

# Vibrations & Ondes

## Vibrations des systèmes continus

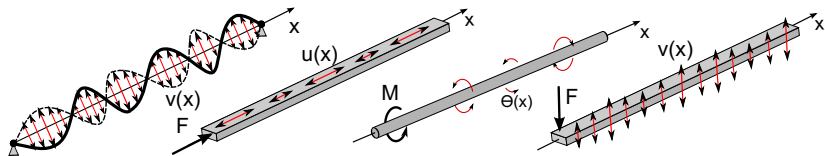


Novembre 2020

# Généralités

## Vibrations dans les milieux élastiques 1D

M1 (TC) → vibrations des structures à 1 dimension :



- Vibrations transverses des cordes
- Vibrations longitudinales des poutres
- Vibrations de torsion des arbres
- Vibrations de flexion des poutres

Pourquoi étudier ces systèmes simples ?

- Ils modélisent simplement le comportement de nombreuses structures
- Ils permettent de comprendre les structures plus complexes
- Ils sont les constituants élémentaires des structures en éléments finis

# Généralités

## Différents types d'équation du mouvement

### Limites de l'étude

Géométrie :

- Poutre rectilignes,
- Longueur finie  $L$
- Section constante  $S \ll L$

Matériau :

- Homogène,
- Linéaire isotrope
- Non dissipatif

### Deux types d'équation différentielle du mouvement

- Vibrations longitudinales
- Vibrations de Torsion
- Vibrations des Cordes

#### 1 même équation d'ordre 2 :

*l'Équation de d'Alembert*

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t)$$

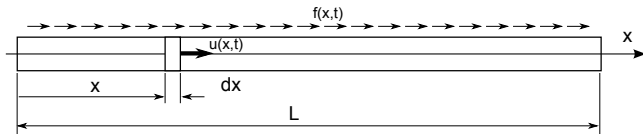
- Vibrations de flexion

*Équation d'ordre 4*

$$\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t)$$

# Vibrations longitudinales des barres

## Dimensions - Paramètres - Hypothèses



## Hypothèses

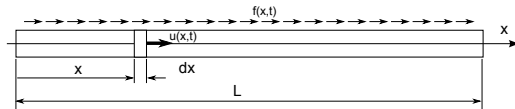
- Poutre droite : Longueur  $L (\gg e, l)$ , Section constante  $S$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$ , non dissipatif
- Distribution de forces  $f(x, t)$
- $\rightarrow$  Petites perturbations (gravité non prise en compte)
- Grandeur étudiée : déplacement longitudinal local  $u(x, t)$

## Méthodes pour écrire et résoudre les équations du mouvement :

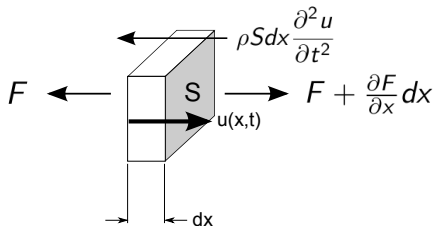
- **Méthode locale** avec le Principe fondamental de la dynamique (PFD) : adaptée aux structures simples.
- Méthode variationnelle : Th. de Hamilton + variations énergétiques  
Inclue les conditions aux limites  
Adaptée aux structures complexes.

# Vibrations longitudinales

## Équation du mouvement - Équilibre Local (1)



On écrit l'équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  :



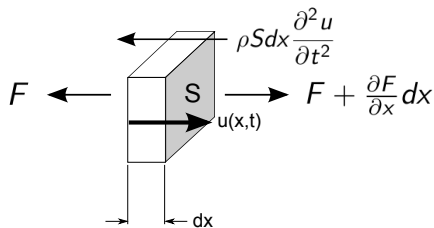
- Masse:  $\rho S dx$
- Déplacement :  $u(x, t)$
- Accélération :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- Force à gauche :  $-F$
- Force à droite :  $F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$
- Force extérieure  $f(x,t)$

On a donc

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

# Vibrations longitudinales

## Équation du mouvement - Équilibre Local (2)



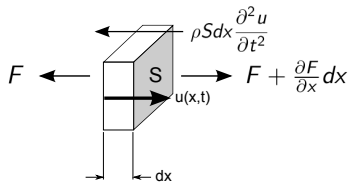
$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cancel{-F} + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\rho S dx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \cancel{dx} + f(x, t) \cancel{dx}$$

$$\Leftrightarrow \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t)$$

# Vibrations longitudinales libres

Équation du mouvement = Équation des ondes longitudinales



$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t)$$

**Traction/Compression pure :**

$$F = \sigma S = E \epsilon S = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t)$$

Comme  $E$  et  $S$  constants

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} f(x, t)$$

On note  $c^2 = \frac{E}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x, t)}$$

# Vibrations longitudinales

## Célérité des ondes longitudinales

- $[c] = m/s$
- $c$  = célérité du son ou vitesse des ondes longitudinales.
- Ordres de grandeur :

$$c_{acier} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}}{8.10^3}} = 0.5.10^4 = 5000m/s$$

### Autres valeurs

Matériau	c (m/s)	Matériau	c (m/s)
PVC mou	80	Glace	3200
Sable sec	10-300	Hêtre	3300
Béton	3100	Aluminium	5035
Plomb	1200	Verre	5300
PVC dur	1700	Acier	5600-5900
Granit	6200	Péridotite <sup>1</sup>	7700

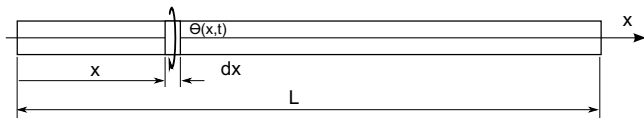
*Rappel : vitesse du son dans l'air : 343m/s, dans l'eau : 1480m/s*

<sup>1</sup>Roche magmatique constituant la majeure partie de la croûte terrestre



# Vibrations de torsion dans les arbres

## Équation du mouvement - Paramètres

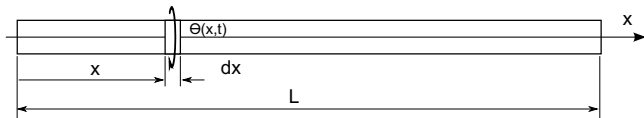


## Hypothèses

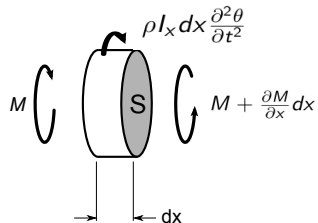
- Poutre droite : Longueur  $L (\gg e, l)$ , Section constante  $S$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu, G$  (module de torsion), non dissipatif
- $\rightarrow$  Petites perturbations + gravité non prise en compte
- Grandeur étudiée : déplacement angulaire local  $\theta(x, t)$

# Vibrations de torsion dans les arbres

## Équation du mouvement - Équilibre local



On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$  :



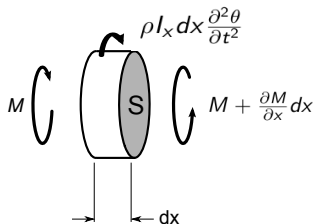
On a donc

$$\rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

- Moment d'inertie:  $\rho I_x dx$
- Déplacement :  $\theta(x, t)$
- Accélération :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
- Moment à gauche :  $-M$
- Moment à droite :  $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$

# Vibrations de torsion dans les arbres

## Équation du mouvement - Équilibre local (2)



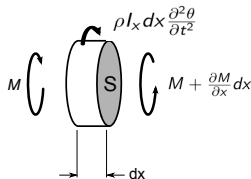
$$\rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\rho I_x dx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} \cancel{dx}$$

$$\Leftrightarrow \rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

# Vibrations de torsion dans les arbres

Équation du mouvement = Équation des ondes de torsion



$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

**Torsion pure :**

$$M = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

**Ordre de grandeur :**

$$c_{acier} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}}{2 \times (1 + 0.3) \times 8.10^3}} = 2000 \text{ m/s}$$

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x})$$

Comme  $G$  et  $I_x$  constants :

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

On note  $c^2 = \frac{G}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0}$$

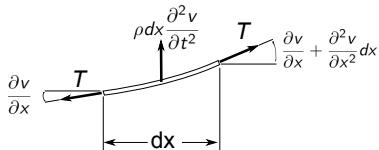
# Vibrations transverses des cordes

## Équation du mouvement - Paramètres



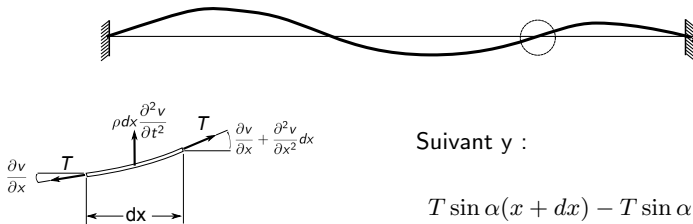
### Hypothèses sur la corde

- Longueur  $L$
- Matériau :  $\rho$  (kg/m)
- Non dissipatif
- Tension constante :  $T$
- $\rightarrow$  Petites perturbations
- Grandeur étudiée : déplacement vertical local  $v(x, t)$
- Pente locale :  $\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$



# Vibrations transverses des cordes

## Équation du mouvement - Équilibre local



Suivant y :

$$T \sin \alpha(x + dx) - T \sin \alpha(x) = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow T \alpha(x + dx) - T \alpha(x) = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$|T(x + dx)| \cos \alpha(x + dx) - |T(x)| \cos \alpha(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

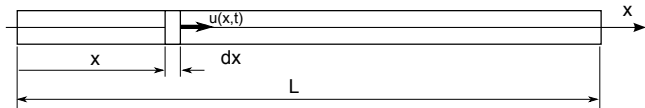
$$(\cos \alpha \approx 1) \Leftrightarrow T(x + dx) = T(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

# Vibrations longitudinales libres

Solution libres = Solutions de l'équation du mouvement lorsque  $f(x, t) = 0$

Aucune distribution de force permanente (mais système hors d'équilibre) :



Équation du mouvement libre :

alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} X - c^2 \phi \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$$

∃ 2 types de solutions :

- propagatives

- **stationnaires**

Solution stationnaire →

**Hypothèse de variables séparées :**

$$u(x, t) = \phi(t)X(x)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}(t)X(x) - c^2 \phi(t)X''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x) = cte = \alpha \quad (2)$$

Deux équations à résoudre :

l'une sur  $t$ , l'autre sur  $x$ .

