

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Eléments de calcul tensoriel</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions générales . . . . .	4
1.1.1	Tenseurs d'ordre 1 . . . . .	4
1.1.2	Produit tensoriel . . . . .	4
1.1.3	Contraction d'un tenseur selon un couple d'indice . . . . .	4
1.2	Tenseurs d'ordre 2 . . . . .	4
1.2.1	Matrice d'un tenseur d'ordre 2 . . . . .	5
1.2.2	Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2 . . . . .	5
1.2.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur . . . . .	6
1.2.4	Contractions de deux tenseurs d'ordre 2 . . . . .	7
1.2.5	Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2 . . . . .	7
1.2.6	Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur . . . . .	7
1.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 . . . . .	8
1.4	Calcul différentiel sur les tenseurs . . . . .	8
1.4.1	Gradient d'un champ de tenseurs . . . . .	9
1.4.2	Divergence d'un champ de tenseurs . . . . .	10
1.5	Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs . . . . .	11
1.5.1	coordonnées cartésiennes orthonormées . . . . .	11
1.5.2	coordonnées cylindriques . . . . .	11
1.5.3	coordonnées sphériques . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Descriptions du mouvement des milieux continus</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Description Lagrangienne . . . . .	16
2.2.1	Définition . . . . .	16
2.2.2	Vitesse et accélération lagrangiennes . . . . .	18
2.3	Approche eulérienne du mouvement . . . . .	18
2.3.1	Définition . . . . .	19
2.3.2	Lignes de courant . . . . .	20
2.3.3	Mouvements permanents (ou stationnaires) . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Tenseurs de déformation</b>	<b>23</b>
3.1	Tenseurs de déformation en transformation finie . . . . .	23
3.1.1	Transport des vecteurs matériels . . . . .	23
3.1.2	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green . . . . .	24
3.1.3	Déformation de Green-Lagrange . . . . .	25
3.1.4	Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange . . . . .	26

3.2	Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé . . . . .	27
3.2.1	Hypothèse de petites perturbations (HPP) - Définition . . . . .	27
3.2.2	Condition de compatibilité géométrique . . . . .	28
3.2.3	Forme générale des solutions du problème 3.23 . . . . .	30
3.2.4	Bref commentaires sur les mesures de déformation . . . . .	31
3.2.5	Annexe : Rotation infinitésimale . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Cinématique des milieux continus - Taux de déformation</b>	<b>33</b>
4.1	Taux de déformation volumique . . . . .	33
4.2	Tenseur taux de déformation . . . . .	34
4.3	Dérivées particulières d'un champ . . . . .	35
4.3.1	Définition . . . . .	35
4.3.2	Application au calcul de l'accélération eulérienne . . . . .	36
4.3.3	Conservation de la masse . . . . .	37
4.4	Dérivées particulières d'une intégrale de volume . . . . .	37
4.4.1	Formulation et application à la conservation de la masse . . . . .	37
4.4.2	Une 2e application : la conservation de la quantité de mouvement .	38
4.5	Annexe : expression de l'accélération . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel</b>	<b>41</b>
5.1	Modélisation des efforts extérieurs . . . . .	41
5.2	Lemme du tétraèdre . . . . .	43
5.3	Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	45
5.3.1	Définition et interprétation physique . . . . .	45
5.3.2	Equation d'équilibre . . . . .	46
5.3.3	Symétrie du tenseur des contraintes . . . . .	46
5.3.4	Discontinuités du champ de contraintes . . . . .	47
5.4	Cercles de Mohr	47

# Chapitre 5

## Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel

On se place dans un référentiel galiléen que l'on dote d'un repère cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On note  $\mathcal{S}$  le système mécanique considéré. A l'instant  $t$ , il occupe le domaine  $\Omega_t$ . On note également de façon générique  $\mathcal{S}'$  un sous-système de  $\mathcal{S}$  occupant le domaine  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ . La construction des efforts intérieurs dans le milieu continu tridimensionnel s'appuie sur la modélisation des efforts extérieurs et sur l'énoncé de la loi fondamentale de la Dynamique. Pour un système mécanique donné, rappelons que ce dernier comporte deux propositions :

