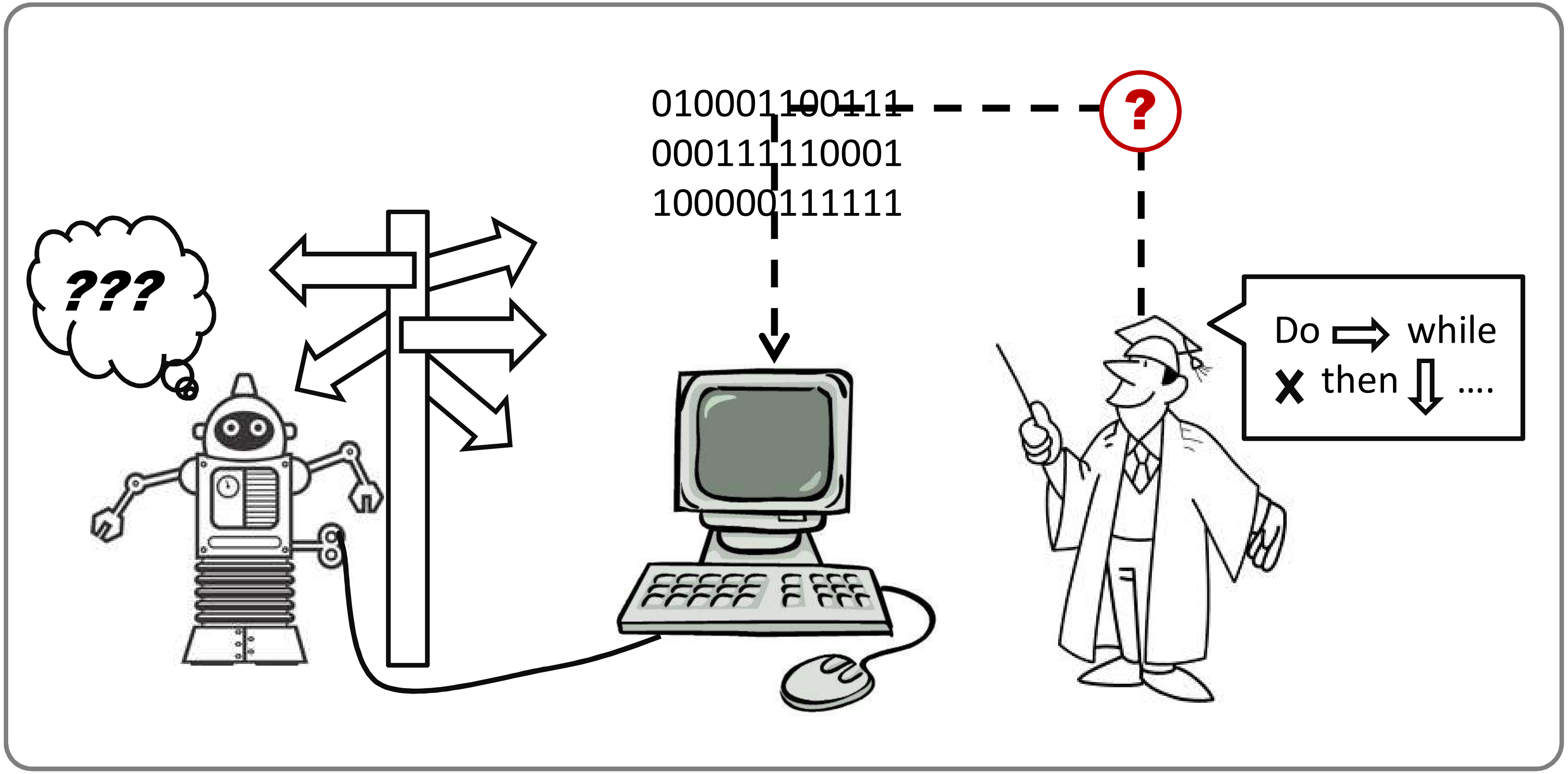
Modélisation des Robots Manipulateurs

Viviane PASQUI

Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique
ISIR UPMC – CNRS / UMR 7222
Equipe AGATHE – INSERM U1150

pasqui@isir.upmc.fr

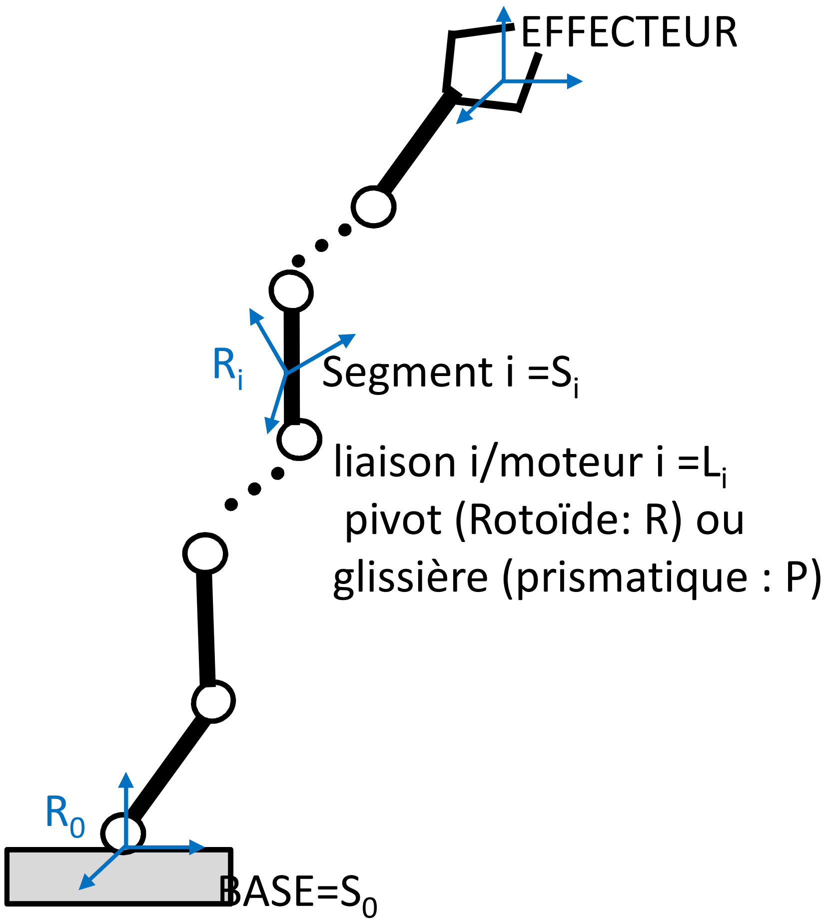
Objectif du Cours



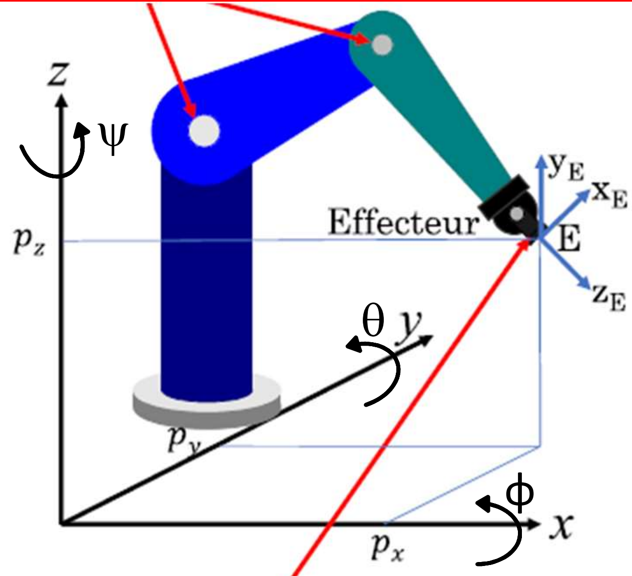
Plan du Cours

- Modèle Cinématique direct des robots série
- Modèle statique direct des robots série
- Configurations singulières des robots série
- Manipulabilité
- Cinématique des robots série redondant
- Paramétrage des robots parallèles
- Mobilité des mécanismes
- Modèle géométrique inverse des robots parallèles
- Modèle cinématique inverse des robots parallèles
- Configurations singulières des robots parallèles

Paramétrage d'un robot série



Paramètres articulaires généralisés:
$\mathbf{q}=[q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)]^T$



Paramètres opérationnels:
$\mathbf{x}=[p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi]^T$

Notion de tâche en robotique

- **Tâche de position :**

commande point-à-point
séquence de points de passage, pick and place, chargement-déchargement, soudage par points ...

Modèles Géométriques:
Direct $\Longrightarrow$ $\mathbf{x}=f(\mathbf{q})$
Inverse $\Longrightarrow$ $\mathbf{q}=f^{-1}(\mathbf{x})$

- **Tâche de trajectoire :**

commande de suivi de trajectoire
contrôle de la vitesse sur la trajectoire, suivi du chemin de référence, peinture par pulvérisation, soudage à l'arc, collage ...