# Vibrations longitudinales libres

## Solution stationnaire générale en modes libres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec  $u(x, t) = \phi(t)X(x)$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x) = \alpha$$

d'où une *équation sur le temps* :

$$\ddot{\phi}(t) - \alpha \phi(t) = 0 \quad (3)$$

et une *équation de déformation* :

$$X''(x) - \frac{\alpha}{c^2} X(x) = 0 \quad (4)$$

- Solution stationnaire pour (3)

$$\rightarrow \alpha = -\omega^2 (< 0)$$

La solution s'écrit :

$$\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- Dans (4) on note  $\gamma = \frac{\omega}{c}$

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0$$

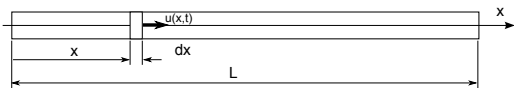
La solution s'écrit :

$$X(x) = C \cos \gamma x + D \sin \gamma x$$



# Vibrations longitudinales libres

Forme générale de la solution stationnaire en modes libres



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Mouvement vibratoire longitudinal libre :

$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos \gamma x + D \sin \gamma x)$$

- Mouvement harmonique de pulsation  $\omega$
- **Conditions initiales** (C.I.) du mouvement  $\rightarrow (A, B)$
- L'amplitude du mouvement des sections dépend de la position dans la poutre, mais Il faut identifier les pulsations  $\omega$  possibles
- **Conditions aux limites** (C.L.) du système  $\rightarrow \omega$  et  $\gamma$ .

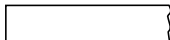
*Les C.L. déterminent les modes propres (ou naturels) de la poutre*

# Vibrations longitudinales libres

## Solutions stationnaires particulières - Conditions aux limites

2 cas simples de conditions aux limites peuvent être considérés :

- **Bord libre :**



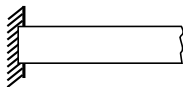
- aucun effort à l'extrémité

$$F = 0 \Leftrightarrow ES \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- mouvement indéterminé ( $u = ?$ )

$$\text{Bord Libre} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall t$$

- **Encastrement :**



- Section extrême bloquée :  $u = 0$
- Effort indéterminé ( $F = ?$ )

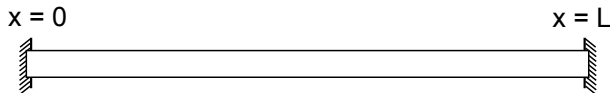
$$\text{Encastrement} \Leftrightarrow u = 0, \forall t$$

# Vibrations longitudinales libres

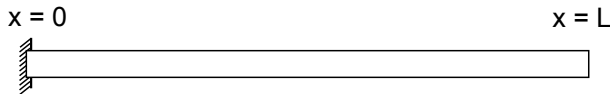
## Modes propres (ou naturels)

3 combinaisons possibles des conditions aux limites:

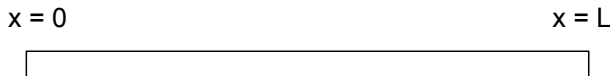
- Poutre encastrée - encastrée



- Poutre encastrée - libre

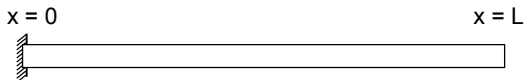


- Poutre libre - libre



# Vibrations longitudinales libres

## Cas de la poutre encastrée-libre (1)



$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos \gamma x + D \sin \gamma x) = \phi(t)X(x)$$

- Encastrement en  $x = 0$

$$u(0, t) = 0, \forall t \Leftrightarrow X(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(x) = D \sin \gamma x}$$

- Libre en  $x = L$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \forall t \Leftrightarrow X'(L) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \gamma L = 0 \Leftrightarrow \gamma L = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

Valeurs possibles de  $\gamma$  :

$$\boxed{\gamma_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L}}$$

# Vibrations longitudinales libres

## Cas de la poutre encastrée-libre (2)



- Déformées possibles :

$$X_n(x) = \sin \gamma_n x$$

Ce sont les **modes propres**

$$X_n(x) = \sin \left( (2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

avec nécessairement :

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \omega_n = c \gamma_n$$

- $\Rightarrow$  **Pulsations propres**  $\omega_n$ :

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi c}{2L}$$

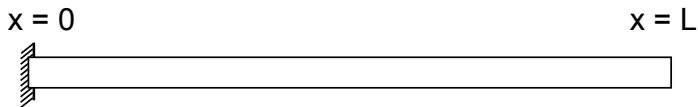
$$\Leftrightarrow \omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

**Fréquences propres (Hz):**

$$f_n = \frac{2n + 1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

# Vibrations longitudinales libres

## Cas de la poutre encastrée-libre (3)



- Expression du **mode de vibration longitudinale** à  $\omega_n$  :

$$u_n(x, t) = (A'_n \cos \omega_n t + B'_n \sin \omega_n t) \sin \left( (2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_n(x, t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \left( (2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

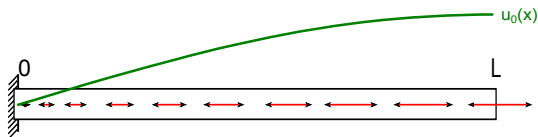
- Réponse libre complète = Combi. lin. des solutions possibles :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \left( (2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

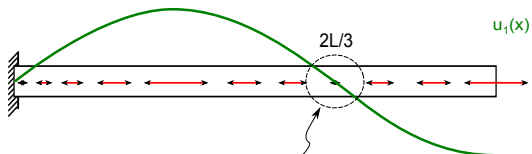
- Conditions initiales  $(u(x, 0), \dot{u}(x, 0)) \rightarrow (U_n, \varphi_n)$  ou  $(A'_n, B'_n)$

# Vibrations longitudinales libres

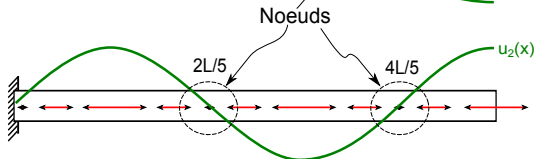
## Modes longitudinaux de la poutre encastrée-libre



$$X_0(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$



$$X_1(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)$$



$$X_2(x) = \sin\left(\frac{5\pi x}{2L}\right)$$

# Vibrations longitudinales libres

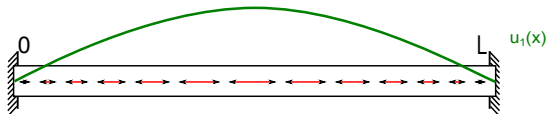
Résultat pour les 3 combinaisons de C.L.

C.L.	Poutre L-L	Poutre E-L	Poutre E-E
Modes propres	$\cos n \frac{\pi x}{L}$	$\sin(2n + 1) \frac{\pi x}{2L}$	$\sin n \frac{\pi x}{L}$
Pulsations propres	$\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\frac{(2n+1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
$f_{acier}(L = 1\text{m})$	$f_1 = 2500\text{Hz}$	$f_0 = 1250\text{Hz}$	$f_1 = 2500\text{Hz}$

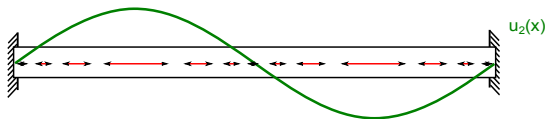


# Vibrations longitudinales libres

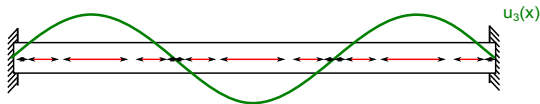
Cas de la poutre encastrée aux deux bouts



$$X_0(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$



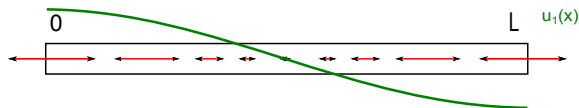
$$X_1(x) = \sin \frac{2\pi x}{L}$$



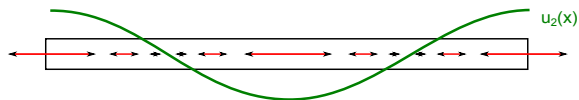
$$X_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}$$

# Vibrations longitudinales libres

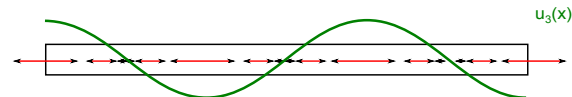
## Modes longitudinaux de la poutre libre-libre



$$X_1(x) = \cos \frac{\pi x}{L}$$



$$X_2(x) = \cos \frac{2\pi x}{L}$$



$$X_3(x) = \cos \frac{3\pi x}{L}$$

# Vibrations longitudinales libres

## Orthogonalité des modes propres longitudinaux

On peut écrire la solution libre comme une composition des modes propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) X_n(x)$$

L'équation du mouvement libre est vérifiée pour chaque mode

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow -\omega_n^2 X_n - c^2 X_n'' = 0$$

On peut écrire pour les modes  $n$  et  $m$  :

$$-\omega_n^2 X_n = c^2 X_n'' \quad (\times X_m) \quad \text{et} \quad -\omega_m^2 X_m = c^2 X_m'' \quad (\times X_n)$$

# Vibrations longitudinales libres

## Orthogonalité des modes propres longitudinaux (2)

On a donc :

$$-\omega_n^2 X_n = c^2 X_n'' \quad (\times X_m) \quad \text{et} \quad -\omega_m^2 X_m = c^2 X_m'' \quad (\times X_n)$$

Soit en multipliant respectivement par  $X_m$  et  $X_n$ , puis intégrant sur la longueur de la barre :

$$-\omega_n^2 \int_0^L X_n X_m dx = c^2 \int_0^L X_n'' X_m dx$$

$$-\omega_m^2 \int_0^L X_m X_n dx = c^2 \int_0^L X_m'' X_n dx$$

En intégrant par partie et pour des extrémités encastrees ou libres on obtient :

$$-\omega_n^2 \int_0^L X_n X_m dx = \cancel{[X_n' X_m]_0^L} - c^2 \int_0^L X_n' X_m' dx$$

$$-\omega_m^2 \int_0^L X_m X_n dx = \cancel{[X_m' X_n]_0^L} - c^2 \int_0^L X_m' X_n' dx$$

# Vibrations longitudinales libres

## Orthogonalité des modes propres longitudinaux (3)

On a donc :

$$\omega_n^2 \int_0^L X_n X_m dx = c^2 \int_0^L X'_n X'_m dx \quad \text{et} \quad \omega_m^2 \int_0^L X_m X_n dx = c^2 \int_0^L X'_m X'_n dx$$

En soustrayant les 2 équations :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L X_n X_m dx = 0$$

avec  $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ , on obtient les **Relations d'orthogonalité** :

$$\boxed{\int_0^L X_n X_m dx = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_0^L X'_n X'_m dx = 0}$$

**Les modes propres et leurs dérivées sont orthogonaux**

# Vibrations longitudinales libres

## Paramètres modaux

On a aussi :

$$-\omega_n^2 \int_0^L X_n^2 dx = c^2 \int_0^L X_n'' X_n dx$$

Qui donne par intégration par parties avec les C.L. :

$$\omega_n^2 \int_0^L X_n^2 dx = c^2 \int_0^L X_n'^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{ES \int_0^L X_n'^2 dx}{\rho S \int_0^L X_n^2 dx} = \frac{k_n}{m_n}$$

On identifie la **masse modale**  $m_n$  et la **raideur modale**  $k_n$  :

$$\boxed{m_n = \rho S \int_0^L X_n^2 dx} \quad \text{et} \quad \boxed{k_n = ES \int_0^L X_n'^2 dx}$$

