Déformations

Pré-requis à travailler en autonomie.

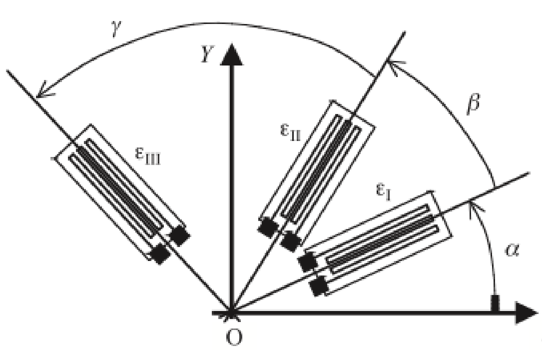
- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.
- Avoir travaillé et rédigé sur feuille le sujet de TD transformation non homogène de la semaine dernière.
- Avoir cherché la présente feuille de TD mesure des déformations et l'exercice d'autoévaluation.
- Exercice d'auto-évaluation :

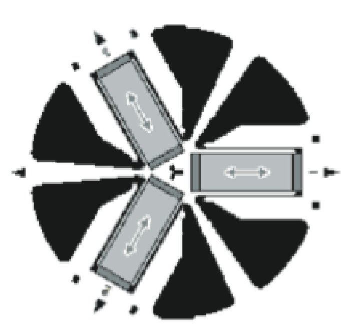
Soit un solide qui occupe dans sa configuration non déformée le cylindre de rayon R de hauteur H dans la direction $\underline{e}_3$. A l'instant $t = T$, les points $\underline{X}$ du solide ont subi le déplacement suivant : $\underline{\xi}(\underline{X}) = k\,X_1\,X_2\,\underline{e}_1 + k\,(\,X_1^2 - X_2^2\,)\,\underline{e}_2 + 0\,\underline{e}_3$ où k est une constante donnée.
a. Calculer les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\xi(\underline{X})$.
b. Vérifier que la condition de petites transformations est bien satisfaite si $k\,R \ll 1$.
c. Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en un point $\underline{X}$ et celles du tenseur tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ en grandes transformations.
d. Interpréter les composantes diagonales du tenseur des déformations linéarisées. Comparer avec la situation des grandes transformations.
e. Interpréter les composantes hors diagonale du tenseur des déformations linéarisées. Comparer avec la situation des grandes transformations.
f. Calculer la dilatation relative dans la direction $\underline{n}_0 = 1/\sqrt{2}(\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2\,)$. Comparer avec la situation des grandes transformations.
g. Calculer la variation relative de volume en petites et grandes transformations subie par le cylindre.

Mesures des déformations

On cherche à mesurer l'état de déformations en un point d'une structure. Les déformations dans la pièce sont supposées petites et planes, parallèlelement au plan $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$, $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ étant des vecteurs unitaires orthonormés donnés. Sous ces hypothèses, les déformations sont caractérisées au point M_0 par le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(X_1, X_2, X_3)$ dont les composantes dans le repère $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont telles que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(X_1, X_2)$ et $\epsilon_{i3} = 0$, pour $(i, j) = 1, 2$, le vecteur $\underline{e}_3$ étant le vecteur unitaire orthogonal au plan $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

1. Calculer l'allongement unitaire ϵ_θ au point M_0 dans la direction faisant l'angle θ avec l'axe $(M_0, \underline{e}_1)$ dans le plan $(M_0; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.
2. Expliquer comment déterminer expérimentalement le tenseur des déformations linéarisées au point M_0.
3. Quelles sont les directions pour lesquelles l'allongement ϵ_θ présente un extrêmum?
4. Application à la mesure des déformations à l'aide de jauges disposées en rosette
   Trois jauges de déformations (I, II, III) disposées en rosette autour d'un point O de la surface plane d'une éprouvette dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ mesurent les trois allongements unitaires suivant trois directions : $\alpha = 0^0$, $\beta = 120^0$ et $\gamma = 120^0$, (Figure).
   Les mesures obtenues sont $\epsilon_I = 0.5\,10^{-4}$, $\epsilon_{II} = 2\,10^{-4}$, $\epsilon_{III} = 2\,10^{-4}$.
   Déterminer les composantes du tenseur des déformations au point O.
   Déterminer la direction du plan pour laquelle l'allongement unitaire est maximum et donner sa valeur.
   Reprendre la question avec cette fois $\alpha = 0^0$, $\beta = 45^0$ et $\gamma = 45^0$ en conservant les mêmes valeurs des mesures d'allongement.