Modèles Cinématiques:
Direct $\Longrightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}(q)\dot{\boldsymbol{q}}$
Inverse $\Longrightarrow \dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{J}^{-1}(q)\dot{\boldsymbol{x}}$

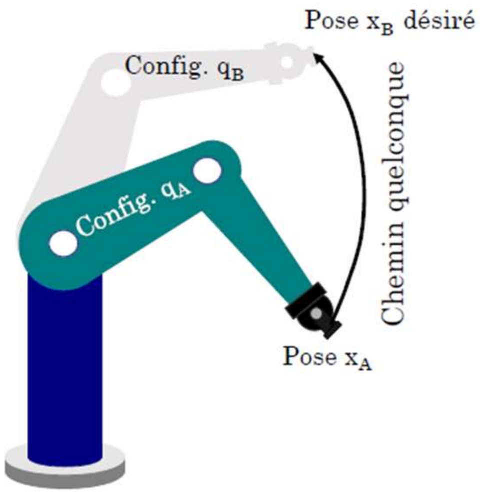
- **Tâche d'effort :**

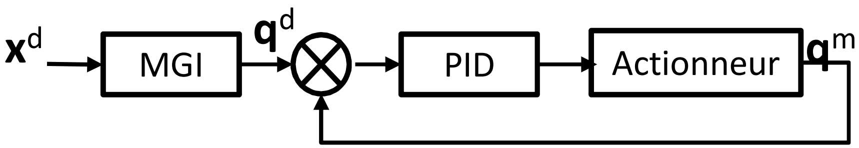
commande de l'effort appliqué
assemblage de précision, ponçage, ébavurage, ...

Modèles Dynamique:
$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(q,\dot{q})\boldsymbol{q} + \dot{g}(q)$$

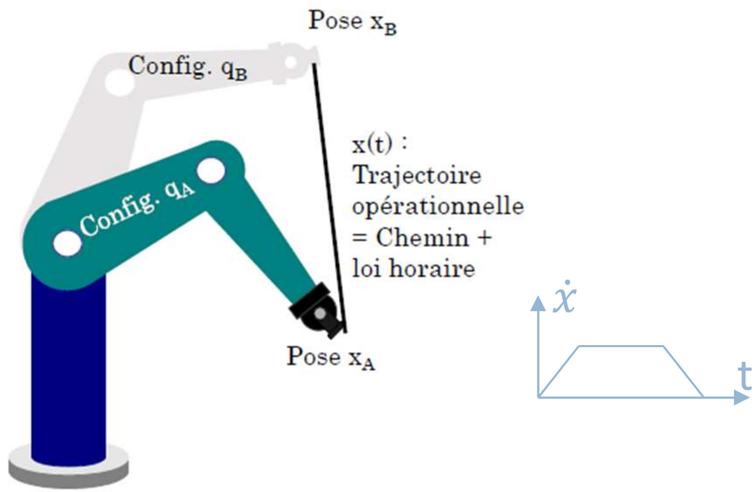
Modèle Géométrique et Modèle Cinématique

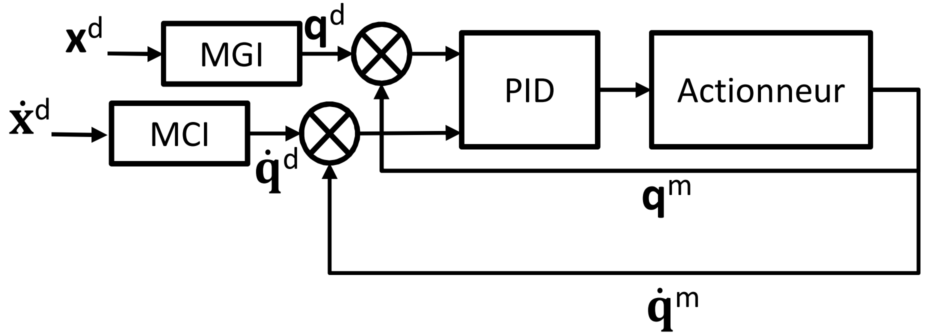
Commande Point à point





Commande en Suivi de trajectoire



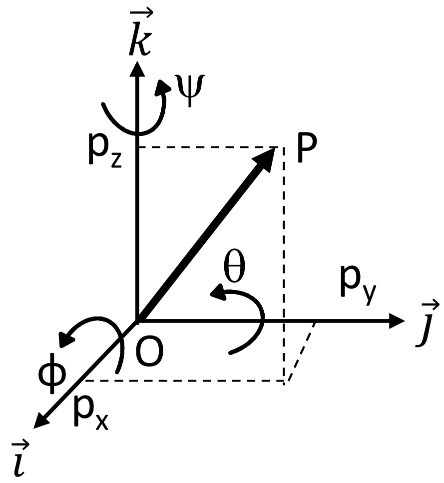


Champ de vitesse d’un solide rigide

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\phi}\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j} + \dot{\psi}\vec{k}$$

$$\vec{V}(P \in S/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})\Big|_0 = \dot{p}_x\vec{i} + \dot{p}_y\vec{j} + \dot{p}_z\vec{k}$$

$$\vec{V}(Q \in S/R_0) = \vec{V}(P \in S/R_0) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$



Torseur cinématique

Un mouvement instantané est défini par une rotation et une translation

$$\Longrightarrow \mathcal{V}_{S/R_0}(P) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix}_P$$

$\mathcal{V}_{S/R_0}(P)$ est le Torseur cinématique de S dans son mouvement par rapport à S_0 en P

$$\mathcal{V}_{S/R_0}(Q) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \end{Bmatrix}_P$$

Pour un mouvement composé:

$$\mathcal{V}_{S_2/S_0}(P) = \mathcal{V}_{S_2/S_1}(P) + \mathcal{V}_{S_1/S_0}(P)$$

Torseur cinématique

Pour chacune des liaisons L_i reliant S_{i-1} à S_i :

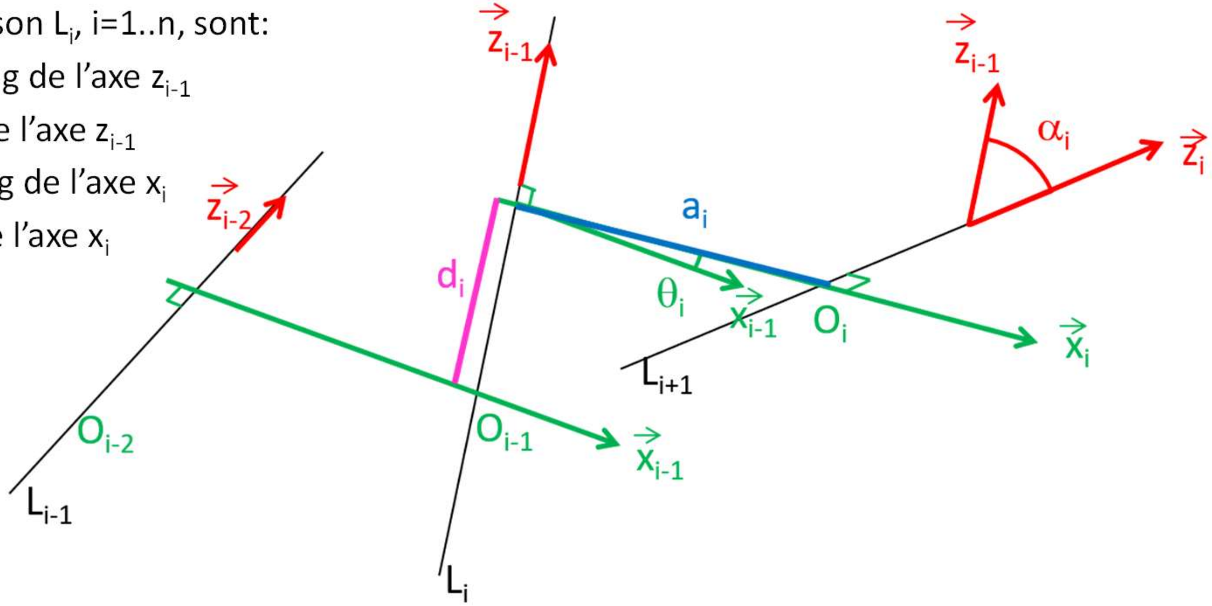
$\vec{z}_{i-1}$ est la direction de l'axe de la liaison entre les segments S_{i-1} et S_i

$\vec{x}_i$ est la perpendiculaire commune à $\vec{z}_{i-1}$ et à $\vec{z}_i$ tel que: $\vec{x}_i = \vec{z}_{i-1} \wedge \vec{z}_i$

$(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ est une Base Orthonormée Directe