On peut normaliser les modes de telle sorte que :

$$m_n = 1 \quad \text{alors} \quad k_n = \omega_n^2$$

# Identification des caractéristiques modales longitudinales

On peut écrire les énergies modales pour identifier les masses et raideurs modales :

- Énergie cinétique modale :

$$T_n = \int_0^L \frac{1}{2} \rho S (\dot{u}_n(x, t))^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\phi}_n^2 \rho S \int_0^L X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} m_n \dot{\phi}_n^2$$

On identifie la masse modale :

$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2(x) dx$$

- Énergie potentielle modale :

$$U_n = \int_0^L \frac{1}{2} ES \left( \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \phi_n^2 ES \int_0^L X_n'^2(x) dx = \frac{1}{2} k_n \phi_n^2$$

On identifie la raideur modale :

$$k_n = ES \int_0^L X_n'^2(x) dx$$

# Vibrations longitudinales libres

Expression dans la base modale

**Équation du mouvement libre :**

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0$$

avec  $u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x)$

$$\Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n X_n - c^2 \phi_n X_n'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n \int_0^L X_m X_n dx - c^2 \phi_n \int_0^L X_m X_n'' dx = 0$$

Orthogonalité des modes :

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}_n \int_0^L X_n^2 dx - c^2 \phi_n \int_0^L X_n X_n'' dx = 0$$

$$(n = 0, \dots, \infty)$$

Avec les relations suivantes sur les modes propres :

$$\int_0^L X_n^2 dx = \frac{m_n}{\rho S}$$

$$\int_0^L X_n X_n'' dx = -\frac{k_n}{ES}$$

On obtient :

$$\boxed{m_n \ddot{\phi}_n + k_n \phi_n = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = 0}$$

$$(n = 0, \dots, \infty)$$

Chaque mode propre se comporte comme un système à 1 DDL.



# Vibrations longitudinales libres

## Réponse libre en fonction des conditions initiales (1)

On peut écrire une vibration libre quelconque comme une combinaison linéaire des modes propres sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x)$$

Les constantes  $A_n$  et  $B_n$  sont déterminées avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x, 0) = \sum_n A_n X_n = u_0(x) \\ \dot{u}(x, 0) = \sum_n \omega_n B_n X_n = \dot{u}_0(x) \end{cases}$$

# Vibrations longitudinales libres

## Réponse libre en fonction des conditions initiales (2)

On peut tirer avantage des propriétés des modes propres :

$$\begin{cases} \sum_n A_n X_n = u_0(x) \\ \sum_n \omega_n B_n X_n = \dot{u}_0(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_n A_n \int_0^L X_m X_n dx = \int_0^L X_m u_0(x) dx \\ \sum_n \omega_n B_n \int_0^L X_m X_n dx = \int_0^L X_m \dot{u}_0(x) dx \end{cases}$$

avec l'orthogonalité des modes :

$$\begin{cases} A_n \int_0^L X_n^2 dx = \int_0^L X_n u_0(x) dx \\ \omega_n B_n \int_0^L X_n^2 dx = \int_0^L X_n \dot{u}_0(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_n = \frac{\rho S}{m_n} \int_0^L X_n u_0(x) dx \\ B_n = \frac{\rho S}{\omega_n m_n} \int_0^L X_n \dot{u}_0(x) dx \end{cases}$$

Les intégrales peuvent être difficiles à évaluer pour des  $X_n$  compliqués

→ Évaluation numérique des  $A_n$  et  $B_n$

# Rappel sur les modes propres longitudinaux

## Relations d'orthogonalité & Paramètres modaux

- Orthogonalité**  $\forall m \neq n$

$$\forall m \neq n$$

$$\int_0^L X_n X_m = 0$$

$$\int_0^L X'_n X'_m = 0$$

- Paramètre modaux**

Masse modale :

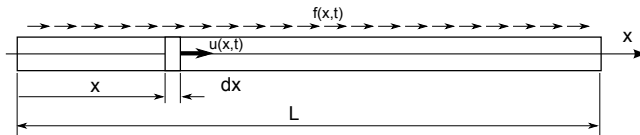
$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2(x) dx$$

Raideur modale :

$$k_n = ES \int_0^L X_n'^2(x) dx$$

# Vibrations longitudinales forcées

## Réponse à une excitation permanente longitudinale (1)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) = g(x, t)$$

On suppose la réponse combinaison linéaire des modes propres :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x)$$

où les  $\phi_n(t)$  sont les contributions inconnues des modes.

On substitue la composition modale dans l'équation du mouvement :

$$\sum_n \ddot{\phi}_n X_n - c^2 \sum_n \phi_n X_n'' = g(x, t)$$

# Vibrations longitudinales forcées

## Réponse à une excitation permanente longitudinale (2)

$$\sum_n \ddot{\phi}_n X_n - c^2 \sum_n \phi_n X_n'' = g(x, t)$$

On multiplie par  $X_m$  et on intègre de 0 à L :

$$\sum_n \ddot{\phi}_n \int_0^L X_m X_n dx - c^2 \sum_n \phi_n \int_0^L X_m X_n'' dx = \int_0^L X_m g(x, t) dx$$

Intégration par parties et C.L pour le second terme:

$$\sum_n \ddot{\phi}_n \int_0^L X_m X_n dx + c^2 \sum_n \phi_n \int_0^L X_m' X_n' dx = \int_0^L X_m g(x, t) dx$$

avec l'orthogonalité des modes :

$$\ddot{\phi}_n \int_0^L X_n^2 dx + c^2 \phi_n \int_0^L X_n'^2 dx = \int_0^L X_n g(x, t) dx$$

# Vibrations longitudinales forcées

## Réponse à une excitation permanente longitudinale (3)

Composition modale introduite dans l'équation du mouvement forcé :

$$\ddot{\phi}_n \int_0^L X_n^2 dx + c^2 \phi_n \int_0^L X_n'^2 dx = \int_0^L X_n g(x, t) dx$$

On identifie les paramètres modaux :

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}_n \frac{m_n}{\rho S} + \phi_n \frac{k_n}{\rho S} = \frac{1}{\rho S} \int_0^L X_n f(x, t) dx$$

$$\Leftrightarrow m_n \ddot{\phi}_n + k_n \phi_n = \int_0^L X_n f(x, t) dx$$

D'où l'équation de la réponse forcée pour chaque mode :

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{1}{m_n} \int_0^L X_n f(x, t) dx$$

# Vibrations longitudinales forcées

## Réponse à une excitation harmonique longitudinale (1)

On a donc l'équation de la réponse forcée pour chaque mode :

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{1}{m_n} \int_0^L X_n f(x, t) dx$$

L'excitation harmonique répartie s'écrit :

$$f(x, t) = F(x) \cos \Omega t$$

La réponse harmonique s'écrit :

$$\phi(t) = \Phi \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}(t) = -\Omega^2 \Phi \cos \Omega t$$

Et l'équation différentielle devient :

$$\Phi(\omega_n^2 - \Omega^2) = \frac{1}{m_n} \int_0^L X_n F(x) dx$$

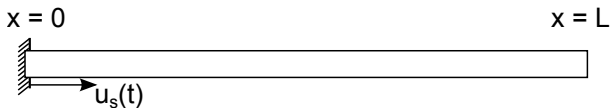
D'où l'amplitude de la réponse en fonction de la fréquence d'excitation:

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{m_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \int_0^L X_n F(x) dx$$

# Cas particulier de l'excitation par vibration du support

## Poutre E-L - Excitation quelconque

Le support est animé d'un déplacement variable  $u_s(t)$



Déplacement total des sections de la poutre :  $u(x, t) + u_s(t)$  Équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2(u + u_s)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(u + u_s)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ddot{u} + \ddot{u}_s) - c^2 u'' = 0 \Leftrightarrow \ddot{u} - c^2 u'' = -\ddot{u}_s$$

On utilise les modes propres de la poutre encastree libre :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) \quad \text{et} \quad X_n = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x$$

Pour identifier les  $\phi_n(t)$ , on résout pour tout  $u_s(t)$  :

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{-\ddot{u}_s \rho S}{m_n} \int_0^L \sin(2n+1) \frac{\pi x}{2L} dx \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{-2L \ddot{u}_s \rho S}{(2n+1) \pi m_n}}$$



# Cas particulier de l'excitation par vibration du support

## Poutre E-L - Vibration harmonique du support (1)

Pour un mouvement du support on a pour chaque mode :

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{-2L\ddot{u}_s \rho S}{(2n+1)\pi m_n}$$

Si le mouvement du support est harmonique on a :

$$u_s(t) = U_0 \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{u}_s(t) = -\Omega^2 U_0 \cos \Omega t$$

La réponse est harmonique de même fréquence

$$\phi_n(t) = \Phi_n \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}_n(t) = -\Omega^2 \Phi_n \cos \Omega t$$

d'où

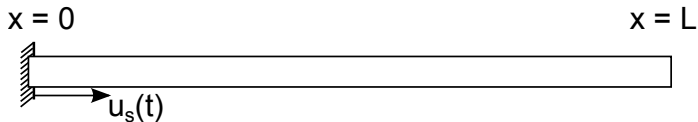
$$(\omega_n^2 - \Omega^2) \Phi_n = \frac{2LU_0 \Omega^2 \rho S}{(2n+1)\pi m_n} \Leftrightarrow \Phi_n(\Omega) = \frac{2LU_0 \rho S}{(2n+1)\pi m_n} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

avec

$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2 dx = \rho S \int_0^L \left( \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\rho S L}{2}$$

# Excitation par vibration longitudinale du support

## Poutre E-L - Vibration harmonique du support (2)



La réponse de chaque mode au mouvement harmonique du support est :

$$\phi_n(t) = \Phi_n(\Omega) \cos \Omega t = \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Le mouvement total de la poutre en vibration longitudinale est :

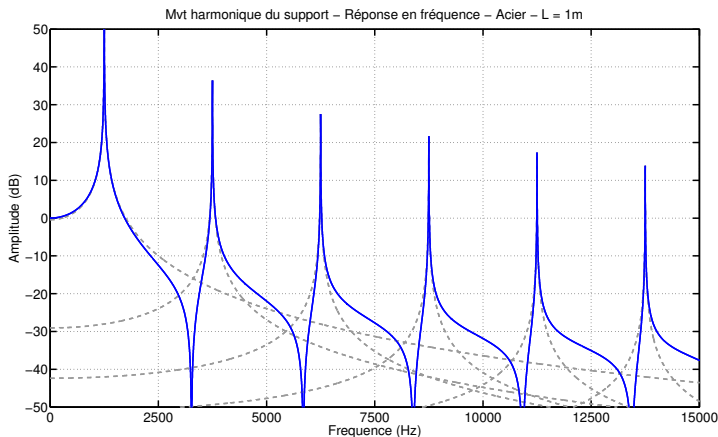
$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) \Leftrightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{2n+1} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \left( \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right) \cos \Omega t$$

