Vibration et Ondes

Contrôle du 13 décembre 2021 - Partie *Vibrations des systèmes continus*

Durée 1h30 - Sans document, ni calculatrice ou téléphone

Modélisation d'un micro-préhenseur

On étudie un système de micro manipulation qui permet de déposer avec précision des objets de très petite taille sur un substrat quelconque. Le principe du système est d'utiliser des forces d'adhésion pour saisir l'objet et le maintenir à l'extrémité d'une micro-poutre avant de le déposer en utilisant une résonance vibratoire de la poutre pour libérer l'objet. La figure 1 montre différentes étapes du processus dans le cas de grains de pollen de taille micrométrique[1].

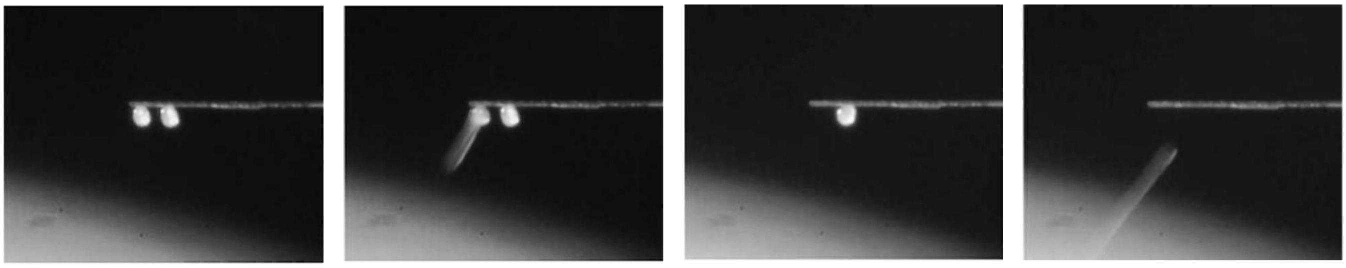

Figure 1: Dépose sélective de grains de pollen. L'accélération est maximale à l'extrémité du préhenseur et dans le premier mode de résonance.

La poutre de quelques mm de longueur et de dimensions latérales très petites devant la longueur, est encastrée à son extrémité en $x = 0$ et libre à son extrémité en $x = L$. Le bâti à l'encastrement est un actionneur piézoélectrique susceptible de générer une excitation transverse en procurant à la poutre un accélération uniforme $A(t)$.

L'objet peut être modélisé par une sphère de diamètre micrométrique avec une masse volumique voisine de celle de l'eau.

La force d'adhésion de l'objet à la poutre est la résultante de plusieurs phénomènes physiques dont l'étude ne fait pas partie du problème. Pour décrocher l'objet de la poutre, il faut lui procurer une accélération suffisante pour obtenir une force d'inertie d'amplitude supérieure à celle de la force d'adhésion et de sens opposé.

1. Etablir l'équation de propagation des ondes transverses dans une poutre en précisant les hypothèses. On note $v(x,t)$ le déplacement transverse à l'abscisse x et au temps t

2. Dans le cas d'une poutre de longueur L finie, préciser la forme de la solution de l'équation précédente. On note $X(x)$ et $\phi(t)$ les dépendances de v en espace et en temps respectivement.

3. Exprimer mathématiquement les conditions aux limites de la poutre encastrée libre.

4. Déterminer l'équation de dispersion relative à cette poutre.

   On note $\gamma_n L$ les racines de cette équation.

5. Préciser l'expression des fréquences propres du préhenseur.

6. Choisir parmi les suivantes, une fonction qui constitue une approximation acceptable du premier mode propre. Justifier votre choix.

$$f_a(x) = \frac{x}{L} \qquad f_b(x) = cos\frac{\pi x}{L} \qquad f_c(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

> **Solution:** f_c est la seule fonction à respecter les conditions cinématiques de la poutre : déplacement et rotation nuls à l'encastrement et déplacement maximum au bord libre.
>
> f_a présente une rotation non nulle à l'encastrement et aucune courbure
>
> f_b présente un déplacement non nul à l'encastrement

[1] Haliyo D.S., Regnier S., Guinot J.-C., [mu]mad, the adhesion based dynamic micro-manipulator, European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 22, pp. 903-916,2003

On note $X_1(x)$ la fonction choisie.

Lorsqu'elle est excitée à la fréquence associée au 1er mode, le déplacement de flexion de la poutre s'écrit :

$$v_1(x,t) = X_1(x)\phi_1(t)$$

7. Exprimer l'énergie potentielle élastique de la poutre dans ce mode et identifier une raideur modale k_1.

Solution:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}EI\phi_1^2(t)\int_0^L \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = 2\frac{EI}{L^3}\phi_1^2(t)$$

$$k_1 = 4\frac{EI}{L^3}$$

8. Exprimer l'énergie cinétique de la poutre dans ce mode et identifier une masse modale m_1.

Solution:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\rho S\dot{\phi}_1^2(t)\int_0^L \left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{L^4}\frac{L^5}{5}\dot{\phi}_1^2(t) = \frac{1}{2}\frac{\rho SL}{5}\dot{\phi}_1^2(t)$$

$$m_1 = \frac{\rho SL}{5}$$

9. En déduire la fréquence propre associée $f_1 = \omega_1/2\pi$

Solution:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{4EI}{L^3}\frac{5}{\rho SL}} = \sqrt{\frac{20EI}{\rho SL^4}}$$

Les objets adhèrent à l'extrémité $x = L$ de la poutre. Ils ont une masse m

10. Calculer la variation de fréquence propre induite par l'adhésion/dépose d'un objet manipulé.

Solution: On ajoute à l'énergie cinétique de la poutre celle de la masse m située à $x = L$

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{v}_1^2(L,t) = \frac{1}{2}m\dot{\phi}_1^2(t)$$

La nouvelle fréquence propre est

$$\omega_1' = \sqrt{\frac{k_1}{m_1+m}} = \omega_1\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m}}$$

et la variation de fréquence

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 1 - \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m}}$$