Les paramètres de DH, pour chaque liaison L_i, i=1..n, sont:

- d_i est la distance entre x_{i-1} et x_i le long de l'axe z_{i-1}
- θ_i est l'angle entre x_{i-1} et x_i autour de l'axe z_{i-1}
- a_i est la distance entre z_{i-1} et z_i le long de l'axe x_i
- α_i est l'angle entre z_{i-1} et z_i autour de l'axe x_i



$$
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\, sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$\vec{z}_{i-1}$

$\overrightarrow{O_{i-1}O_i}$

Torseur cinématique

$$\mathcal{V}_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_i/S_{i-1}) \\ \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in S_i/S_{i-1}) \end{Bmatrix}_P$$

Si L_i est une liaison glissière :q_i (t)= d_i(t)

$\vec{\Omega}(S_i/S_{i-1}) = \vec{0}$ et $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in S_i/S_{i-1})$= $\vec{\mathrm{V}}(O_{i-1} \in S_i/S_{i-1}) = \dot{d}_i\,\vec{z}_{i-1} = \dot{q}_i\,\vec{z}_{i-1}$

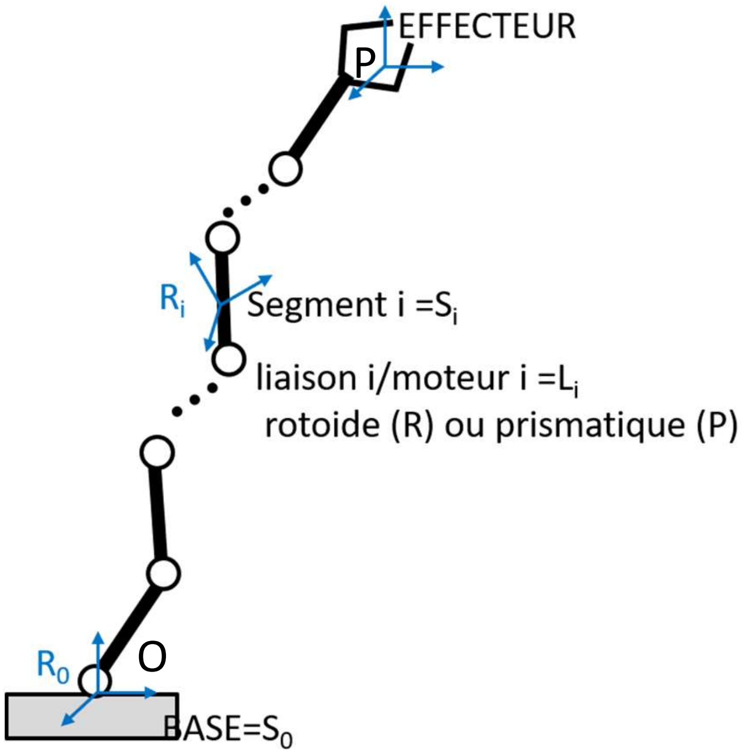
$$\mathcal{V}_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{q}_i\,\vec{z}_{i-1} \end{Bmatrix}_P = \dot{q}_i \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{z}_{i-1} \end{Bmatrix}_P = \dot{q}_i \$_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P})$$

Si L_i est une liaison pivot : q_i (t)= θ_i(t)

$\vec{\Omega}(S_i/S_{i-1}) = \dot{\theta}_i\,\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in S_i/S_{i-1})$= $\vec{\mathrm{V}}(O_{i-1} \in S_i/S_{i-1})$+$(\dot{\theta}_i\,\vec{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{P}O_{i-1}})$

$$\mathcal{V}_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P}) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_i\,\vec{z}_{i-1} \\ \dot{q}_i\,\vec{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}\mathrm{P}} \end{Bmatrix}_P = \dot{q}_i \begin{Bmatrix} \vec{z}_{i-1} \\ \vec{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}\mathrm{P}} \end{Bmatrix}_P = \dot{q}_i \$_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P})$$

Modèle cinématique



$$\vec{\Omega}_{n/0} = \sum \vec{\Omega}_{i/i-1}$$

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in \mathrm{Effecteur}/Base) = \sum \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in S_i/S_{i-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{V}_{\mathrm{Effecteur}/Base}(\mathrm{P}) = \sum \mathcal{V}_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{V}_{\mathrm{Effecteur}/Base}(\mathrm{P}) = \sum \dot{q}_i \$_{S_i/S_{i\_1}}(\mathrm{P})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \underbrace{[\$_{1/0} \quad \cdots \quad \$_{n/n-1}]}_{J_c} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_c$ est la matrice Jacobienne cinématique

si $\mathbf{J}_c$(q) est Carrée et Inversible alors $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_c^{-1}(q)\dot{\mathbf{x}}$

Modèle cinématique

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\phi}\vec{\imath}_0 + \dot{\theta}\vec{\jmath}_1 + \dot{\psi}\vec{k}_2 = \omega_x\,\vec{\imath}_0 + \omega_y\,\vec{\jmath}_0 + \omega_z\,\vec{k}_0$$

$$^1\boldsymbol{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix};\ ^2\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix};\ ^3\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\jmath}_1 = \cos(\phi)\vec{\jmath}_0 + \sin(\phi)\vec{k}_0 \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \sin(\theta)\,\vec{\imath}_0 - \cos(\theta)\,\sin(\phi)\,\vec{\jmath}_0 + \cos(\phi)\vec{k}_0$$

$$\omega_x\,\vec{\imath}_0 + \omega_y\,\vec{\jmath}_0 + \omega_z\,\vec{k}_0 = (\dot{\phi} + \sin(\theta)\dot{\theta})\vec{\imath}_0 + (\dot{\theta}\cos(\phi) - \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi))\,\vec{\jmath}_0 + (\dot{\theta}\sin(\phi) + \dot{\psi}\cos(\phi))\,\vec{k}_0$$

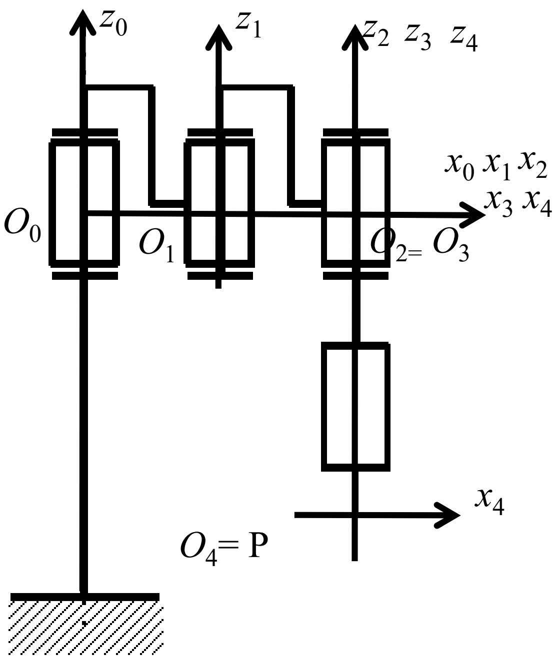
$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\cos(\theta)\,\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{B(x)} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\text{si } \det(\mathbf{B}) \neq 0 \text{ alors } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathrm{x})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{J}_\mathrm{c}$$

si **J**(q) est Carrée et Inversible alors $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix}$

Modèle cinématique du SCARA

joint	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	0	0
4	0	-d4	0	0



$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{O_0O_1} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\theta_1) \\ l_1\sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{O_1O_2} = \begin{bmatrix} l_2\cos(\theta_2) \\ l_2\sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{O_2O_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{O_3O_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_4 \end{bmatrix} $$

Modèle cinématique du SCARA

$$\$_{1/0}(P) = \begin{Bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{O_0\mathrm{P}} \end{Bmatrix} \quad \$_{2/1}(P) = \begin{Bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{O_1\mathrm{P}} \end{Bmatrix} \quad \$_{3/2}(P) = \begin{Bmatrix} \vec{z}_2 \\ \vec{z}_2 \wedge \overrightarrow{O_2\mathrm{P}} \end{Bmatrix} \quad \$_{4/3}(P) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -\vec{z}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\$_{1/0}(P) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - l_1 \sin(\theta_1) \\ l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \$_{2/1}(P) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \$_{3/2}(P) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \$_{4/3}(P) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$J_c = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -l_2\, sin(\theta_1+\theta_2) - l_1\, sin(\theta_1) & -l_2\, sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & 0 \\ l_2\, cos(\theta_1+\theta_2) + l_1\, cos(\theta_1) & l_2\, cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -l_2\, sin(\theta_1+\theta_2) - l_1\, sin(\theta_1) & -l_2\, sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_2\, cos(\theta_1+\theta_2) + l_1\, cos(\theta_1) & l_2\, cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{d}_4 \end{bmatrix}$$

