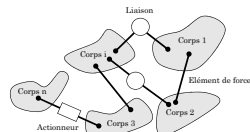


## Systèmes multi-corps et paramétrage cartésien

# Modélisation et simulation dynamique

- Déterminer les équations de mouvement d'un système étant données les actions externes qui s'appliquent dessus
- Equations de mvt : système algébro-différentielle
- Savoir comment prendre en compte les différentes forces et les intégrer dans les équations de Lagrange
- Savoir comment calculer les forces de réaction dans chaque liaison reliant deux corps
- Savoir étudier les configurations d'équilibre, analyse leur stabilité, la réponse temporelle du système linéarisé
- Résoudre numériquement le système d'équation algébro-différentiel



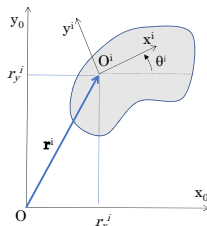
# Problèmes typiques en analyse et simulation multi-corps

- Géométrie : problème d'assemblage
- Cinématique : analyse des vitesses et accélérations
- Dynamique : problème direct
- Dynamique : problème inverse
- Statique : analyse des équilibres, stabilité
- Dynamique : analyse linéaire vibratoire

## Paramétrage cartésien : Problème plan

Dans le plan, le paramétrage cartésien d'un solide  $i$  est  $\mathbf{q}^i = [r_x^i, r_y^i, \theta^i]^T$

- Position :  $\mathbf{r}^i = (r_x^i, r_y^i)$
- Orientation :  $\theta^i$



Pour un système à  $N$  corps mobiles, le **vecteur des paramètres cartésiens**

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^N]^T = [r_x^1, r_y^1, \theta^1, \dots, r_x^N, r_y^N, \theta^N]^T$$

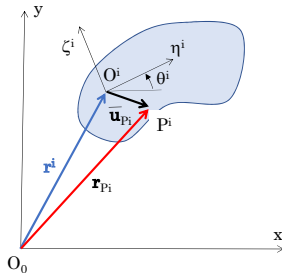
## Rappel sur les Notations

Pour un point  $P$  attaché au corps  $i$ , le vecteur  $\vec{u}_P$  admet comme composantes

- dans  $\mathcal{R}^i$ , le vecteur **constant**  $\bar{\mathbf{u}}_P^i$
- dans  $\mathcal{R}^0$ , le vecteur  $\mathbf{u}_P^i$

avec

$$\mathbf{u}_P^i = \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$$



$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$$

avec  $\mathbf{R}^i$  la matrice rotation du corps  $i$  par rapport au référentiel fixe

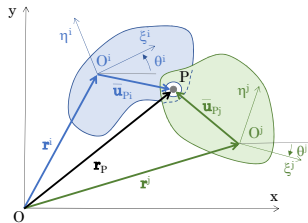
$$\mathbf{R}^i = \begin{pmatrix} \cos \theta^i & -\sin \theta^i \\ \sin \theta^i & \cos \theta^i \end{pmatrix}$$

# Problème plan : Contraintes d'une liaison pivot

La contrainte d'une liaison pivot dans le plan : 2 points coïncidants à tout instant

$$\mathbf{r}_{P^i} = \mathbf{r}_{P^j}$$

$$\Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j) = \mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j \bar{\mathbf{u}}_{P^j} = \mathbf{0}$$



On note  $\bar{\mathbf{u}}_{P^i} = [\bar{x}_{P^i} \ \bar{y}_{P^i}]^T$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{P^j} = [\bar{x}_{P^j} \ \bar{y}_{P^j}]^T$  deux vecteurs constants.  
On obtient deux équations scalaires de la forme

$$\begin{cases} r_x^i + \bar{x}_{P^i} \cos \theta^i - \bar{y}_{P^i} \sin \theta^i - r_x^j - \bar{x}_{P^j} \cos \theta^j + \bar{y}_{P^j} \sin \theta^j = 0 \\ r_y^i + \bar{x}_{P^i} \sin \theta^i + \bar{y}_{P^i} \cos \theta^i - r_y^j - \bar{x}_{P^j} \sin \theta^j - \bar{y}_{P^j} \cos \theta^j = 0 \end{cases}$$