# Excitation par vibration longitudinale du support

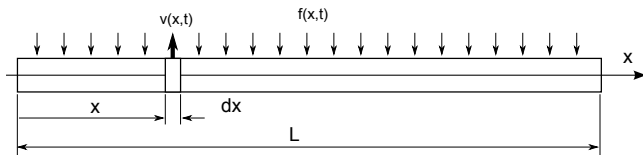
## Poutre E-L - Vibration harmonique du support (3)

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{2n+1} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \cos \Omega t$$



# Vibrations des poutres en flexion

## Équation locale du mouvement pour une poutre - Paramètres



### Poutre droite :

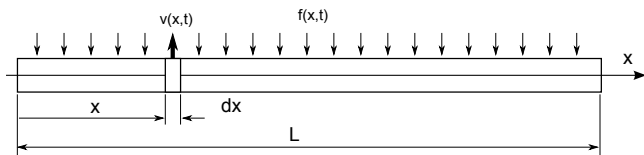
- Section constante  $S = \text{largeur} \times \text{hauteur} = l \times e$ ,
- Longueur  $L (\gg e, l)$ ,
- Moment quadratique de section  $I_{\perp} = \frac{le^3}{12}$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$ , non dissipatif

### Variables :

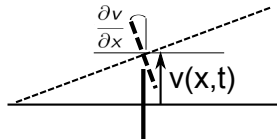
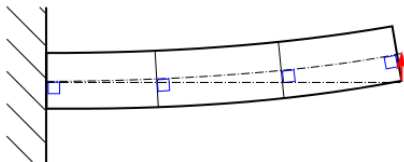
- Distribution de forces transverses  $f(x, t)$
- Petites perturbations + gravité non prise en compte
- Grandeur étudiée : déplacement transverse local (flèche)  $v(x, t)$

# Vibrations en flexion

## Équation locale du mouvement de la poutre - Hypothèses



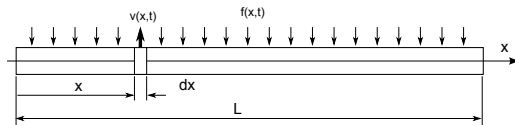
- *Hypothèse d'Euler-Bernoulli* : L'inertie de rotation des section est négligée.
- *Conséquence* : les sections droites restent  $\perp$  à la ligne neutre.



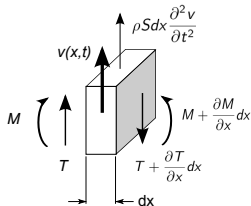
Rotation des sections :  $\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$

# Vibrations en flexion

## Équation locale du mouvement de la poutre - Équilibre Local (1)



On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$  :



- Masse:  $\rho S dx$
- Déplacement (Flèche):  $v(x, t)$

- Accélération :  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
- Effort tranchant à gauche :  $T$
- Effort tranchant à droite :  $-(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx)$
- Mt fléchissant à gauche :  $-M$
- Mt fléchissant à droite :  $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$
- Force extérieure  $f(x, t)$

# Vibrations en flexion

## Équation locale du mouvement de la poutre - Équilibre Local (2)

### Bilan des Moments

$$0 = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - T dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial M}{\partial x} - T$$

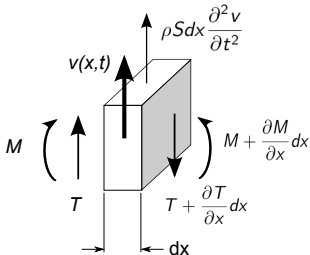
d'après la théorie des poutres :

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

et  $EI$  étant constant :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x, t)$$



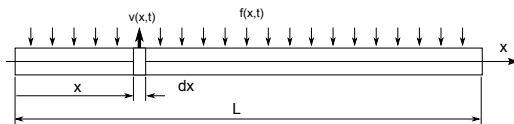
### Bilan des Résultantes

$$\rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

$$\Leftrightarrow \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial T}{\partial x} + f(x, t)$$

# Vibrations en flexion

## Équation des ondes transverses dans une poutre



$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x, t) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} f(x, t)}$$

On note :

$c$  n'est pas une vitesse !

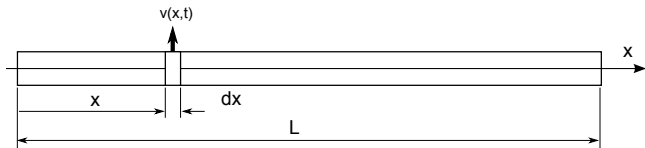
$$\boxed{c = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

$$[c] = \frac{m^3}{s^2}$$



# Vibrations libres en flexion

Vibrations libres d'une poutre lorsque  $f(x, t) = 0$



$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

**Équation en temps**

Solution stationnaire :

$$(2) \Leftrightarrow \ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \quad (3)$$

$$v(x, t) = \phi(t)X(x)$$

**Équation sur la déformation**

$$(2) \Leftrightarrow X''''(x) - \gamma^4 X(x) = 0 \quad (4)$$

$$(1) \Leftrightarrow c^2 \phi X'''' + \ddot{\phi} X = 0$$

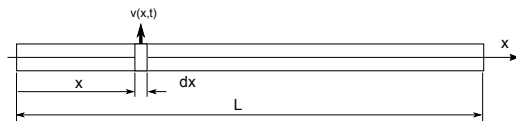
avec

$$\Leftrightarrow c^2 \frac{X''''}{X}(x) = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = -\omega^2 \quad (2)$$

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

# Vibrations libres en flexion

## Expression générale des vibrations libres d'une poutre (1)



$$v(x, t) = \phi(t)X(x)$$

- Sur le temps :  $\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t}$
- Sur l'espace :  $X''''(x) - \gamma^4 X(x) = 0 \Leftrightarrow X(x) = X_0 e^{rt}$ 
  - Équation caractéristique :  $r^4 - \gamma^4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \pm \gamma^2$
  - 4 racines possibles :  $r = -\gamma, +\gamma, -i\gamma, +i\gamma$
  - La solution générale est C.L. des solutions possibles

$$X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} + Ge^{i\gamma x} + He^{-i\gamma x}$$

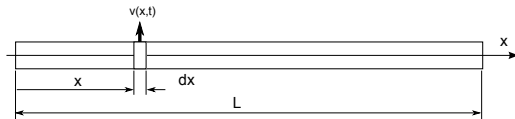
$$\Leftrightarrow \boxed{X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow X(x) = & D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ & + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x) \end{aligned}$$

# Vibrations libres en flexion

## Expression générale des vibrations libres d'une poutre (2)



$$v(x, t) = \phi(t)X(x)$$

- *Dépendance temporelle :*

$$\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- *Dépendance spatiale*

$$X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x$$

Comment identifier les constantes inconnues ?

- Conditions aux limites  $\rightarrow (C_1, C_2, C_3, C_4)$  et  $(X_n, \omega_n)$
- Conditions initiales  $\rightarrow (A, B)$

Finalement le mouvement libre peut s'écrire comme une combinaison linéaire des modes propres. ((Dé)composition modale).

$$v(x, t) = \sum_n X_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

# Vibrations libres en flexion

## Orthogonalité des modes propres

$X_n$  : Mode propre d'ordre  $n$

$\gamma_n^4$  : Valeur propre associée

$$\gamma_n^4 = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2$$

On a

$$\forall n, \quad X_n'''' - \gamma_n^4 X_n = 0 \quad (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} X_n'''' = \gamma_n^4 X_n \\ X_m'''' = \gamma_m^4 X_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^L X_m X_n'''' dx = \gamma_n^4 \int_0^L X_m X_n dx \\ \int_0^L X_n X_m'''' dx = \gamma_m^4 \int_0^L X_n X_m dx \end{cases}$$

Double intégration par parties + CL :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\int_0^L X_m X_n'''' dx} - \cancel{[X_m' X_n''']_0^L} + \int_0^L X_m'' X_n'' dx = \gamma_n^4 \int_0^L X_m X_n dx \\ \cancel{\int_0^L X_n X_m'''' dx} - \cancel{[X_n' X_m''']_0^L} + \int_0^L X_n'' X_m'' dx = \gamma_m^4 \int_0^L X_n X_m dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\gamma_n^4 - \gamma_m^4) \int_0^L X_n X_m dx = 0$$

D'où 3 relations d'orthogonalité des modes quand  $m \neq n$ :

$$\boxed{\int_0^L X_n X_m dx = 0}$$

$$\boxed{\int_0^L X_n'' X_m'' dx = 0}$$

$$\boxed{\int_0^L X_n X_m'''' dx = 0}$$

# Vibrations libres en flexion

## Conditions aux limites pour une poutre (1)

Pour déterminer les constantes de la fonction de forme du mode propre, on peut considérer 3 cas simples avec chacun 2 paramètres connus :

- Bord libre :**



Effort tranchant nul au bord

$$T = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

Moment de flexion nul au bord

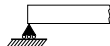
$$M = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Déplacements indéterminés

$$v = ? \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = ?$$

$$\text{Bord Libre} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \forall t$$

- Appui simple :**



Flèche nulle au bord

$$v = 0$$

Moment de flexion nul au bord

$$M = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Indéterminés :  $\theta$  et  $T$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ? \text{ et } \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = ?$$

$$\text{Appui simple} \Leftrightarrow v = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \forall t$$

# Vibrations libres en flexion

## Conditions aux limites pour une poutre (2)

- Encastrement :**



Flèche nulle au bord

$$v = 0$$

Rotation nulle au bord




$$\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Efforts indéterminés

$$T = ? \text{ et } M = ?$$

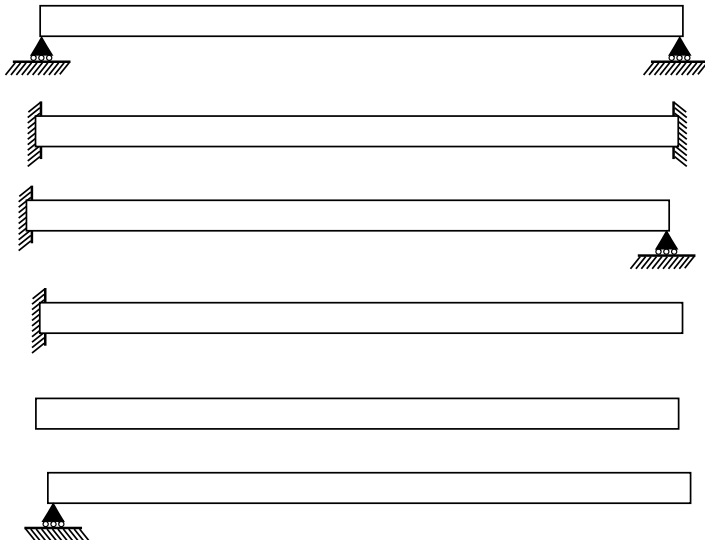
**Encastrement**  $\Leftrightarrow v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \forall t$

## Récapitulatif

C.L.	Bord Libre	Appui simple	Encastrement
			
$v \rightarrow X$	?	0	0
$\theta \rightarrow X'$	?	?	0
$M \rightarrow X''$	0	0	?
$T \rightarrow X'''$	0	?	?