Dualité cinémato-statique

Le bilan des efforts appliqués sur le robot, en équilibre statique:

- Les actions mécaniques appliquées à l'effecteur: $\mathcal{F}_{ext \to effecteur}$ (P)
- La gravité appliquée sur chaque segment : $\mathcal{F}_{g \to S_i}\ (G_i)$
- Les efforts exercés par les moteurs : $\mathcal{F}_{S_{i-1} \to S_i}\ (O_{i-1})$
- Les efforts transmis par les liaisons : $\mathcal{F}_{L_i}\ (O_{i-1})$:

Si la liaison est une pivot d'axe $(O_{j-1}^{i}\ , \vec{z}_{j-1}^{i})$:

$$\mathcal{F}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}}(O_{j-1}^{i}) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}} \\ \vec{M}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}} \end{Bmatrix}_{O_{j-1}^{i}} \quad avec \ \ \vec{M}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}}(O_{j-1}^{i}).\ \vec{z}_{j-1}^{i}=0$$

Si la liaison est une glissière d'axe $(O_{j-1}^{i}\ , \vec{z}_{j-1}^{i})$:

$$\mathcal{F}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}}\ (O_{j-1}^{i}) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}} \\ \vec{M}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}} \end{Bmatrix}_{O_{j-1}^{i}} \quad avec \ \ \vec{F}_{S_{j-1} \to S_j}^{\mathrm{i}}.\ \vec{z}_{j-1}^{i}=0$$

Dualité Cinémato-statique

Le travail virtuel des actions mécaniques appliquées au robot:

négligée

$$\delta W = \mathcal{F}_{ext\rightarrow effecteur}(P) \circ \delta\mathcal{V}_{S_n/S_0}(P) + \cancel{\mathcal{F}_{g\rightarrow S_i}(G_i)} \circ \delta\mathcal{V}_{S_i/S_0}(G_i) +$$

$$\mathcal{F}_{L_i}(O_{i-1}) \cancel{\circ\, \delta\mathcal{V}_{S_i/S_{i-1}}}(O_{i-1}) + \mathcal{F}_{S_{i-1}\rightarrow S_i}(O_{i-1}) \circ \delta\mathcal{V}_{S_i/S_{i-1}}(O_{i-1})$$

=0

$$\mathcal{F} \circ \delta\mathcal{V} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{Bmatrix} = \vec{F}\,.\,\vec{V} + \vec{M}\,.\,\vec{\Omega}$$

Le Principe des travaux virtuels $\Longrightarrow$ $\delta W = 0$

$$\mathbf{f}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{effecteur}\rightarrow\mathbf{ext}} \quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_{\mathrm{S_n/S_0}} = \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{f}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{ext}\rightarrow\mathbf{effecteur}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{M} = \mathbf{J}^{-\mathbf{T}} \end{cases}$$

Modèle statique

Le modèle statique direct:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{effecteur}\rightarrow\mathbf{ext}} = \mathbf{J}^{-\mathbf{T}}\boldsymbol{\tau}$$

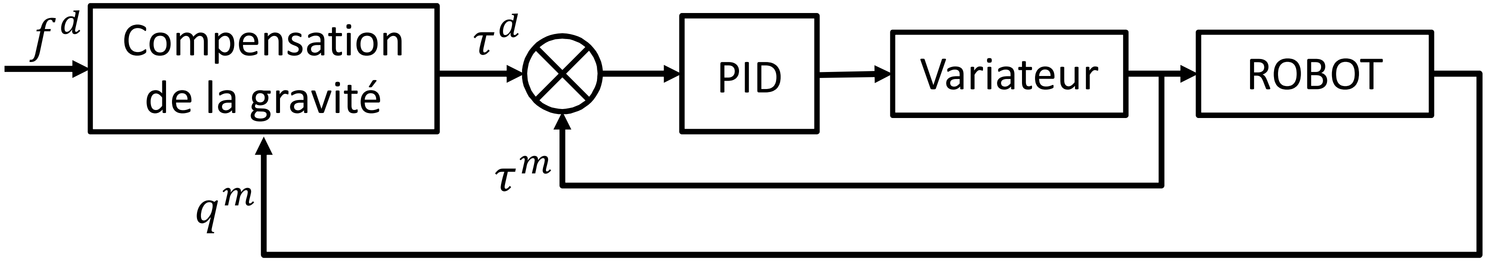
Le modèle statique inverse:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}_{\mathbf{effecteur}\rightarrow\mathbf{ext}}$$

Si on considère le poids des segments :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}_{\mathbf{effecteur}\rightarrow\mathbf{ext}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E_p}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\boldsymbol{T}}$$

$E_p = \sum m_i g z_{G_i}$



Singularités des robots séries

Un robot série est dans une configuration singulière lorsque det(**J**)=0

$\Downarrow$

Les torseurs cinématiques des liaisons sont dépendants

$\Downarrow$

- Perte d'au moins 1DDL
- Il y a plusieurs solutions au problème inverse
- A proximité d'une singularité, de petites vitesses dans l'espace cartésien peuvent conduire à de très grandes vitesses dans les articulations.
- Peut définir une frontière du domaine accessible par l'effecteur

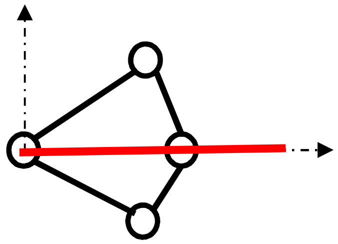
Les configurations singulières $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{➢ Det(J)=0} \\ \text{➢ Géométrie des axes des liaisons} \end{array} \right.$

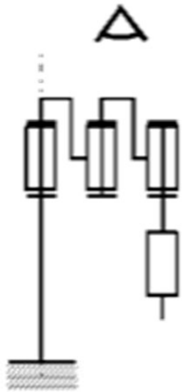
POUR PASSER UNE SINGULARITE ON COMMANDE DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

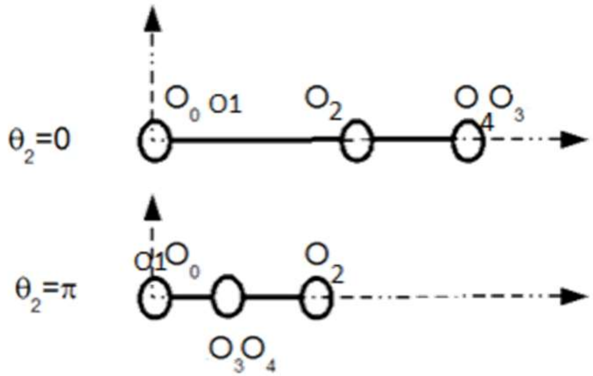
Singularités du SCARA

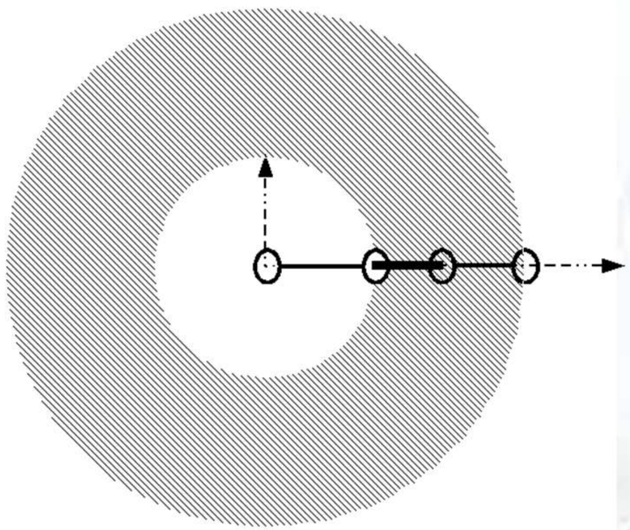
$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{P}_x\\ \dot{P}_y\\ \dot{P}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -l_2\,sin(\theta_1+\theta_2)-l_1\,sin(\theta_1) & -l_2\,sin(\theta_1+\theta_2) & 0\\ l_2\,cos(\theta_1+\theta_2)+l_1\,cos(\theta_1) & l_2\,cos(\theta_1+\theta_2) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\\ \dot{d}_4\end{bmatrix}$$