La dérivées par rapport au temps de cette contrainte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^j \bar{\mathbf{u}}_{Pj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^j \\ \dot{\theta}^j \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

soit

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j, \dot{\mathbf{q}}^i, \dot{\mathbf{q}}^j) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^i - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^j \bar{\mathbf{u}}_{Pj} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^j = \mathbf{0}$$

avec

$$\mathbf{R}_{\theta}^i = \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \theta^i} = \begin{pmatrix} -\sin \theta^i & -\cos \theta^i \\ \cos \theta^i & -\sin \theta^i \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de déduire les termes de la jacobienne des équations de contraintes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^j} = - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_{\theta}^j \bar{\mathbf{u}}_{Pj} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2,3} & \cdots & \mathbf{0}_{2,3} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{R}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} & \mathbf{0}_{2,3} & \cdots & \mathbf{0}_{2,3} & -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{R}_{\theta}^j \bar{\mathbf{u}}_{Pj} & \mathbf{0}_{2,3} & \cdots & \mathbf{0}_{2,3} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\mathbf{q}}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^i \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^j \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^N \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Dans le cas où le corps  $i$  est relié au bâti au point  $P^i$ , la contrainte s'écrit par

$$\mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{c}$  est un vecteur constant et la Jacobienne associée

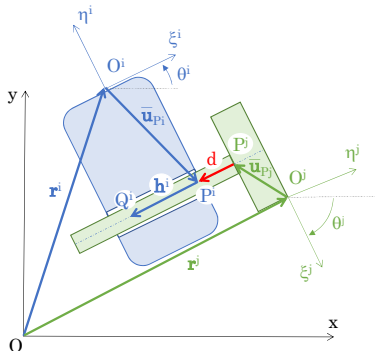
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2,3} & \cdots & \mathbf{0}_{2,3} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{R}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_{Pi} & \mathbf{0}_{2,3} & \cdots & \mathbf{0}_{2,3} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\mathbf{q}}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^i \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^N \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



# Problème plan : Contraintes d'une liaison glissière

1<sup>ière</sup> contrainte : Orientation relative constante

$$\theta^i - \theta^j - \text{cte} = 0$$



Les dérivées partielles de cette contrainte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}^i} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^i} = 1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}^j} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^j} = -1$$

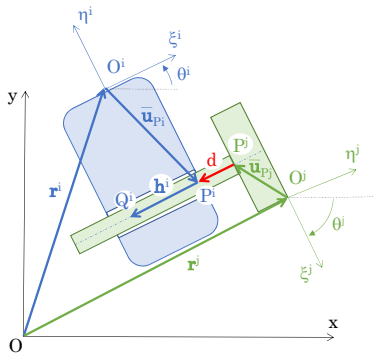
2nd contrainte : un point du solide  $j$  sur une droite du solide  $i$

$$\mathbf{h}^i \times \mathbf{d} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_{P^j} \\ &= \mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j \bar{\mathbf{u}}_{P^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^i &= \mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_{Q^i} \\ &= \mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^i - \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{Q^i} \\ &= \mathbf{R}^i (\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^i}) \end{aligned}$$



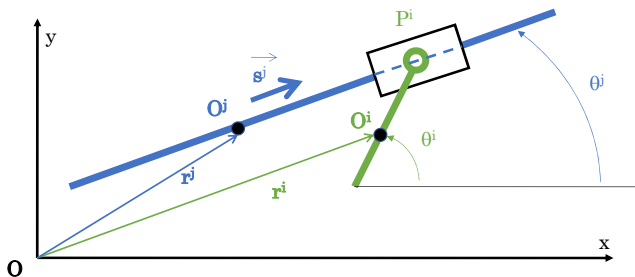
$$\Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j) = \mathbf{R}^i(\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^i}) \times (\mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j\bar{\mathbf{u}}_{P^j})$$

