CALCUL TENSORIEL

1/ produit tensoriel

$$T \otimes T'(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p+q}) = T(u_1, \dots, u_p)\, T'(u_{p+1}, \dots u_{p+q})$$

T : tenseur d'ordre p
T' : tenseur d'ordre q

2/ tenseur d'ordre 2

$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v})$ $\quad \underline{a} \otimes \underline{b}\,(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v})$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

avec $T_{ij} = \underline{\underline{T}}(e_i, e_j)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot v)$$

$$\underline{v} \cdot \underline{a} \otimes \underline{b} = (\underline{v} \cdot \underline{a})\underline{b}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}} \cdot v$$

Contraction

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d} = (b \cdot c)\, \underline{a} \otimes \underline{d}$$

<u>double contraction</u>

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}' = \text{trace}\,(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}') = \underline{\underline{T}}' : \underline{\underline{T}}$$

produit tensoriel* de <u>2 matrices</u> :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

produit tensoriel* de <u>2 vecteurs</u> :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T$$

*: produit de Kronecker

*: outer product (produit dyadique)

↑ voir TD1, L3 pour fiche

note **produit tensoriel**

I) produit Direct

→ generalise le produit cartésien

ex : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 \\ 1 \times 0 \\ 2 \times 3 \\ 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

II) Outer product / Produit dyadique

Le produit tensoriel de deux vecteurs est désigné comme "produit dyadique" si les 2 vecteurs ont une dimension n et m, alors leur produit dyadique est une matrice $n \times m$

{ exprimé par rapport à une base

$$(\forall u)\ (\forall v) \quad u \otimes v = u v^T$$

Produit de Kronecker

operation sur 2 matrices de taille arbitraire qui resulte d'une "matrice par blochs". C'est une generalisation du produit dyadique.

connexion entre $\otimes_{outer}$ et $\otimes$ Kronecker

$$u = [1 \quad 2 \quad 3]^T \quad \text{et} \quad v = [4 \quad 5]^T$$

$$u \otimes_{Kron} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes_{Kron} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$u \otimes_{out} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes_{out} [4 \quad 5] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Le produit de Kronecker est une forme de vectorisat
du produit dyadique

$$u \otimes_{out} v = u v^T = u \otimes_{Kron} v^T$$

Analyse vectorielle

Soit f une fct° scalaire
$\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux champs de Vect.

$$\nabla.(f\underline{A}) = f\,\nabla.(\underline{A}) + \underline{A}.\underline{\nabla} f$$

$$\underline{\nabla}\wedge(f\underline{A}) = f\,\underline{\nabla}\wedge\underline{A} + \underline{\nabla} f\wedge A$$

$$\mathrm{div}(\underline{A}\wedge\underline{B}) = \underline{B}.\underline{\nabla}\wedge\underline{A} - \underline{A}.\underline{\nabla}\wedge\underline{B}$$

$$\nabla.(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}) = 0$$

$$\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla} f) = \vec{0}$$

$$\nabla.(\underline{\nabla} f\wedge\underline{\nabla} g) = 0 \qquad \{g \text{ une fct° scalaire}$$

- $\underline{u}\wedge(\underline{v}\wedge\underline{w}) = (\underline{u}.\underline{w})\underline{v} - (\underline{u}.\underline{v})\underline{w}$
- $\underline{\mathrm{Rot}}(\underline{\mathrm{Rot}}\,\underline{u}) = \underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{u}) - \underline{\Delta}\,\underline{u}$
- $(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}).\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{\nabla} v^2 + \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}\wedge\underline{v}$

CALCUL INDICIEL

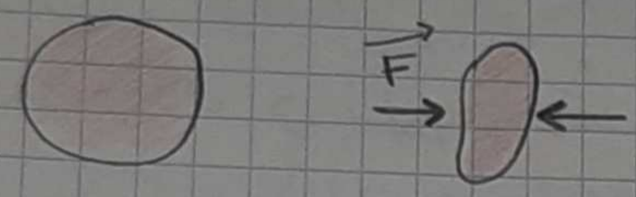
- $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijp} = 2\,\delta_{kp}$; $\delta_{iq}\,\delta_{qj} = \delta_{ij}$
- $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{iqr} = \delta_{jq}\,\delta_{kr} - \delta_{jr}\,\delta_{kq}$
- $\mathrm{trace}\,(\underline{\underline{A}}\;{}^{T}\underline{\underline{A}}) = a_{ki}\,a_{ki}$
- $\mathrm{trace}\,(\underline{\underline{A}}^{2}) = a_{ki}\,a_{ik}$

Analyse Vectorielle

↳

Tenseur de déformat°:

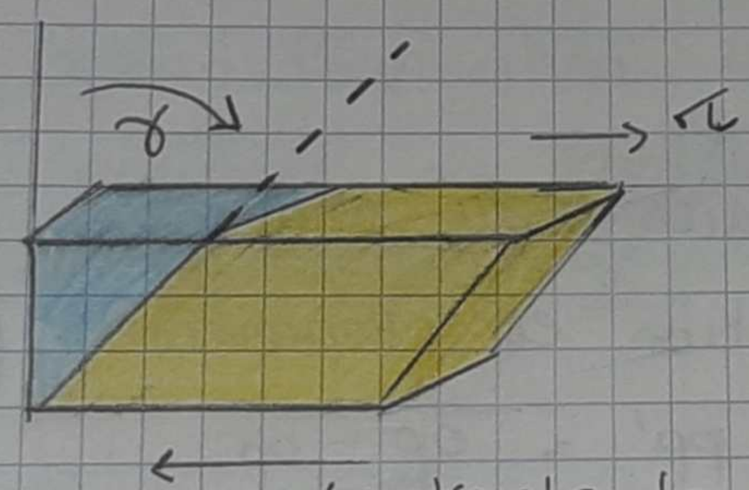
pour supporter un chargemt, un milieu materiel doit se deformer



→ La mesure du deplacement nous permet de remonter à la deformation, contrainte.

A l'echelle macroscopique

$l + \Delta l$
extension



Glissemt

Une propriété essentielle du milieu continu c'est qu'une fois soumis à des contraintes, les elements de volume subissent des changements de position d'orientation et de forme

