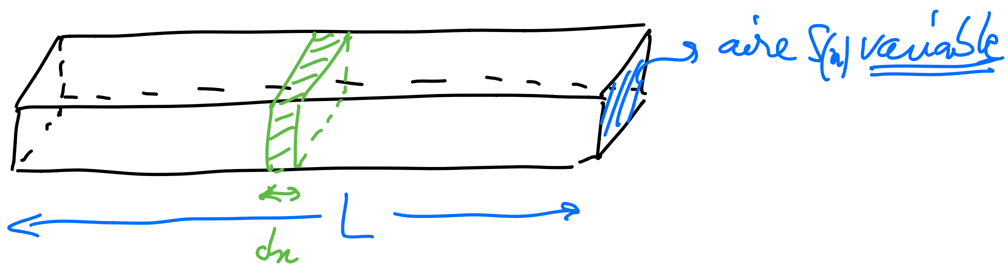
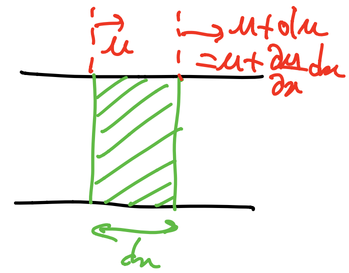
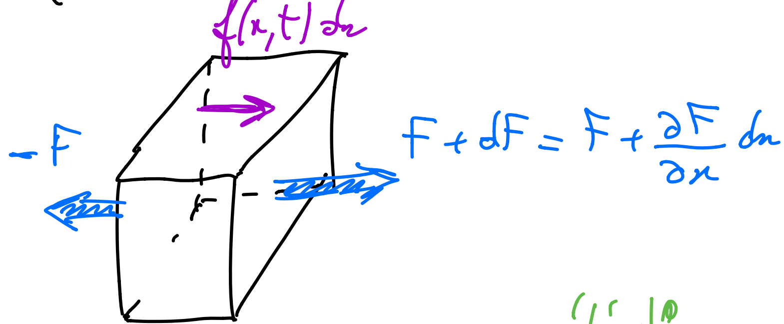
Exercice 7 : Vibrations longitudinales dans une poutre de section variable

1. Ecrire dans ce cas l'équilibre dynamique d'une section d'une poutre dans un mouvement longitudinal.





On isole un petit volume de longueur dx pour lequel on va étudier l'équilibre dynamique (lois de Newton) :



$$\left(\cancel{F} + \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\right) - \cancel{F} + f(x,t)\,dx = \underbrace{dm}_{=\rho S\,dx}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

accélérat°

2. En déduire les équations des ondes de vibration longitudinales d'une poutre de longueur L, de section droite d'aire S, faite dans un matériau homogène et isotrope de masse volumique ρ et de module d'Young E.

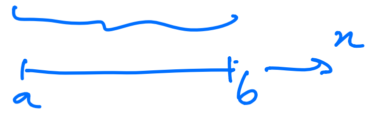
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) + f(x,t) = \rho\, S(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\text{or } \underbrace{F(x,t)}_{\text{effort normal } N} = S(x)\,\underbrace{\sigma(x,t)}_{\sigma_{xx}} \underset{\text{loi de Hooke}}{=} S(x)\, E\, \underbrace{\varepsilon(x,t)}_{\varepsilon_{xx}} \overset{\text{HPP}}{\simeq} E\, S(x)\, \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

On a donc d'après (1) :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[E\,S(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + f(x,t) = \rho\, S(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \quad (2)$$

3. Que devient cette équation si la section est du type $S(x) = S_0 x^2$, avec $0 < a < x < b$.



donc $L = b - a$

dans (2) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E S_0 x^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + f(x,t) = \rho S_0 x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$E S_0\left[2x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right] + f(x,t) = \rho S_0 x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$/\rho S_0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{E}{\rho}}}_{c_L^2} x\left[2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right] + \frac{f(x,t)}{\rho S_0} = x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

avec $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ célérité des ondes longitudinales

$$\Rightarrow c_L^2\, x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x\, u(x,t)\right] + \frac{f(x,t)}{\rho S_0} = x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

soit

$$\boxed{c_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x\, u(x,t)\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[x\, u(x,t)\right] + \frac{f(x,t)}{\rho S_0 x} = 0} \quad (3)$$

$x \neq 0$ car $0 < a < x < b$

4. Établir la solution de l'équation précédente dans le cas d'oscillations libres.

Posons $\hat{u}(x,t) = x\, u(x,t)$ dans (3)

Ici problème de vibrations <u>libres</u> donc $f(x,t) = 0$

Soit (3) :

$$\boxed{c_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{u}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(x,t) = 0} \quad (4)$$

En utilisant la séparation des variables $\hat{u}(x,t)$ solution de l'équation de d'Alembert peut être mise sous la forme :

$$\hat{u}(x,t) = f(t)\, g(x)$$

(4) $\Rightarrow \quad c_L^2\, g''(x)\, f(t) - g(x)\, \ddot{f}(t) = 0$

d'où $$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = c_L^2\, \frac{g''(x)}{g(x)} = \text{cte} = \alpha$$

on obtient alors 2 équations : $\ddot{f}(t) - \alpha f(t) = 0 \quad (i)$

$g''(x) - \frac{\alpha}{c_L^2}\, g(x) = 0 \quad (ii)$

or pour avoir stabilité en temps $\alpha = -\omega^2$ (ω : pulsation propre)

(i) : $\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$

(ii) : $g''(x) + \frac{\omega^2}{c_L^2}\, g(x) = 0$ posons $\boxed{\gamma = \frac{\omega}{c_L}}$

soit $g''(x) + \gamma^2 g(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = C\cos(\gamma x) + D\sin(\gamma x)}$

Le déplacement $u(x,t)$ a donc pour expression :

$$u(x,t) = \frac{\hat{u}(x,t)}{x} = \frac{g(x)\, f(t)}{x} = \frac{1}{x}\left[C\cos(\gamma x) + D\sin(\gamma x)\right]\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

5. Dans le cas où la poutre est encastrée à ses deux extrémités $x = a$ et $x = b$, montrer que le déplacement a pour expression

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t)\chi_m(x) \qquad \text{avec} \qquad \chi_m(x) = N_m \frac{\sin[\gamma_m(x-a)]}{x}.$$

- $u(x=a,t) = 0 \Rightarrow \frac{g(a)}{a} = 0 \;\; \forall t \Rightarrow g(a) = 0$

$C\cos(\gamma a) + D\sin(\gamma a) = 0 \quad (CL1)$

- $u(x=b,t) = 0$ de même implique $g(b) = 0$

$C\cos(\gamma b) + D\sin(\gamma b) = 0 \quad (CL2)$

On a une solution non nulle si $\det \begin{pmatrix} \cos(\gamma a) & \sin(\gamma a) \\ \cos(\gamma b) & \sin(\gamma b) \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \cos(\gamma a)\sin(\gamma b) - \cos(\gamma b)\sin(\gamma a) = \sin[\gamma(b-a)] = \sin[\gamma L] = 0$

d'où $\gamma_m L = m\pi \quad m \in \mathbb{N}^*$

$\gamma_m = \dfrac{\omega_m}{C_L} = \dfrac{m\pi}{L} \Rightarrow \boxed{\omega_m = \dfrac{m\pi}{L} C_L = \dfrac{m\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$