La Jacobienne de cette contrainte scalaire peut être remplie à partir des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}^i} &= \mathbf{S}(\mathbf{R}^i(\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^i})) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^i} &= \mathbf{R}_\theta^i(\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^i}) \times (\mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j\bar{\mathbf{u}}_{P^j}) + \\ &\quad \mathbf{R}^i(\bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^i}) \times \mathbf{R}_\theta^i\bar{\mathbf{u}}_{P^i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}^j} &= -\mathbf{S}(\mathbf{R}^j(\bar{\mathbf{u}}_{P^j} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^j})) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^j} &= -\mathbf{R}_\theta^j(\bar{\mathbf{u}}_{P^j} - \bar{\mathbf{u}}_{Q^j}) \times \mathbf{R}^j\bar{\mathbf{u}}_{P^j} \end{aligned}$$

En dimension 2, la matrice du préproduit vectoriel  $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = [-v_y \ v_x]$ .

# Problème plan : Contrainte d'une liaison appui mobile



# Problème spatial : Paramétrage de l'orientation

**Rappel** : Quaternion fonction de l'axe de rotation  $\vec{v}$  et l'angle  $\theta$

$$\mathbf{p} = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, v_1 \sin \frac{\theta}{2}, v_2 \sin \frac{\theta}{2}, v_3 \sin \frac{\theta}{2} \right]^T$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2[(p_1)^2 + (p_2)^2] - 1 & 2(p_2 p_3 - p_1 p_4) & 2(p_2 p_4 + p_1 p_3) \\ 2(p_2 p_3 + p_1 p_4) & 2[(p_1)^2 + (p_3)^2] - 1 & 2(p_3 p_4 - p_1 p_2) \\ 2(p_2 p_4 - p_1 p_3) & 2(p_3 p_4 + p_1 p_2) & 2[(p_1)^2 + (p_4)^2] - 1 \end{bmatrix}$$

## Propriétés différentielles

- Factorisation :  $\mathbf{R} = \frac{1}{4} \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}}^T$ ,
- Différentiation :  $\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{G}}^T$
- Vitesse angulaire  $\vec{\omega}(i/0)$  :  
 dans  $\mathcal{R}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}}$ ,  
 dans  $\mathcal{R}_i$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{p}}$

$\mathbf{G}, \bar{\mathbf{G}}$  linéaire en fonction de  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{G} = 2 \begin{bmatrix} -p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ -p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ -p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{G}} = 2 \begin{bmatrix} -p_2 & p_1 & p_4 & -p_3 \\ -p_3 & -p_4 & p_1 & p_2 \\ -p_4 & p_3 & -p_2 & p_1 \end{bmatrix}$$

# Problème spatiale : Contraintes d'une liaison rotule

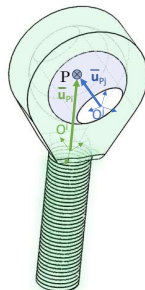
2 points coïncidents à tout instant

$$\mathbf{r}_{P^i} = \mathbf{r}_{P^j}$$

$$\Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j) := \mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j \bar{\mathbf{u}}_{P^j}$$

La dérivée % temps

$$\dot{\Phi} := \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{S}(\bar{\mathbf{u}}_{P^i})\mathbf{G}^i \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}^i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{S}(\bar{\mathbf{u}}_{P^j})\mathbf{G}^j \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^j}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^j \\ \dot{\mathbf{p}}^j \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}^j}$$



