Modélisation des Robots Manipulateurs

Viviane PASQUI

Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique
ISIR UPMC – CNRS / UMR 7222
Equipe AGATHE – INSERM U1150

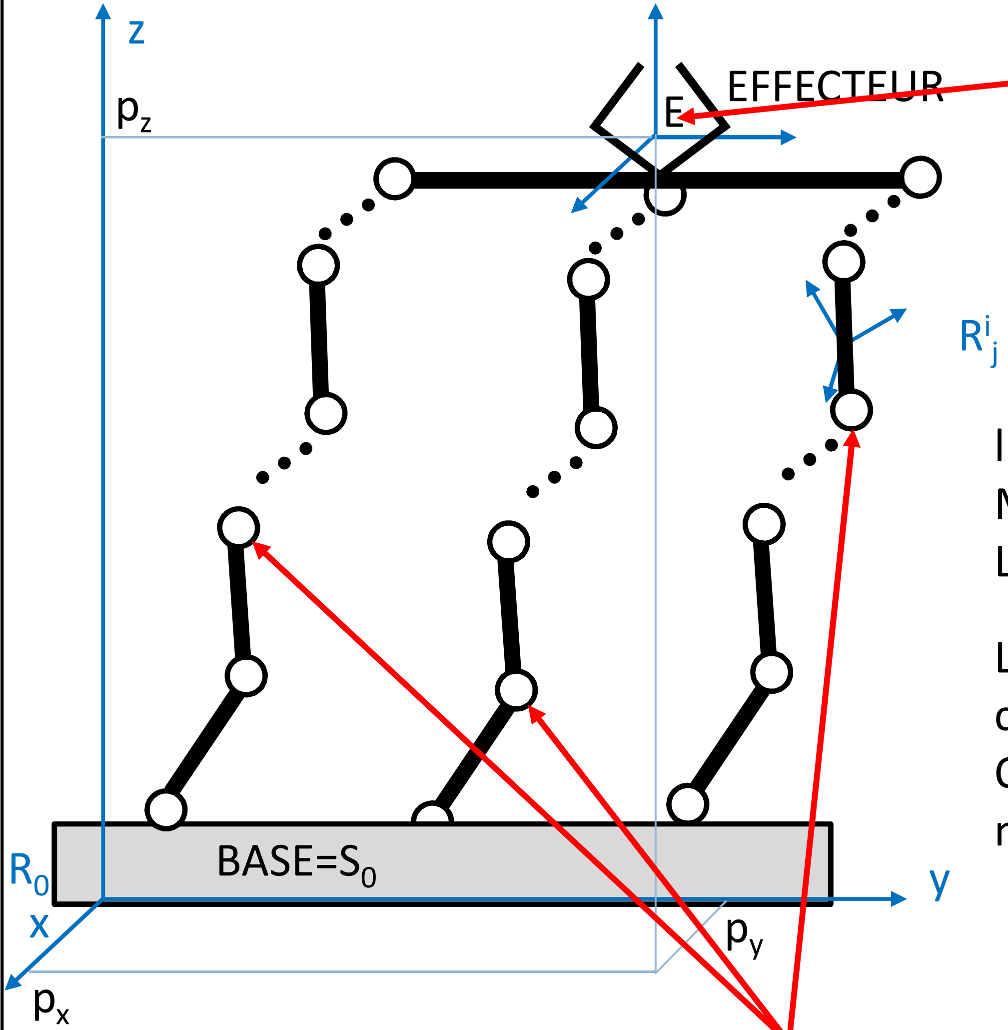
pasqui@isir.upmc.fr

Plan du Cours

- Modèle Cinématique direct des robots série
- Modèle statique direct des robots série
- Configurations singulières des robots série
- Manipulabilité
- Cinématique des robots série redondant
- Paramétrage des robots parallèles
- Mobilité des mécanismes
- Modèle géométrique inverse des robots parallèles
- Modèle cinématique inverse des robots parallèles
- Configurations singulières des robots parallèles

Paramétrage d'un robot parallèle

Paramètres opérationnels:
$\mathbf{x}=[p_x, p_y, p_z, \phi,\theta, \psi]^T$



Segment j de la chaine i =S^i_j

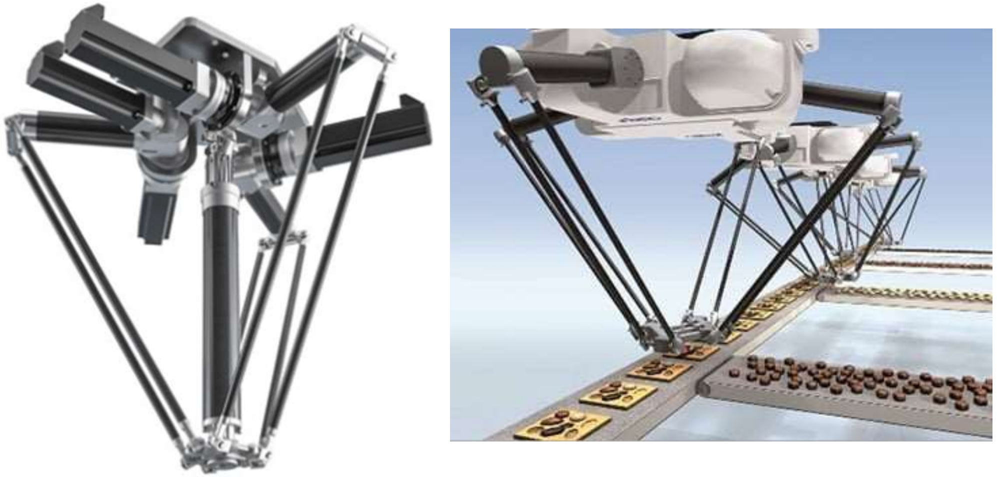
liaison j/moteur j de la chaine i =L^i_j
Moteur= q^{ai}_j
Liaison = q^i_j

Le robot est constitué de c chaines cinématiques
Chacune ayant m moteurs et n liaisons non motorisées (passives)

Paramètres articulaires généralisés:
$\mathbf{q}=[q^{a1}_1(t), \ldots, q^{a1}_m(t), q^1_1(t), \ldots, q^1_n(t), \ldots., q^{ac}_1(t), \ldots, q^{ac}_m(t), q^c_1(t), \ldots, q^c_n(t)\ ]^T$

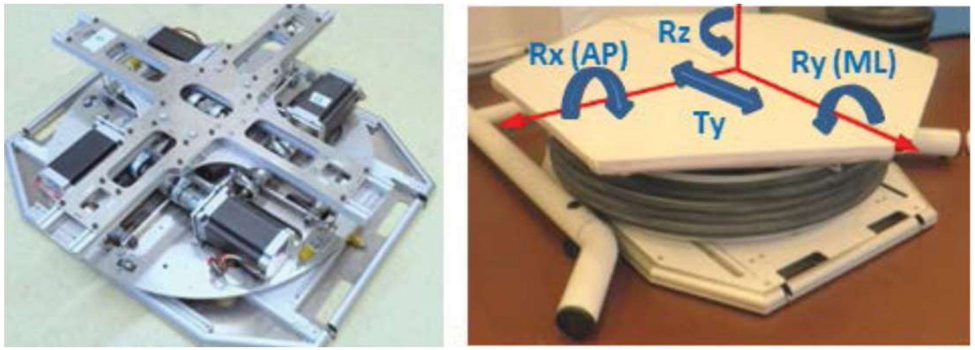
Robots Parallèles

Plateforme de Stewart

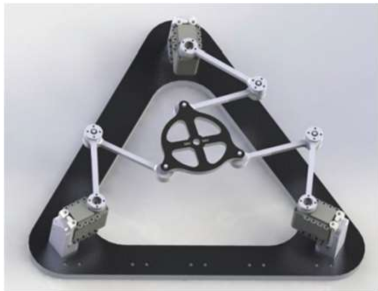


Robot Delta

MIT Manus

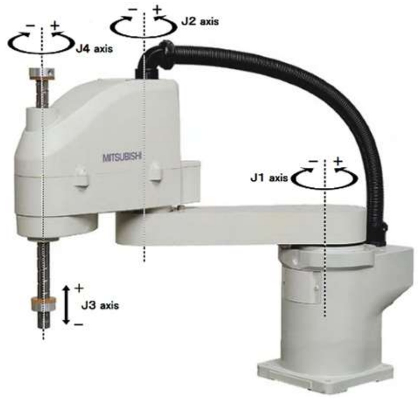


ISIMOV



3R Plan

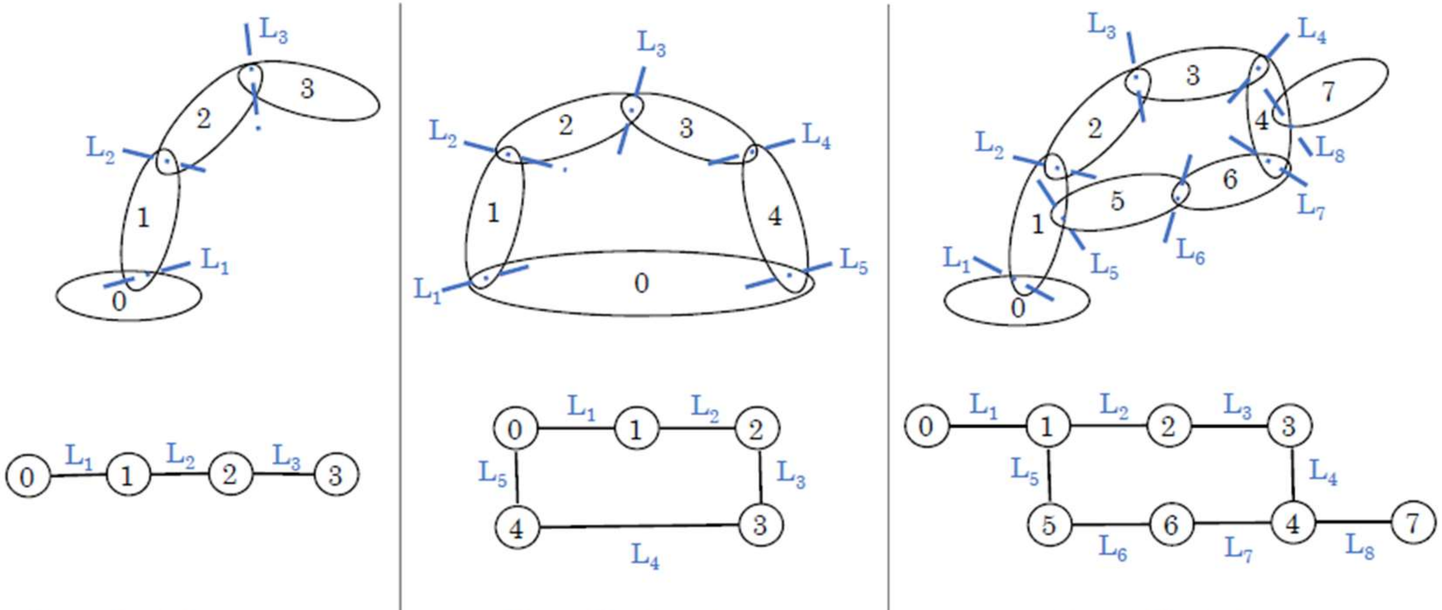
Robots parallèles vs robots série

Transmission de vitesse	+	-
Transmission d’effort	+	-
Domaine de travail	-	+
Précision	+	-
Simplicité mécanique	-	+
simplicité de commande	-	+