Tenseurs de déformation

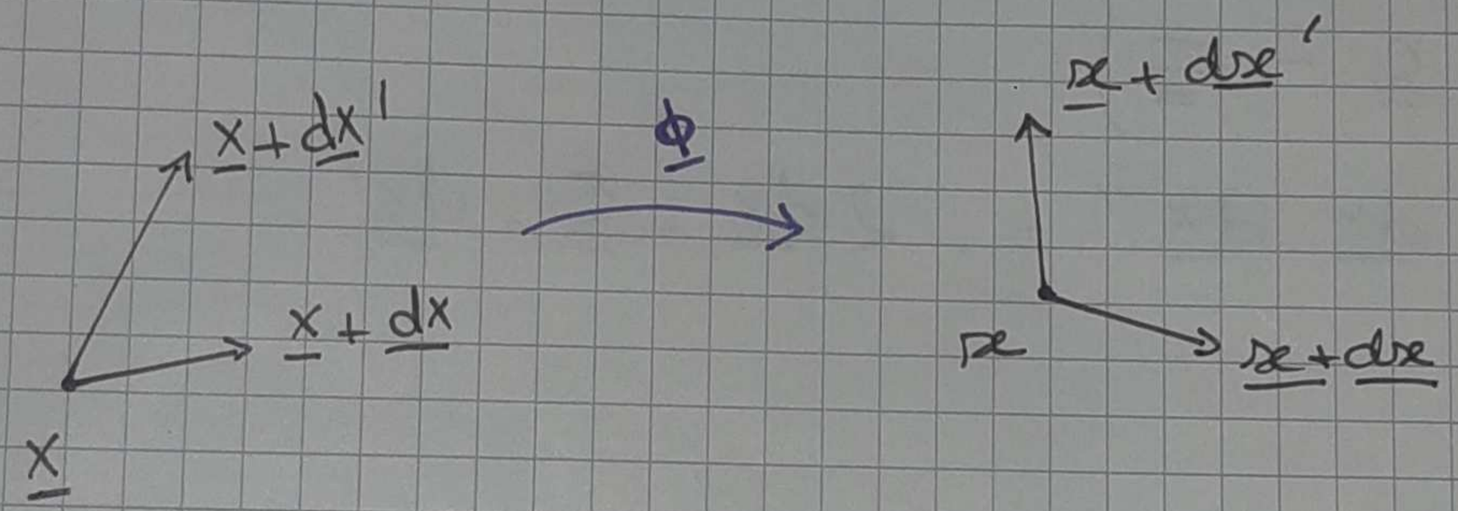
Def

Un solide se deforme dans une direction et à un point M données ssi une ligne materielle infiniment courte tracée ds cette direction a une longueur qui n'est pas cste au cours du temps

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\Phi}$ gradient de transformation

$\underline{dx} = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\Phi}.\underline{dX}$ et $\underline{dx}' = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\Phi}.\underline{dX}'$

on appelle transformation Homogène toute transfo dont le gradient de transformat° $\underline{\underline{F}}$ ne depent pas du vecteur $\underline{X}$



- tenseur de dilatat° (Cauchy/Green) : $\underline{\underline{C}}$

- $\boxed{\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}}$

- $\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}$

- Dilatation

on appelle dilatation dans la direction de $\underline{dX}$ le rapport

$$\boxed{\lambda(\underline{dX}) = \frac{|\underline{dx}|}{|\underline{dX}|}}$$

Dilatation dans la direct° d'un vecteur unitaire $\underline{n_0}$:

$$\boxed{\lambda(\underline{n_0}) = \sqrt{\underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n_0}}}$$

- tenseur des deformations (Green/Lagrange) : $\underline{\underline{E}}$

- $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}\right)$

- $\underline{dx} \cdot \underline{dx}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}' = 2\,\underline{dX} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{dX}'$

Autres formulations

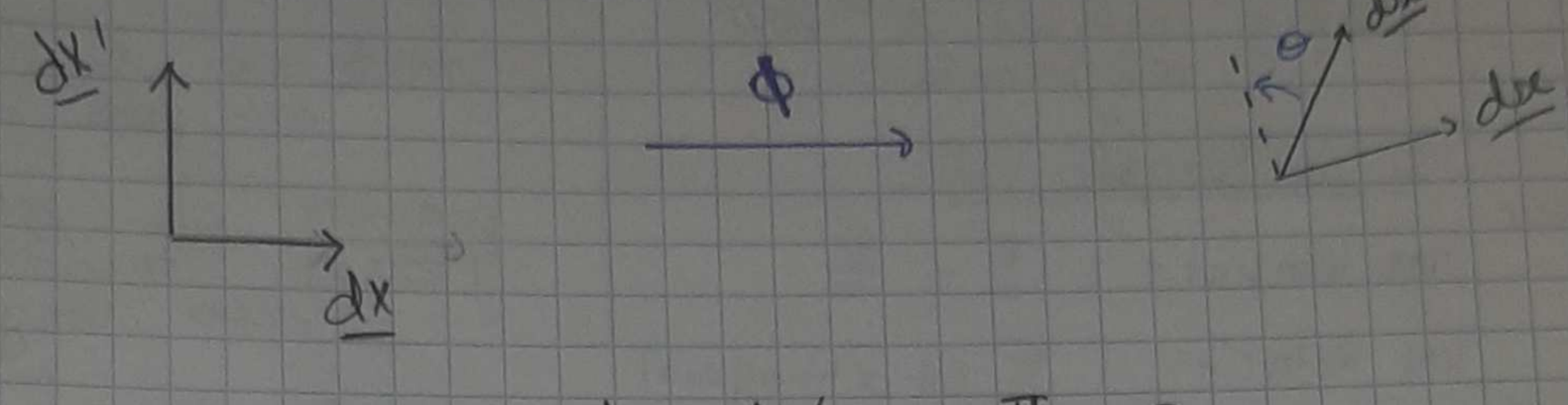
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}$

- $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}} \cdot \underline{\underline{\nabla\xi}}\right)$

Glissement :

on appelle glissem^t d'un couple de direct$^{\circ}$ $\underline{dX}$ et $\underline{dx'}$ le complementaire θ de l'angle entre $\underline{dx}$ et $\underline{dx'}$.

glissem^t d'un couple de direct$^{\circ}$



$$(\underline{dx}, \underline{dx'}) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{22}}\,\sqrt{1+2E_{11}}}}$$

Pour $\underline{dX}$ et $\underline{dX'}$ respect. colinéaires à $\underline{e_1}$ et $\underline{e_2}$

formule generale :

$$\sin\theta = \frac{2E_{12} + \sin\theta_0}{\sqrt{1+2E_{11}}\,\sqrt{1+2E_{22}}}$$

Avec θ_0 le complement à l'angle entre $\underline{dX}$ et $\underline{dX'}$.

$\underline{\underline{C}}$	$\underline{\underline{E}}$	$\underline{\underline{F}}$
tenseur de Dilatat°	tenseur de deformat°	tenseur de transformat°
• symétrique • Valeurs propres >0 note : vp = direct° princ.-ipales	• symétrique • n̂ vp que $\underline{\underline{C}}$ • pour un solide non deformé $\underline{\underline{E}} = 0$	• $\det \underline{\underline{F}} > 0$ • $F_{ij} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}$ permet le passage de la config initiale à déformée.
Les termes sur la diagonale de ces tenseurs caractérisent les accroissemt de longueur		
→ Tenseur symétr. (2e ordre) qui opère sur des vecteurs matériel-s.	→ permet de jauger l'écart quadratique des longueurs	
La non nulité d'un terme diagonal est le signe d'une dilatation dans la direction correspond $\begin{bmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & y & \cdot \\ \cdot & \cdot & z \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}$	Les elements diagonaux du tenseur $\underline{\underline{E}}$ donnent les changements relatifs de longueur des vecteurs elem-entaires initiale-ment dirigés selon les axes $\begin{bmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & y & \cdot \\ \cdot & \cdot & z \end{bmatrix}$	
la non nulité d'un terme non diagonal indique la perte d'orthogonalité du couple de direct° correspond. $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix}$	Les elements non diagonaux renseignent sur le glissemt du couple considéré dans la base canonique.	

