Dynamique des robots séries

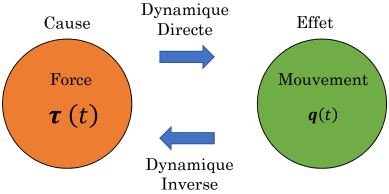
Equations de mouvement

Pour tout système ayant n paramètres de mouvement indépendants

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- $\mathbf{q}(t) = [q_1, \cdots, q_n]^T$ vecteur des paramètres,
- $\dot{\mathbf{q}}(t)$ vecteur des vitesses, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ vecteur des accélérations,
- $\mathbf{M}$ matrice $n \times n$, dite matrice masse,
- $\mathbf{c}$ vecteur de dimension n, qui représente les forces de Coriolis et centrifuges,
- $\mathbf{g}$ vecteur de dimension n, qui représente les forces de gravité et élastiques (ou toutes les forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle),
- $\boldsymbol{\tau}$ est vecteur de dimension n, qui représente les forces motrices des actionneurs.

Dynamique Direct et Inverse



Equation d'état (forme causale) : $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, t)$

- l'état $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 = \mathbf{q} \\ \mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ et sa dérivée $\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$
- fonction f fonction d'état

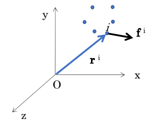
$$f(\mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{y}_1)\,(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{c}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_1)) \end{pmatrix}$$

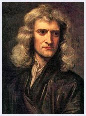
Principe de Newton vs D'Alembert

Equation de Newton

Equation d'une masse ponctuelle

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$$





Isaac Newton (1643 - 1727)

Principe de D'Alembert

Principe des travaux virtuels

$$\mathbf{f}.\delta\mathbf{r} - m\ddot{\mathbf{r}}.\delta\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \forall\delta\mathbf{r}$$

ou des puissances virtuelles

$$\mathbf{f}.\dot{\mathbf{r}}^* - m\ddot{\mathbf{r}}.\dot{\mathbf{r}}^* = \mathbf{0} \quad \forall\dot{\mathbf{r}}^*$$

Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783)

Coordonnées généralisées

- C'est un ensemble de paramètres $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ qui permet de définir entièrement la configuration.
- $\mathbf{q}$ n'est pas nécessairement composé des coordonnées cartésiennes. Il contient angle, distance relative ... unités différentes.
- Peuvent être **dépendantes**, dans ce cas il existe des **contraintes**.
- Toute position matérielle peut s'écrire sous la forme $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$,

Déplacement virtuel

Un déplacement virtuel est défini comme un déplacement infinitésimal compatible avec les contraintes. Un déplacement virtuel est imaginaire dans le sens où il est supposé se produire sur un temps maintenu fixe.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$$

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j$$

Si les contraintes sont scléronomes $\delta \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r}$, alors que si elles sont rhéonomes $\delta \mathbf{r} \neq d\mathbf{r}$.

Forces généralisées

- Forces ne sont pas nécessairement représentées en coordonnées cartésiennes mais en coordonnées généralisées.
- Comment calculer les forces généralisées ? $\Rightarrow$ **Écrire le travail virtuel**

Soit n_p forces $\mathbf{f}^i$ appliquées sur un système de particules i. Le travail virtuel de ces forces pendant un déplacement virtuel $\delta\mathbf{r}^i$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{f}^i . \delta\mathbf{r}^i$$

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \qquad Q_j = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{f}^i . \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{f}^i . \mathbf{r}^i_{q_j}$$

$\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \ \ldots Q_n]^T$ sont les forces généralisées issues des forces cartésiennes $\mathbf{f}^i$

Quantité d'Accélération généralisée

Travail virtuel des quantités d'accélérations $m\ddot{\mathbf{r}}$

$$\delta W_a = \sum_{i=1}^{n_p} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i . \delta \mathbf{r}^i$$

$$\delta W_a = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta q_j \qquad a_j = \sum_{i=1}^{n_p} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i . \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}$$

$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \ldots a_n]^T$ vecteur des accélérations généralisées.

accélérations généralisées (suite)