Théorie des mécanismes

Représentation des mécanismes par des graphes de liaisons



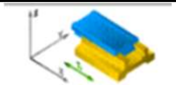
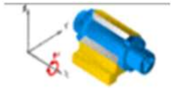
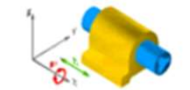
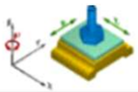
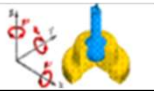
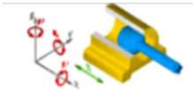
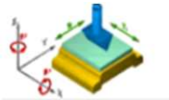
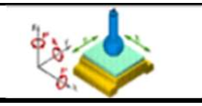
Type I : Arborescent

Type II : A cycles

Type III : Mixte

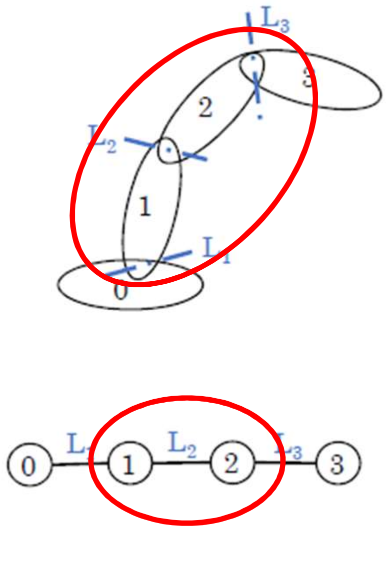
- Combien de mouvements?
- Y a-t-il des blocages?
- Y a-t-il des mobilités qui ne servent pas?

Mobilité des mécanismes

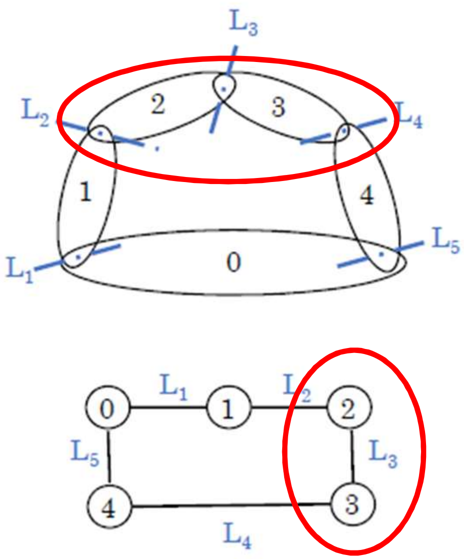
Liaison		Nombre de composantes non nulles dans le torseur cinématique	Nombre de composantes non nulles dans le torseur Statique
Encastrement		0	6
Glissière		1	5
Pivot		1	5
Glissière hélicoïdale		2 liées	4 liées
pivot glissant		2	4
appui plan		3	3
rotule		3	3
appui linéaire annulaire		4	2
appui linéaire rectiligne		4	2
appui ponctuel		5	1

Mobilité des mécanismes

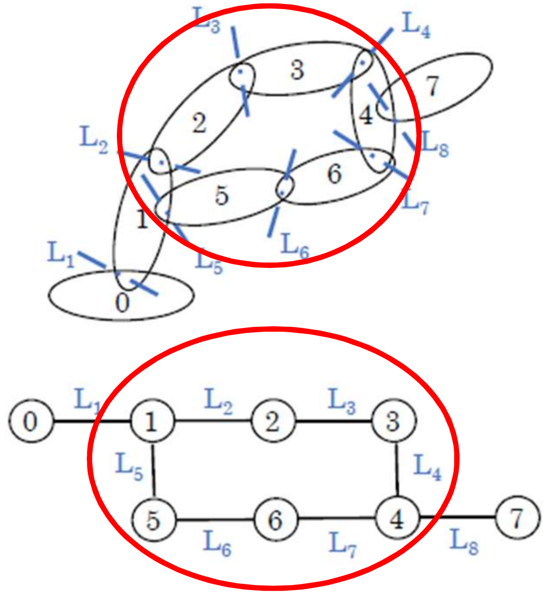
La liaison équivalente entre deux solides est la liaison théorique qui autorise le même mouvement relatif entre les deux solides.



Type I : Arborescent



Type II : A cycles



Type III : Mixte

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{V}_{1/0}(\mathrm{P}) + \mathcal{V}_{1/2}(\mathrm{P}) = \mathcal{V}_{2/1}(\mathrm{P})$$

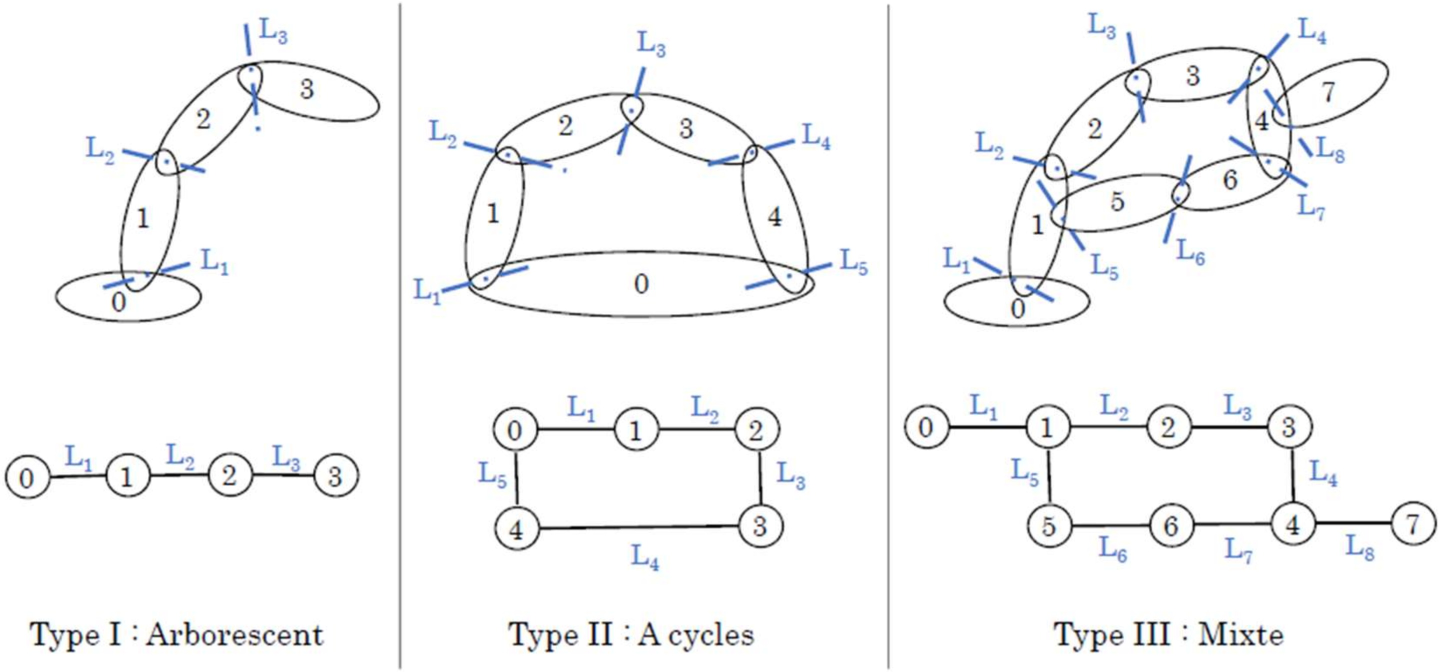
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{V}_{4/3}(\mathrm{P}) + \mathcal{V}_{3/2}(\mathrm{P}) + \mathcal{V}_{2/1}(\mathrm{P}) = \mathcal{V}_{4/1}(\mathrm{P})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{V}_{8/1}(\mathrm{P})$$

Mobilité des mécanismes



N_C : nombre de corps,
N_L : nombre de liaisons,
f_i : degré de liberté dans la $i^{ème}$ liaison,
d : dimension de l'espace (d = 6 ou 3)

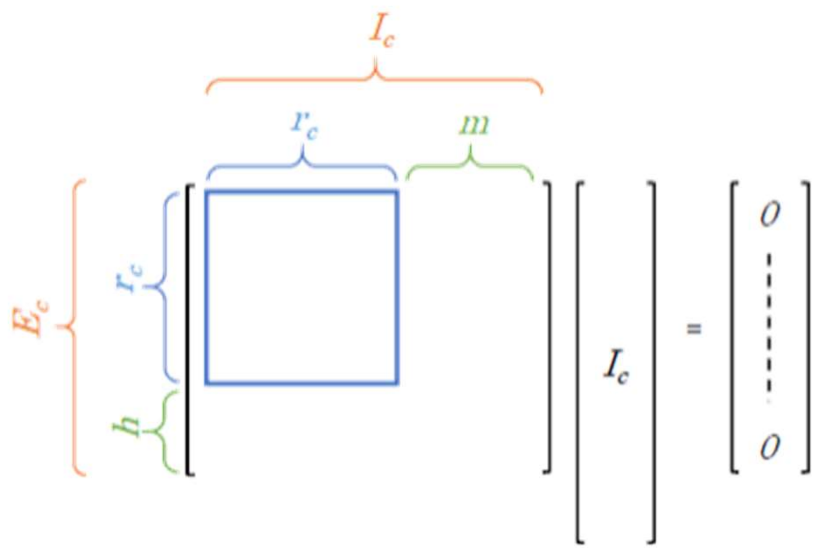
Le nombre de cycles indépendants : $\boxed{\mu = 1 + N_L - N_C}$