Si la transfo est :

une translat° : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$

une Rotation : $\underline{\underline{F}}$ est orthogonal

$({}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}})$

$J(\underline{X}, t)$ le jacobien de la transformation

$$J(\underline{X}, t) = \det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}\right) = \det \underline{\underline{F}}$$

formule de transport des volumes elementaires :

$$d\Omega_t = J(\underline{X}, t)\, d\Omega_0$$

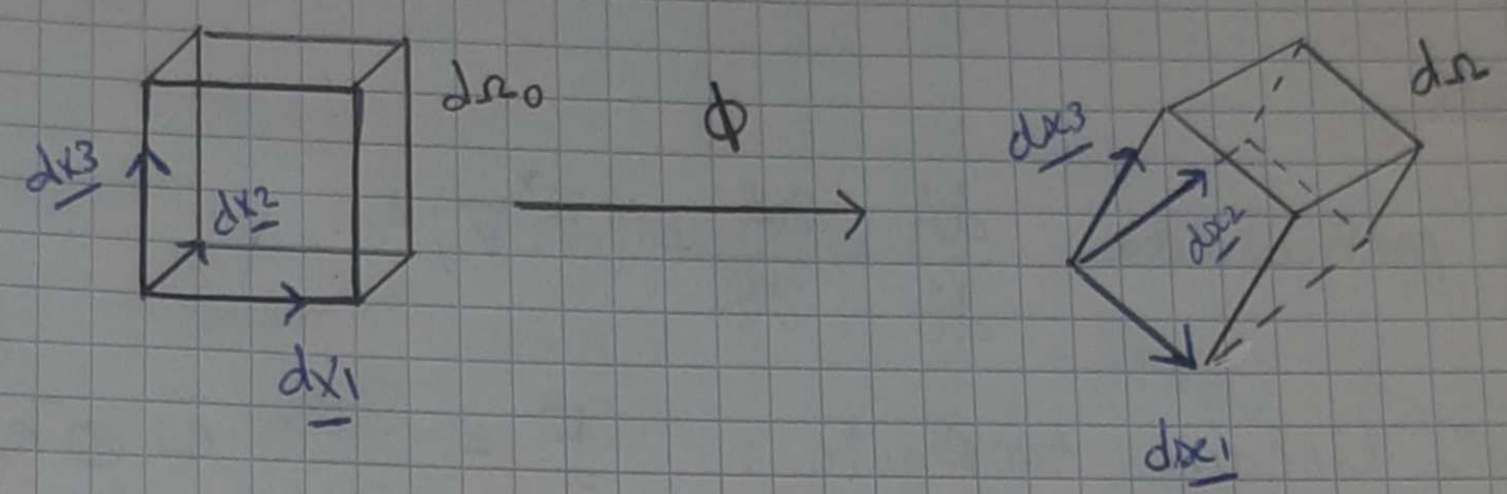
on peut interpreter $J(\underline{X}, t)$ comme la dilatat° du volume element. entre les config initiale et actuelle.

Transport, dérivés particulaires

3.1) Transport d'un volume

Soit $d\Omega_0$ un element de volume de la configuration de Reference, defini par trois vecteurs $d\underline{X}_1$, $d\underline{X}_2$, $d\underline{X}_3$.

Par la transformation, ces 3 vecteurs se transportent en trois vecteurs $d\underline{x}_1$, $d\underline{x}_2$, $d\underline{x}_3$ qui définissent dans la config actuelle un volume $d\Omega$.



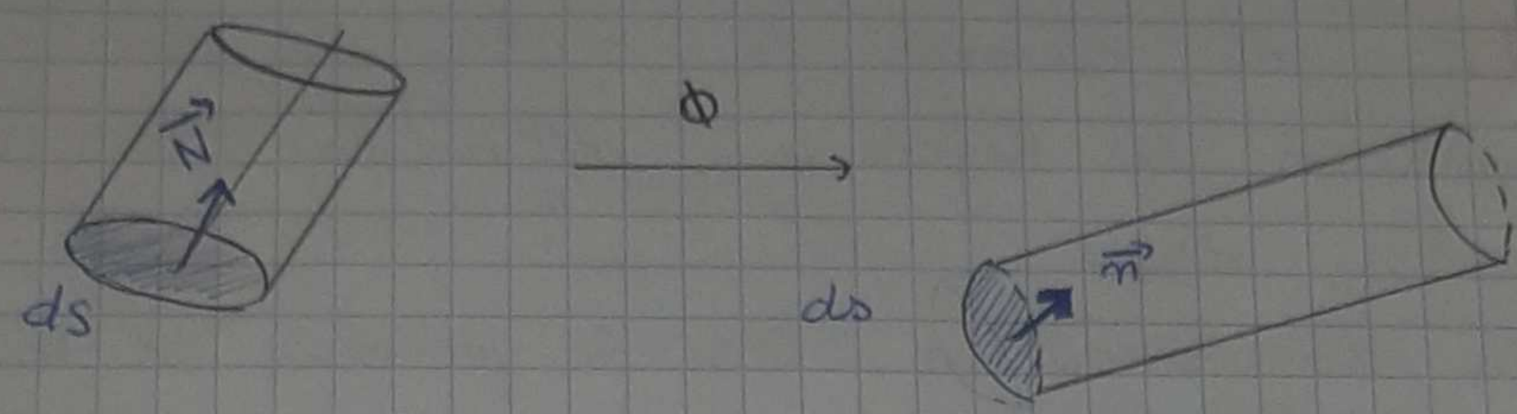
$$\boxed{d\Omega = \det(\underline{\underline{F}})\, d\Omega_0}$$

3.2) Transport d'une surface orientée

Soit dS un element de surface de la config de référence de Normale $\vec{N}$. Par la transformat°, cette surface se transporte en une surface d de normale $\vec{n}$.

En considerant un vecteur $\vec{V}$ dans la config de reference qui se transporte en un vecteur $\vec{v}$ dans la config actuelle, on peut definir l'element de

volume $(dS\,\vec{N}).\vec{V}$ qui se transporte en un elem^t de volume $(ds\,\vec{n}).\vec{v}$



$$ds\,\underline{n} = \det(\underline{\underline{F}})\,dS\,\underline{N}\,{}^t(\underline{\underline{F}}^{-1})$$

A Retenir

Dérivée particulaire : $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)A$

Applicat° linéaire tangeante : $\underline{\underline{F}} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\,\vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$

- <u>Tenseur TAux de deformation</u>

Jusqu'à la, nous nous sommes intéressés à étudier sur un plan géométrique la deform-ation subie par un milieu entre la config. de ref et actuelle, indépendamment de la vitesse à laquelle s'est produite cette transformation, c'est à dire sans se préoccuper de l'histoire intermediaire

La deformation étant Mesurée par le produit Scalaire de deux vect materiels, la vitesse de déformation ou taux de deformation sera Mesurée par : $\frac{d}{dt}(dX.\delta X)$

avec dX_0, fixés

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM}.\underline{\delta M}) = \frac{d}{dt}(\underline{dM}).\underline{\delta M} + \frac{d}{dt}(\underline{\delta M}).\underline{dM}$$

$$\underline{\text{or}} \quad \frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt}(F_{i\alpha}\, dX_\alpha)$$

i ème composante

sommat° sur α

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) dX_\alpha$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_i(\underline{X},t)}{\partial t}\right) dX_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} V(\underline{X},t)\, dX_\alpha$$

vitesse Lagrangienne.