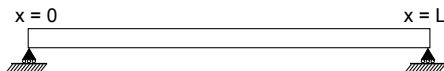
# Vibrations libres en flexion

Différentes combinaisons possibles des conditions aux limites pour une poutre



# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre simplement appuyée (1)



Déplacement  $X(x)$  et moment fléchissant  $X''(x)$  nuls en  $x = 0$  et  $x = L$

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

$$X''(x) = \gamma^2(D_1(-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(-\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(-\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(-\sin \gamma x - \sinh \gamma x))$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \quad \text{et} \quad X''(L) = 0$$

$$X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$\Rightarrow D_3 = D_4 \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \gamma L = 0}$$

d'où les valeurs possibles de  $\gamma$  et des modes et pulsations propres :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \boxed{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

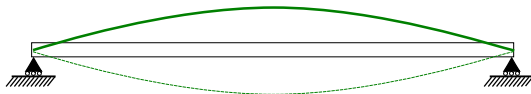
$$\omega_n = \gamma_n^2 c \Leftrightarrow \boxed{\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$



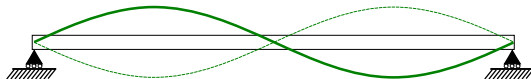
# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre simplement appuyée (2)

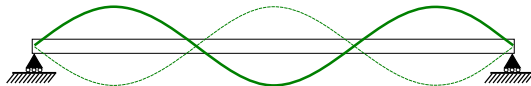
$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$



$$X_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$



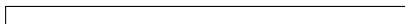
$$X_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{L}$$



$$X_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre libre-libre (1)



$$\bullet \quad X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0 \quad \text{et} \quad X'''(0) = 0 \Rightarrow D_4 = 0$$

$$\Rightarrow X = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x)$$

$$\bullet \quad X''(L) = 0 \quad \text{et} \quad X'''(L) = 0 \quad \text{donnent le système}$$

$$(S) \begin{cases} D_1(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) + D_3(-\sin \gamma L + \sinh \gamma L) = 0 \\ D_1(\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_3(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant doit être nul. Ce qui donne l'équation :

$$\det(S) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1}$$

Les racines de cette équation sont trouvées numériquement (ou graphiquement) :

$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$
4.73	7.85	11	14.13	17.28

$$\rightarrow \gamma_n \quad \text{et} \quad \left( \frac{D_2}{D_4} \right)_n$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre libre-libre (2)



$$\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1 \quad \rightarrow \quad \gamma_0 L, \gamma_1 L, \gamma_2 L, \gamma_3 L, \gamma_4 L, \gamma_5 L, \dots$$

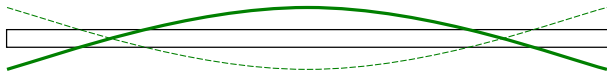
- Les fréquences propres sont obtenues en calculant :

$$\omega_n = c\gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\gamma_n L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

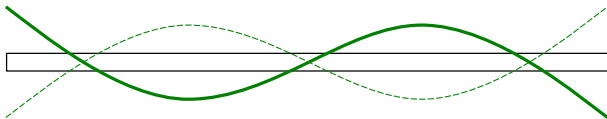
- En substituant les racines successivement dans le système précédent, on obtient les rapports  $\left( \frac{D_1}{D_3} \right)_n$  qui déterminent la forme des modes propres.
- $\rightarrow$  Pas d'expression générale exacte des modes propres
- $\rightarrow$  solution numérique (cf code Matlab)

# Vibrations libres en flexion

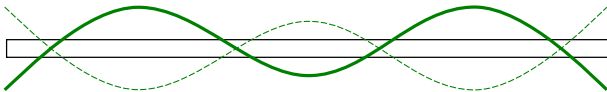
## Modes propres de la poutre libre-libre (3)



$$X_1(x)$$



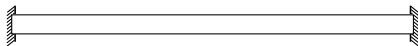
$$X_2(x)$$



$$X_3(x)$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre bi-encastée (1)



- $X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$       et       $X'(0) = 0 \Rightarrow D_3 = 0$   
 $\Rightarrow X = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$

- $X(L) = 0$     et     $X'(L) = 0$       :

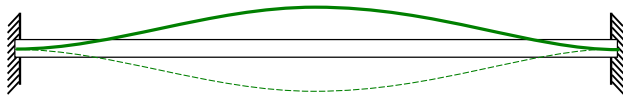
$$(S) \begin{cases} D_2(\cos \gamma L - \cosh \gamma L) + D_4(\sin \gamma L - \sinh \gamma L) \\ D_2(-\sin \gamma L - \sinh \gamma L) + D_4(\cos \gamma L - \cosh \gamma L) \end{cases}$$

$$\det(S) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1}$$

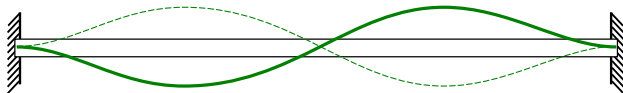
- On a donc les mêmes racines et mêmes fréquences propres.
- Mais les formes des modes sont différentes :  $\gamma_n L \rightarrow \left(\frac{D_2}{D_4}\right)_n$
- Fréquences propres  $\omega_n = c\gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma_n L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

# Vibrations libres en flexion

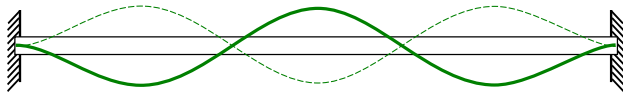
## Modes propres de la poutre bi-encastée (2)



$$X_1(x)$$



$$X_2(x)$$



$$X_3(x)$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre encastrée-libre (1)



- $X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$       et       $X'(0) = 0 \Rightarrow D_3 = 0$

$$\Rightarrow X = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

- $X''(L) = 0$     et     $X'''(L) = 0$      $\Leftrightarrow$   $\cos \gamma L \cosh \gamma L = -1$

- Racines et modes propres

$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$	$\gamma_6 L$	$\rightarrow \left(\frac{D_2}{D_4}\right)_n$
1.88	4.69	7.86	11	14.14	17.28	

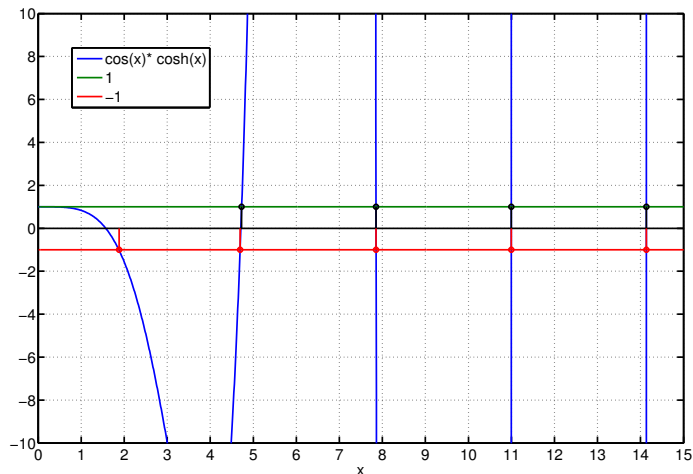
- Fréquences propres

$$\omega_n = c\gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma_n L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre encastrée-libre (2)

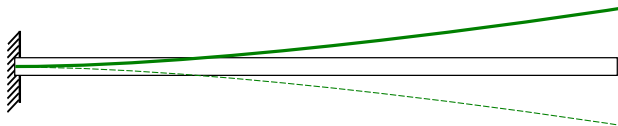
**Résolution graphique de  $\cos x \cosh x = \pm 1$**



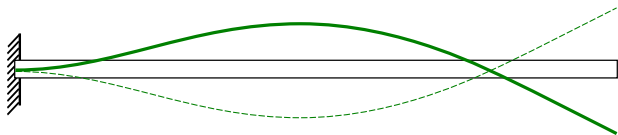


# Vibrations libres en flexion

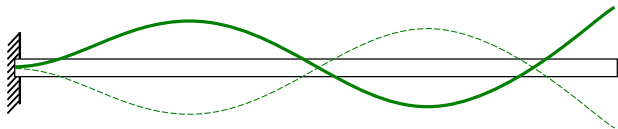
## Modes propres de la poutre encastrée-libre (3)



$$X_1(x)$$



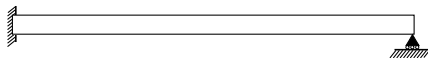
$$X_2(x)$$



$$X_3(x)$$

# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre encastrée-appuyée (1)



- $X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$       et       $X'(0) = 0 \Rightarrow D_3 = 0$   
 $\Rightarrow X = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$

- $X(L) = 0$     et     $X''(L) = 0$      $\Leftrightarrow$      $\tan \gamma L = \tanh \gamma L$

- Racines et modes propres

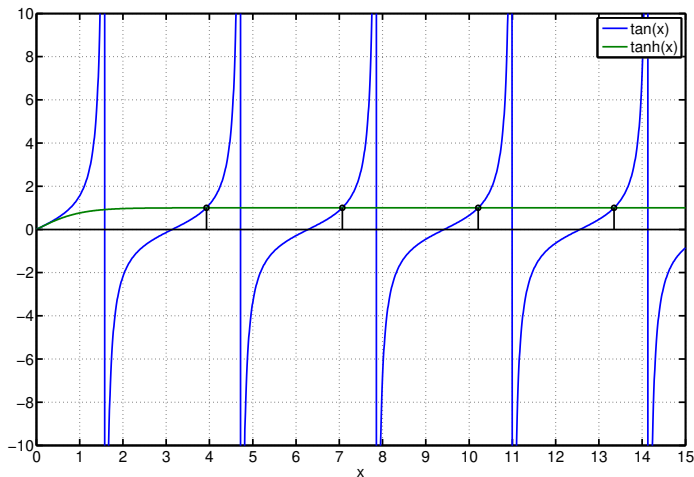
$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$	$\rightarrow \left( \frac{D_2}{D_4} \right)_n$
3.93	7.07	10.21	13.35	16.49	

- Fréquences propres

$$\omega_n = c \gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\gamma_n L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