1. La résultante  $\underline{\mathcal{F}}'$  des forces s'exerçant sur  $\mathcal{S}'$  est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement de  $\mathcal{S}'$  :

$$\underline{\mathcal{F}}' = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega'_t} \rho \underline{u} d\Omega_t \right) \quad (5.1)$$

2. Le moment  $\underline{\mathcal{M}}'_O$  calculé en O de toutes les actions s'exerçant sur  $\mathcal{S}'$  est égal à la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O de  $\mathcal{S}'$  :

$$\underline{\mathcal{M}}'_O = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{u} d\Omega_t \right) \quad (5.2)$$

Compte tenu de (4.34) et de (4.35), on voit que la résultante des forces est égale à la quantité d'accélération du système, et que le moment des forces est égal au moment des quantités d'accélération :

$$(a) \quad \underline{\mathcal{F}}'_O = \int_{\Omega'_t} \rho \underline{\gamma} d\Omega_t \quad ; \quad (b) \quad \underline{\mathcal{M}}'_O = \int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{\gamma} d\Omega_t \quad (5.3)$$

### 5.1 Modélisation des efforts extérieurs

On considère un sous-système  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$ . Les actions extérieures qu'il subit sont d'une part des actions à distance et d'autre part des actions de contact (figure 5.1). Elles sont définies sur la configuration actuelle du système.

- **actions à distance** : Elles proviennent par définition d'agents extérieurs à  $\mathcal{S}'$ . Elles sont représentées par une densité massique de force notée  $\underline{F}$ . Le point matériel de  $\mathcal{S}'$  occupant le volume élémentaire  $d\Omega_t$  est donc soumis à la force  $\rho \underline{F} d\Omega_t$ . La gravité ou les forces électromagnétiques fournissent des exemples classiques d'actions à distance. On supposera que les valeurs de  $|\underline{F}|$  dans  $\Omega_t$  sont bornées.

On suppose que la force massique  $\underline{F}$  dépend de  $\underline{x}$  et de  $t$  exclusivement. En particulier, un volume élémentaire pouvant appartenir à divers sous-systèmes de  $\mathcal{S}$ , on fait l'hypothèse que le choix du sous-système n'affecte pas la valeur de l'action à distance.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple des forces de gravité sur terre. L'action à

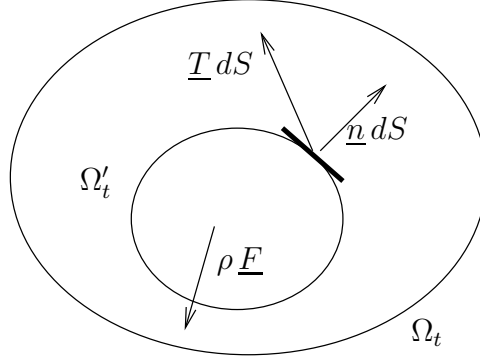


FIG. 5.1 – actions extérieures sur le sous-système  $\mathcal{S}'$

distance subie par un élément de volume contenu dans  $\mathcal{S}'$  de la part de l'extérieur à  $\mathcal{S}'$  est due à la terre et au complémentaire de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}$ . En toute rigueur, c'est une fonction du choix de  $\mathcal{S}'$ . La modélisation envisagée ne sera donc valide que si l'effet en question est négligeable. C'est le cas si les dimensions du système  $\mathcal{S}$  sont petites devant celles de la terre. Cette approximation est de toute évidence fondée pour les systèmes mécaniques usuels du génie civil et du génie industriel. En revanche, elle peut être prise en défaut pour certains problèmes de géophysique.