$$\Rightarrow V(\underline{X},t) = v(\phi(\underline{X},t),t)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(V_i(\underline{X},t)\right) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left[v_i(\phi(\underline{X},t)),t\right]$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i(\underline{x},t)\right)\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} F_{j\alpha}$$

donc $\frac{d}{dt}(d\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla v}}_x F\, dM_0$

$$\frac{d}{dt}(d\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot d\underline{M}$$

$$\frac{d}{dt}(d\underline{M}\cdot\delta\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot d\underline{M}\cdot\delta\underline{M} + \underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot \delta\underline{M}\cdot d\underline{M}$$

$$\frac{d}{dt}(d\underline{x}\cdot d\underline{x}') = d\underline{x}\,{}^t\underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot d\underline{x}' + d\underline{x}'\cdot {}^t\underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot d\underline{x}$$

$$\boxed{\dot{\overline{d\underline{x}\cdot d\underline{x}'}} = \frac{d}{dt}(d\underline{x}\,d\underline{x}') = 2\, d\underline{x}\cdot \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\cdot d\underline{x}'}$$

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla v}}_x(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla v}}_x(\underline{x},t)\right]$$ tenseur des taux de deformat°

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ $\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}$

(x,t) $\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}$

$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$ est symétrique. Il depend linéairement du champs de vitesse $\underline{v}(\underline{x},t)$

$$\frac{d}{dt}(d\underline{x}) = \underline{\underline{\nabla v}}_x \cdot d\underline{x} = \frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X}) = \dot{\underline{\underline{F}}}\, d\underline{X}$$

1) Flu

et

$$\dot{\underline{\underline{F}}}\, d\underline{X} = \dot{\underline{\underline{F}}}(\underline{\underline{F}}^{-1} d\underline{x})$$

ducoup

par identification : $\boxed{\underline{\underline{\nabla v}}_x = \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}}$

ens

$$\Rightarrow \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left[{}^t\underline{\underline{\nabla v}}_x + \underline{\underline{\nabla v}}_x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}^t\dot{\underline{\underline{F}}}\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1} + \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}\right]$$

Rappel : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}({}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$

$$2\dot{\underline{\underline{E}}} = {}^t\dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}\,\dot{\underline{\underline{F}}}$$

$$2\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\dot{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}({}^t\dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}\,\dot{\underline{\underline{F}}})\,\underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$2\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\dot{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1} = {}^t(\underline{\underline{F}}^{-1}\dot{\underline{\underline{F}}}) + \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\boxed{\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{d}}(v(\underline{x},t)) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\dot{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

Important

$$\underline{\underline{\nabla}} V(\underline{x},t) = \frac{\partial V_i(\underline{x},t)}{\partial x_j} \qquad \text{Lagrange}$$

$$= \frac{\partial v(\Phi(\underline{x},t),t)}{\partial x_j} \qquad \text{Euler}$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial \phi_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \times \underline{\underline{F}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla V}}_x = \underline{\underline{\nabla_v}}_x \underline{\underline{F}}}$$

et inversement ; $\underline{\underline{\nabla_v}}_x = \underline{\underline{\nabla V}}_x \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\nabla V}}\, \underline{\underline{G}}$

d'où $\underline{dM} = \underline{\underline{F}}\, \underline{dM_0}$

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM}) = \frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}})\underline{dM_0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\underline{\underline{\nabla \Phi}})\underline{dM_0} = \underline{\underline{\nabla}}\left(\frac{d}{dt}\underline{\Phi}\right)\underline{dM_0}$$

$$= \underline{\underline{\nabla V}}\, \underline{dM_0}$$

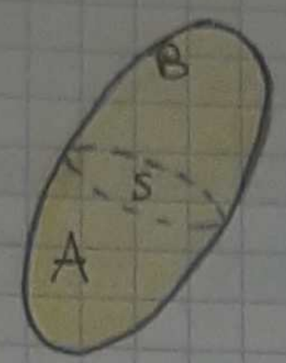
$$= (\underline{\underline{\nabla_v}}_x)\underline{\underline{F}}\, \underline{dM_0}$$

$$= \underline{\underline{\nabla_v}}_x\, \underline{dM}$$

Tenseur des contraintes (Stress Tensor)

Tenseur de contraintes

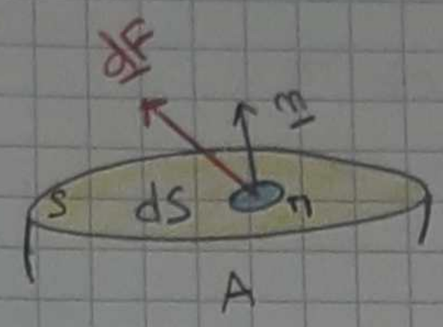
On construit $\underline{\underline{\sigma}}$ à partir du vecteur de contrainte au point $\underline{x}$: $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ ⇒



S : coupure fictive

- Le solide est chargé par un nombre/ensemble de sollicitat° externes

$\underline{dF}$: efforts internes → densité massique de force.



vecteur contrainte au point M *

$$\underline{T}(M, \underline{n}, t) = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

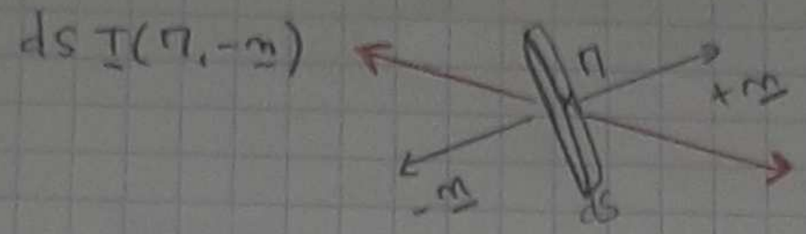
{* pour la section dS de normale $\underline{n}$}

$\underline{T}$ symbolise les efforts de cohésion qui vont garder la structure en équilibre

note : En réalisant la coupure fictive, on constate un certain nombre de forces internes infinitésimale en chaque point M de la section → $\underline{dF}$

I) $\underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) = -T(\underline{x}, \underline{N}, t)$

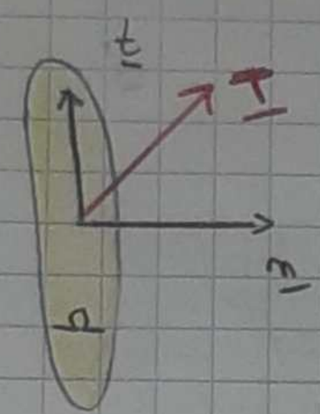
↳ cas d'un cylindre infiniment petit d'axe n, de hauteur $h \to 0$ et de section ds



$ds\,\vec{T}(n, n)$ { Homogène à une force

qd $h \to 0$, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces $ds\,T(n, n)$; $ds\,T(n, -n)$

On projète $\underline{T}$ selon $\underline{n}$ et $\underline{\tau}$



$\underline{n}$: La normale à la facette Ω (elle est quelconque)

$\underline{t}$: vecteur tangeantiel porté par la facette

<u>On appelle</u> :

Contrainte tangeantielle : projection de $\underline{T}$ sur $\underline{t}$

Contrainte normale : projection de $\underline{T}$ sur $\underline{n}$

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{N}) = \sigma_n \cdot \underline{n} + \tau_n \cdot \underline{t}$$

contrainte normale

contrainte tangeantielle.