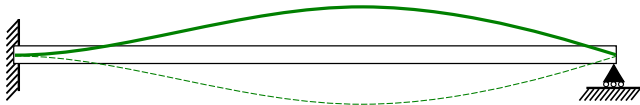
# Vibrations libres en flexion

## Modes propres de la poutre encastrée-appuyée (2)

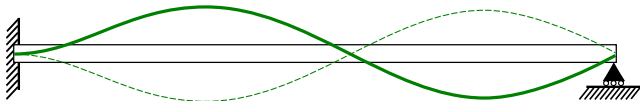


# Vibrations libres en flexion

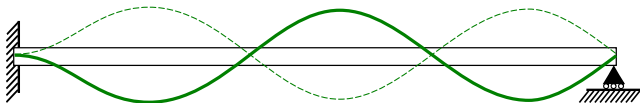
## Modes propres de la poutre encastrée-appuyée (3)



$$X_1(x)$$

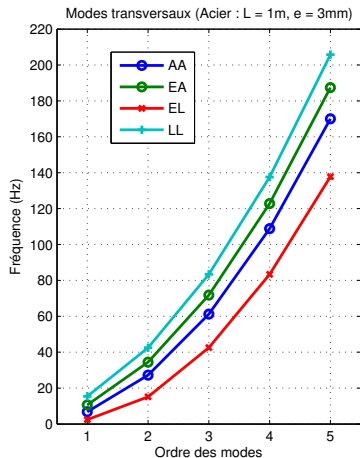
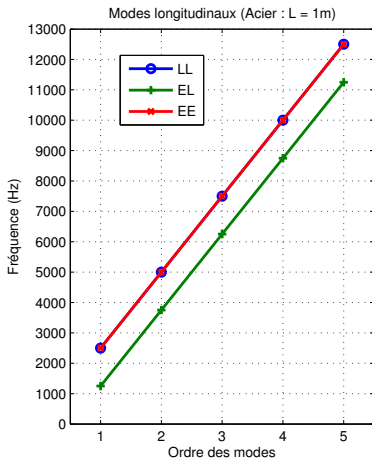


$$X_2(x)$$



$$X_3(x)$$

# Comparaison des fréquences propres L et T



# Identification des caractéristiques modales en flexion

On peut écrire les énergies associées à chaque mode de vibration (ou énergies modales) en réponse libre ou forcée pour retrouver les masses et raideurs modales :

- Énergie cinétique :

$$T_n = \int_0^L \frac{1}{2} \rho S (\dot{v}_n(x, t))^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\phi}_n^2 \int_0^L \rho S X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} m_n \dot{\phi}_n^2$$

on identifie la masse modale :  $m_n = \int_0^L \rho S X_n^2(x) dx$

- Énergie potentielle :

$$U_n = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 v_n(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \phi_n^2 \int_0^L EI X_n''^2(x) dx = \frac{1}{2} k_n \phi_n^2$$

on identifie la raideur modale :  $k_n = \int_0^L EI X_n''^2(x) dx$

# Vibrations libres en flexion

## Réponse libre d'une poutre à une déformation et/ou impulsion initiale

On considère la solution écrite par décomposition modale :

$$v(x, t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x)$$

$A_n$  et  $B_n$  à déterminer avec les conditions initiales données :

$$\begin{cases} v(x, 0) = \sum_n A_n X_n = v_0(x) \\ \dot{v}(x, 0) = \sum_n \omega_n B_n X_n = \dot{v}_0(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_n = \frac{\rho S}{m_n} \int_0^L X_n v_0(x) dx \\ B_n = \frac{\rho S}{\omega_n m_n} \int_0^L X_n \dot{v}_0(x) dx \end{cases}$$

Intégrales difficiles à évaluer pour des  $X_n$  compliqués

→ Évaluation numérique des  $A_n$  et  $B_n$

# Vibrations libres en flexion

## Expression dans la base modale

### Équation du mouvement libre :

Les modes propres vérifient les relations suivantes :

$$\int_0^L X_n^2 dx = \alpha_n$$

$$\int_0^L X_n X_n'''' dx = \gamma_n^4 \alpha_n$$

$$\int_0^L X_n''^2 dx = \gamma_n^4 \alpha_n$$

$\alpha_n$  constante arbitraire,  
déterminée par normalisation.

$$\rho S \ddot{v}(x, t) + EI v''''(x, t) = 0$$

$$\text{avec } v(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \rho S \ddot{\phi}_n X_n + EI \phi_n X_n'''' = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \left( \begin{array}{l} \rho S \ddot{\phi}_n \int_0^L X_m X_n dx \\ + EI \phi_n \int_0^L X_m X_n'''' dx \end{array} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\rho S \ddot{\phi}_n \int_0^L X_n^2 dx}_{\alpha_n} + EI \phi_n \underbrace{\int_0^L X_n X_n'''' dx}_{\gamma_n^4 \alpha_n} = 0$$

$$(n = 0, \dots, \infty)$$



# Vibrations libres en flexion

## Paramètres modaux

L'équation du mouvement développée en base modale donne :

$$\rho S \ddot{v}(x, t) + EI v''''(x, t) = 0 \Leftrightarrow \rho S \ddot{\phi}_n \alpha_n + EI \phi_n \alpha_n \gamma_n^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_n \ddot{\phi}_n + k_n \phi_n = 0} \quad (n = 0, \dots, \infty)$$

avec la **masse modale** :

$$\boxed{m_n = \rho S \int_0^L X_n^2 dx} = \rho S \alpha_n$$

et la **raideur modale** :

$$\boxed{k_n = EI \int_0^L X_n''^2 dx} \quad \text{et aussi} \quad \boxed{k_n = EI \int_0^L X_n'''' X_n dx}$$

Chaque mode  $X_n \Leftrightarrow$  système à 1ddl :

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^L X_n''^2 dx}{\rho S \int_0^L X_n^2 dx} = \frac{k_n}{m_n}$$

# Rappels sur les modes propres en flexion

## Orthogonalité & Paramètres modaux

- Orthogonalité**

$$\int_0^L X_n X_m dx = 0$$

$$\int_0^L X_n'' X_m'' dx = 0$$

$$\int_0^L X_n X_m'''' dx = 0$$

- Paramètres modaux**

Masse modale :

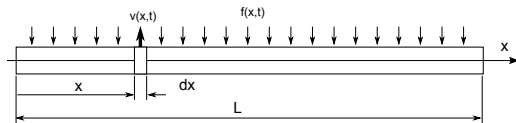
$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2 dx$$

Raideur modale :

$$k_n = EI \int_0^L X_n''^2 dx \quad \text{et aussi} \quad k_n = EI \int_0^L X_n'''' X_n dx$$

# Vibration forcées en flexion

## Réponse permanente à une excitation quelconque



Équation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} f(x,t) \quad \text{avec} \quad v(x,t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_n X_n'''' \phi_n + \frac{1}{c^2} X_n \ddot{\phi}_n = \frac{1}{EI} f(x,t)$$

Orthogonalité des modes propres :

$$\Leftrightarrow \sum_n \phi_n \int_0^L X_m X_n'''' dx + \frac{1}{c^2} \ddot{\phi}_n \int_0^L X_m X_n dx = \frac{1}{EI} \int_0^L X_m f(x,t) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_n}{c^2 \rho S} \ddot{\phi}_n + \frac{k_n}{EI} \phi_n = \frac{1}{EI} \int_0^L X_n f(x,t) dx \Leftrightarrow \ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{1}{m_n} \int_0^L X_n f(x,t) dx$$

# Vibration forcées en flexion

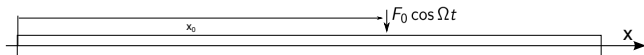
## Réponse à une excitation harmonique ponctuelle (1)

- *Cas général : distribution quelconque :  $f(x, t) = F(x) \cos \Omega t$*

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \frac{\int_0^L X_n F(x) dx}{m_n} \cos \Omega t \Leftrightarrow \phi_n(t) = \frac{\int_0^L X_n F(x) dx}{m_n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

- *Force harmonique ponctuelle appliquée en  $x_0$  :*

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) \cos \Omega t$$



La contribution de la force à l'excitation de chaque mode s'écrit :

$$\int_0^L X_n(x) f(x) dx = \int_0^L X_n(x) F_0 \delta(x - x_0) dx = F_0 X_n(x_0)$$

Finalement :

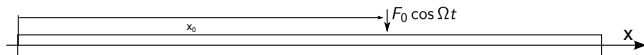
$$v(x, t) = \sum_n X_n(x) \phi_n(t) = F_0 \sum_n \frac{X_n(x_0) X_n(x)}{m_n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

# Vibration forcées en flexion

## Réponse à une excitation harmonique ponctuelle (2)

Force harmonique ponctuelle appliquée en  $x_0$  :

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) \cos \Omega t$$



$$v(x, t) = F_0 \sum_n \frac{X_n(x_0) X_n(x)}{m_n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

La contribution du mode  $X_n$  au mouvement forcé dépend de sa valeur au point d'application de la force :  $X_n(x_0)$

Par conséquent :

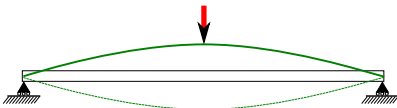
- $F_0$  à un noeud :  $X_n(x_0) = 0 \rightarrow$  contribution nulle
- $F_0$  à un ventre :  $X_n(x_0) = \max \rightarrow$  contribution max

# Vibration forcées en flexion

## Réponse à une excitation harmonique ponctuelle (3)

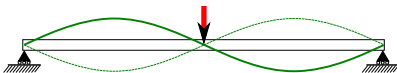
### Cas de la poutre appuyée

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad m_n = \rho S \int_0^L \left( \sin \frac{n\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{\rho SL}{2} \quad \omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

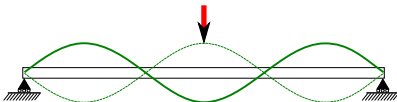


$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

$F_0$  en  $L/2$



$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$



$$= \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin \frac{(2p+1)\pi x}{L}}{\omega_{2p+1}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

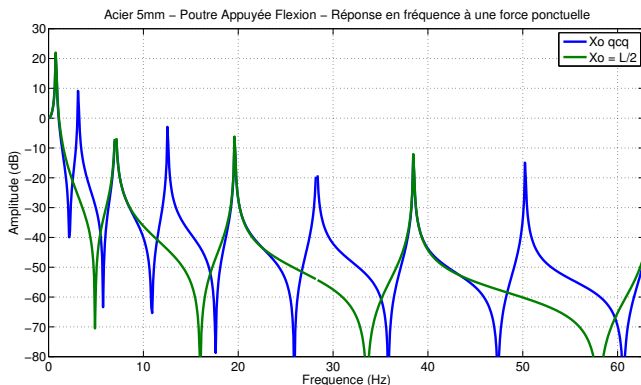
$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{L}}{\omega_3^2 - \Omega^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{L}}{\omega_5^2 - \Omega^2} - \frac{\sin \frac{7\pi x}{L}}{\omega_7^2 - \Omega^2} \dots \right) \cos \Omega t$$

# Vibration forcées en flexion

## Réponse à une excitation harmonique ponctuelle (4)

### Cas de la poutre appuyée

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$



# Méthodes approchées

## Généralités

- Pour des systèmes continus de forme éventuellement complexe.
- Approximation des fréquences propres ?
- Approximation de la forme des modes propres ?
- Hypothèses raisonnables pour la déformation du système : Les déplacements vérifient les conditions aux limites cinématiques.
- On calcule les énergies cinétiques et potentielles
- Équations de Lagrange → Équations du mouvement
- une seule fonction de forme : **Méthode de Rayleigh**
- Plusieurs fonctions de forme : **Méthode de Ritz**



# Méthodes approchées

## Expressions générales des énergies cinétique et potentielle

- Pour les vibrations longitudinales :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

- Pour les vibrations de flexion :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

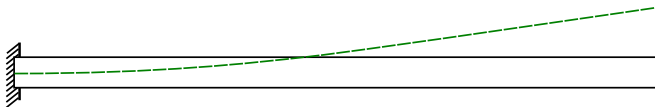
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