L'indice de mobilité : $\boxed{i_m = \sum f_i - d.\ \mu}$

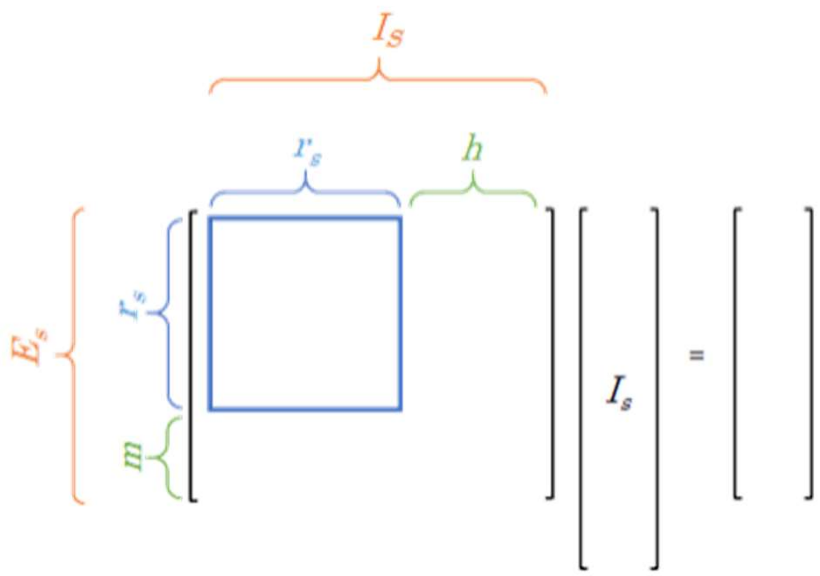
Mobilité des mécanismes

$\sum \mathcal{V}^{\mathrm{i}}_{S_{j-1}\rightarrow S_j}(\mathrm{P}) = \mathcal{V}_{\mathrm{Effecteur}/Base}(\mathrm{P})$

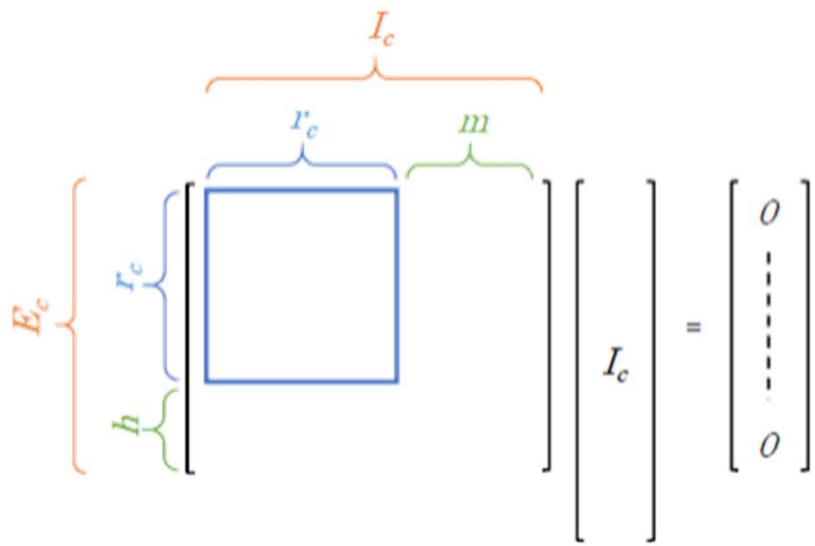
Équations de fermeture de chaine

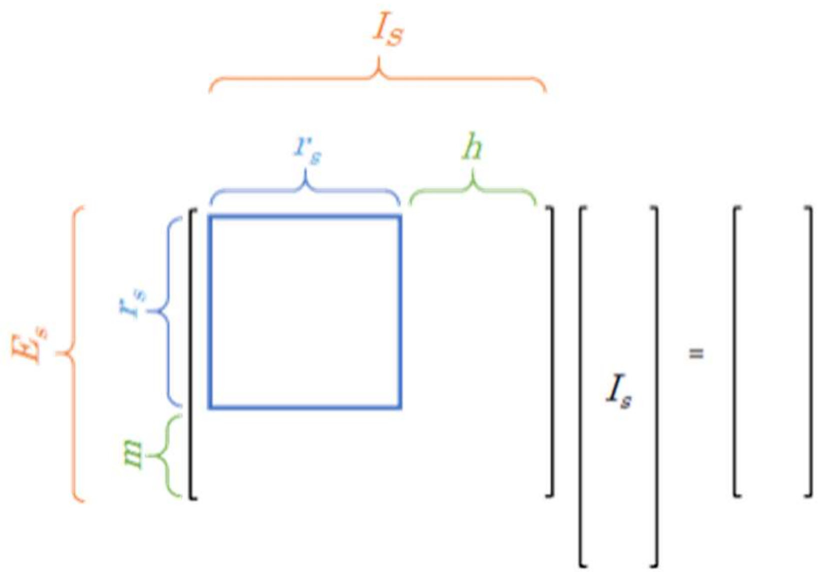


Etude statique/dynamique par corps



Mobilité des mécanismes





I_c : nb d'inconnues cinématiques $=\sum f_i$
E_c : nb d'équations cinématiques $=d\mu$

Is : nb d'inconnues statiques $=\sum(d - f_i)$
Es : nb d'équations statiques $=d(N_C - 1)$

r_c : rang(E_c)
r_s : rang(E_S)
⇒
La mobilité : $m = I_c - r_c = E_S - r_S$ et $m \geq 0$
Le degrès d'hyperstatisme : $h = E_c - r_c = I_S - r_S$ et $h \geq 0$

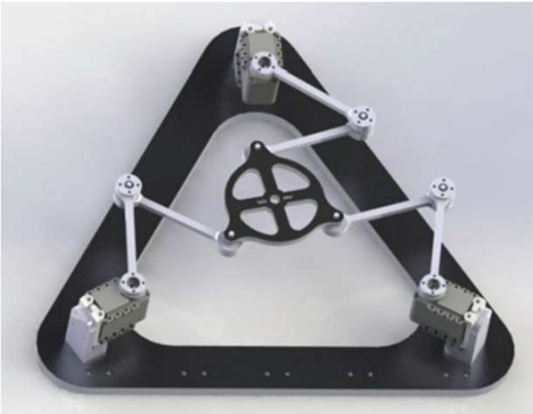
$I_m = I_c - E_c = E_S - I_S = m - h$ ⇒

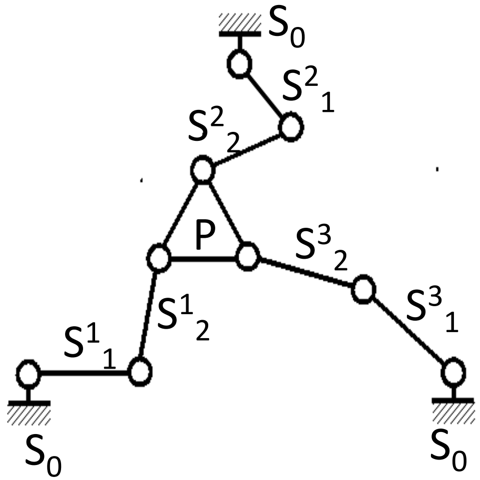
- Si $I_m < 0 \Rightarrow h > 0$
- Si $I_m > 0 \Rightarrow h = 0$ et $m = m_u + m_i$

Mobilité des mécanismes

	Cinématique	Statique
Nombre de corps	N_c	
Nombre de liaisons	N_L	
Dimension de l'espace	d = 6 ou 3	
Nombre de cycles indépendants	$\mu = 1+N_L - N_C$	
Indice de mobilité	$i_m = \sum f_i - d.\ \mu$	
Nombre d'inconnues	$I_c = \sum f_i$	$Is = \sum (d - f_i)$
Nombre d'équations	$E_c = d\mu$	$E_S = d(N_C - 1)$
Mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_S - r_S$
Degrés d'hyperstatisme	$h = E_c - r_c$	$h = I_S - r_S$
$I_m = I_c - E_c = E_S - I_S = m - h = m_u + m_i - h$		

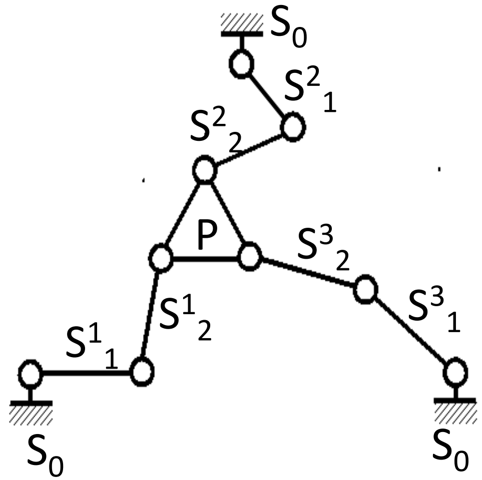
Mobilité des mécanismes: 3R Plan

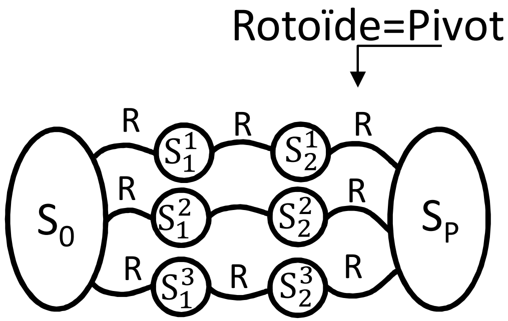




Graphe des liaisons
i_m =?
m =?
On suppose r_C=E_C

Mobilité des mécanismes: 3R Plan





$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_P/S_2^1} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_2^1/S_1^1} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_1^1/S_0} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_P/S_2^2} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_2^2/S_1^2} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_1^2/S_0}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_P/S_2^1} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_2^1/S_1^1} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_1^1/S_0} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_P/S_2^3} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_2^3/S_1^3} + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{S_1^3/S_0}$$

$\Longrightarrow$ d=3 et μ=2: E_C =6

$\Downarrow$

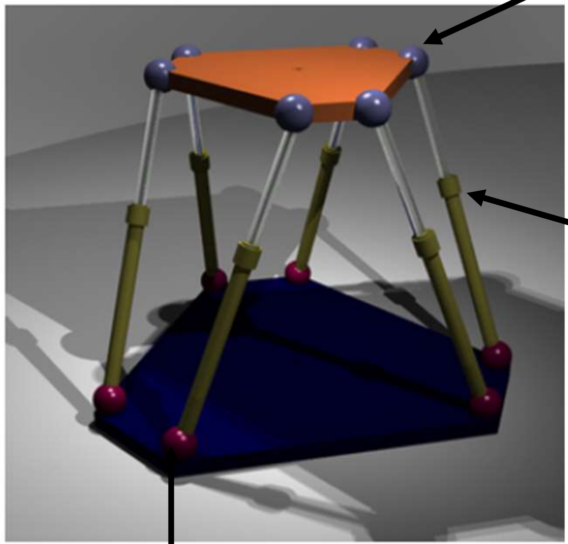
E_C =6 et I_c=9 $\Longrightarrow$ i_m= I_c – E_C = 3

Équations indépendantes: r_c = 6 $\Longrightarrow$ m = I_c - r_c =3

i_m = m - h $\Longrightarrow$ h = 0

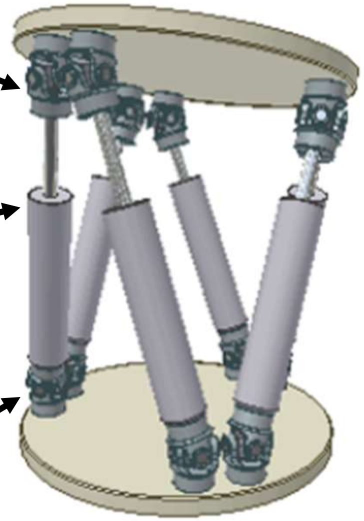
Mobilité des mécanismes: Plateforme de Stewart

6 Liaisons sphériques



6 Liaisons sphériques

6 Liaisons glissiéres



6 Liaisons cardans

6 Liaisons sphériques

⇩

Graphe

i_m =?

m =?