- **actions de contact** : le sous-système  $\mathcal{S}'$  est soumis de la part de ce qui lui est extérieur à des efforts s'exerçant sur sa frontière. Ils sont représentés par une densité surfacique  $\underline{T}$ . Ainsi,  $\underline{n}$  désignant la normale unitaire *extérieure* à  $\Omega'_t$ , un élément d'aire  $\underline{n} dS$  de la frontière de  $\Omega'_t$  subit de la part de l'extérieur à  $\mathcal{S}'$  la force  $\underline{T} dS$ . On remarquera que la modélisation exclut les forces concentrées ou les densités linéiques de forces.

La densité  $\underline{T}$  n'est fonction que de  $\underline{x}$ ,  $\underline{n}$  et  $t$ . En particulier, l'élément d'aire intervient exclusivement par sa position  $\underline{x}$  et son orientation  $\underline{n}$ . Cela suppose également que le choix du sous-système n'a pas d'effet sur la valeur de  $\underline{T}$ .

Dans le cadre de cette modélisation, la résultante et le moment en O des actions extérieures à  $\mathcal{S}'$  se calculent de la façon suivante :

$$\underline{\mathcal{F}}_O = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t + \int_{\Omega'_t} \rho \underline{F}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (5.4)$$

$$\underline{\mathcal{M}}'_O = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t + \int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{F}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (5.5)$$

## 5.2 Lemme du tétraèdre

On dispose de deux expressions de la force agissant sur  $\mathcal{S}'$ . Celle donnée en (5.4) est issue de notre modélisation. Celle donnée en (5.3a) résulte de la loi fondamentale. En les combinant, on déduit l'identité suivante :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) (\underline{\gamma}(\underline{x}, t) - \underline{F}(\underline{x}, t)) d\Omega_t \quad (5.6)$$

En exploitant la validité de (5.6) pour tout sous-système de  $\mathcal{S}$ , on va établir que la dépendance de  $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$  vis-à-vis de  $\underline{n}$  est linéaire. La preuve de ce résultat, connu sous le nom de lemme du tétraèdre, se construit en deux temps.

1. On considère un sous-système  $\Omega'_t$  de forme cylindrique. Ses génératrices, de longueur  $\ell$ , sont colinéaires à un vecteur unitaire  $\underline{N}$ . Ses faces inférieure et supérieure (dans le sens donné par  $\underline{N}$ ), notées  $S^-$  et  $S^+$ , ont pour normales extérieures  $-\underline{N}$  et  $+\underline{N}$  respectivement. On note encore  $S^L$  la surface latérale de ce cylindre (figure 5.2). L'identité (5.6) donne

$$\int_{S^-} \underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) dS_t + \int_{S^+} \underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) dS_t + \int_{S^L} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.7)$$

On fait alors tendre la valeur de  $\ell$  vers 0. Les valeurs prises par  $|\rho(\underline{\gamma} - \underline{F})|$  dans

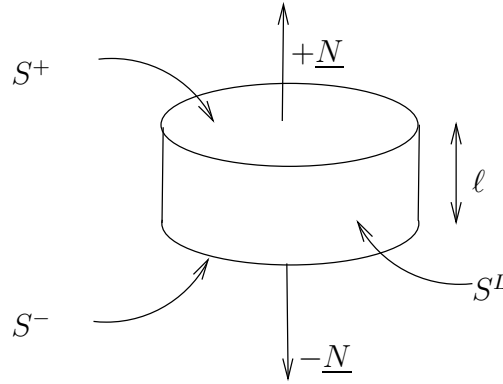


FIG. 5.2 – application de (5.6) à un cylindre élémentaire

$\Omega_t$  étant bornées, la limite du membre de droite est nulle. Il en est de même de la contribution de la face latérale au membre de gauche. Enfin, les faces  $S^+$  et  $S^-$  tendent l'une vers l'autre. On obtient donc

$$\int_{S^-} \underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) + \underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) dS_t = 0 \quad (5.8)$$