# Méthode de Rayleigh

## Exemple : poutre encastrée libre en flexion (1)

- **Approximation de la déformée en flexion :**

$$v(x, t) = \left[ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \phi(t) \rightarrow \phi(t)?$$



- **C.L. cinématiques :**  $v(0, t) = 0 \quad \partial v(0, t) / \partial x = 0$

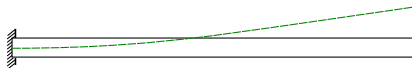
- **Énergies :**

$$T = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_0^L \rho S \left[ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right]^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \phi^2(t) \int_0^L EI \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{6x}{L^3} \right]^2 dx$$

# Méthode de Rayleigh

Exemple : poutre encastrée libre en flexion (2)



$$v(x, t) = \left[ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \phi(t)$$

**Énergies :**

$$T = 0.471 \rho S L \dot{\phi}^2(t)$$

$$U = \frac{6EI}{L^3} \phi^2(t)$$

**Éq. de Lagrange**

→ **Équation du mvt :**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0.943 \rho S L \ddot{\phi} + 12 \frac{EI}{L^3} \phi = 0$$

**Approximation de la Pulsation propre**

$$\omega_{Rayleigh} = \sqrt{\frac{12EI}{0.943 \rho S L^4}} = \frac{3.567}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

On rappelle la **valeur vraie** :

$$\omega_{exacte} = \frac{(\gamma_1 L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{3.534}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

**Erreur relative**  $\frac{\Delta \omega}{\omega} < 2\%$ .

# Méthode de Rayleigh-Ritz

## Principe

Pour obtenir des approximations des premières fréquences propres :

- Combiner plusieurs fonctions de forme réalistes
- Ces fonctions doivent vérifier les CL cinématiques
- Leur contribution relative  $\phi_n(t)$  est à déterminer

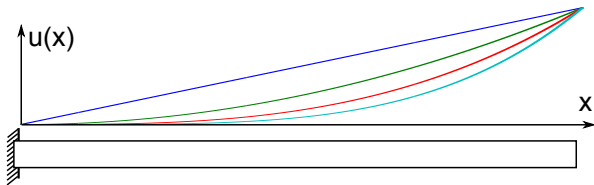
### Processus

- Calculer les énergies
- Dériver les équations de Lagrange
- Identifier les matrices d'inertie et de raideur
- Diagonaliser  $\rightarrow$  Fréquences propres approchées

# Méthode de Rayleigh-Ritz

Exemple : vibrations longitudinales d'une poutre E-L (1)

**Hypothèse de déformée** = combinaison de 4 fonctions réalistes.



$$u(x, t) = \frac{x}{L} \phi_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \phi_2(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \phi_3(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \phi_4(t)$$

$$\phi_n(t)?$$

**Remarques :**

- Les fonctions vérifient les conditions aux limites cinématiques
- Elles ne sont pas orthogonales

# Méthode de Rayleigh-Ritz

Exemple : vibrations longitudinales d'une poutre E-L (2)

**Approximation de la déformée :**

$$u(x, t) = \frac{x}{L} \phi_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \phi_2(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \phi_3(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \phi_4(t)$$

**Énergies :**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left( \dot{\phi}_1(t) \frac{x}{L} + \dot{\phi}_2(t) \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \dot{\phi}_3(t) \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \dot{\phi}_4(t) \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left( \phi_1(t) \frac{1}{L} + \phi_2(t) \frac{2x}{L^2} + \phi_3(t) \frac{3x^2}{L^3} + \phi_4(t) \frac{4x^3}{L^4} \right)^2 dx \end{aligned}$$

# Méthode de Rayleigh-Ritz

Exemple : vibrations longitudinales d'une poutre E-L (3)

**Matrices d'inertie et de raideur :**

$$\mathbf{M} = \rho S L \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 & 8/5 \\ 1 & 3/2 & 9/5 & 2 \\ 1 & 8/5 & 2 & 16/7 \end{pmatrix}$$

**Équation matricielle du mouvement :**

$$\rho S L \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{pmatrix} + \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 & 8/5 \\ 1 & 3/2 & 9/5 & 2 \\ 1 & 8/5 & 2 & 16/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = 0$$

→ Mise en œuvre des techniques pour systèmes discrets

# Méthode de Rayleigh-Ritz

Exemple : vibrations longitudinales d'une poutre E-L (3)

## Diagonalisation → Fréquences et vecteurs propres approchés

$$\omega_{1_{Ritz}} = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad X_{1_{Ritz}} = \frac{x}{L} + 0.028 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 0.5 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 0.11 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

à comparer à la **solution exacte**:

$$\omega_{1_{vrai}} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left( \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0 \right) \quad X_{1_{vrai}} = \sin \frac{\pi x}{2L}$$

et

$$\omega_{2_{Ritz}} = \frac{4.724}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad X_{2_{Ritz}} = \frac{x}{L} + 0.69 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2.56 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2.06 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

à comparer à la **solution exacte** :

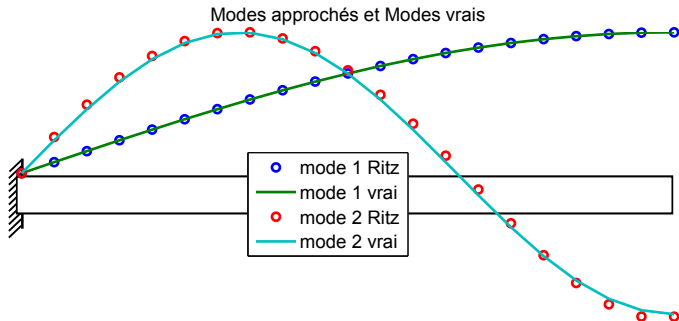
$$\omega_{2_{vrai}} = \frac{3\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{4.712}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left( \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.25\% \right) \quad X_{2_{vrai}} = \sin \frac{3\pi x}{2L}$$



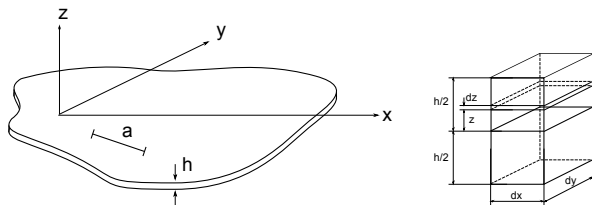
# Méthode de Rayleigh-Ritz

Exemple : vibrations longitudinales d'une poutre E-L (3)

## Comparaison des modes vrais et de leur approximation



# Vibrations de flexion des plaques



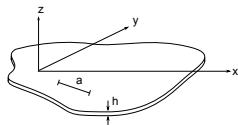
## Caractéristiques de la plaque

- Forme quelconque
- Dimension caractéristique  $a$
- Épaisseur  $h \ll a$
- Matériau homogène et isotrope :  
 $\rho, E, \nu$
- Les normales au plan médian restent perpendiculaires au plan médian déformé. (Bernouilli)
- Grandeur à identifier :

$$w(x, y, t) // z$$

# Vibrations de flexion des plaques

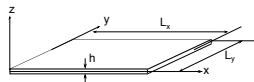
## Équation locale du mouvement libre



- Forme générale

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

- En coordonnées cartésiennes :



$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0$$

# Vibrations de flexion des plaques

## Solution de l'équation du mouvement libre

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0$$

### Solution à variables séparées

$$w(x, y, t) = \phi(t)X(x)Y(y)$$

Donne :

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \Leftrightarrow \phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

et

$$-\omega^2 \rho h X Y + D \left( \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} Y + X \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = 0$$

# Vibrations de flexion des plaques

## Solution de l'équation du mouvement libre

$$-\omega^2 \rho h X Y + D \left( \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} Y + X \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = 0$$

Donne des solutions de la forme :

$$X(x) = a_x e^{\alpha x} + b_x e^{-\alpha x}$$

$$Y(y) = a_y e^{\beta y} + b_y e^{-\beta y} + c_y e^{\gamma y} + d_y e^{-\gamma y}$$

avec les relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 = -(\alpha^2 + \gamma^2) = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

# Vibrations de flexion des plaques

## Conditions aux bords (1)

- Normale au bord :  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ ,
- Tangente au bord  $\mathbf{s} = (-n_y, n_x)$
- Déplacement :  $w$
- Rotation (gradient):  $\left( \frac{\partial w}{\partial n_x}, \frac{\partial w}{\partial n_y} \right)$
- Moment Fléchissant :

$$M = D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) n_x^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) n_y^2 + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right]$$

- Effort tranchant

$$T = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{n}} + D \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left[ 2(1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) n_x n_y + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2) \right]$$

# Conditions aux bords (2)

C.L.	Bord Libre	Appui simple	Encastrement
$w$	?	0	0
$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$	?	?	0
$M$	0	0	?
$T$	0	?	?

# Vibrations de flexion des plaques

## Déformations et contraintes

- Déformations dans le petit élément  $(dx, dy, dz)$ :

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \epsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- Contraintes résultantes :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_{xy} = G \epsilon_{xy} = -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



# Vibrations de flexion des plaques

## Énergies

- Énergie de déformation du petit élément  $(dx, dy, dz)$ :

$$dU = \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_{xy} \sigma_{xy}) dx dy dz$$

- Énergie de déformation de la plaque:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

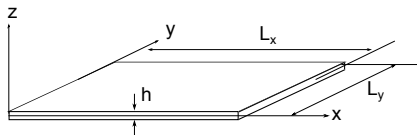
où  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  : Rigidité de flexion de la plaque

- Énergie cinétique de la plaque:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \dot{w}^2 dx dy$$

# Vibrations de flexion des plaques

## Cas de la plaque rectangulaire appuyée aux bords (1)



- Seule configuration pour laquelle  $\exists$  une solution analytique
- Avec les conditions aux limites, on obtient :

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad \omega_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

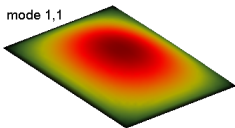
Finalement

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn}) \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$

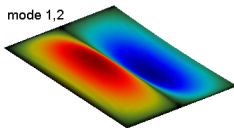
# Vibrations de flexion des plaques

## Cas de la plaque rectangulaire appuyée aux bords (2)

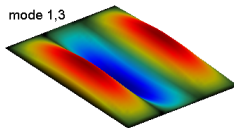
mode 1,1



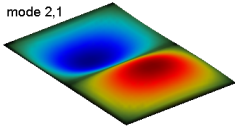
mode 1,2



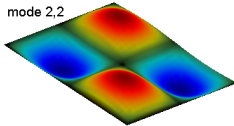
mode 1,3



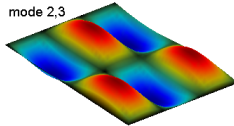
mode 2,1



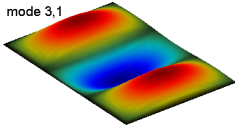
mode 2,2



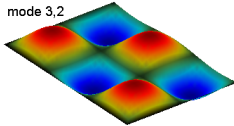
mode 2,3



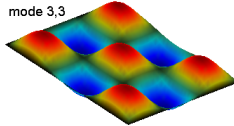
mode 3,1



mode 3,2



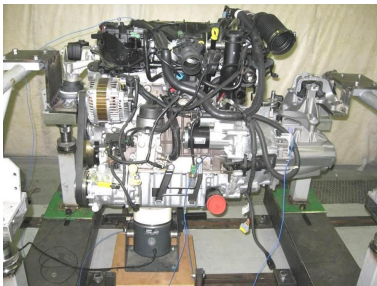
mode 3,3



# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude des vibrations d'un groupe motopropulseur