On suppose $r_C = E_C$

⇩

Graphe

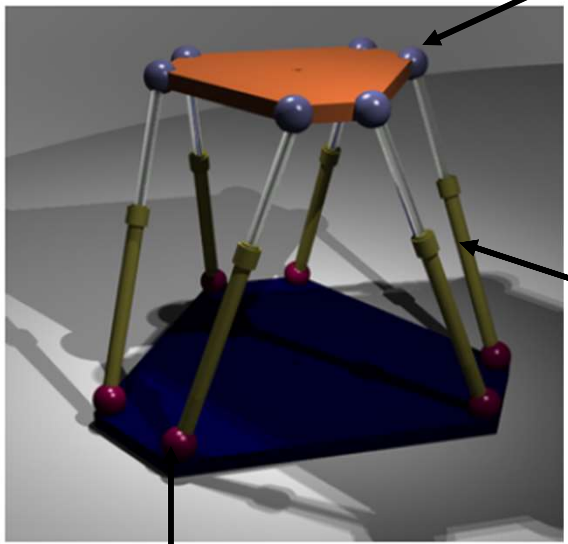
i_m =?

m =?

On suppose $r_C = E_C$

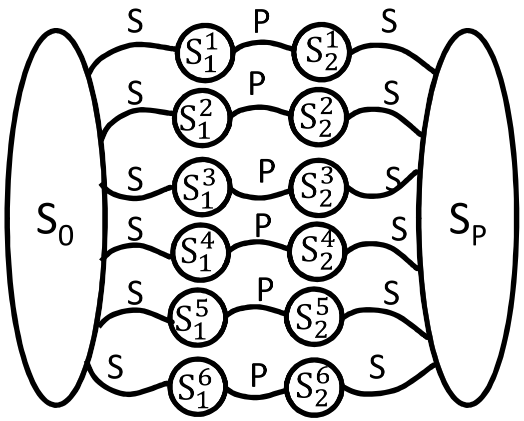
Mobilité des mécanismes: Plateforme de Stewart

6 Liaisons sphériques



6 Liaisons glissiéres

6 Liaisons sphériques

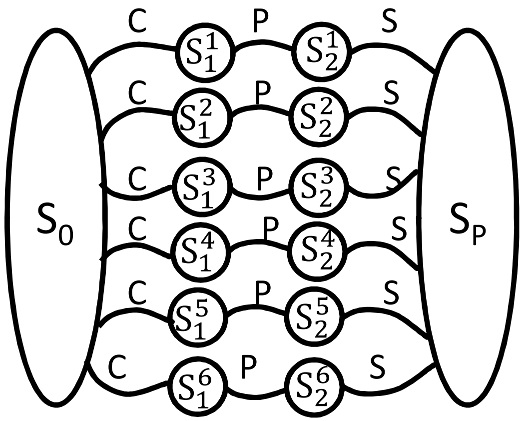


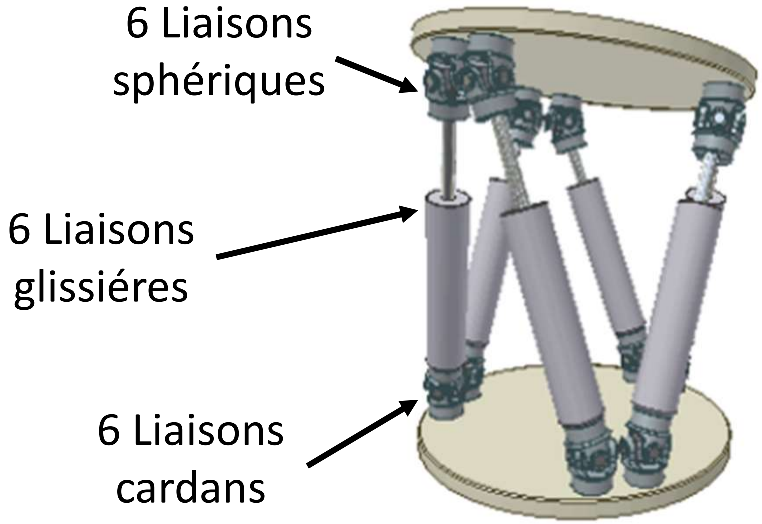
$d=6$
$N_C=14$
$N_L= 18$
$\mu =1+18-14=5$
$E_C =d.\mu = 30$
$I_c=\sum f_i= 6*7=42$

$\Rightarrow$

$i_m = I_c - E_c =12$
$m= 12=6+6$
Il y a 6 mobilités internes

Mobilité des mécanismes: Plateforme de Stewart



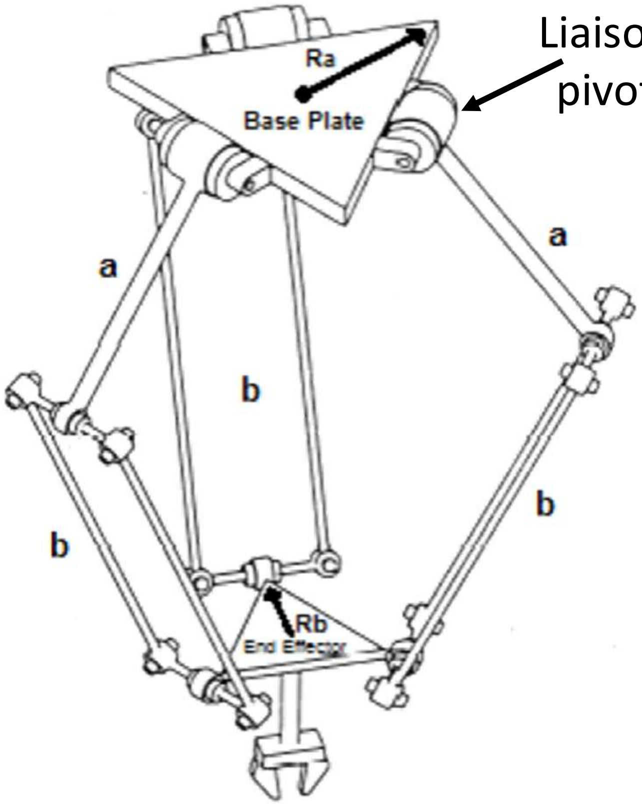


d=6
N_C=14
N_L= 18
μ =1+18-14=5
E_C =d.μ = 30
$I_c = \sum f_i$ = 6*6=36

⇒

$i_m = I_c - E_c = 6$
m= 6
Il y a 6 mobilités internes

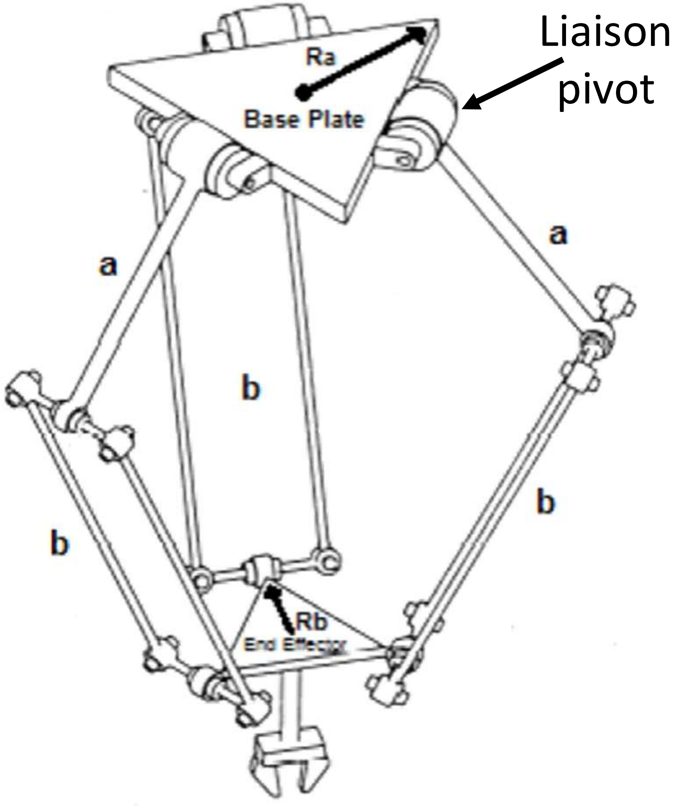
Mobilité des mécanismes: Robot Delta à 3DDL