Comme ce résultat a lieu pour un choix arbitraire de la surface  $S^-$ , il entraîne la nullité de la quantité intégrée :

$$\underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) = -\underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) \quad (5.9)$$

2.  $\Omega'_t$  est à présent un tétraèdre. Trois de ses faces, notées  $S^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont orthogonales deux à deux. La normale extérieure à  $\Omega'_t$  sur  $S^i$  est le vecteur  $-\underline{e}_i$ . Le point d'intersection des  $S^i$  est situé en  $M$  de coordonnées  $\underline{x}$ . La normale extérieure à la quatrième face, notée  $S^n$ , est le vecteur unitaire  $\underline{n}$ .  $M'$  désigne la projection orthogonale du point  $M$  sur  $S^n$ . Enfin, on note  $A^i$  (resp.  $A^n$ ) l'aire de la face  $S^i$  (resp.  $S^n$ ) (figure 5.3). Selon une propriété classique du tétraèdre, on a :

$$\underline{n} = n_i \underline{e}_i \quad \text{avec} \quad n_i = \frac{A^i}{A^n} \quad (5.10)$$

Ecrivons à présent l'identité (5.6) pour ce tétraèdre. En utilisant (5.9), on obtient :

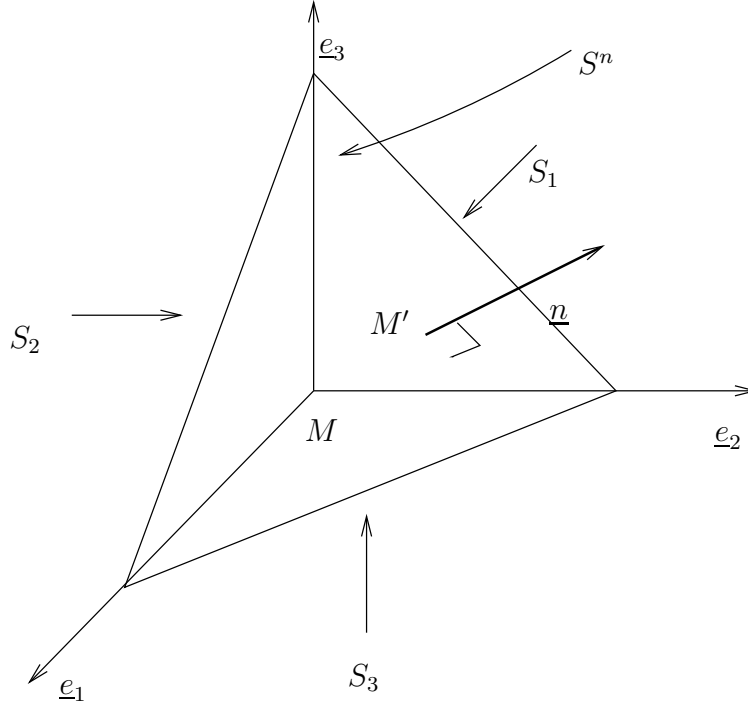


FIG. 5.3 – application de (5.6) à un tétraèdre

$$-\int_{S^i} \underline{T}(\underline{x}', \underline{e}_i, t) + \int_{S^n} \underline{T}(\underline{x}', \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.11)$$

avec sommation sur l'indice  $i$ . Faisons maintenant tendre la hauteur  $MM'$  vers 0. Pour les mêmes raisons que précédemment, le membre de droite de (5.11) tend vers 0, de sorte que l'on trouve :

$$-A^i \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_i, t) + A^n \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = 0 \quad (5.12)$$

Il reste à utiliser (5.10) dans (5.12) pour obtenir la preuve du résultat de linéarité annoncé :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = n_i \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_i, t) \quad (5.13)$$

## 5.3 Tenseur des contraintes de Cauchy

### 5.3.1 Définition et interprétation physique

A  $t$  et  $\underline{x}$  fixés, l'application  $\underline{n} \rightarrow \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$  est la restriction à la sphère unité d'un endomorphisme. Ce dernier est associé à un tenseur d'ordre 2 que l'on note  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ . Il porte le nom de *tenseur des contraintes de Cauchy*. Par construction, il possède la propriété suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) \quad (5.14)$$

Le groupement  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  porte le nom de *vecteur-contrainte*.