On montre que

$$a_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j}$$

$$\delta W_a = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j}\right]\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta q_j$$

avec E_c est l'énergie cinétique totale. Pour un système de masses ponctuelles

$$E_c = \sum_{i=1}^{n_p} E_c^i = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{1}{2} m^i \dot{\mathbf{r}}^{iT} \dot{\mathbf{r}}^i$$

accélérations généralisées (suite)

On utilise pour cela

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}\right) &= \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}\right) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k\right] + \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_j \partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right] + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial q_j}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}$$

Equation de Lagrange, paramètres indépendants

Principe de D'Alembert

$$\sum_{i=1}^{n_p} (\mathbf{f}^i - m^i \ddot{\mathbf{r}}^i).\delta \mathbf{r}^i = 0$$

D'où l'équation de D'Alembert-Lagrange

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

si q_j **sont indépendants**, alors l'équation de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n}$$

Le Lagrangian

Le système est soumis à des

- actions conservatives (gravité, ressort, ...) dont les forces généralisées
  $\mathbf{Q}_{co} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ $\quad E_p$ est l'énergie potentielle
- actions non-conservatives (actionneur, amortisseur, frottement, ...) : $\mathbf{Q}_{nc}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{co} + \mathbf{Q}_{nc}$$

Soit le Lagrangien $\mathcal{L}$

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_p(\mathbf{q})}$$

Equation de Lagrange devient

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{Q}_{nc}}$$

Énergie potentielle

L'énergie potentielle de gravité du corps i

$$E_{p_g}^{\ i} = -m^i \mathbf{g}^T \mathbf{r}^i$$

$\mathbf{g}$ l'accélération de gravité
$\mathbf{r}^i$ la position du c.d.g

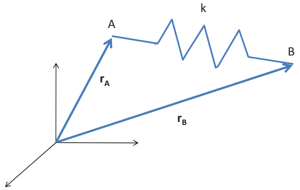
Énergie potentielle d'un système multi-corps

$$E_{p_g} = \sum_{i=1}^{n} E_{p_g}^{\ i}$$

Énergie potentielle élastique d'un ressort

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} k (\delta l)^2$$

k la raideur
$\delta l = l - l_0$ la déformation
l_0 la longueur libre
$l = || \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A ||$



Energie cinétique d'un solide rigide

L'énergie cinétique d'un solide rigide (i) (% rep. Galiléen) en notation matricielle

$$E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

- m masse du solide,
- $\mathbf{v}_G$ vitesse linéaire du centre de gravité G du solide (% rep. Galiléen),
- $\boldsymbol{\omega}$ vitesse angulaire (vecteur rotation) du solide (% rep. Galiléen),
- $\mathbf{I}_G$ matrice d'inertie, de taille 3x3, du solide au centre de gravité,

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} \int_V (y^2+z^2)dm & -\int_V xydm & -\int_V xzdm \\ -\int_V xydm & \int_V (x^2+z^2)dm & -\int_V yzdm \\ -\int_V xzdm & -\int_V yzdm & \int_V (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

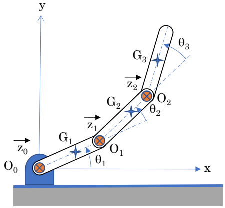
- Expression invariante de la base.

Energie cinétique d'un robot série

On calcule le modèle cinématique de chaque segment i au son centre de gravité G_i

Vitesse linéaire et angulaire absolues du segment i au c.d.g exprimées dans i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G^i &= \mathbf{J}_t^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}^i &= \mathbf{J}_r^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

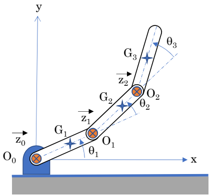


$\mathbf{J}_t^i$ et $\mathbf{J}_r^i$ sont les Jacobiennes de translation et de rotation

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^i \\ \hline \mathbf{v}_G^i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \$_1 & \cdots & \$_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^i\text{:Jacobienne cinématique en } G_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^i \\ \hline \mathbf{J}_t^i \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