# Problème spatiale : Contraintes d'une liaison Cardan

Contrainte d'une liaison rotule

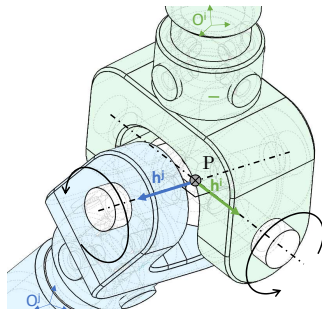
$$\mathbf{r}_{Pi} = \mathbf{r}_{Pj}$$

+ orthogonalité des 2 axes du croisillon

$$\Phi := \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^j$$

La dérivée de cette dernière contrainte

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \dot{\mathbf{h}}^i \cdot \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^i \cdot \dot{\mathbf{h}}^j = (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{h}^i) \cdot \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^i \cdot (\boldsymbol{\omega}^j \times \mathbf{h}^j) \\ &= (\mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j) \cdot \boldsymbol{\omega}^i + (\mathbf{h}^j \times \mathbf{h}^i) \cdot \boldsymbol{\omega}^j \\ &= \underbrace{(\mathbf{S}(\mathbf{h}^i) \mathbf{h}^j)^T \mathbf{G}^i}_{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}^i}} \dot{\mathbf{p}}^i + \underbrace{(\mathbf{S}(\mathbf{h}^j) \mathbf{h}^i)^T \mathbf{G}^j}_{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}^j}} \dot{\mathbf{p}}^j \end{aligned}$$



# Problème spatiale : Contraintes d'une liaison pivot-glissant

2 vecteurs colinéaires

$$\Phi_1 := \mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j$$

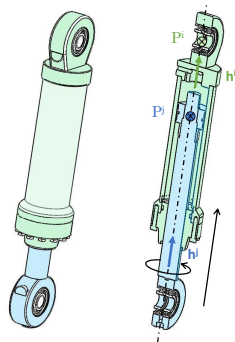
Un point  $P^i$  de  $i$  sur une droite  $(P^j, \mathbf{h}^j)$  de  $j$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &:= (\mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_{P^j}) \times \mathbf{h}^j \\ &= (\mathbf{r}^i + \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{u}}_{P^i} - \mathbf{r}^j - \mathbf{R}^j \bar{\mathbf{u}}_{P^j}) \times \mathbf{h}^j \end{aligned}$$

et leurs dérivées par rapport au temps

$$\dot{\Phi}_1 := \dot{\mathbf{h}}^i \times \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^i \times \dot{\mathbf{h}}^j = \mathbf{S}(\mathbf{h}^j) \mathbf{S}(\mathbf{h}^i) \mathbf{G}^i \dot{\mathbf{p}}^i - \mathbf{S}(\mathbf{h}^i) \mathbf{S}(\mathbf{h}^j) \mathbf{G}^j \dot{\mathbf{p}}^j$$

$$\dot{\Phi}_2 := -\mathbf{S}(\mathbf{h}^j) \left( \dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{S}(\mathbf{u}_{P^i}) \mathbf{G}^i \dot{\mathbf{p}}^i - \dot{\mathbf{r}}^j + \mathbf{S}(\mathbf{u}_{P^j}) \mathbf{G}^j \dot{\mathbf{p}}^j \right) - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_{P^j}) \mathbf{S}(\mathbf{h}^j) \mathbf{G}^j \dot{\mathbf{p}}^j$$





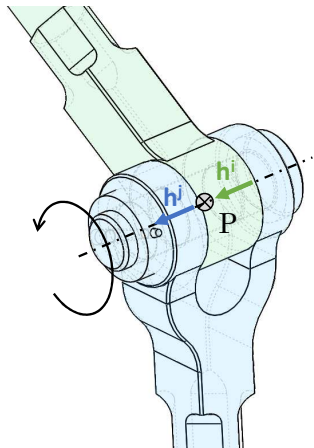
# Problème spatiale : Contraintes d'une liaison pivot