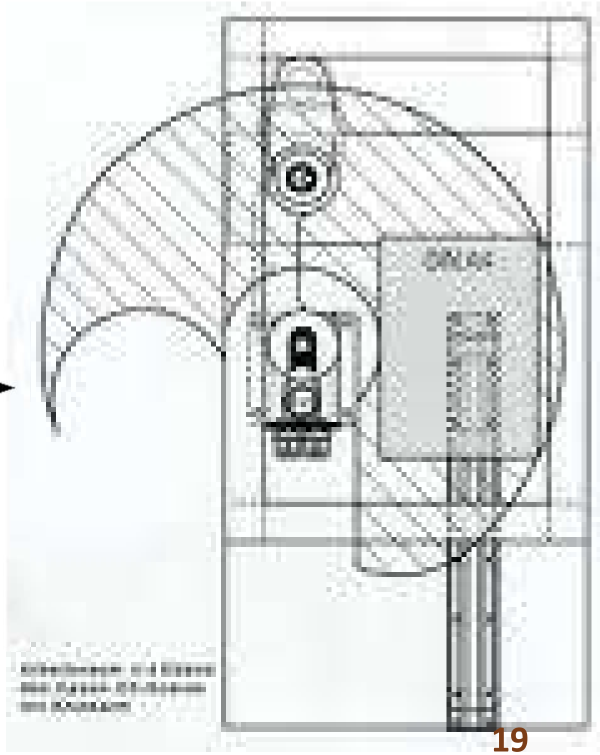
$$\det(J) = l_1 l_2 \sin(\theta_2)$$











Singularités des robots manipulateurs série

- Dans une configuration singulière l'effecteur du robot ne peut plus se déplacer dans au moins une direction
- Le rang de **J** diminue et (max(rg(**J**))-rg(**J**)) est l'ordre de la singularité
- Le passage d'une configuration singulière correspond à deux solutions du MGI pour un ordre 1
- rg(**J**)=rg($\mathbf{J}_c$)
- $rg(\mathbf{J}_c) = rg(\$_1, \$_2, \ldots, \$_n) \Longrightarrow les\ \$_1,\ \$_2, \ldots, \$_n$ sont dépendants

Singularités et géométrie projective

Soit une point de l'espace affine représenté par ses coordonnées cartésiennes (X, Y, Z).

On définit ses **coordonnées homogènes (x,y,z,w)** par:

$$X = \frac{x}{w}$$
$$Y = \frac{y}{w}$$
$$Z = \frac{z}{w}$$

On suppose que $(x, y, z, w) \neq (0,0,0,0)$

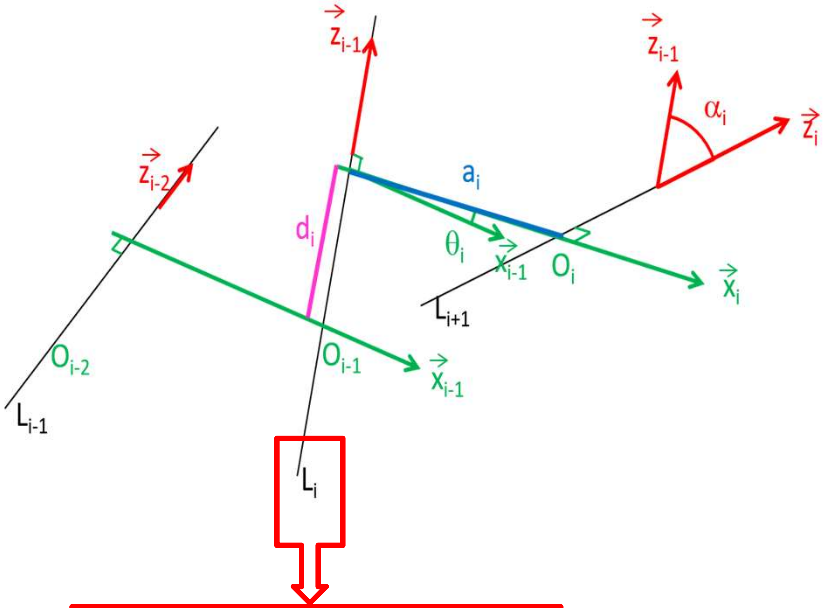
Un point est dit à l'infini quand w=0

Plan: $ax + by + cz + dw = 0$
si w=0 le plan est dit à l'infini

droite: $\begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d'w = 0 \end{cases}$ $avec\ (a, b, c, d) \neq (a', b', c', d')$
si w=0 la droite est dite à l'infini

Singularités et géométrie projective

Paramètre de DH d'une liaison



$$\begin{Bmatrix} \vec{z}_{i-1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_{i-1}} \quad ou \quad \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{z}_{i-1} \end{Bmatrix}$$

Soient (L,M,N,P,Q,R) les coordonnées d'un torseur, il est décrit par **une droite passant par les deux points** (x_1, y_1, z_1, w_1) et (x_2, y_2, z_2, w_2) telles que :

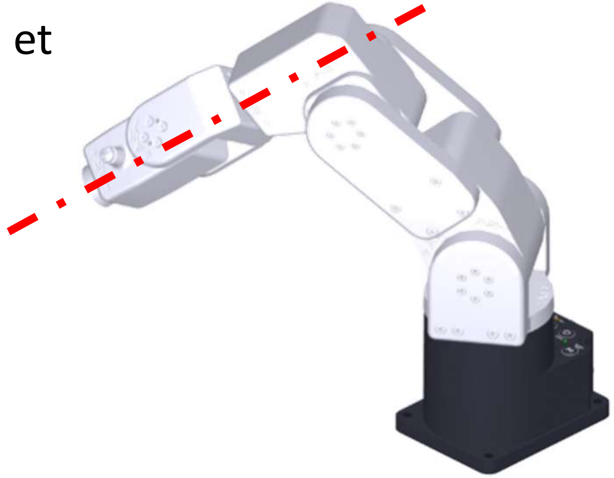
$$L = \begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} M = \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix} N = \begin{vmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} Q = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} R = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

(L,M,N,P,Q,R) sont appelées coordonnées plückerienne du torseur :

$\Longrightarrow$ Droite de Plücker

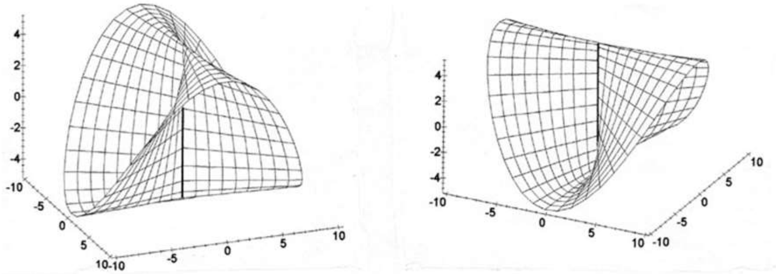
Singularités et géométrie projective

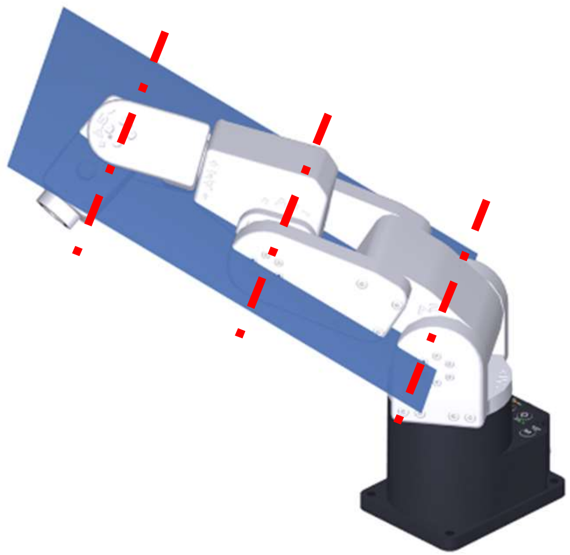


1 DDL = tous les torseurs ont des axes centraux colinéaires et de même pas ⟹

- Les liaisons pivots ont des axes alignés
- Les liaisons glissières ont des axes parallèles

2 DDL = tous les torseurs ont des axes centraux dépendants de deux génératrices d'un conoïde de Plucker ⟹

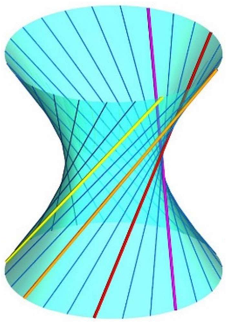




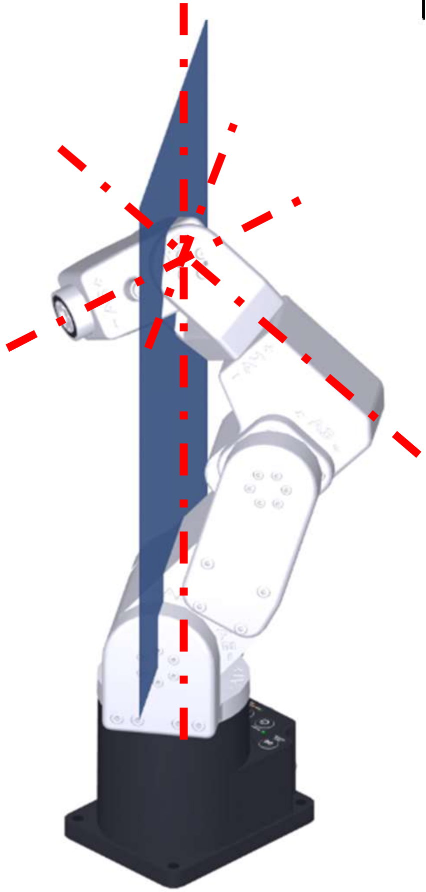
- Les liaisons pivots ont des axes appartenant à un faisceau de droites coplanaires. Quand le sommet du faisceau est à l'infini les axes sont coplanaires et parallèles.

