Exercice 1 : Transformation non homogène

On étudie la transformation d'un milieu continu qui transporte tout point $M_0(X,Y,Z)$ du milieu dans sa configuration de référence en $M(x,y,z)$ dans la configuration actuelle, définie par :

$$\begin{cases} x = X + \alpha Y^2, \\ y = Y + \beta X^2, \\ z = Z, \end{cases}$$

α et β sont des constantes réelles strictement positives. Les coordonnées sont rapportées à un repère orthonormé direct $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

1 Étude générale de cette transformation : domaine de validité

1. Déterminer le tableau des composantes du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$.

Les composantes du tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ ont pour expression

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

On en déduit facilement l'expression du tenseur $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha Y & 0 \\ 2\beta X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La transformation est-elle homogène ? Déterminer l'ensemble des points invariants.

La transformation n'est pas homogène car le tenseur $\underline{\underline{F}}$ dépend des coordonnées du point M_0 : $\underline{\underline{F}}(\underline{X})$.
Les points invariants par la transformation sont tels que : $x = X, y = Y, z = Z$. Et donc, d'après l'expression de la transformation :

$$x = X = X + \alpha Y^2, \;\; y = Y + \beta X^2, \;\; z = Z.$$

Soit donc $X = 0, \; Y = 0, \; Z$ quelconque.
Les points invariants par la transformation sont donc situés sur l'axe $[O, \underline{e}_3]$.

3. Déterminer le domaine des points $M_0(X,Y,Z)$ pour lequel la transformation est définie. Dans le plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$, les axes $O\underline{i}$ et $O\underline{j}$, et le carré $OACB$, avec $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$, sont-ils toujours inclus dans ce domaine ?

La transformation est définie si $0 < \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) < +\infty$ pour tout $\underline{X}$ du domaine et tout instant t. Or ici cette condition conduit à :

$$\det \underline{\underline{F}} = 1 - 4\,\alpha\beta XY > 0.$$

Soit donc :

$$XY < \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

Le domaine de validité de la transformation est donc la partie "connexe" délimitée par l'hyperbole équilatère d'équation

$$XY = \frac{1}{4\alpha\beta}$$

contenant le point O : $(0,0)$ car $0 < \dfrac{1}{4\alpha\beta}$.

Les points O, $A(1,0)$ et $B(0,1)$ sont donc bien inclus dans ce domaine. Ils vérifient bien $XY < \dfrac{1}{4\alpha\beta}$.
Et le point $C(1,1)$ y est inclus si la condition $\alpha\beta < 1/4$ est satisfaite.

4. Déterminer dans la base orthonormée donnée, le tableau des composantes du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$, puis celui du tenseur des déformations de Green - Lagrange $\underline{\underline{E}}$.

Le tenseur des dilatations est défini par la relation $\underline{\underline{C}} = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}$, soit :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\beta X & 0 \\ 2\alpha Y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha Y & 0 \\ 2\beta X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(2\beta X)^2 & 2(\alpha Y+\beta X) & 0 \\ 2(\alpha Y+\beta X) & 1+(2\alpha Y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur de déformation est défini par la relation $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$, soit :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2(\beta X)^2 & \alpha Y+\beta X & 0 \\ \alpha Y+\beta X & 2(\alpha Y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Étude de la transformation dans le plan $(O;\underline{i}, \underline{j})$

1. On restreint à partir de maintenant l'étude au plan $(O; i, j)$. Le milieu continu considéré est le carré $OACB$. Déterminer les points O', A', B' et C', transformés respectifs des points O, A, B et C.

Le vecteur déplacement est défini $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$ et vaut donc ici :

$$\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X} = \begin{pmatrix} \alpha Y^2 \\ \beta X^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées des points O', A', B' et C' sont

$$\begin{cases} x_{O'} = 0, \\ y_{O'} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{A'} = 1, \\ y_{A'} = \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{B'} = \alpha, \\ y_{B'} = 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{C'} = 1+\alpha, \\ y_{C'} = 1+\beta. \end{cases}$$

2. Établir les équations des courbes transformées des côtés OA, OB, BC et AC du carré.