Calcul des Jacobiennes d'un manipulateur 3R

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}^1 \\ \hline \mathbf{v}_G^1 \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{z}}_0 & \vec{0} & \vec{0} \\ \hline \vec{\mathbf{z}}_0 \times \vec{O_0 G_1} & \vec{0} & \vec{0} \end{array}\right]}_{\mathrm{J}^1\text{:Jacobienne cinématique en } G_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_r^1 \\ \hline \mathbf{J}_t^1 \end{array}\right] \dot{\mathbf{q}}$$



$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}^2 \\ \hline \mathbf{v}_G^2 \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{z}}_0 & \vec{\mathbf{z}}_1 & \vec{0} \\ \hline \vec{\mathbf{z}}_0 \times \vec{O_0 G_2} & \vec{\mathbf{z}}_1 \times \vec{O_1 G_2} & \vec{0} \end{array}\right]}_{\mathrm{J}^2\text{:Jacobienne cinématique en } G_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_r^2 \\ \hline \mathbf{J}_t^2 \end{array}\right] \dot{\mathbf{q}}$$

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}^3 \\ \hline \mathbf{v}_G^3 \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{z}}_0 & \vec{\mathbf{z}}_1 & \vec{\mathbf{z}}_2 \\ \hline \vec{\mathbf{z}}_0 \times \vec{O_0 G_3} & \vec{\mathbf{z}}_1 \times \vec{O_1 G_3} & \vec{\mathbf{z}}_2 \times \vec{O_2 G_3} \end{array}\right]}_{\mathrm{J}^3\text{:Jacobienne cinématique en } G_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_r^3 \\ \hline \mathbf{J}_t^3 \end{array}\right] \dot{\mathbf{q}}$$

Matrice Masse d'un système multi-corps

L'énergie cinétique totale du système s'écrit donc

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{t,i}^T \mathbf{J}_{t,i}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{r,i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{r,i}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{J}_{t,i}^T \mathbf{J}_{t,i} + \mathbf{J}_{r,i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{r,i} \right) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

où $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{J}_{t,i}^T \mathbf{J}_{t,i} + \mathbf{J}_{r,i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{r,i}$ est la matrice masse du système.

Propriétés de la matrice Masse

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$

- est la matrice masse, elle dépend de la configuration $\mathbf{q}$
- est carrée $n \times n$, n est la dimension de $\mathbf{q}$
- est symétrique, et définie positive
- a des valeurs propores positives $0 < \lambda_1(\mathbf{q}) \leq \ldots \leq \lambda_n(\mathbf{q})$

Equations de mouvement

Le Lagrangien du système s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) &= E_c(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - E_p(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - E_p(\mathbf{q})\end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées aux paramètres q_k donnent

$$\sum_j M_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}_{nc} = \tau_k \quad k = 1, ..., n$$

avec

- $c_{ijk} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\right)$ est le symbole de Christoffel.
- $g_k = \frac{\partial E_p}{\partial q_k}$ est le terme due à la gravité
- τ_k est le couple actionneur sur la liaison k (force généralisée non conservative).

Equation de la dynamique d'un robot

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

où

- $C_{kj} := \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i.$

Equations de mouvement

Propriété :

si $\mathbf{M}$ est une matrice diagonale constante, alors le robot est dit découplé et chaque équation prend la forme

$$M_{kk}\ddot{q}_k + g_k(\mathbf{q}) = \tau_k \quad k = 1...n$$

Modèle dynamique

Plus généralement dans le cas d'un robot série ou tout système ayant **des paramètres indépendants**, les équations de mouvements sont

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}_{nc} = \boldsymbol{\tau}$$

avec

- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des termes Coriolis-Centrifuges

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$$

- $\mathbf{g}$ le vecteur des termes gravitionnels

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = -\mathbf{Q}_{co}$$

Modèle dynamique opérationnel

Modèle géométrique direct du robot

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

Si on multiplie l'éq. de mouvement par $\mathbf{J}^{-T}$, $\mathbf{J}$ Jacob. de $\mathbf{f}$

$$\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}\right) = \mathbf{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

on peut écrire

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\left(\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}\right)$$