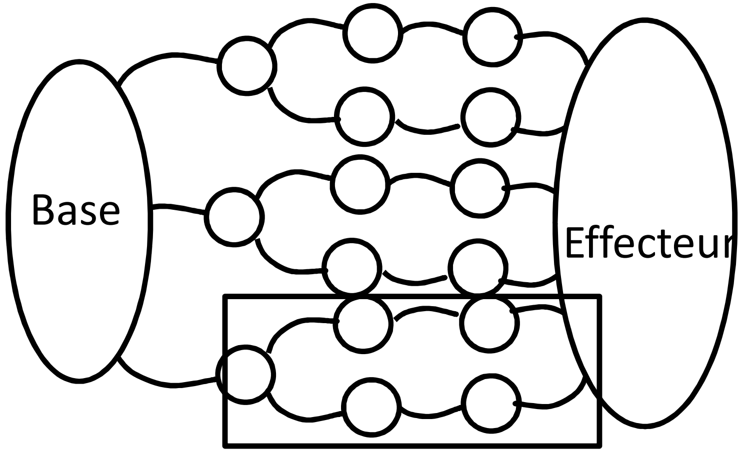


Liaison
pivot

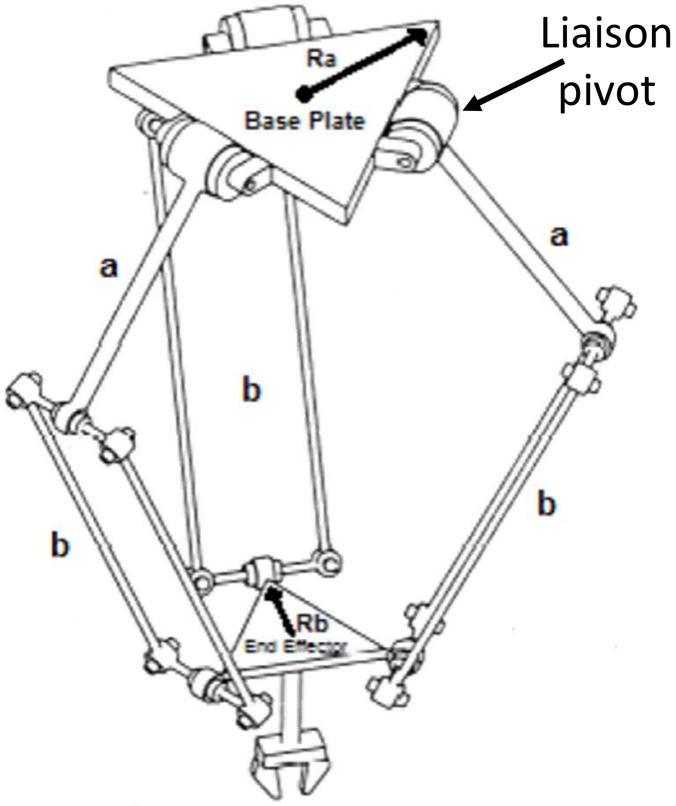
Graphe
i_m =?
m =?
On suppose r_C=E_C

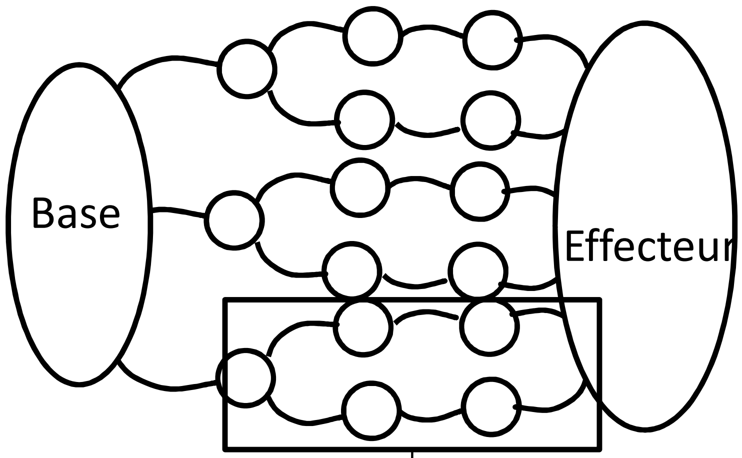
Mobilité des mécanismes: Robot Delta à 3DDL





Mobilité des mécanismes: Robot Delta à 3DDL





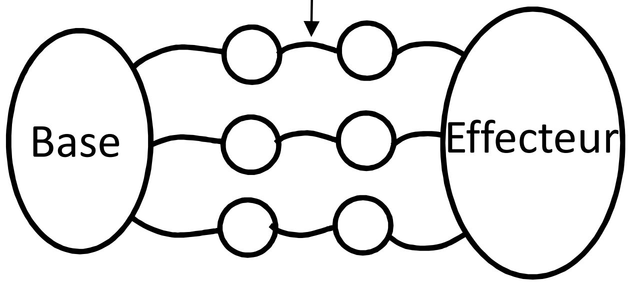
Liaison équivalente

$d=3$ $\quad$ $E_C = d.\mu = 3$

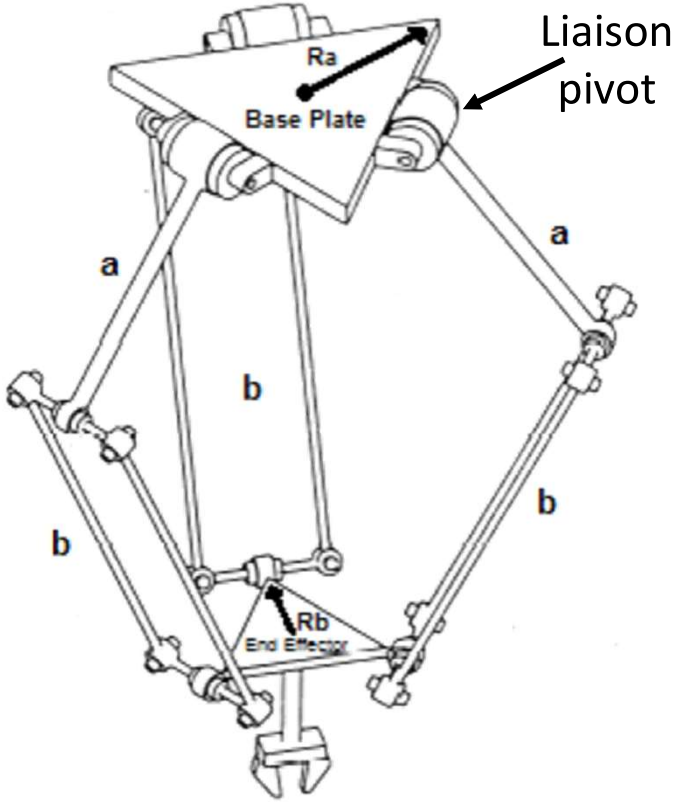
$N_C=6$ $\Rightarrow$ $I_c = \sum f_i = 6$

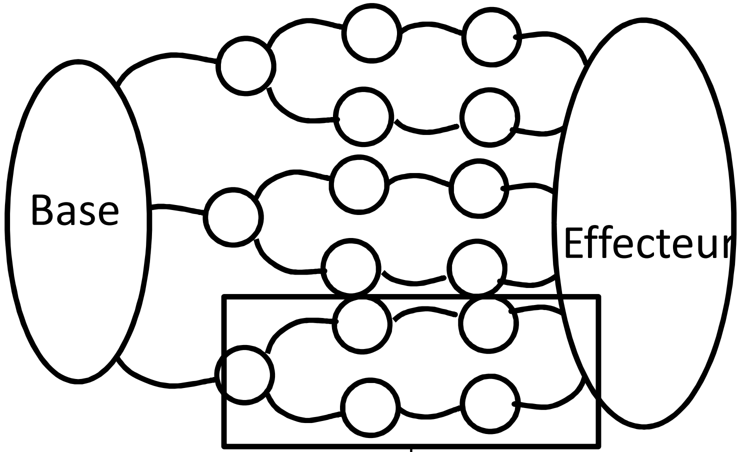
$N_L=6$ $\quad$ $i_m = I_c - E_c = 3$

$\mu = 1$



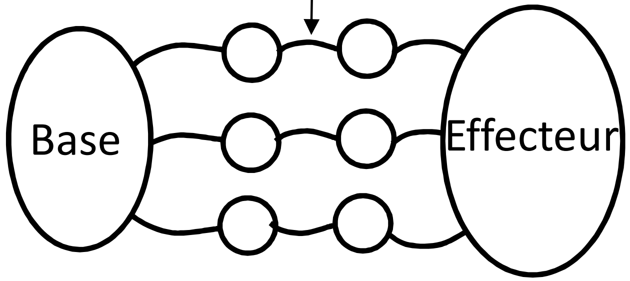
Mobilité des mécanismes: Robot Delta à 3DDL





Liaison équivalente

$d=3$		$E_C = d.\mu = 3$
$N_C=6$	$\Rightarrow$	$I_c = \sum f_i = 6$
$N_L=6$		$i_m = I_c - E_c = 3$
$\mu = 1$		



$d=6$		$E_C = d.\mu = 12$
$N_C=8$	$\Rightarrow$	$I_c = \sum f_i = 15$
$N_L=9$		$i_m = I_c - E_c = 3$
$\mu = 2$		$m=3$

Modèles des robots parallèles

Modèles Géométriques:

Direct $\Longrightarrow$ $\mathbf{x}$=f($\mathbf{q}$)

Inverse $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{q}=f^{-1}(\mathbf{x})}$

Modèles Cinématiques:

Direct $\Longrightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}(q)\dot{\boldsymbol{q}}$

Inverse $\Longrightarrow \boxed{\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{J}^{-1}(q)\dot{\boldsymbol{x}}}$

Modèles Dynamique:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(q,\dot{q})\boldsymbol{q} + \dot{g}(q)$$

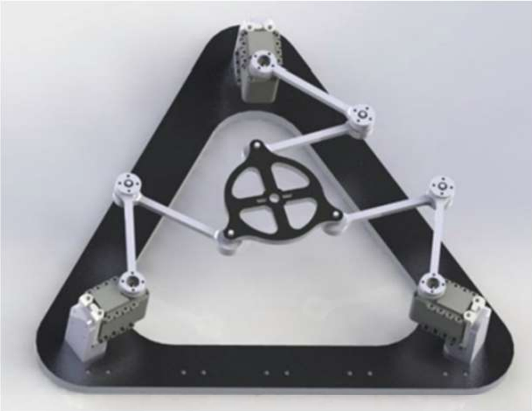
L'utilisation des modèles est la même que celle pour les robots série

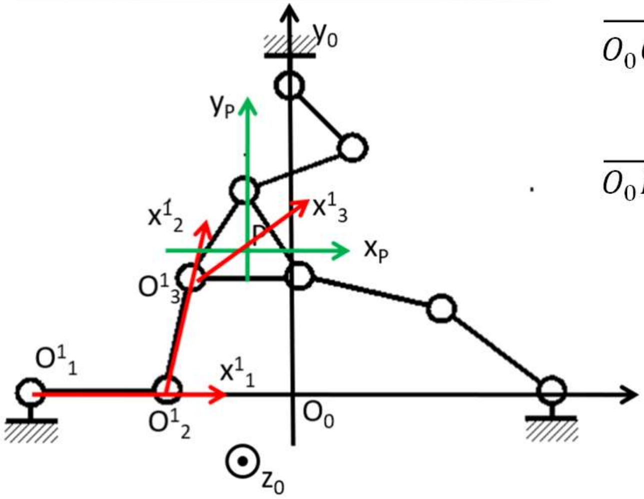
La détermination des modèles se fait **d'abord sur les modèles inverses** puis par inversion pour obtenir les modèles direct

Comme pour les robots série la détermination des **modèles cinématiques peut être plus rapide**, car elle peut être automatisée.

Les variables articulaires apparaissant dans les modèles sont **uniquement celles des actionneurs**

Détermination des modèles géométriques du 3R Plan





$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi \\ X_c \\ Y_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^a = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ q_1^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \textbf{pour chaque chaine i:}\ \mathbf{q}^{\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{bmatrix}$$

Pour chaque chaine i:

$$\overrightarrow{O_0O_1^i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{O_0O_2^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0O_3^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0P} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) + h\cos(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) + h\sin(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \psi = q_1^i + q_2^i + q_3^i \\ x = a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) + h\cos(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ y = b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) + h\sin(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \end{cases}$$

Le modèle géométrique inverse consiste à extraire, de ces 3 équations, la variable articulaire relative à l'actionneur de la chaine i: q_1^i

Détermination des modèles géométriques du 3R Plan

$$\begin{cases} \psi = q_1^i + q_2^i + q_3^i \\ x = a_i + l_1 \cos(q_1^i) + l_2 \cos(q_1^i + q_2^i) + h \cos(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ y = b_i + l_1 \sin(q_1^i) + l_2 \sin(q_1^i + q_2^i) + h \sin(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x - (a_i + l_1 \cos(q_1^i) + h \cos(\psi)) = l_2 \cos(q_1^i + q_2^i) \\ y - (b_i + l_1 \sin(q_1^i) + h \sin(\psi)) = l_2 \sin(q_1^i + q_2^i) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(x - (a_i + l_1 \cos(q_1^i) + h \cos(\psi)))^2 + (y - (b_i + l_1 \sin(q_1^i) + h \sin(\psi)))^2 = {l_2}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} K_1 = x - (a_i + h \cos(\psi)) \\ K_2 = y - (b_i + h \sin(\psi)) \end{cases} \Longrightarrow (K_1 - l_1 \cos(q_1^i))^2 + (K_2 - l_1 \sin(q_1^i))^2 = {l_2}^2$$

$$\Downarrow$$

$$K_1 \cos(q_1^i) + K_2 \sin(q_1^i) = \frac{{K_1}^2 + {K_2}^2 + l_1^2 - l_2^2}{2 l_1} = K_3$$

$$\Downarrow$$

$$T^2 (K_1 + K_3) - 2 K_2 T + K_3 - K_1 = 0 \;\; ; \;\; T = \tan(\frac{q_1^i}{2})$$

Détermination des modèles géométriques du 3R Plan

Le modèle géométrique inverse est décrit par les équations:

$$Si \quad {K_3}^2 > {K_1}^2 \quad \text{alors } q_1^i = 2\arctan\left(\frac{K_2(1 \pm \sqrt{{K_3}^2 - {K_1}^2}}{K_1 + K_3}\right)$$

La **modèle cinématique inverse** s'obtient en dérivant cette relation ou par la méthode des torseurs réciproques.