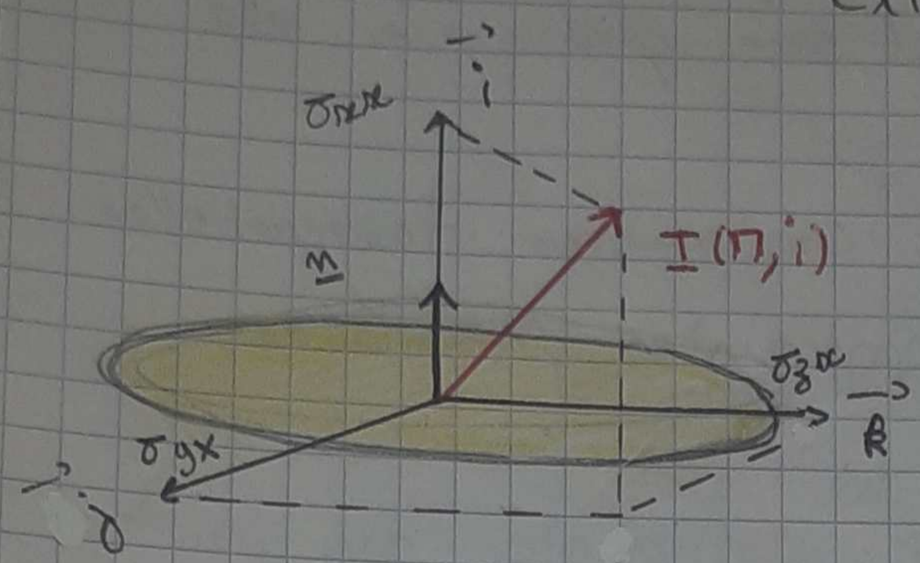
Tenseur des contraintes (Stress Tensor)

$$\boxed{\sigma_{ij}}$$

1er indice — 2nd indice

1er indice = Le vecteur unitaire de l'axe sur lequel est projetée la contrainte

2e indice = Le vecteur unitaire de la normale exterieure à la facette



σ_i => projection de $\underline{T}$ sur $\vec{i}$ (contrainte normale)

$\underline{T}(n,\underline{i})$ = Vecteur contrainte au pt n pour la facette de normale $\vec{i}$

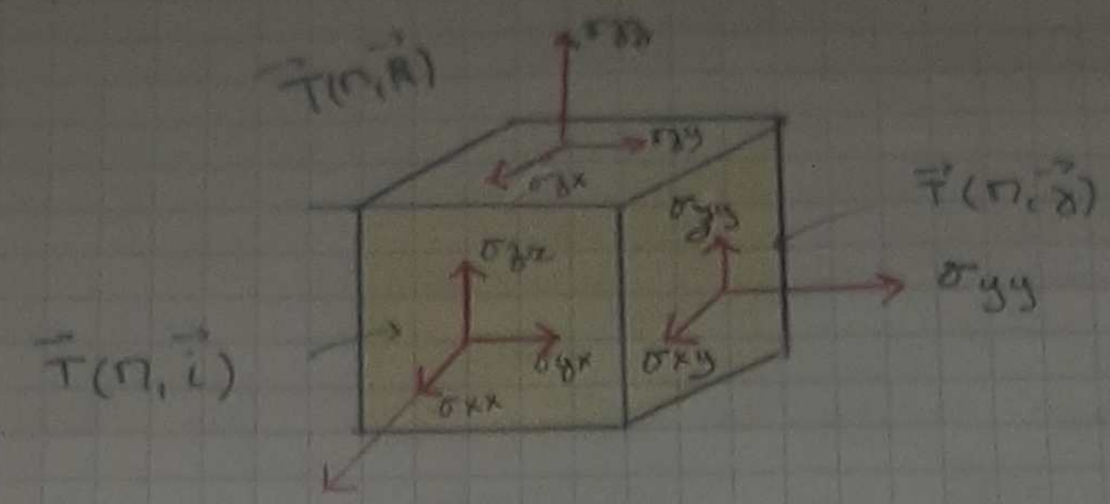
<u>ex</u> : $\sigma_i = \sigma_{xx}$

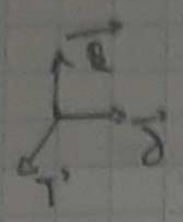
σ_i est projeté sur x

x est la normale à la facette

$$\boxed{\vec{\tau_i} = \sigma_{yx}\,\vec{j} + \sigma_{zx}\,\vec{k}}$$

{ contrainte tangeantielle / de cisalent





Avec la notat° indicielle, on peut facilemt savoir quelle facette concerne la projection, et sur quel axe elle aura lieu

là où les indices sont ≠ : contraintes tangentielles

là où ils sont égaux : contraintes normales

$T(M, \underline{i}, \underline{j}$ ou $\underline{k}) \Rightarrow$ Vecteur contrainte au point M pour une facette de normale $\underline{i}$, $\underline{j}$ ou $\underline{k}$

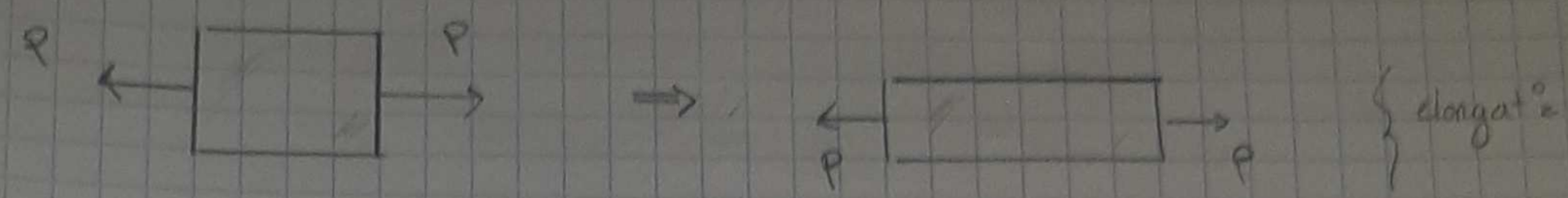
$$\text{composantes sur} \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{tenseur d'ordre } 2$$

$\vec{T}(M,\vec{i})$ $\quad$ $\vec{T}(M,\vec{j})$ $\quad$ $\vec{T}(M,\vec{k})$

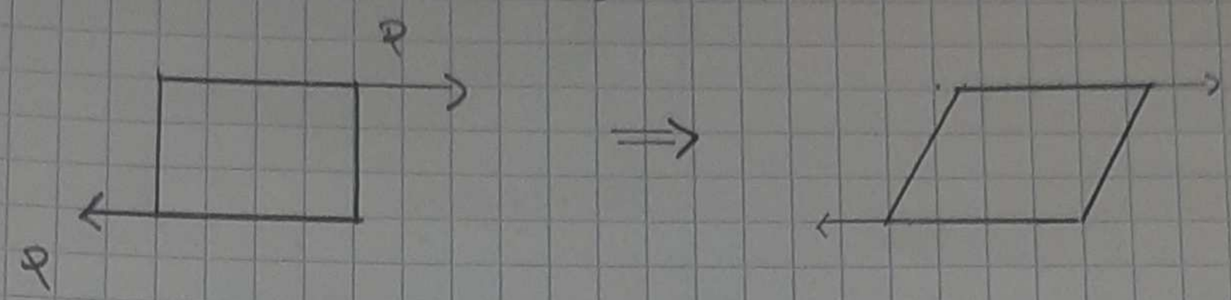
$\Rightarrow$ tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ construit à l'aide des 3 projections relatives de chaque vecteur de contrainte.