Tous les points du côté OA ont pour coordonnées $(X, 0, 0)$ avec $0 < X < 1$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x = X, \\ y = \beta X^2 = \beta x^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les points du côté OA se transforment donc en une courbe d'équation $y = \beta x^2$.
Il s'agit d'un arc de parabole tangent à l'axe $\underline{e}_1$ au point O.

Tous les points du côté OB ont pour coordonnées $(0, Y, 0)$ avec $0 < Y < 1$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x = \alpha Y^2 = \alpha y^2, \\ y = Y, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les points du côté OB se transforment donc en une courbe d'équation $x = \alpha y^2$.
Il s'agit d'un arc de parabole tangent à l'axe $\underline{e}_2$ au point O.

Tous les points du côté BC ont pour coordonnées $(X, 1, 0)$ avec $0 < X < 1$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x = X + \alpha, \\ y = 1 + \beta X^2 = 1 + \beta(x-\alpha)^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les points du côté BC se transforment donc en une courbe d'équation $y - 1 = \beta(x-\alpha)^2$.
Il s'agit d'un arc de parabole tangent à l'axe $\underline{e}_1$ au point de coordonnées $(\alpha, 1)$, soit au point B' transformé du point B.

Tous les points du côté AC ont pour coordonnées $(1, Y, 0)$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha Y^2 = 1 + \alpha(y-\beta)^2, \\ y = Y + \beta, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les points du côté AC se transforment donc en une courbe d'équation $x - 1 = \alpha(y-\beta)^2$.
Il s'agit d'un arc de parabole tangent à l'axe $\underline{e}_2$ au point de coordonnées $(1, \beta)$, soit au point A' transformé du point A.

3. On suppose à partir de maintenant $\alpha = 1/4$ et $\beta = 3/4$. Le carré $OACB$ est-il bien dans le domaine de validité ? Tracer le transformé $OABC$ u carré $OACB$.

On a

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4},$$

donc tous les points du carré sont bien dans le domaine de validité de la transformation.
Pour la représentation du transformé $OABC$ du carré $OACB$ voir en fin de document.

3 Étude des déformations au point $C(1,1,0)$

1. Donner au point C les dilatations, λ_1 , λ_2 et λ_2 dans les directions des axes.

Le tenseur $\underline{\underline{C}}$ a pour expression au point C :

$$\underline{\underline{C}}\,(1,1,0) = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & 2 & 0 \\ 2 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\underline{\underline{C}}\,(1,1,0)$ n'est pas diagonal, alors les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ ne sont pas des directions principales du tenseur $\underline{\underline{C}}$.

La dilatation $\lambda(\underline{n}_0)$ au point $C(1,1,0)$ dans la direction unitaire $\underline{n}_0$ est définie par la relation

$$\lambda(\underline{n}_0) = \sqrt{\underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{n}_0}$$

On a donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{\underline{e}_1 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_1} = \sqrt{C_{11}(1,1,0)} = \sqrt{13}\,/\,2, \\ \lambda_2 = \sqrt{\underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_2} = \sqrt{C_{22}(1,1,0)} = \sqrt{5}\,/\,2, \\ \lambda_3 = \sqrt{\underline{e}_3 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_3} = \sqrt{C_{33}(1,1,0)} = 1. \end{cases}$$

2. $\theta(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ désigne le glissement de l'angle droit formé par les axes $C\underline{e}_1$ et $C\underline{e}_2$. Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\theta(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Mettre en évidence graphiquement cet angle.

L'angle entre les vecteurs $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ et $\underline{\tau}_0 = \underline{e}_2$ est un angle droit.
L'angle de glissement $\theta(\underline{e}_1, \underline{e}_2$ au point C après transformation est donné par la relation

$$\sin\theta = \frac{\underline{e}_1 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_2}{\sqrt{\underline{e}_1 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_1}\sqrt{\underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_2}} = \frac{\underline{e}_1 \cdot \underline{\underline{C}}\,(1,1,0) \cdot \underline{e}_2}{\lambda(\underline{e}_1)\,\lambda(\underline{e}_2)}.$$

On en déduit l'expression suivante

$$\sin\theta = \frac{2.2.2}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

et donc l'angle de glissement $\theta(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ a pour valeur

$$\theta = \arcsin\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \approx 83°.$$