- Liaisons glissières d'axes coplanaires non parallèles

Singularités et géométrie projective



3 DDL = tous les torseurs ont des axes centraux dépendants des génératrices d'un Régulus:

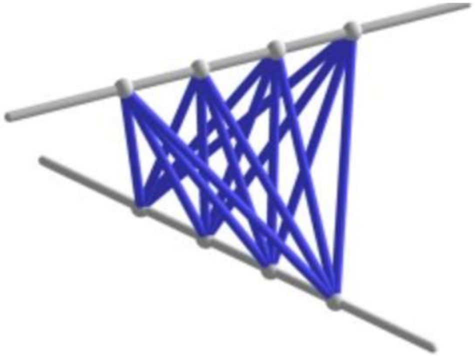


- Les liaisons pivots ont des axes appartenant à un faisceau de droites de directions quelconques dans l'espace mais qui se coupent un point

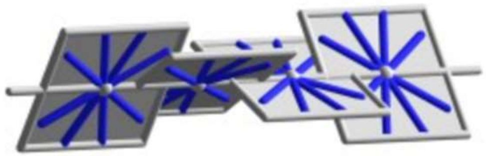
- Les liaisons glissières ont des axes de directions quelconques (non tous coplanaires et non tous parallèles)

Singularités et géométrie projective

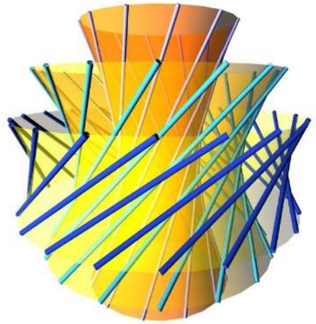
4 DDL = tous les torseurs ont des axes centraux appartenant à une congruence



Hyperbolic linear congruence

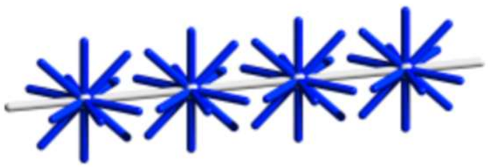


Parabolic linear congruence

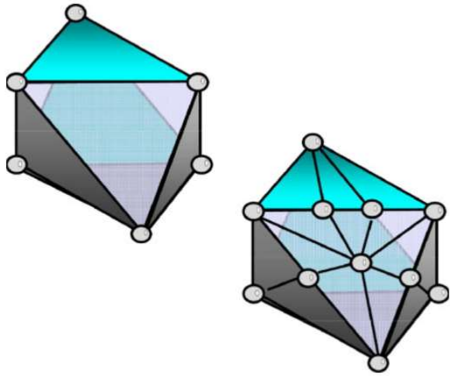


Elliptic linear congruence

5 DDL = tous les torseurs ont des axes centraux appartenant à un complexe



Special linear complex

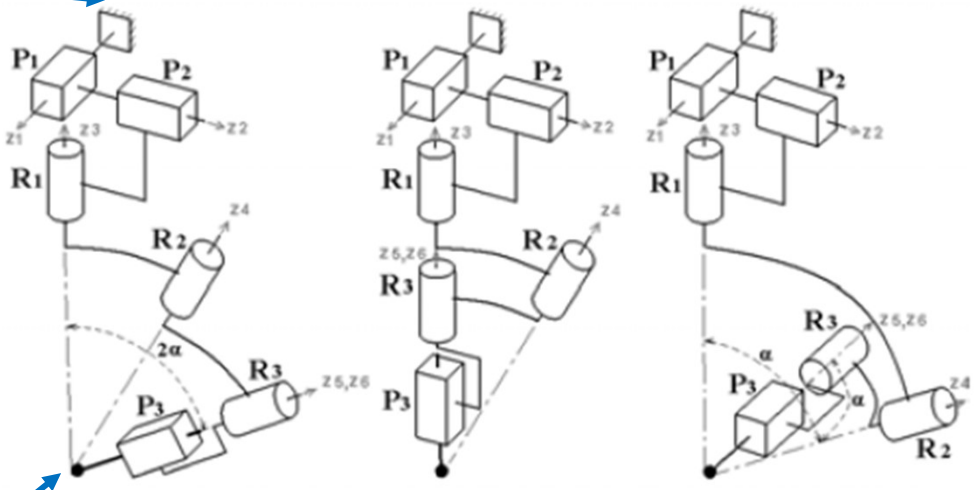


General complex

Singularités et géométrie projective

Singularités d'un Robot de télé-échographie à 6DDL = PPRRRP

Base du robot

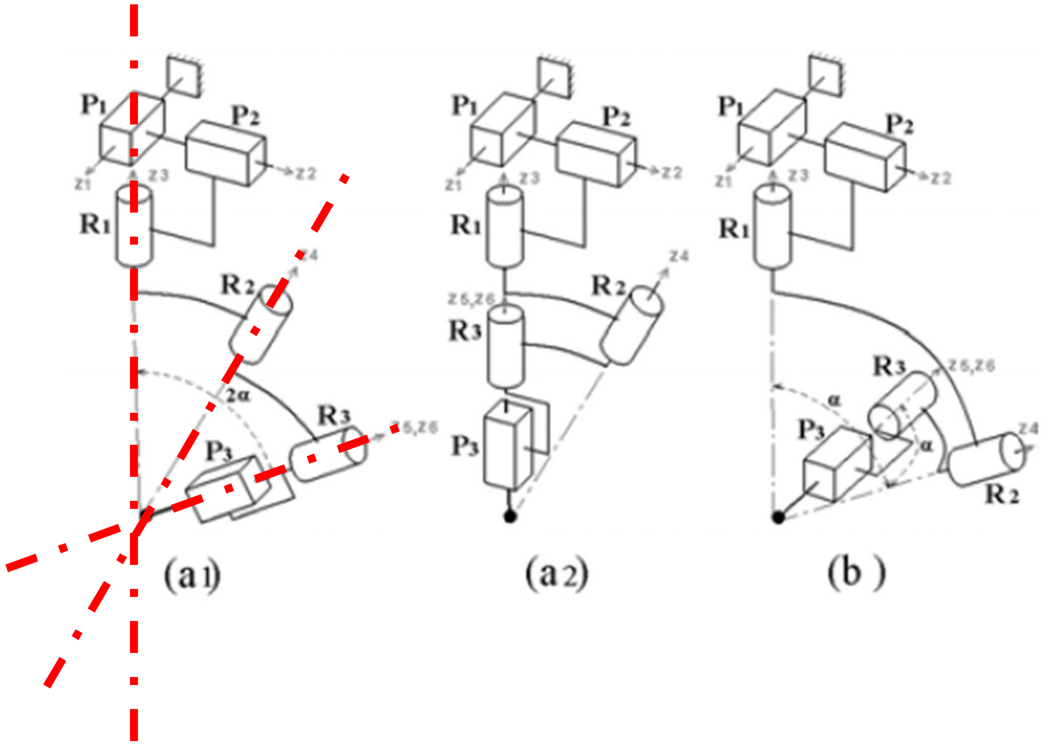


(a1) (a2) (b)