Tenseur des contraintes (Stress Tensor)

Soit un bloc materiel soumis à une charge P située sur ses deux faces horizontales



on applique cette fois ci le couple de force sur les deux faces ; supérieure et inférieure



non seulement l'ampleur / l'amplitude de la force est importante, mais la face sur laquelle la force est appliquée l'est aussi

$\underline{\underline{\sigma}}$ est une representation générique de l'etat de contrainte à l'intérieur du matériau. Il decrit les contraintes qui agissent sur chacune des faces (des materiau)

Les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont des scalaires

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}$$

Contraintes principales et invariants

→ le tenseur de contraintes est symétrique on peut le diagonaliser. Il existe trois directions principales orthogonales associées à trois valeurs propres σ_1, σ_2, σ_3 appellées contraintes principales.

dans le repère principal (formé par les $\vec{vp}$ de $\underline{\underline{\sigma}}$) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ y est diagonal

→ les contraintes principales s'obtiennent par la résolution de l'equation caracteristique

$$\det [\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}] = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

or $\underline{\underline{\sigma}}$ etant symétrique ; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$= \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3$$

$$I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det(\sigma_{ij})$$

Hypothèse des HPP

$\underline{\underline{\varepsilon}}$

$|\nabla \underline{\underline{\xi}}| \ll 1$ alors $\underline{\underline{\varepsilon}} \simeq \underline{\underline{E}}$

on a $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \xi}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}}\right)$$

avec une transfo Rigidifiante :

$$\phi = a(t) + \underline{\underline{R}}(t) \cdot \underline{X} \qquad \{ R \text{ orthogonal}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \; ; \; {}^T\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}} = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}} \; ; \; \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

par contre

$$\underline{\underline{\nabla \xi}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$$

n'est pas forcent petit

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{R}} + {}^T\underline{\underline{R}}\right) - \mathbb{1} \neq 0$$

$\underline{\underline{E}} = 0$ n'implique pas $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$

Transformation infinitésimale

La transfo du système entre 0 et t est dite infinitésimale si $\forall \underline{x}$, $\underline{\underline{F}}(\underline{x},t) \sim \underline{\underline{I}}$

$\rightarrow$ càd $(\forall \underline{x})$ $\boxed{|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{x},t)| \ll 1}$ App

Lorsque la condit° App est satisfaite on peut négliger le terme du 2nd ordre en $|\underline{\underline{\nabla \xi}}|$ dans l'expression : $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\xi + {}^t\overrightarrow{\text{grad}}\,\xi + {}^t\text{grad}\,\xi \cdot \text{grad}\,\xi\right)$$

on obtient le tenseur des deformat° $-\underline{\underline{1}}$ linearisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\xi + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\xi\right)}$$

- $\varepsilon_{ii} = \lambda(e_i) - 1$
- $\theta = 2\,\underline{n_0}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\tau_0}$

$\searrow$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est la partie symétrique du gradient de $\underline{\xi}$

c'est donc un tenseur symétrique.

note

$$|d\underline{x} - d\underline{X}| = |\underline{\underline{F}}\, d\underline{X} - d\underline{X}|$$

$$= |(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})\, d\underline{X}|$$

$$= |\underline{\underline{\nabla \xi}}\, d\underline{X}| \ll |d\underline{X}|$$

$$\Rightarrow |\underline{\underline{\nabla \xi}}| \ll \underline{\underline{1}}$$

gonal

$\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$

1) $d\underline{X} = d\underline{X}'$ et avec $d\underline{x}\, d\underline{x}' - d\underline{X}\, d\underline{X}'$

on trouvait $\left(\frac{dl}{dl_0}\right) = \sqrt{1 + 2\, \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n_0}}$ $-\underline{\underline{1}}$

en Hpp $\longrightarrow$ $\left(\frac{dl}{dl_0}\right) \simeq 1 + \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n_0}$

$$\boxed{\frac{dl - dl_0}{dl_0} = \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n_0}}$$

$\Rightarrow$ L'hypothèse des transfo infinit. implique des deformat° infinit., mais la réciproque est fausse.

Fiche Méthode

Rappels de MMC

- on appelle transformation Rigidifiante :

$$\boxed{\phi(\underline{X},t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X}}$$

avec $\underline{\underline{R}}$ un tenseur d'ordre 2 orthogonal

matrice orthogonale $\Rightarrow A^{-1} = A^T$; ${}^tAA = I$

- dérivée particulaire

$$\dot{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{A}).\vec{A}$$

- Soit $d\underline{X}$ et $d\underline{X}'$ d'origine $\underline{X}$ dans la config initiale. leur representants ds la config actuelle sont $d\underline{x}$ et $d\underline{x}'$ d'origine $\phi(\underline{X},t)$

$$\boxed{d\underline{x} = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,d\underline{X} \; ; \; d\underline{x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,d\underline{X}'}$$

1) $d\underline{x} \cdot d\underline{x}'$ nous donne accès à l'expression de $\underline{\underline{C}}$

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = {}^tF.F}$$

De plus, on peut obtenir deux resultats importants avec ce produit scalaire

a) CAS où $d\underline{x} = d\underline{x}'$ ($d\underline{X} = d\underline{X}'$)

$$\boxed{\lambda^2(dl_0) = \left[\frac{dl}{dl_0}\right]^2 = \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n_0}}$$

note $d\underline{X} = d\underline{X}' = dl_0\,\underline{n_0}$

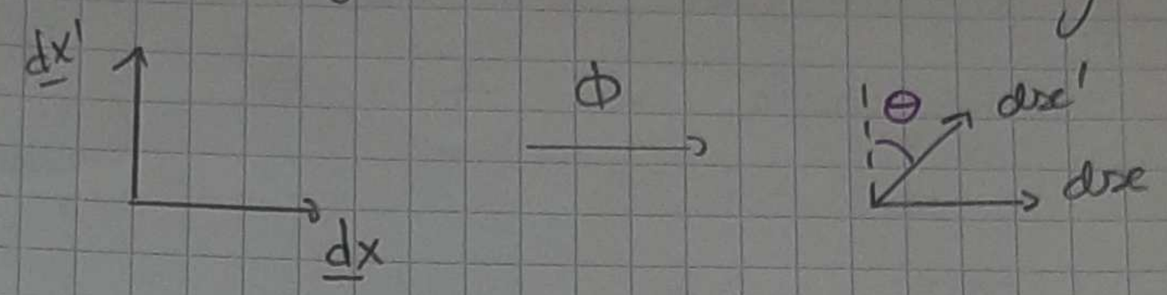
et $\|d\underline{x}\| = dl$

b) Cas ou $\underline{dX}$ et $\underline{dX}'$ orthogonaux

on pose $\|\underline{dx}\| = dl$ | $\underline{dX} = dl_0\, \underline{n_0}$

$\|\underline{dx}'\| = \delta l$ | $\underline{dX}' = \delta l_0\, \underline{\tau_0}$