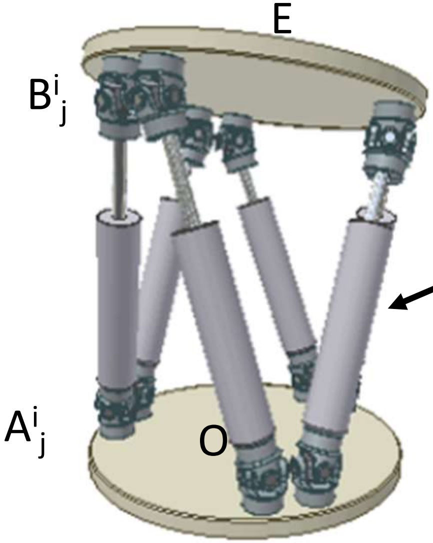
Le **modèle géométrique direct** s'obtient en résolvant le système:

$$\begin{cases} (x - (a_1 + l_1\cos(q_1^1) + h\cos(\psi)))^2 + (y - (b_1 + l_1\sin(q_1^1) + h\sin(\psi)))^2 = {l_2}^2 \\ (x - (a_2 + l_1\cos(q_1^2) + h\cos(\psi)))^2 + (y - (b_2 + l_1\sin(q_1^2) + h\sin(\psi)))^2 = {l_2}^2 \\ (x - (a_3 + l_1\cos(q_1^3) + h\cos(\psi)))^2 + (y - (b_3 + l_1\sin(q_1^3) + h\sin(\psi)))^2 = {l_2}^2 \end{cases}$$

Ou en intégrant numériquement le modèle cinématique direct obtenu avec la méthode des torseurs réciproques

Détermination des modèles géométriques

La détermination du modèle géométrique inverse d'un robot parallèle se fait à partir de conditions géométriques remarquables sur les variables articulaires des actionneurs



1 Actionneur par chaine = liaison glissière

$$\left\| A^i_j B^i_j \right\| = q^{ai}$$

- Exprimer $\overrightarrow{A^i_j B^i_j} = \overrightarrow{A^i_j O} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB^i_j}$
- Calculer $\overrightarrow{A^i_j B^i_j} . \overrightarrow{A^i_j B^i_j}$
- Extraire q^{ai}

$$(\vec{x}_E, \vec{y}_E) = {}^{E}R_B(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$$

$${}^{E}R_B = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) & R_{23}(t) \\ R_{31}(t) & R_{32}(t) & R_{33}(t) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{A^i_j B^i_j} = q^{ai}\ \overrightarrow{z^i_j}$$

$$\overrightarrow{OA^i_j} = r_B \cos(\alpha_i)\ \vec{x}_0 + r_B \sin(\alpha_i)\ \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{OE} = p_x \vec{x}_0 + p_y \vec{y}_0 + p_z \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{EB^i_j} = r_E \cos(\beta_i)\ \vec{x}_E + r_E \sin(\beta_i)\ \vec{y}_E$$

$$\overrightarrow{EB^i_j} = r_E \cos(\beta_i)\ (R_{11}\vec{x}_0 + R_{12}\vec{y}_0 + R_{13}\vec{z}_0) + r_E \sin(\beta_i)\ (R_{21}\vec{x}_0 + R_{22}\vec{y}_0 + R_{23}\vec{z}_0)$$

Détermination des modèles géométriques

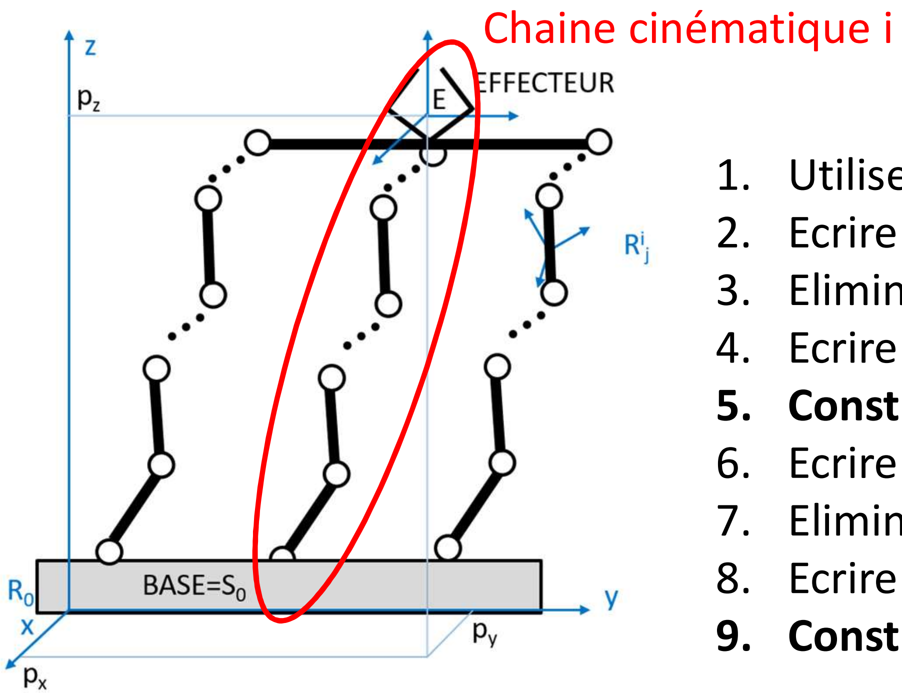
$\overrightarrow{A_j^i B_j^i} . \overrightarrow{A_j^i B_j^i} = (q^{ai})^2 = (p_x + r_E$ cos$(\beta_i) R_{11} + r_E$ sin(β_i) R_{21} $- r_B$ cos$(\alpha_i))^2 + (p_y +$ r_E cos$(\beta_i) R_{21} + r_E$ sin(β_i) R_{22}- r_B sin$(\alpha_i))^2 +$ $+(p_y + r_E$ cos$(\beta_i) R_{21} + r_E$ sin(β_i) $R_{22})^2$

Il y a deux solution géométriques : $q^{ai} \leq 0$ ou $q^{ai} \geq 0$, pour i=1..6

Le modèle géométrique direct consiste à résoudre le système de 6 équations à 6 inconnues….

….. ou à **intégrer numériquement** les modèles cinématiques inverse et direct

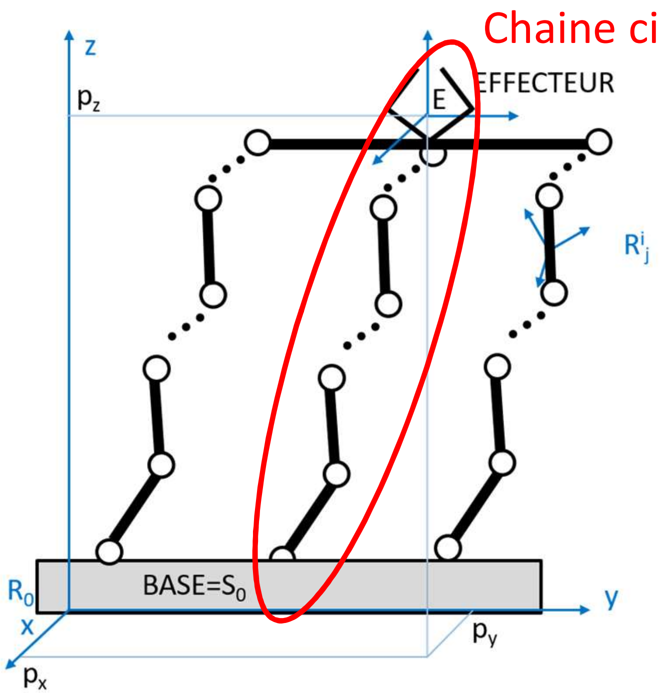
Détermination des modèles cinématiques



1. Utiliser le paramétrage de DH pour les Lj, j=1, .., m
2. Ecrire le modèle cinématique direct de chaque chaine i
3. Eliminer les torseurs cinématiques des liaison passives
4. Ecrire la matrice jacobienne inverse de chaque chaine
5. **Construire la jacobienne inverse du robot**
6. Ecrire le modèle statique direct de chaque chaine
7. Eliminer les torseurs statiques des liaisons passives
8. Ecrire le modèle statique inverse de chaque chaine i
9. **Construire la jacobienne du robot**

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \Big[\underbrace{\boxed{\$^i{}_{1/0} \quad \cdots \quad \$^i{}_{m_a/m_a-1}}}_{\text{Liaisons actives}} \; \underbrace{\boxed{\$^i{}_{m_a+1/m_a} \quad \cdots \quad \$^i{}_{m/m-1}}}_{\text{Liaisons passives}} \Big] \begin{bmatrix} \boxed{\dot{q}_1^{ai}} \\ \vdots \\ \boxed{\dot{q}_m^{i}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{actionneurs} \\ \\ \rightarrow \text{Inconnues de liaisons} \end{array}$$

Détermination des modèles cinématiques



1. Utiliser le paramétrage de DH pour les Lj, j=1, .., m
2. Ecrire le modèle cinématique direct de chaque chaine i
3. Eliminer les torseurs cinématiques des liaison passives
4. Ecrire la matrice jacobienne inverse de chaque chaine
5. **Construire la jacobienne inverse du robot**
6. Ecrire le modèle statique direct de chaque chaine
7. Eliminer les torseurs statiques des liaisons passives
8. Ecrire le modèle statique inverse de chaque chaine i
9. **Construire la jacobienne du robot**

On cherche les $\$_j^{\perp i}$ tels que: $\underbrace{\begin{bmatrix} \$_1^{\perp i^T} \\ \vdots \\ \$_{m_a}^{\perp i^T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^i} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \$_1^{\perp i}.\$_1^i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \$_{m_a}^{\perp i}.\$_{m_a}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^i} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{ai} \\ \vdots \\ \dot{q}_{m_a}^{ai} \end{bmatrix} \longrightarrow$ actionneurs