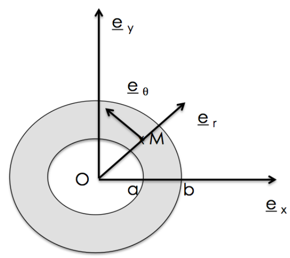


Taux de déformations

Dans un référentiel matérialisé par un repère orthonormé direct $(O; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ de coordonnées (x, y, z), on étudie le mouvement d'un fluide entre deux cylindres $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, d'axe $(0, \underline{e}_z)$ de rayons respectifs a et b avec $0 < a < b$ et de longueurs grandes devant les rayons. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées et les bases locales physiques $(0; \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.
Soit ω une constante donnée positive, le champ de vitesse $\underline{v}(r, \theta, z)$ de l'écoulement est donné par :

$$\underline{v}(r,\theta,z) \,=\, K\,(\,\frac{1}{r} \,-\, \frac{r}{b^2}\,)\,\underline{e}_\theta, \qquad \text{avec} \;\; K \,=\, \frac{\omega\, a^2\, b^2}{b^2 \,-\, a^2}.$$

1. Etudier les trajectoires et lignes de courant de ce mouvement loin des extrémités des cylindres.
2. Tracer le profil des vitesses sur un rayon r situé entre a et b. Donner une interprétation physique.
3. Calculer le tableau des composantes physiques des tenseurs suivants : $\underline{\underline{\nabla v}}$ tenseur gradient de vitesse, $\underline{\underline{d}}$ tenseur des taux de déformation, $\underline{\underline{\Omega}}$ tenseur des taux de rotation.
4. Déterminer de deux façons différentes le vecteur taux de rotation $\underline{\Omega}$.
5. Le mouvement est-il isochore ?
6. Vérifier qu'il existe un potentiel de vitesse dans ma situation où le cylindre extérieur est de rayon très grand $(b \to \infty)$
7. Calculer le potentiel des vitesses dans ce cas
8. Calculer la circulation Γ du champ de vitesse le long d'un cercle d'axe $(0, e_z)$ et de rayon $R > a$.



Formulaire en coordonnées cylindriques

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\underline{\mathrm{grad}} f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z \qquad \Delta f(r,\theta,z) \,=\, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) \,+\, \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \,+\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence, rotationnel et Laplacien d'un vecteur $\underline{v} \,=\, v_r\,\underline{e}_r \,+\, v_\theta\,\underline{e}_\theta \,+\, v_z\,\underline{e}_z$:

$$\mathrm{div}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\,r\,v_r\,) \,+\, \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \,+\, \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}(r,\theta,z) \,=\, (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \,-\, \frac{\partial v_\theta}{\partial z})\,\underline{e}_r \,+\, (\frac{\partial v_r}{\partial z} \,-\, \frac{\partial v_z}{\partial r})\,\underline{e}_\theta \,+\, (\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \,+\, \frac{v_\theta}{r} \,-\, \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\,)\,\underline{e}_z,$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v}(r,\theta,z) \,=\, \left(\Delta v_r \,-\, \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \,-\, \frac{v_r}{r^2}\right)\underline{e}_r \,+\, \left(\Delta v_\theta \,+\, \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \,-\, \frac{v_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta \,+\, \Delta v_z\,\underline{e}_z.$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r, \theta, z)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z) \,=\, \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} \,-\, \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \,+\, \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}.$$

Divergence d'un tenseur $\underline{\underline{\tau}}(r, \theta, z)$ *symétrique :*

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}} \,=\, (\,\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \,+\, \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \,+\, \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \,+\, \frac{\tau_{rr} \,-\, \tau_{\theta\theta}}{r}\,)\,\underline{e}_r \,+\, (\,\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \,+\, \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \,+\, \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \,+\, \frac{2\,\tau_{r\,\theta}}{r}\,)\,\underline{e}_\theta$$

$$+\,(\,\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \,+\, \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} \,+\, \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \,+\, \frac{\tau_{r\,z}}{r}\,)\,\underline{e}_z.$$