grace à ce cas : on pourra obtenir le <u>glissement</u> après transformation



<u>on pose</u> :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \|\underline{dx}\|\,\|\underline{dx}'\| \cos(\theta - \pi/2)$$
$$= dl\, \delta l \sin(\theta)$$

on Revient sur $\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}'$

$$\rightarrow dl\, \delta l \sin(\theta) = dl_0\, \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \delta l_0\, \underline{\tau_0}$$

$$\frac{dl}{dl_0}\,\frac{\delta l}{\delta l_0} \sin(\theta) = \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\tau_0}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\tau_0}}{\lambda(dl_0)\ \lambda(\delta l_0)}$$

$$\boxed{\sin(\theta) = \frac{\underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\tau_0}}{\sqrt{\underline{n_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n_0}}\ \sqrt{\underline{\tau_0} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\tau_0}}}}$$

<u>Resume</u>

avec $\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}'$

$\underline{dX} = \underline{dX}'$ → dilatation

$\underline{dX} \perp \underline{dX}'$ → glissement

2) un autre cas interessant, est celui où l'on exprime : $\underline{dx} \cdot \underline{dx}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}'$

ce Resultat donne accès au tenseur des deformations de Green lagrange $\underline{\underline{E}}$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}\,\underline{dX}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}'$$

$$= \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}'$$

$$= \underline{dX} \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}} \right) \underline{dX}'$$

$$= \underline{dX} \left(2\,\underline{\underline{E}} \right) \underline{dX}'$$

$$\boxed{\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}} \right)}$$

a) Cas où $\underline{dX} = \underline{dX}'$

$$\underline{dX} = \underline{dX}' = dl_0 \cdot \underline{n_0}$$

$$\| dx \| = \| dx' \| = dl$$

$$\begin{cases} \underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dx} \cdot \underline{dx} = \| dx \|^2 = dl^2 \\ \underline{dX} \cdot \underline{dX}' = \underline{dX} \cdot \underline{dX} = \| dX \|^2 = \sqrt{(dl_0)^2}^{\,2} = dl_0^2 \end{cases}$$

$$dl^2 - dl_0^2 = dl_0^2\, 2\, \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot n_0$$

$$\boxed{\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 2\, \underline{n_0} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n_0}}$$

Accroissemt carré de longueur

ou Autrement

$$\boxed{\lambda(dl_0) = \left(\frac{dl}{dl_0}\right) = \sqrt{2\,\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{n_0} + 1}}$$

b) cas ou $\underline{dx}$ et $\underline{dx'}$ orthogonaux

$\underline{dx} = dl_0\,\underline{n_0}$; $\underline{dx'} = \delta l_0\,\underline{\tau_0}$

$|\underline{dx}| = dl$; $|\underline{dx'}| = \delta l$

donc

$$\begin{cases} \underline{dx}\cdot\underline{dx'} = |\underline{dx}||\underline{dx'}|\sin\theta = dl\,\delta l\sin\theta \\ \underline{dx}\cdot\underline{dx'} = 0 \quad \text{car orthogonaux !} \end{cases}$$

ducoup

$$dl\,\delta l\,\sin\theta = 2\,dl_0\,\delta l_0\;\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\tau_0}$$

$$\frac{dl}{dl_0}\,\frac{\delta l}{\delta l_0}\,\sin\theta = 2\,\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\tau_0$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2\,\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\tau_0}}{\sqrt{1+2\,\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{n_0}}\,\sqrt{1+2\,\underline{\tau_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\tau_0}}}}$$

avec $\underline{dx}\cdot\underline{dx'} - \underline{dx}\,\underline{dx'} = 2\,\underline{dx}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{dx'}$

$\underline{dx} = \underline{dx'}$ → dilatation en fonct° de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$\underline{dx} \perp \underline{dx'}$ → glissemt en fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

- si $\underline{\underline{E}} = 0$, alors $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}$

il n'y a aucune deformation et Aucun cisaillement

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \\ \underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ϕ est alors une transformation Rigidifiante

$$\phi(\underline{X}, t) = a(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X}$$

on peut aussi partir du fait que ϕ soit Rigidifiante et prouver que $\underline{\underline{E}} = 0$

$$\underline{\underline{\nabla\phi}} = \underline{\underline{\nabla}}a + \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{R}}\,\underline{X})$$

$$= 0 + \mathbb{R}\,\underline{\underline{\nabla X}}$$

$$\underline{\underline{\nabla X}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{1}$$

donc $\underline{\underline{\nabla\phi}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

or $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla\phi}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}$$

(R est orthogonal)

$$^T\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}} = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} = \underline{1}$$

par la même occas :

$$^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}} \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{C}} = \underline{1}$$

et $\boxed{\underline{\underline{E}} = 0}$

- le vecteur déplacement $\xi(\underline{x},t)$

$$\underline{\xi}(\underline{x},t) = \underline{x}(t) - \underline{x}$$

$$\underline{\underline{\nabla\phi}} = \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\xi}(\underline{x},t) + \underline{x}) = \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\xi}(\underline{x},t)) + \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla\phi}} = \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}}$$

$$(\underline{\underline{\nabla\phi}})_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{le } \delta_{ij} \text{ signifie que} \\ \text{le tenseur } \underline{\underline{1}} \text{ est egal à} \\ 1 \text{ ssi } i = j \end{array} \right.$

→ <u>avec $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}$</u> :

$$\underline{\underline{C}} = {}^t(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\xi}})(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}) = (\underline{\underline{1}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}})(1 + \underline{\underline{\nabla\xi}})$$

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}\,\underline{\underline{\nabla\xi}}}$$

→ <u>Avec $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$</u>

$$\underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{E}} - \cancel{\underline{\underline{I}}} = \cancel{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}\,\underline{\underline{\nabla\xi}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}\,\underline{\underline{\nabla\xi}}\right)}$$

- <u>Jacobien de la transformation</u> $J(x,t)$

$\Rightarrow J(x,t) = \det \underline{\underline{F}}(x,t)$

$$\boxed{d\Omega_t = J(x,t)\, d\Omega_0}$$

$$d\Omega_t = \det(\underline{\underline{F}})\, d\Omega_0$$
$$= \det(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \xi}})\, d\Omega_0 \quad (*)$$
$$d\Omega_t = (1 + \operatorname{div} \underline{\xi})\, d\Omega_0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{\xi} = \frac{d\Omega - d\Omega_0}{d\Omega_0}}$$

<u>note</u> : $\det(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla A}}) = 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla A}}) \quad (*)$

donc $1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla \xi}}) = 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}})$ et $\operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}(\operatorname{trace} \underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t\operatorname{trace} \underline{\underline{\nabla \xi}})$

$$= \frac{1}{2}(2 \operatorname{trace} \underline{\underline{\nabla \xi}})$$
$$= \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla \xi}})$$

du coup $d\Omega_t = [1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla \xi}})]\, d\Omega_0$

$$\frac{d\Omega_t - d\Omega_0}{d\Omega_0} = \operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = J - 1$$

