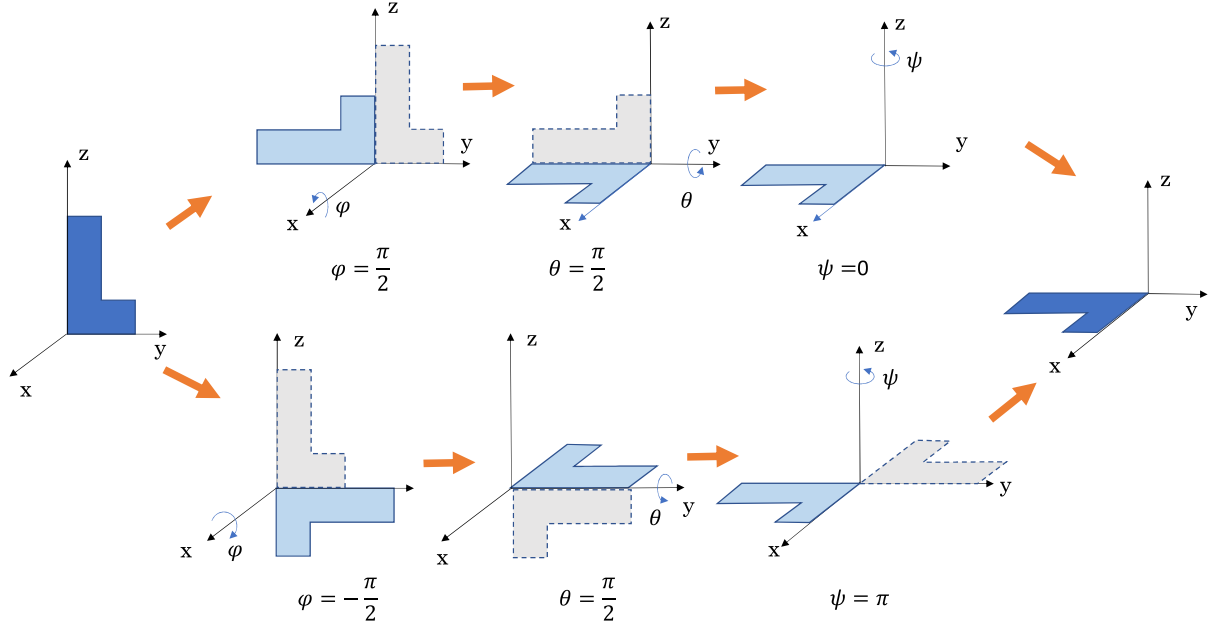


FIGURE 1.6 – Multiplicité de solutions dans le paramétrage par les angles d'Euler. Les 3 rotations s'effectuent ici autour des axes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

$${}^A\mathbf{r}_P = {}^A(\overrightarrow{O_A P}) \quad (1.54)$$

$$= {}^A(\overrightarrow{O_A O_B}) + {}^A(\overrightarrow{O_B P}) \quad (1.55)$$

$$= {}^A(\overrightarrow{O_A O_B}) + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{r}_P \quad (1.56)$$

$$= {}^A\mathbf{r}_{O_B} + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{r}_P \quad (1.57)$$

avec ${}^A\mathbf{r}_{O_B} = {}^A(\overrightarrow{O_A O_B})$ et ${}^A\mathbf{R}_B$ la matrice rotation de B par rapport à A (ou de A vers B).

Cette dernière relation n'est pas linéaire mais affine. On peut faire apparaître une matrice de transformation des coordonnées du point P de B vers A , si on ajoute une quatrième coordonnées égale à 1 aux coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^3 . On obtient donc

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{r}_{O_B} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

${}^A\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ est dit le vecteur de coordonnées homogènes du point P dans le repère $\{A\}$.

On note ${}^A\mathbf{t}_B = {}^A(\overrightarrow{O_A O_B})$ le vecteur position de l'origine $\{B\}$ par rapport à $\{A\}$ exprimé dans ce dernier. L'expression précédente devient

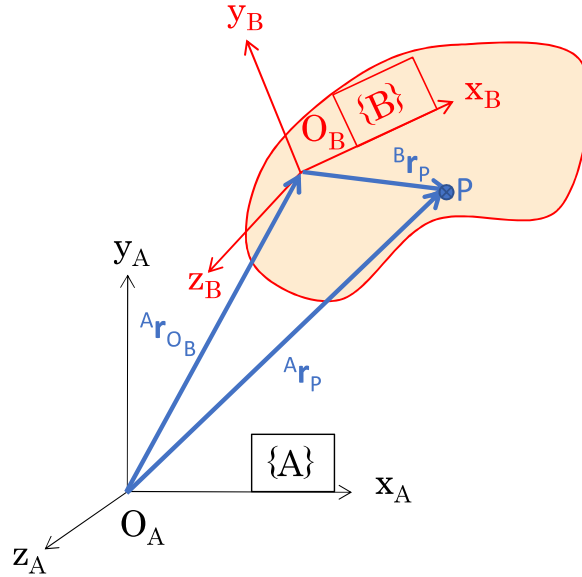


FIGURE 1.7 – Changement de repères d'un point fixe

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix}}_{{}^A\mathbf{r}_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{r}_{O_B} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}}_{{}^A\mathbf{T}_B} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^B\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix}}_{{}^B\mathbf{r}_P} \quad (1.59)$$

${}^A\mathbf{T}_B$ est une matrice 4x4, dite matrice de transformation homogène

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{r}_{O_B} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

permet de convertir les coordonnées homogènes d'un point fixe P de $\{B\}$ vers $\{A\}$

$${}^A\mathbf{r}_P = {}^A\mathbf{T}_B {}^B\mathbf{r}_P \quad (1.61)$$

1.7.2 Transformations : Rotation et Translation

Comme pour les matrices rotations, les transformations homogènes décrivent des transformations géométriques de type rotation et translation.