Détermination du modèle cinématique inverse

$[\$_1].[\$_2]$ $= \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2} \end{bmatrix} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{M_1 M_2}$

dans le même repère

Pour chaque chaine cinématique i, i=1..n

$\mathcal{V}_{\text{Effecteur}/Base}(\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{m_a} \dot{q}_j^{ai}\,\$_j^{\mathrm{i}} + \sum_{k=m_a+1}^{m} \dot{q}_k^{i}\,\$_k^{\mathrm{i}}$

m_a actionneurs et m-m_a liaisons passives

Il existe $\$_j^{\perp \mathrm{i}}$ tel que $[\$_j^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp \mathrm{i}}] = D_j^{\mathrm{i}} \neq 0$ et pour $\mathrm{k} \neq j$: $[\$_k^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp \mathrm{i}}] = 0$

$\$_j^{\perp \mathrm{i}}$ est dit torseur réciproque aux torseurs $\$_k^{\mathrm{i}}$

Détermination du modèle cinématique inverse

$[\$_1].[\$_2]$ $= \begin{bmatrix}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{M_1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{M_2}\end{bmatrix} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{M_1}\overrightarrow{M_2}$

dans le même repère

Pour chaque chaine cinématique i, i=1..n

$$\mathcal{V}_{\text{Effecteur}/Base}(\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{m_a} \dot{q}_j^{ai}\,\$_j^{\mathrm{i}} + \sum_{k=m_a+1}^{m} \dot{q}_k^{i}\,\$_k^{\mathrm{i}}$$

m_a actionneurs et m-m_a liaisons passives

Il existe $\$_j^{\perp\mathrm{i}}$ tel que $[\$_j^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = D_j^{\mathrm{i}} \neq 0$ et pour $\mathrm{k} \neq j$: $[\$_k^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = 0$

$\$_j^{\perp\mathrm{i}}$ est dit torseur réciproque aux torseurs $\$_k^{\mathrm{i}}$

L'analyse suivante est faite dans l'espace vectoriel euclidien orienté et [\$] est le vecteur ayant pour composantes celles du torseur \$.

Pour j=1.. m ,k=1.. m et $\mathrm{k} \neq j$: $[\$_k^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = 0 \implies [\$_j^{\perp\mathrm{i}}]$ est $\perp$ à $([\$_1^{\mathrm{i}}],..,[\$_k^{\mathrm{i}}],..,[\$_m^{\mathrm{i}}])$

$\Rightarrow [\$_j^{\perp\mathrm{i}}]$ est égal au produit vectoriel des vecteurs $[\$_1^{\mathrm{i}}],..,[\$_m^{\mathrm{i}}]$

Soit $([E_1]..[E_m])$ une base orthonormée directe de l'espace vectoriel: $[\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = \sum S_{jp}^{i}[E_p]$,

avec S_{jp}^{i} la $p^{\text{ième}}$ composante de $[\$_j^{\perp\mathrm{i}}]$: $S_{jp}^{i} = [\$_j^{\perp\mathrm{i}}].[E_p]$

Par définition, le produit mixe de $[E_p]$ et $([\$_1^{\mathrm{i}}],..,[\$_m^{\mathrm{i}}])$ est :

$$S_{jp}^{i} = \left|[E_p] \quad [\$_1^{\mathrm{i}}] \quad \ldots \quad [\$_m^{\mathrm{i}}]\right|$$

Réf: Cours de Mathématiques par J. Lelong-Ferrand et JM Arnaudiès, Tome 1, Algèbre , pages 392-393

Détermination du modèle cinématique inverse

Pour chaque chaine cinématique i, i=1..n

$$\mathcal{V}_{\text{Effecteur}/Base}(\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{m_a} \dot{q}_j^{ai}\,\$_j^{\mathrm{i}} + \sum_{k=m_a+1}^{m} \dot{q}_k^{i}\,\$_k^{\mathrm{i}}$$

m_a actionneurs et m-m_a liaisons passives

Il existe $\$_j^{\perp\mathrm{i}}$ tel que $[\$_j^{\mathrm{i}}].[\,\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = D_j^{\mathrm{i}} \neq 0$ et pour $\mathrm{k} \neq j$: $[\$_k^{\mathrm{i}}].[\$_j^{\perp\mathrm{i}}] = 0$

$\$_j^{\perp\mathrm{i}}$ est dit torseur réciproque aux torseurs $\$_k^{\mathrm{i}}$

$$[\$_j^{\perp\mathrm{i}}].[\mathcal{V}_{\text{Effecteur}/Base}(\mathrm{P})] = \dot{q}_j^{ai}[\$_j^{\perp\mathrm{i}}].[\$_j^{\mathrm{i}}] = \dot{q}_j^{ai} B_j^{\mathrm{i}}$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} {\$_1^{\perp i}}^T \\ \vdots \\ {\$_{jm_a}^{\perp i}}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^i} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_1^i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_{m_a}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^i} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{ai} \\ \vdots \\ \dot{q}_{m_a}^{ai} \end{bmatrix}}$$

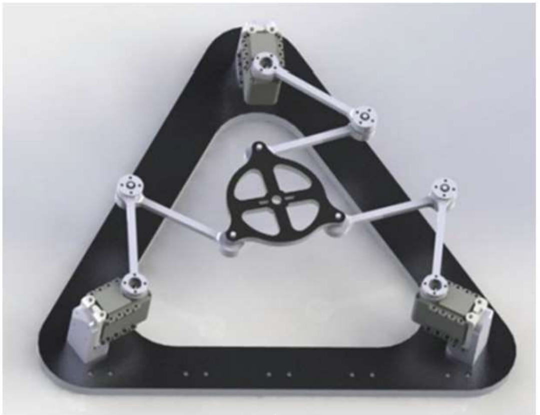
Détermination du modèle cinématique inverse

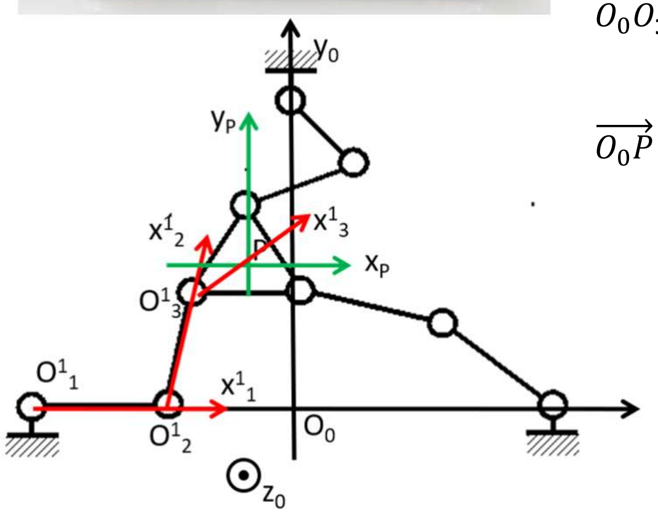
Pour la chaîne i: $$\begin{bmatrix} \dot{q}_1^{ai} \\ \vdots \\ \dot{q}_{m_a}^{ai} \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{B}^i)^{-1}\ \mathbf{A}^i}_{\mathbf{J}_i^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix}$$

Le modèle cinématique inverse s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1^{a1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{m_a}^{ac} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{m_a}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix}$$

Détermination des modèles cinématiques du 3R Plan





$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi \\ X_c \\ Y_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^a = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ q_1^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \textbf{pour chaque chaine i: } \mathbf{q}^{\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{bmatrix}$$

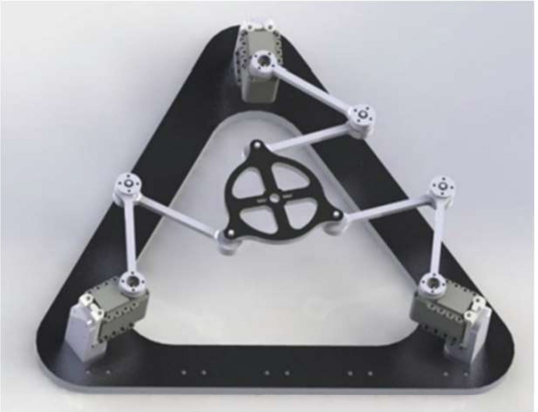
$$\overrightarrow{O_0O_1^i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{O_0O_2^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

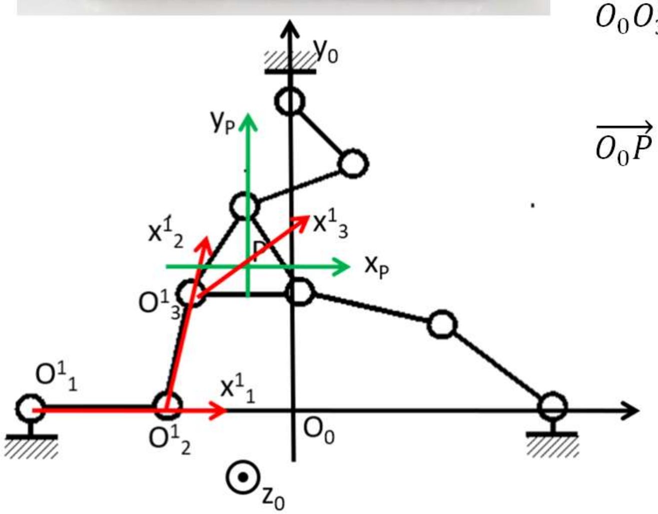
$$\overrightarrow{O_0O_3^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0P} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) + h\cos(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) + h\sin(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour chaque chaine:
- Écrire les torseurs cinématique
- Calculer les torseurs cinématiques réciproques liaisons passives
- Ecrire les matrices

Détermination des modèles cinématiques du 3R Plan





$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi \\ X_c \\ Y_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^a = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ q_1^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \textbf{pour chaque chaine i: } \mathbf{q}^i = \begin{bmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0O_1^i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{O_0O_2^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0O_3^i} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_0P} = \begin{bmatrix} a_i + l_1\cos(q_1^i) + l_2\cos(q_1^i + q_2^i) + h\cos(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ b_i + l_1\sin(q_1^i) + l_2\sin(q_1^i + q_2^i) + h\sin(q_1^i + q_2^i + q_3^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\$_1^i(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\mathrm{l}_1\mathrm{sin}({q^i}_1) - \mathrm{l}_2\mathrm{sin}({q^i}_1 + {q^i}_2) - \mathrm{hsin}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ \mathrm{l}_1\mathrm{cos}({q^i}_1) + \mathrm{l}_2\mathrm{cos}({q^i}_1 + {q^i}_2) + \mathrm{hcos}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\$_2^i(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\mathrm{l}_2\mathrm{sin}({q^i}_1 + {q^i}_2) - \mathrm{hsin}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ \mathrm{l}_2\mathrm{cos}({q^i}_1 + {q^i}_2) + \mathrm{hcos}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \$_3^i(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\mathrm{hsin}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ \mathrm{hcos}({q^i}_1 + {q^i}_2 + {q^i}_3) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Détermination des modèles cinématiques du 3R Plan