Contrainte d'une liaison rotule

+

2 vecteurs colinéaires

$$\Phi := \mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j$$



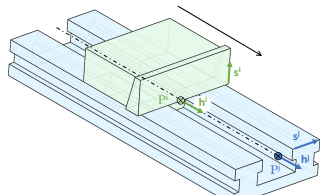
# Problème spatiale : Contraintes d'une liaison glissière

Contrainte d'une liaison pivot glissant

+

Une contrainte bloquant la rotation (angle constant)

$$\Phi := s^i \cdot s^j - Cte$$



# Analyse de la mobilité

L'ensemble des  $n_c$  contraintes dans les liaisons regroupées :  $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$

Pour vérifier si ces équations sont dépendantes ou non, il faut les dériver par rapport au temps

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = \underbrace{\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{\Phi_{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \boxed{\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}}$$

La mobilité (Nbre param. cin. indép.)

$$m = \underbrace{dN_C}_{3,6 \times \text{Nb corps}} - \underbrace{\text{rg}(\Phi_{\mathbf{q}})}_{\text{Nb cont. indép.}}$$

Le modèle statique

$$\boxed{\Phi_{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} = \mathbf{w}}$$

- $\mathbf{f}$  forces dans les liaisons associées aux contraintes  $\Phi$ ,  $\mathbf{f} \equiv \lambda$  (multiplicateurs de Lagrange)
- $\mathbf{w} = [(\mathbf{w}^1)^T, \dots, (\mathbf{w}^N)^T]^T$ ,  $\mathbf{w}^i$  torseurs des forces externes appliquées au corps  $i$ ,

# Mobilité et hyperstatisme

L'hyperstatisme (nombre de contraintes surabondantes) est donc

$$h = \dim(\Phi) - \text{rg}(\Phi_{\mathbf{q}})$$

sachant que  $\text{rg}(\Phi_{\mathbf{q}}) = \text{rg}(\Phi_{\mathbf{q}}^T)$ .

En paramétrage cartésien, l'indice de mobilité (Gruebler)

$$i_m = \dim(\mathbf{q}) - \dim(\Phi) = n - n_c$$

la mobilité étant

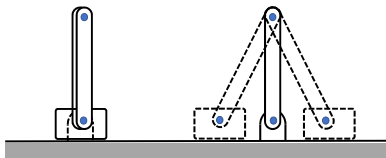
$$m = \dim(\mathbf{q}) - \text{rg}(\Phi_{\mathbf{q}})$$

On vérifie bien

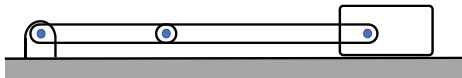
$$i_m = m - h$$

# Configurations singulières (des mécanismes)

- Singularité de type **bifurcation** : dégénérescence locale du rang de la Jacobienne ( $\Phi_q$ )



- Singularité de type **blocage** :  $\exists$  une sous-matrice de  $\Phi_q(q^*)$  de dimension  $r \times r, r < \text{rg}(\Phi_q)$  dont le déterminant est nul.



# Mécanisme : Problème d'assemblage

Ce problème consiste à déterminer tous les paramètres du système étant données les paramètres indépendants  $\mathbf{q}_i$ . Il faut donc résoudre en  $\mathbf{q}_d$

$$\Phi(\mathbf{q}_{de}, \mathbf{q}_{in}) = \mathbf{0}$$

Supposons que les  $n_c$  contraintes sont indépendantes, donc les nombres de paramètres indépendants et dépendants sont  $n - n_c$  et  $n_c$ .

Cela revient à résoudre un système à  $n_c$  équations et  $n_c$  inconnues, qui peut être résolu avec l'algorithme itératif Newton-Raphson.

$$\text{Résoudre en } \mathbf{x} = \mathbf{q}_{de} \text{ l'éq. vectorielle} \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

l'algorithme itératif de Newton-Raphson s'écrit

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \Phi_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}_i) \Phi(\mathbf{x}_i)$$

où  $\Phi_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}_i)$  est la matrice inverse de la jacobienne  $\Phi_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$ , évaluée en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ .

## Pb plan : Matrice masse en paramétrage cartésien

Rappelons le paramétrage suivant

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^N]^T = [r_x^1, r_y^1, \theta^1, \dots, r_x^N, r_y^N, \theta^N]^T.$$

Si  $O^i$  est au centre de gravité, l'énergie cinétique du corps  $i$ ,

$$E_c^i = \frac{1}{2} m^i ((\dot{r}_x^i)^2 + (\dot{r}_y^i)^2) + \frac{1}{2} I^i (\dot{\theta}^i)^2 \quad E_c = \sum_{i=1}^N E_c^i$$

$I^i$  est le moment d'inertie du corps  $i$  par rapport à l'axe  $(O^i, \vec{z}_0)$ .

La matrice masse s'écrit donc

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}^N \end{pmatrix} = \text{Cte} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}^i = \begin{pmatrix} m^i & 0 & 0 \\ 0 & m^i & 0 \\ 0 & 0 & I^i \end{pmatrix}$$

## Pb plan : Eq. de mouvement en paramétrage cartésien

$$\mathbf{M} = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_v = -\dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \left( \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{co} + \mathbf{Q}_{nc} \\ \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases}$$



# Pb. spatial : Eq. de mvt en paramétrage cartésien

Si  $O^i$  est au centre de gravité du corps  $i$ , et

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^N]^T, \mathbf{q}^i = [r_x^i, r_y^i, r_z^i, p_1^i, p_2^i, p_3^i, p_4^i]^T.$$

$$\mathbf{M}^i = \begin{pmatrix} m^i \mathbf{1}_{3,3} & \mathbf{0}_{3,4} \\ \mathbf{0}_{4,3} & \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}^N \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{co} + \mathbf{Q}_{nc} + \mathbf{Q}_v \\ \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_v^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_v^i = -\dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \left( \frac{\partial E_c^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ -2\dot{\bar{\mathbf{G}}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \end{bmatrix}$$

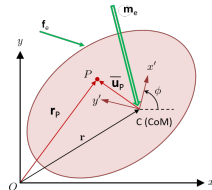
# Un corps flottant : Equations de Lagrange $\equiv$ Newton-Euler

- Pas de contrainte cinématique :  $\Phi = \emptyset$
- $\bar{\omega} = \bar{G}\dot{p}$
- $\bar{G}$  permet de passer de l'espace des dérivées des quaternions à l'espace des vitesses angulaires autour des axes du solide

Si on multiplie par  $\bar{G}$  les éq. de Lagrange associées aux paramètres des quaternions on obtient les équations d'Euler (moment dynamique autour du centre de gravité). Les équations de Newton-Euler d'un solide rigide

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_e \\ \bar{\mathbf{I}}\dot{\bar{\omega}} = \bar{\mathbf{m}}_e - \bar{\omega} \times (\bar{\mathbf{I}}\bar{\omega}) \end{cases}$$

- $\mathbf{f}_e, \bar{\mathbf{m}}_e$  force et moment externes (moment exprimé au centre de gravité)
- $m, \bar{\mathbf{I}}$  masse et matrice d'inertie exprimée dans le repère du solide



# Newton-Euler vs Lagrange

	Newton-Euler	Lagrange
+	<p>Basée sur les forces</p> <p>Adaptée aux corps flottants</p> <p>Adaptée aux robots arborescents</p>	<p>Basée sur l'énergie</p> <p>Adaptée aux mécanismes complexes</p> <p>Adaptée aux robots parallèles</p> <p>Plus générique</p> <p>Forme explicite des équ. de mvt</p>
-	<p>N'élimine pas les forces de liaisons</p> <p>Pas adaptée aux systèmes complexes</p>	<p>Plus de paramètres et d'équations</p> <p>Peut être moins efficace</p>