Effecteur du robot=
échographe

Singularités et géométrie projective

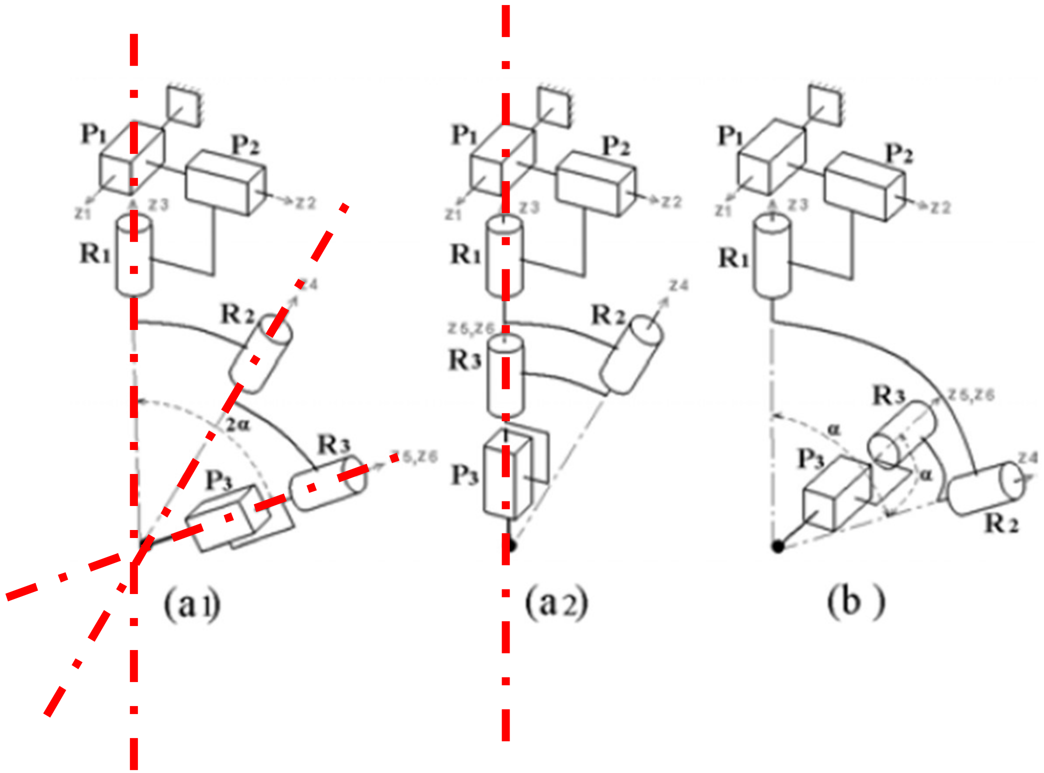
Singularités d'un Robot de télé-échographie à 6DDL = PPRRRP



3 liaisons pivots d'axes
coplanaires et
concourants

Singularités et géométrie projective

Singularités d'un Robot de télé-échographie à 6DDL = PPRRRP

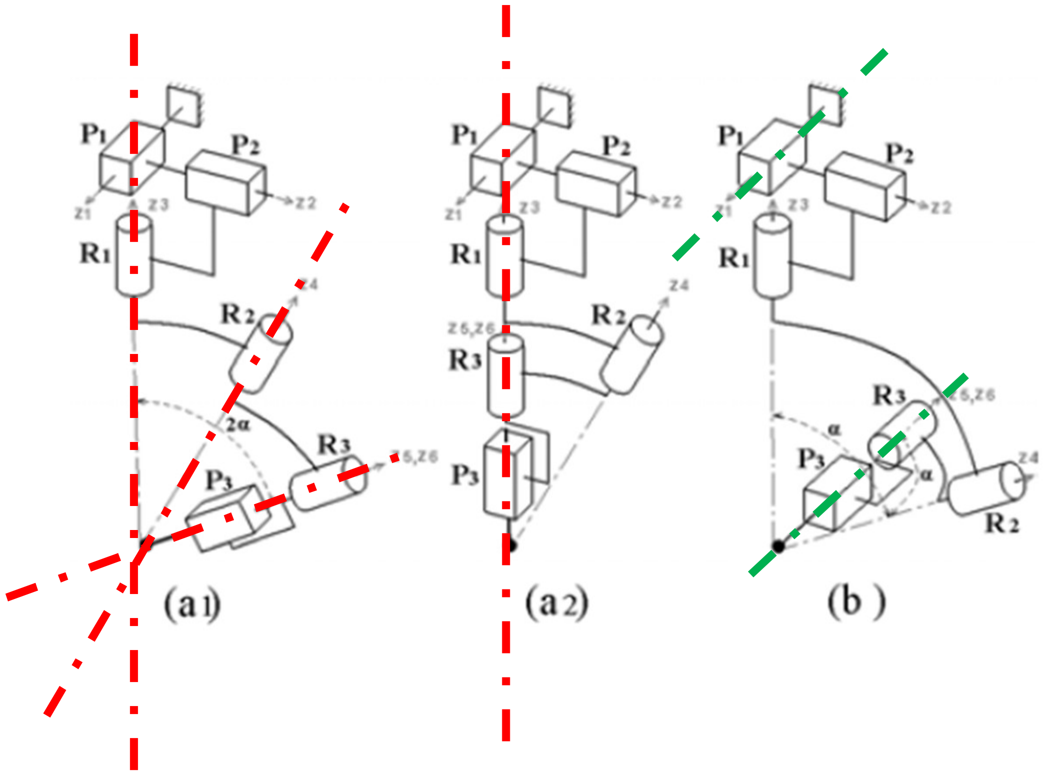


3 liaisons pivots d'axes coplanaires et concourants

2 liaisons pivots d'axes confondus

Singularités et géométrie projective

Singularités d'un Robot de télé-échographie à 6DDL = PPRRRP



3 liaisons pivots d'axes coplanaires et concourants

2 liaisons pivots d'axes confondus

2 liaisons glissières d'axes parallèles

Inversion de la Matrice Jacobienne

« Passer » la configuration singulière $\Longrightarrow$ « localiser » la configuration singulière

Singular Value Decomposition (SVD) : $\underset{\text{mxn}}{\mathbf{J}} = \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{mx}} \underbrace{\sum}_{\text{mxn}} \underbrace{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}}_{\text{nxn}}$

U et **V** sont des matrices orthogonales (det=1)

Σ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières σ_i ; i=1 … r=min(m,n),

Avec r=rang(**J**)

Fonction svd(J) dans matlab

Si m=n alors σ_i sont les valeurs propres de la matrice

Les valeurs propres nulles $\Longrightarrow$ colonnes de V correspondantes sont les vecteurs unitaires constituant la base du noyau de **J**: N(**J**)={$\dot{\mathbf{q}}$; $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$=**0**}

La SVD permet d'inverser une matrice: $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{V}\sum{}^{+}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$

Où $\sum^{+}$ est une matrice diagonale contenant les r valeurs $\frac{1}{\sigma_i}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{plus on se rapproche d'une singularité plus } \sigma_i \text{ devient petit}}$

Si σ_i = 0 alors det(**J**)=0

Si $\frac{1}{\sigma_i} = 0$ alors det($\mathbf{J}^{-1}$)=0

Manipulabilité

La manipulabilité est la capacité du robot à réaliser les vitesses dans l'espace opérationnel

m= $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ permet de quantifié la manipulabilité du robot:

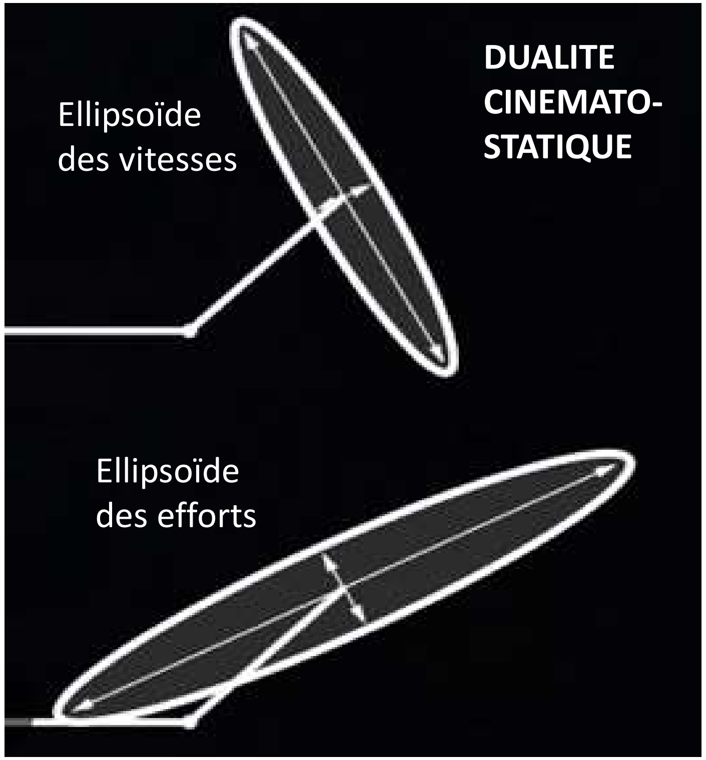
- Si m=1 alors la manipulabilité est optimale, la transmission des vitesses isotrope
- Si m=0 alors le robot est en configuration singulière, il existe une ou plusieurs directions selon lesquelles il n'y a plus de transmission de vitesse

la manipulabilité⟹ ellipsoïde de manipulabilité:

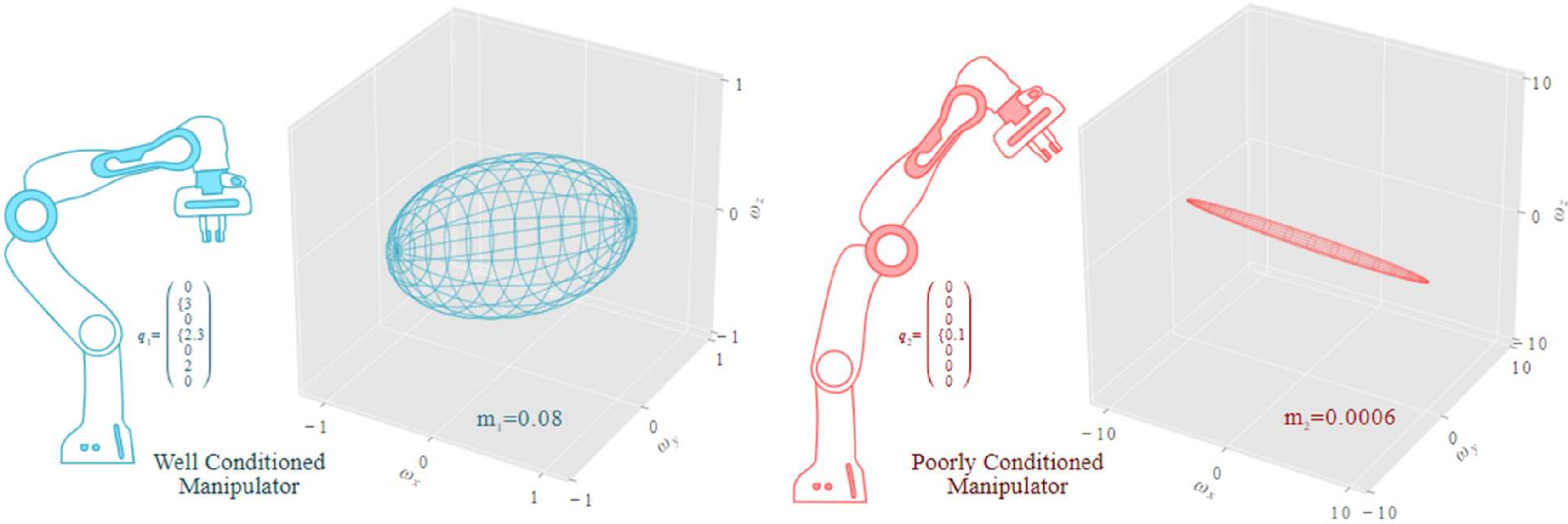
$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{q}} \leq 1 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}^{+2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}})\dot{\mathbf{x}} \leq 1$$

Les directions des axes principaux sont les colonnes de **U** et les rayons des axes principaux sont les valeurs σ_i

Le volume de l'ellipsoïde est $\sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^{\mathrm{T}})} = \prod \boldsymbol{\sigma_i}$



Manipulabilité: ellipsoïde de manipulabilité



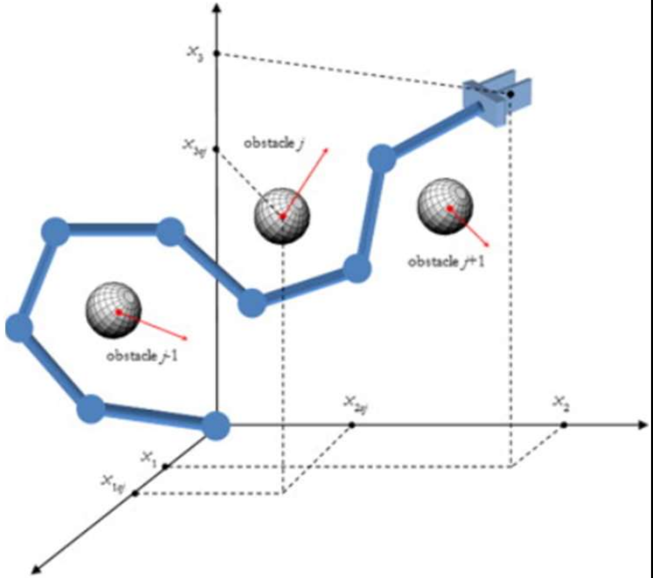
méthode de damping

On remplace $\frac{1}{\sigma_i}$ par $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2}$

λ un facteur d'amortissement assez petit devant σ_i

Redondance

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{1\text{xm}} = \underbrace{\mathbf{J}}_{\text{mxn}} \underbrace{\dot{\mathbf{q}}}_{\text{nx1}} \quad \text{et} \quad m<n$$



$\Longrightarrow$ il y a une infinité de solutions pour réaliser la tâche.

Intérêt des robots redondants:

- éviter des obstacles dans l'espace opérationnel,
- s'éloigner des butées articulaires,
- optimiser la manipulabilité dans des directions données,
- Éviter les configurations singulières,
- Minimiser l'énergie consommée

Méthodes de commande permettant de trouver une solution :

- Optimisation d'une fonction objectif : contrôle optimal
- Méthodes basées sur le jacobienne : pseudo-inverse
- Méthode de l'espace nul: introduction d'un critère d'optimisation de la tâche

Redondance: pseudo-inverse

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{1\text{xm}} = \underbrace{\mathbf{J}}_{\text{mxn}} \underbrace{\dot{\mathbf{q}}}_{\text{nx1}} \quad \text{et} \quad m<n$$

$\Longrightarrow$ il y a une infinité de solutions pour réaliser la tâche.
On choisit les tâches minimisant la norme euclidienne de $\dot{\mathbf{q}}$
On introduit un vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ de m inconnues
Le problème consiste alors à minimiser:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{x}})$$

$$\frac{\partial(\mathbf{v}^T\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial(\mathbf{u}^T\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{u}$$

Les solutions de minimisation vérifient: $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \Longrightarrow \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} = 0 \Rightarrow \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \end{cases}$ Si $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \neq 0$ alors $\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\dot{\mathbf{x}} \Longrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\dot{\mathbf{x}}$

$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ Pseudo-inverse ou Inverse Généralisé de Moore-Penrose
(pinv avec Matlab)

Redondance: pseudo-inverse

$\mathbf{A}$ une matrice nxm, sa pseudo-inverse $\mathbf{A}^+$ est l'unique matrice mxn vérifiant:

- $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T$
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^+ = \mathbf{B}^+\,\mathbf{A}^+$
- $(\alpha\,\mathbf{A})^+ = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^+$

$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ et $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$ sont des projecteurs orthogonaux $\Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \text{ et } \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \text{ et } \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{A}^+\mathbf{P} = \mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{A}^+ \end{cases}$

P est le projecteur orthogonal sur l'image de **A**
Q est le projecteur orthogonal sur l'image de $\mathbf{A}^T$
I - **P** est le projecteur orthogonal sur le noyau de **A**
I - **Q** est le projecteur orthogonal sur le noyau de $\mathbf{A}^T$

Redondance : Méthode de l'espace nul

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{1\text{xm}} = \underbrace{\mathbf{J}}_{\text{mxn}} \underbrace{\dot{\mathbf{q}}}_{\text{nx1}} \quad \text{et} \quad m<n$$

$\Longrightarrow$ il y a une infinité de solutions pour réaliser la tâche

Espace Nul $=\{\dot{\mathbf{q}}/\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\} \Longrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{+}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$

$\Longrightarrow \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^{+}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^{+}\mathbf{J}$ est la matrice de projection orthogonale sur N(J)

arbitraire

$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{J}^{+}\dot{\mathbf{x}}}_{solution\ particulière} + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{+}\mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_0}_{solution\ homogène}$$

Redondance : Méthode de l'espace nul

Soit U($\mathbf{q}$) une fonction objectif telle que:

- Optimisation de la manipulabilité: $U(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}$
- éloignement des butées articulaires : $\mathrm{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\mathrm{N}} \sum \left(\frac{q_i - \bar{q}}{q_{iM} - qim} \right)$
- évitement des obstacles : $\mathrm{U}(\mathbf{q}) = \min \|\mathbf{x} - \mathbf{obs}\|$
- Rapprochement d'une posture particulière: $\mathrm{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p)^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p)$

Méthode du gradient descendant (l'erreur diminue à chaque itération) : $\dot{\mathbf{q}}_0 = -\nabla U(\mathbf{q})$
Avec α un scalaire qui règle le taux de convergence.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+\dot{\mathbf{x}} - \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\nabla U(\mathbf{q})$$

Matrice Jacobienne

- Modèle Cinématique Direct: $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}(q)\dot{\boldsymbol{q}}$
- Modèle Cinématique Inverse : si **J**(q) est Carrée et Inversible alors $\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{J}^{-1}(q)\dot{\boldsymbol{x}}$
- La matrice Jacobienne n'est pas constante mais dépend de la configuration **J**(q)
- Le déterminant ne change pas avec le choix du point de l'effecteur,
- **J** permet la projection des forces entre les deux espaces articulaires et outil,
- **J** permet de connaître et de maîtriser les singularités du robot
- **J** est en général déterminée avec les torseurs et non par dérivation
- **J** Permet d'inverser numériquement le modèle géométrique direct
- **J** peut donner une information importante sur les vitesses nominales et maximales des moteurs à choisir.