Pour chaque chaine i: $\mathcal{V}_{\text{Eff}/Base}(\text{P}) = \dot{q}_1^{ai}\$_1^i(\text{P}) + \dot{q}_2^i\$_1^i(\text{P}) + \dot{q}_3^i\$_1^i(\text{P})$

Pour chaque chaine i, on cherche : $\$_1^{\perp i} = \begin{Bmatrix} r_1^i \\ r_2^i \\ r_3^i \end{Bmatrix}$ vérifiant : $\begin{cases} (1)\ \$_1^{\perp i}.\$_1^i \neq 0 \\ (2)\ \$_1^{\perp i}.\$_2^i = 0 \\ (3)\ \$_1^{\perp i}.\$_3^i = 0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$r_1^i = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & \$_2^i & \$_3^i \\ 0 & & \end{vmatrix}}_{hl_2 \sin(q^i{}_3)}, r_2^i = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & & \\ 1 & \$_2^i & \$_3^i \\ 0 & & \end{vmatrix}}_{l_2 \cos(q^i{}_1 + q^i{}_2)}, r_3^i = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & \$_2^i & \$_3^i \\ 1 & & \end{vmatrix}}_{l_2 \sin(q^i{}_1 + q^i{}_2)} \ et\ \ \$_1^{\perp i} \circ \$_1^i = l_1 l_2 \sin(q^i{}_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\$_1^{\perp i} \circ \mathcal{V}_{\text{Eff}/Base}(\text{P}) = \dot{q}_1^{ai}\$_1^{\perp i}.\$_1^i + \cancel{\dot{q}_2^i\$_1^{\perp i}.\$_2^i} + \cancel{\dot{q}_3^i\$_1^{\perp i}.\$_3^i} \Longrightarrow \$_1^{\perp i}\mathcal{V}_{\text{Eff}/Base}(\text{P}) = \dot{q}_1^i\$_1^{\perp i}.\$_1^i$$

Détermination des modèles cinématiques du 3R Plan

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \mathbf{B}\begin{bmatrix}\dot{\mathrm{q}}_1^1\\ \dot{\mathrm{q}}_1^2\\ \dot{\mathrm{q}}_1^3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} hl_2\sin(q^1{}_3) & hl_2\sin(q^2{}_3) & hl_2\sin(q^3{}_3) \\ l_2\cos(q^1{}_1 + q^1{}_2) & l_2\cos(q^2{}_1 + q^2{}_2) & l_2\cos(q^3{}_1 + q^3{}_2) \\ l_2\sin(q^1{}_1 + q^1{}_2) & l_2\sin(q^2{}_1 + q^2{}_2) & l_2\sin(q^3{}_1 + q^3{}_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} l_1 l_2\sin(q^1{}_2) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 l_2\sin(q^2{}_2) & 0 \\ 0 & 0 & l_1 l_2\sin(q^3{}_2) \end{bmatrix}$$

Le modèle cinématique inverse du robot parallèle 3R plan s'écrit:

$$Si\ q_2^i \neq 0\ ou\ \pi\ alors\ \ \dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{J}^{-1}}\dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} {h\sin(q^1{}_3)}\big/{l_1\sin(q^1{}_2)} & {h\sin(q^2{}_3)}\big/{l_1\sin(q^1{}_2)} & {h\sin(q^3{}_3)}\big/{l_1\sin(q^1{}_2)} \\ {\cos(q^1{}_1 + q^1{}_2)}\big/{l_1\sin(q^2{}_2)} & {\cos(q^2{}_1 + q^2{}_2)}\big/{l_1\sin(q^2{}_2)} & {\cos(q^3{}_1 + q^3{}_2)}\big/{l_1\sin(q^2{}_2)} \\ {\sin(q^1{}_1 + q^1{}_2)}\big/{l_1\sin(q^3{}_2)} & {\sin(q^2{}_1 + q^2{}_2)}\big/{l_1\sin(q^3{}_2)} & {\sin(q^3{}_1 + q^3{}_2)}\big/{l_1\sin(q^3{}_2)} \end{bmatrix}$$

Détermination du modèle statique inverse

Pour chaque chaine i: $\mathcal{F}_{ext \to effecteur}\,(\mathrm{P}) = \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{m_a} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{j-1} \to S_j}(\mathrm{P})}}_{\text{Liaisons actives}} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=m_a+1}^{m} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1} \to S_k}(\mathrm{P})}}_{\text{Liaisons passives}}$

Détermination du modèle statique inverse

Pour chaque chaine i: $\mathcal{F}_{ext\rightarrow effecteur}\ (\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{m_a} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{j-1}\rightarrow S_j}(\mathrm{P}) + \sum_{k=m_a+1}^{m} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k}(\mathrm{P})$

Si la liaison est une pivot d'axe $(O^i_{k-1}\ ,\vec{z}^i_{k-1})$:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k}\left(O^i_{k-1}\right) = \begin{Bmatrix} \vec{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k} \\ \vec{M}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k} \end{Bmatrix}_{O^i_{k-1}} \quad avec\ \ \vec{M}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k}(O^i_{k-1}).\ \vec{z}^i_{k-1}=0$$

Si la liaison est une glissière d'axe $(O^i_{k-1}\ ,\vec{z}^i_{k-1})$:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k}\ \left(O^i_{k-1}\right) = \begin{Bmatrix} \vec{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k} \\ \vec{M}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k} \end{Bmatrix}_{O^i_{k-1}} \quad avec\ \ \vec{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\rightarrow S_k}.\ \vec{z}^i_{k-1}=0$$

Détermination du modèle statique inverse

Pour chaque chaine i: $\mathcal{F}_{ext\to effecteur}\,(\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{m_a} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{j-1}\to S_j}(\mathrm{P}) + \sum_{k=m_a+1}^{m} \mathcal{F}^{\mathrm{i}}_{S_{k-1}\to S_k}(\mathrm{P})$

Il existe $\$_j^{\perp \mathrm{i}}$ tel que $\$_j^{\mathrm{i}}.\,\$_j^{\perp \mathrm{i}} = D_j^{\mathrm{i}} \neq 0$ et pour $\mathrm{k} \neq j$: $\$_k^{\mathrm{i}}.\$_j^{\perp \mathrm{i}} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\$_j^{\perp \mathrm{i}}.\mathcal{F}_{ext\to effecteur}\,(\mathrm{P}) = \tau_j^{ai}\$_j^{\perp \mathrm{i}}.\$_j^{\mathrm{i}} = \dot{q}_j^{ai} D_j^{\mathrm{i}}$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} \$_1^{\perp i^T} \\ \vdots \\ \$_{m_a}^{\perp i^T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^i} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_1^i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & D_{m_a}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^i} \begin{bmatrix} \tau_1^{ai} \\ \vdots \\ \tau_{m_a}^{ai} \end{bmatrix}}$$

Détermination du modèle statique inverse

$$\text{Pour la chaîne i:}\begin{bmatrix}\tau_1^{ai}\\ \vdots\\ \tau_{m_a}^{ai}\end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{D}^i)^{-1}\,\mathbf{C}^i}_{\mathbf{J}_i^T}\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\\ m_x\\ m_y\\ m_z\end{bmatrix}$$

Le modèle statique inverse d'un robot parallèle s'écrit:

$$\begin{bmatrix}\tau_1^{a1}\\ \vdots\\ \tau_{m_a}^{an}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{J}_{m_a}^T\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^T}\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\\ m_x\\ m_y\\ m_z\end{bmatrix}$$

Configurations singulières des robots parallèles

Pour chaque chaine i : $\mathbf{A}_i\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_i\dot{\mathbf{q}}^{ai}$

$\dim(\dot{\mathbf{x}}) = 6\text{x}1$, $\dim\left(\dot{\mathbf{q}}^{ai}\right) = m_a\text{x}1, \dim(\mathbf{A}_i) = m_a\text{x}6$, $\dim(\mathbf{B}_i) = \dot{\mathbf{q}}^{ai}$

Pour un robot parallèle : $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$

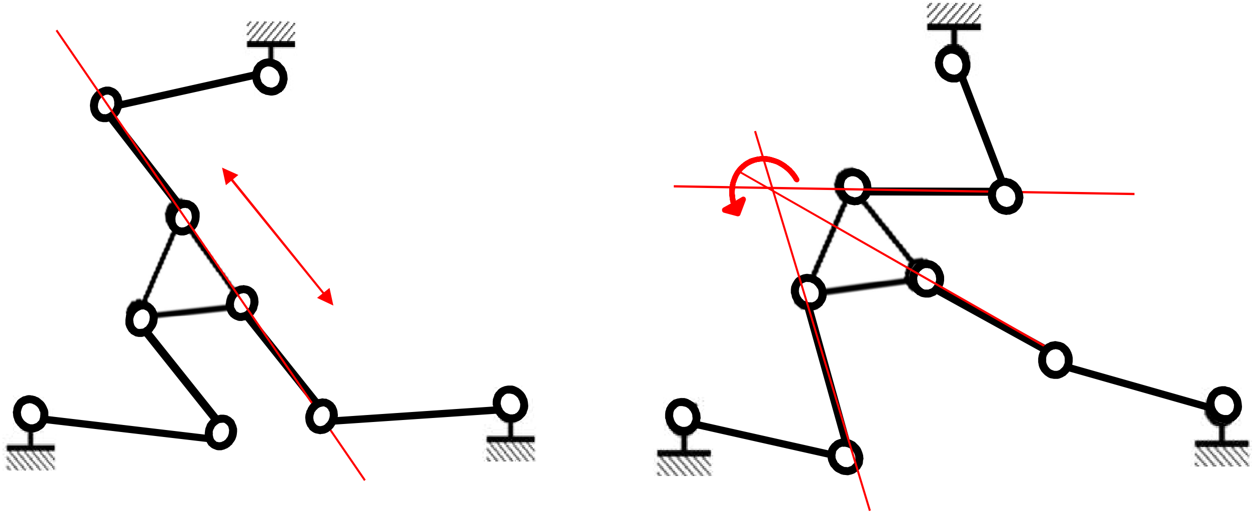
$$\dim(\mathbf{A}) = n.m_a\,\text{x}6 \;\; et \; \dim(\mathbf{B}) = n.m_a\text{x}n.m_a$$

Un robot parallèle est dans une configuration singulière lorsque:

- $det(\mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow$ les torseurs réciproques sont liés, des efforts ne sont plus transmis dans au moins une direction. Dans ces directions il apparaît au moins un DDL non controlable.
- $det(\mathbf{B}) = 0 \;\Rightarrow$ Une au moins des chaines cinématiques est en configuration singulière. Le robot perd au moins un DDL.

Les configurations singulières du 3R Plan

Mobilité non contrôlable



Mobilité perdue