Diverses configurations



Configuration 1

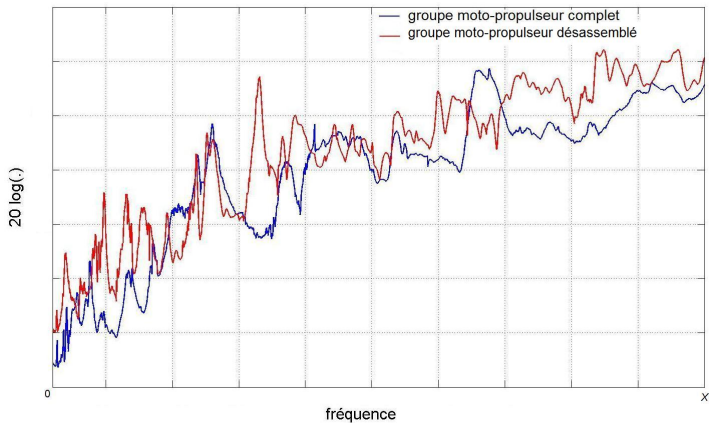


Configuration 2

# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude des vibrations d'un groupe motopropulseur

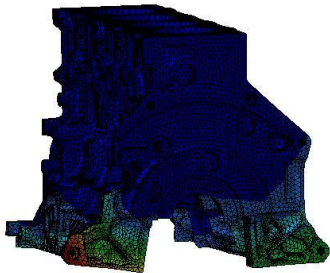
Diverses configurations



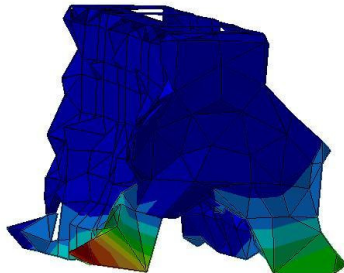
# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude des vibrations d'un groupe motopropulseur

Comparaison des modes EF/Mesure



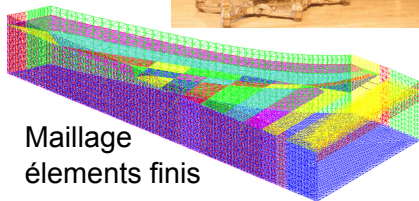
Mode calculé



Mode mesuré

# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude de la restauration d'un clavecin du *XVII<sup>ème</sup>*



Maillage  
éléments finis

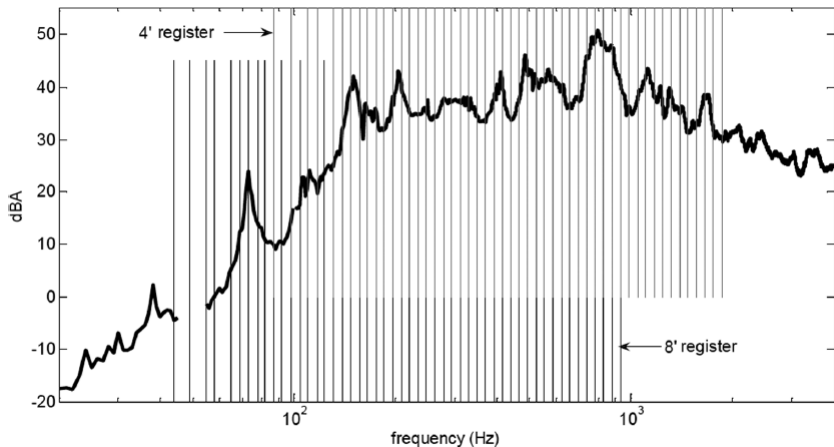


Expérience d'holographie acoustique

# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude de la restauration d'un clavecin du *XVII<sup>ème</sup>*

### Spectre acoustique de la table d'harmonie

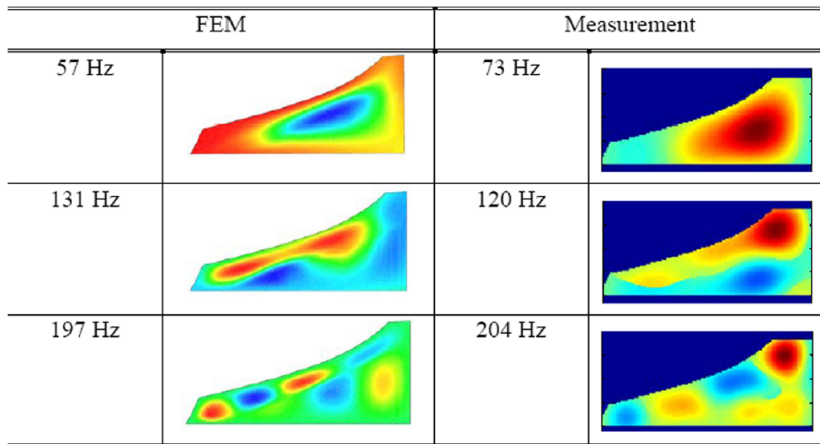




# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude de la restauration d'un clavecin du *XVII<sup>ème</sup>*

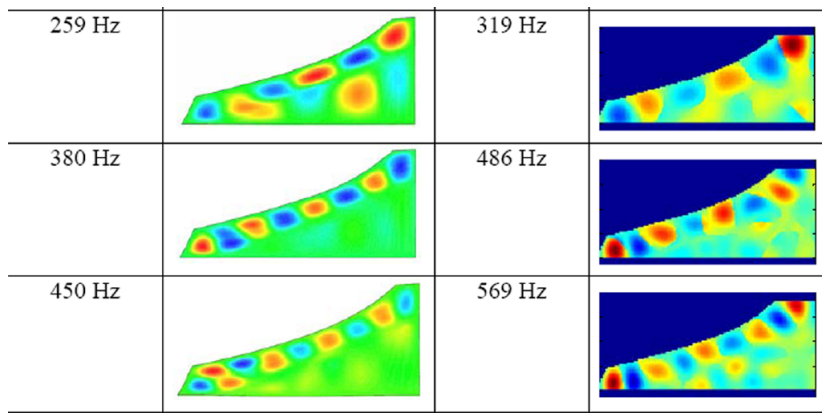
Comparaison des modes EF/Mesure



# Exemple de mise en œuvre des éléments finis

## Étude de la restauration d'un clavecin du *XVII<sup>ème</sup>*

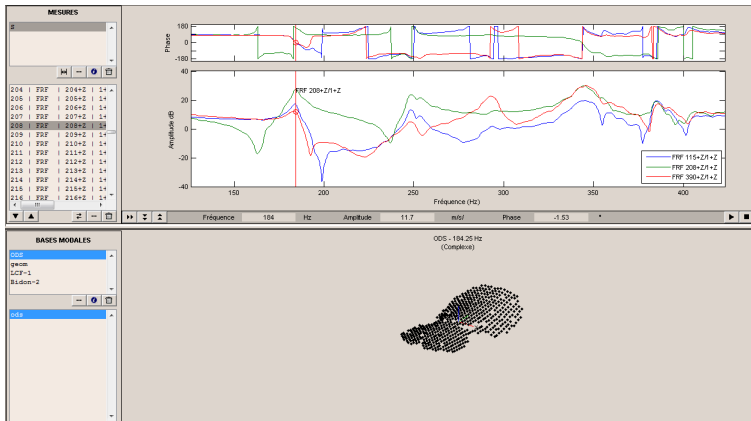
Comparaison des modes EF/Mesure



## Analyse modale expérimentale

## Étude des vibrations d'une table d'harmonie de violon

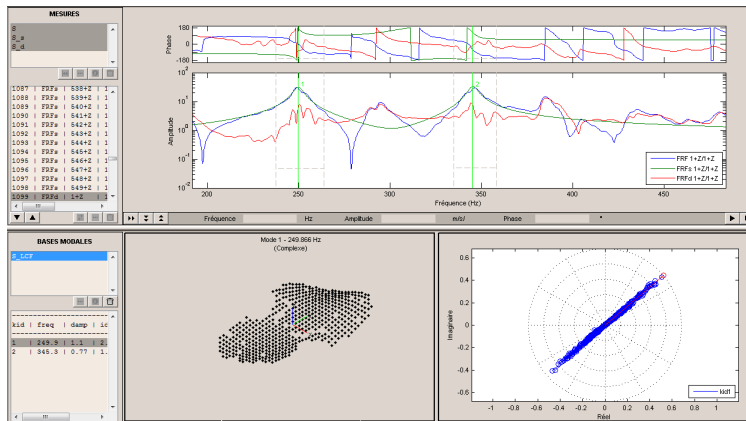
## Présentation des mesures



# Analyse modale expérimentale

## Étude des vibrations d'une table d'harmonie de violon

### Identification des paramètres dynamiques

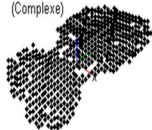


# Analyse modale expérimentale

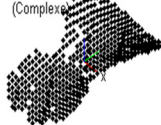
## Étude des vibrations d'une table d'harmonie de violon

### Comparaison Analyse modale / EF

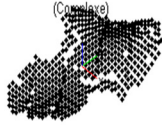
Mode 1 - 101.114 Hz  
(Complexe)



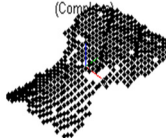
Mode 2 - 184.419 Hz  
(Complexe)



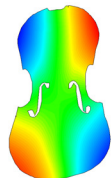
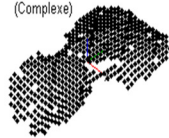
Mode 3 - 250.972 Hz  
(Complexe)



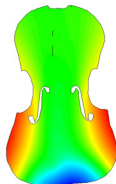
Mode 4 - 292.051 Hz  
(Complexe)



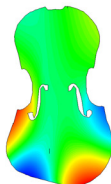
Mode 5 - 343.829 Hz  
(Complexe)



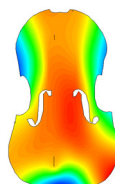
99 Hz



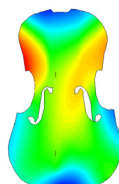
145 Hz



242 Hz



329 Hz



389 Hz

# Ce qu'il faut retenir des systèmes continus

- Établir et connaître les équations des ondes L et T
- Établir et connaître leur solution générale (Séparation des variables)
- Interpréter et Écrire les conditions aux limites
- En déduire les fréquences et modes propres
- Connaître les relations d'orthogonalité des modes
- Exprimer la solution libre en fonction des modes propres
- Déterminer la solution libre en fonction des CI
- Exprimer la solution forcée en fonction des modes propres
- Interpréter tout cela physiquement
- Connaître les méthodes de Rayleigh et Rayleigh-Ritz