$\rightarrow J = \det(1 + \underline{\underline{\nabla \xi}}) = 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla \xi}}) = 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla \varepsilon}})$

$$J - 1 = \operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \operatorname{div}(\underline{\xi})$$

$$\boxed{\operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \operatorname{div}(\underline{\xi})}$$

- <u>TAux de deformation</u>

toujours avec $\underline{dX}$ et $\underline{dX}'$ d'origine $\underline{X}$ dans Ω_0
et $\underline{dx}$, $\underline{dx}'$ leurs representants respectifs
dans Ω_t

→ pour exprimer le taux/vitesse de deformat° dans la direction unitaire $\underline{e_i}$ ainsi que le taux de glissem^t on calcule

$$\frac{d}{dt} \cdot (\underline{dx} \cdot \underline{dx}')$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underline{dx} \cdot \underline{dx}') = 2\, \underline{dx} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{dx}'}$$

CAS general

1/ taux de deformat°

- $\underline{dx} = \underline{dx}'$

$$d_{ii} = \frac{|\dot{dx}|}{|dx|}$$

Elem^t diagonal de
→ taux de deform. selon la direct° unit. $\underline{e_i}$

note : $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla v_x}} + {}^t\underline{\underline{\nabla v_x}}\right) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$

<u>on profite pour identifier</u> :

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\nabla_v x}}}$$

2/ taux de glissen^t

- $\underline{dx} \perp \underline{dx}'$

$$\dot{\theta} = 2\, d_{ij}(\underline{x}, t)$$

Rappels sur les chapitres 4, 5 (L3 MMC)

Chapitre 4 : Cinématique des MC

1) taux de déformation volumique

$$\boxed{\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \operatorname{div} \underline{v} = \frac{\dot{J}}{J}}$$

$v \to$ vitesse eulérienne

2) dérivée particulaire

$$\dot{b}(\underline{x},t) = \frac{\partial b}{\partial t}((\underline{x},t),t) + \underline{\nabla b}((\underline{x},t),t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$$

dérivée part. de la qte phys b

ex : $\boxed{\dot{\underline{v}} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla v}} \cdot \underline{v} = \underline{\gamma}}$ accélérat° eulérienne

Lois de conservation de la masse

Formulation locale Eulérienne :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0}$$

Formulat° Lagrangienne

$$\boxed{\rho(\underline{x},t)\, J(\underline{X},t) = \rho_0(\underline{X})} \qquad \forall \underline{X}, \forall t$$

$\phi(\underline{X},t)$

Conservation de la q^{te} de m^{vt} (euler)

$$\int_{\Omega t} \rho(\underline{x},t)\,\underline{\gamma}(\underline{x},t)\,d\Omega_t = \int_{\Omega t} (\rho\,\underline{f} + \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}})\,d\Omega t$$

$\underline{f}$ -> densité massique d'efforts

Equat° de m^{vt} (Formulat° locale)

euler

$$\boxed{\rho(\underline{x},t)\,\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,f(\underline{x},t) + \underline{\mathrm{div}}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\right]}$$

Lagrange

$$\boxed{\rho_0(\underline{X})\,\Gamma(\underline{X},t) = \rho_0(\underline{X})\,f(x=\phi(\underline{X},t),t) + \mathrm{div}\left(J\,\underline{\underline{\sigma}}^T\,\underline{\underline{G}}\right)}$$

$$\boxed{J\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{G}}^{+T} = J\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}}$$

1er tenseur de piola Kirchoff

on le note $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$

$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ etant non symétrique

on définit $\hat{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}}$, le 2nd tenseur de piola Kirchoff.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{\sigma}}} &= J\,\underline{\underline{\sigma}}\,G^T \\ \hat{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}} &= J\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{G}}^T \end{aligned}}$$

$$\boxed{\hat{\underline{\underline{\sigma}}} = F\,\hat{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}}}$$

$\hat{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}}$ est symétrique

Hypothèse des PP (HPP)

1) Petits deplacents $|u_i(\underline{x},t)| \ll$ dimension caractéristique de la structure

2) transfo infinit. $|\nabla \underline{\underline{U}}(\underline{x},t)| \ll \underline{\underline{1}} \quad \forall x \in \Omega_0$

Si 1+2

$\underline{\underline{F}} \sim \underline{\underline{1}}$; $\underline{\underline{G}} \sim \underline{\underline{1}}$

alors $\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \simeq \hat{\underline{\underline{\sigma}}} \simeq \hat{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}}}$

Chapitre 5 : Contraintes dans un milieu continu TRidimensionnel

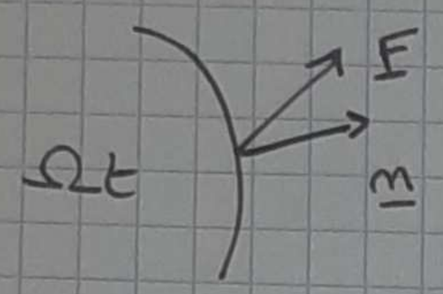
Equation de la dynamique d'un MC

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{F} - \underline{\gamma}) = 0}$$

Conditions Aux Limites

Supposons que sur une partie du bord du milieu continu, l'exterieur exerce des efforts surfaciques $\underline{F}(\underline{x},t)$ $x \in \partial_{\Omega} \subset \partial_{\Omega t}$

→ Nous cherchons à écrire une condition aux limites en $\underline{\underline{\sigma}}$ pour traduire cette donnée on l'obtient en écrivant l'equilibre d'une couche fine du domaine située à la frontière. on evoque la continuité du vecteur contrainte pour écrire :



$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}(x) = \underline{F}(\underline{x},t)}$$

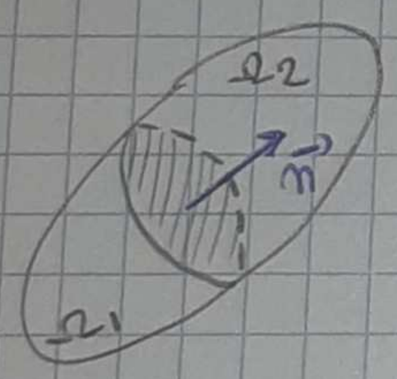
condit° aux limites

→ Le vecteur contrainte sur la surface extérieure est égal à la densité surfacique d'efforts exercée par l'extérieur sur le milieu.

<u>en déformat° infinitésimale + déplacent petits</u> :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,\underline{n_0}(x) = \underline{F}(\underline{x},t) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$$

<u>Cas où</u> 2 materiaux sont parfaitemt collés :



$$\boxed{\left[\underline{\underline{\sigma}}^{1}(\underline{x},t) - \underline{\underline{\sigma}}^{2}(\underline{x},t)\right]\cdot\underline{n}(x) = 0}$$

condit° de transmission

La condition aux limites avec Lagrange se note :

$$\boxed{\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{X},t)\,\underline{N}(\underline{X}) = \underline{F}(\underline{X},t)}$$