On injecte cette expression dans l'équation de mouvement

$$\mathbf{M}_x\ddot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{C} - \mathbf{M}_x\dot{\mathbf{J}}\right)\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{g} = \mathbf{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{M}_x = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}$ nouvelle matrice masse dite opérationnelle.
Le modèle dynamique du robot dans l'espace opérationnel :

$$\mathbf{M}_x\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_x = \mathbf{f}$$

Remarques :

- On peut déduire $\mathbf{M}_x$ à partir de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}})^T\mathbf{M}(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\underbrace{\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}}_{\mathbf{M}_x}\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}_x\dot{\mathbf{x}}$$

- Pour une force généralisée dans l'espace articulaire, elle peut être convertie dans l'espace opérationnel en le multipliant par $\mathbf{J}^{-T}$,

$$\delta W = \mathbf{g}^T\delta\mathbf{q} = \mathbf{g}^T\mathbf{J}^{-1}\delta\mathbf{x} = \overbrace{(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{g})}^{\mathbf{g}_x}{}^T\delta\mathbf{x}$$

Newton-Euler récursif pour la dynamique inverse

Principe Fondamental de la dynamique pour un solide

$$\begin{cases} \sum \mathbf{f}_{\text{ext}} = \dfrac{d\,(m\mathbf{v}_G)}{dt} \\ \sum \mathbf{m}_{\text{ext},G} = \dfrac{d\,(\mathbf{I}_G\boldsymbol{\omega})}{dt} \end{cases}$$

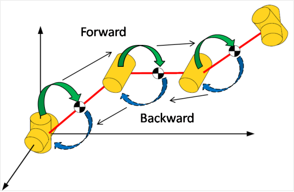
- m masse du solide,
- $\mathbf{v}_G$ la vitesse du centre de gravité,
- $\boldsymbol{\omega}$ vitesse angulaire du solide,
- $\mathbf{I}_G$ la matrice d'inertie au c.d.g,
- expression invariante de la base.

Rappel des équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} \sum \mathbf{f}_{\text{ext}} = m\dfrac{d\,\mathbf{v}_G}{dt} \\ \sum \mathbf{m}_{\text{ext},G} = \mathbf{I}_G\dfrac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G\boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

Newton-Euler récursif pour la dynamique inverse

Entrées : $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$
Sorties : $\boldsymbol{\tau}(t)$



Deux étapes :

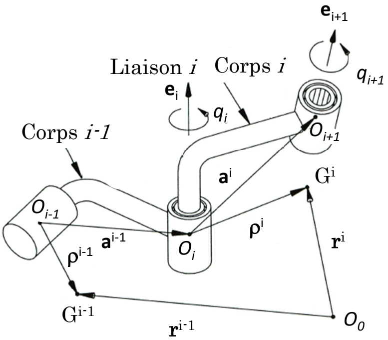
1. Récurrence avant : Calcul des positions, vitesses et accélérations de chaque corps en partant de la base jusqu'à l'effecteur
2. Récurrence arrière : Calcul des couples actionneurs, forces/moments liaisons, dans le sens inverse

Récurrence avant

Si la liaison i est de type R (Rotoide)

Vitesses et accélérations angulaires du corps (i) fonction de $(i-1)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^i &= \boldsymbol{\omega}^{i-1} + \dot{q}_i \mathbf{e}_i \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}^i &= \dot{\boldsymbol{\omega}}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}^{i-1} \times \dot{q}_i \mathbf{e}_i + \ddot{q}_i \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

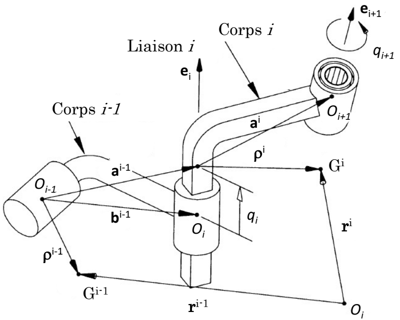


La position du cdg du corps i, sa vitesse et accélération, fonction de $(i-1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^i &= \mathbf{r}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1} + \mathbf{a}^{i-1} + \boldsymbol{\rho}^i \\
\dot{\mathbf{r}}^i &= \dot{\mathbf{r}}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\mathbf{a}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1}) + \boldsymbol{\omega}^i \times \boldsymbol{\rho}^i \\
\ddot{\mathbf{r}}^i &= \ddot{\mathbf{r}}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{i-1} \times (\mathbf{a}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1}) + \ldots \\
& \quad \boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\mathbf{a}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1})) + \dot{\boldsymbol{\omega}}^i \times \boldsymbol{\rho}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \boldsymbol{\rho}^i)
\end{aligned}$$