Ainsi la transformation homogène d'une rotation pure prend la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}$$

et celle d'une translation pure

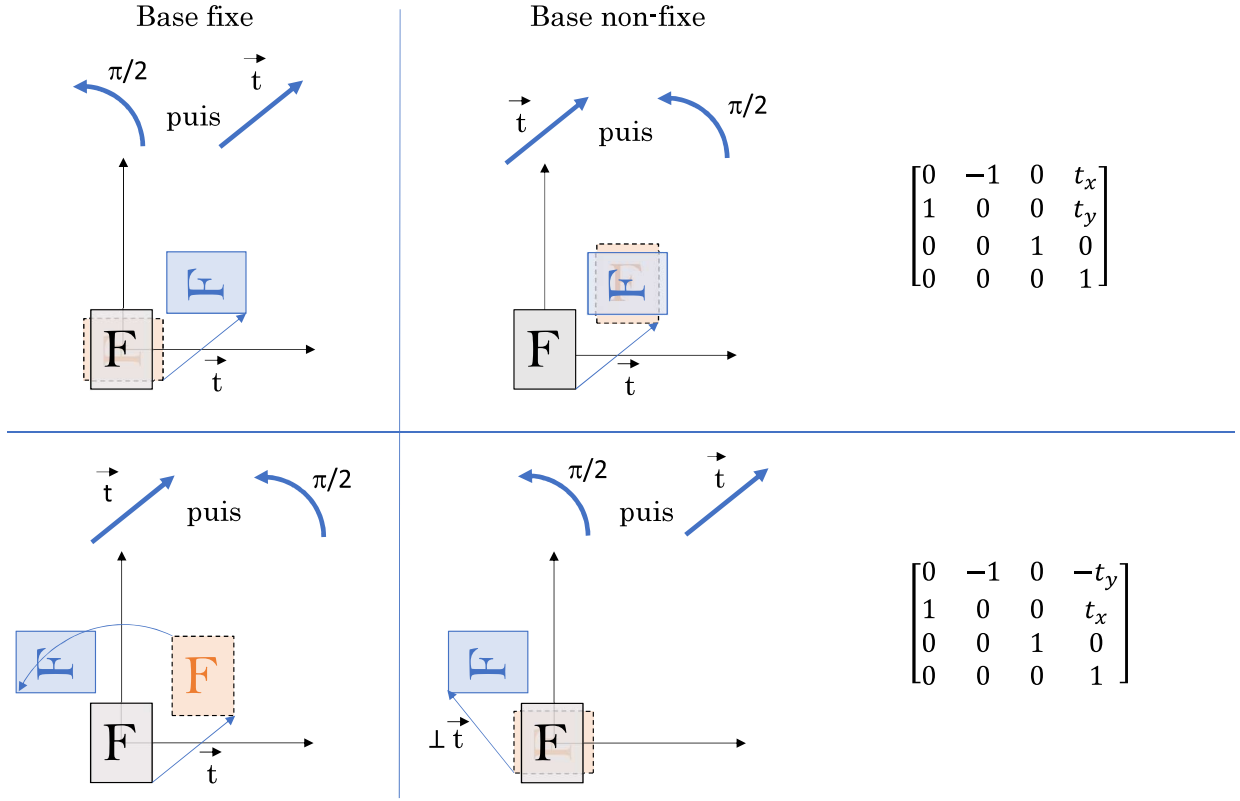


FIGURE 1.8 – Composition des transformations homogènes. À gauche en base fixe et à droite en base non-fixe.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3,3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi la transformation du repère $\{A\}$ vers $\{B\}$ de la figure (Fig.1.7) peut être perçue comme une rotation autour de O_A suivie d’une translation d’un vecteur $\mathbf{t} = \overrightarrow{O_A O_B}$. Si la matrice rotation \mathbf{R} et le vecteur translation \mathbf{t} sont définies dans $\{A\}$, alors on peut calculer la matrice de transformation résultante en faisant une prémultiplication (base fixe)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3,3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Attention, si on commute ces deux transformations et le produit de ces deux matrices, on n’obtient pas le même résultat pour le terme de translation, mais $\mathbf{R}\mathbf{t}$.

Ce dernier produit de matrice peut être aussi vu comme une post-multiplication d’une translation suivi d’une rotation définie dans un repère intermédiaire local (voir Fig. 1.8).

Plus généralement, on retrouve la même règle de composition des transformations que pour les matrices rotations. Dans le cas où les transformations sont décrites dans la même base alors on pré-multiplie les matrices, sinon il faut post-multiplier.

Propriétés :

- L'ensemble des matrices de transformations homogènes constitue un groupe appelé $SE(3)$ (Special Euclidien dans \mathbb{R}^3), dont l'élément neutre est la matrice identité de dimension 4×4 .

- L'inverse d'une matrice homogène $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}$ est

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

On peut démontrer aisément que $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{1}_4$.

- Dans le cas d'une composition de transformations chaînées (cas de solides rigides en chaîne cinématique), on utilise la post-multiplication puisque les transformations sont décrites dans des bases locales (non-fixes).