Si la liaison i est de type P (Prismatic)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^i &= \boldsymbol{\omega}^{i-1}\\
\dot{\boldsymbol{\omega}}^i &= \dot{\boldsymbol{\omega}}^{i-1}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}^i &= \mathbf{r}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1} + \mathbf{b}^{i-1} + d_i\mathbf{e}_i + \boldsymbol{\rho}^i\\
\dot{\mathbf{r}}^i &= \dot{\mathbf{r}}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\mathbf{b}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1}) +\\
&\quad \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\rho}^i + d_i\mathbf{e}_i) + \dot{d}_i\mathbf{e}_i\\
\ddot{\mathbf{r}}^i &= \ddot{\mathbf{r}}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{i-1} \times (\mathbf{b}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1}) +\\
&\quad \boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}^{i-1} \times (\mathbf{b}^{i-1} - \boldsymbol{\rho}^{i-1})) + ..\\
&\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^i \times (\boldsymbol{\rho}^i + d_i\mathbf{e}_i) + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\rho}^i + d_i\mathbf{e}_i)) + \ddot{d}_i\mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega}^i \times \dot{d}_i\mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

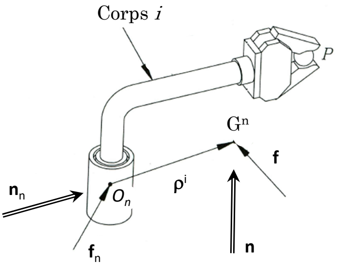
- $\dot{\mathbf{r}}^0 = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 = \mathbf{0}$ sont la vitesse et l'accélération angulaires de la base
- $\mathbf{e}_i$ est un vecteur unitaire de liaison i qui connecte $(i-1)$ à i
- Relations indépendantes de la base

Récurrence arrière

Soient $\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$ la force et le moment, exprimés dans le centre de la liaison, appliqués sur le corps i qui contient l'action du corps $i-1$ et l'actionneur de la liaison i.

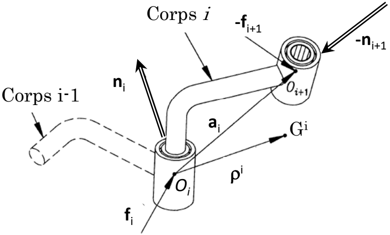
En appliquant Newton-Euler (PFD) à l'organe terminal, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n &= m^n \ddot{\mathbf{r}}^n - \mathbf{f} - m^n \mathbf{g} \\ \mathbf{n}_n &= \mathbf{I}^n \dot{\boldsymbol{\omega}}^n + \boldsymbol{\omega}^n \times (\mathbf{I}^n \boldsymbol{\omega}^n) - \mathbf{n} + \boldsymbol{\rho}^n \times \mathbf{f}_n \end{aligned}$$



- $\mathbf{f}, \mathbf{n}$ la force et le moment, exprimés au cdg de l'effecteur, appliqués par l'environnement.
- Relations indépendantes de la base

Newton-Euler appliqué au corps i donne



$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_i &= m^i \ddot{\mathbf{r}}^i + \mathbf{f}_{i+1} - m^i \mathbf{g} \\
\mathbf{n}_i &= \mathbf{I}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{I}^i \boldsymbol{\omega}^i) + \mathbf{n}_{i+1} + \ldots \\
& \quad (\mathbf{a}^i - \boldsymbol{\rho}^i) \times \mathbf{f}_{i+1} + \boldsymbol{\rho}^i \times \mathbf{f}_i
\end{aligned}
$$

Les efforts actionneurs, couple ou force, sont en fonction de la nature de la liaison

- $\tau_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{n}_i$ si la liaison est de type R
- $\tau_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_i$ si la liaison est de type P