La relation (5.14) contient la signification physique du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ . En appliquant ce dernier au vecteur  $\underline{n}$ , on obtient la force surfacique qui s'exerce sur un élément de surface matériel  $\underline{n}dS$  de la part de la matière en contact avec ce dernier. La caractérisation de l'application  $\underline{n} \rightarrow \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$  est ainsi ramenée à la donnée des 9 composantes du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ .

En choisissant  $\underline{n} = \underline{e}_j$  dans (5.14), on obtient (en omettant les arguments  $\underline{x}$  et  $t$ ) :

$$\underline{T}(\underline{e}_j) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_j = \sigma_{ij} \underline{e}_i \quad (5.15)$$

Cette relation permet d'interpréter  $\sigma_{ij}$  comme la composante selon  $\underline{e}_i$  de la force surfacique agissant sur un élément de surface matériel de normale  $\underline{e}_j$  (figure 5.4).

Le champ  $\underline{x} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  permet de calculer les efforts de contact  $\underline{T}$  s'exerçant sur la frontière d'un sous-système quelconque de  $\Omega_t$ . Il constitue à ce titre une représentation des efforts intérieurs dans le système.

Par ailleurs, si l'on considère le système entier, la force surfacique  $\underline{T}$  de (5.14) devient un effort extérieur. La relation (5.14) écrite sur la frontière du système apparaît maintenant comme une condition aux limites sur le vecteur-contrainte.

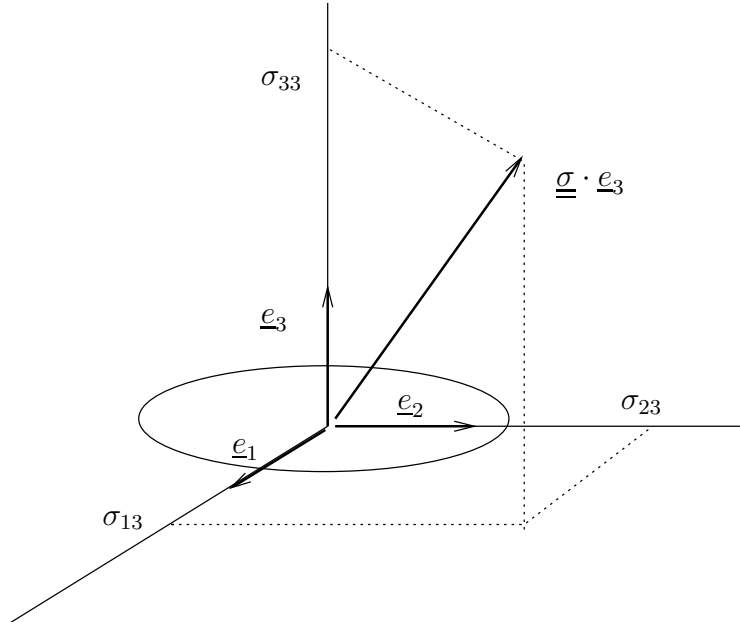


FIG. 5.4 – interprétation de  $\sigma_{ij}$

### 5.3.2 Equation d'équilibre

On reporte dans (5.6) l'expression (5.14) de la force surfacique en fonction du tenseur des contraintes :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho (\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.16)$$

En appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche de (5.16), on obtient :

$$\int_{\Omega'_t} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{F} - \underline{\gamma}) d\Omega_t = 0 \quad (5.17)$$

La validité de (5.17) pour tout sous-domaine  $\Omega'_t$  de  $\Omega_t$  implique la nullité de la quantité intégrée : on obtient ainsi l'équation de la dynamique des milieux continus :

$$(\Omega_t) \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{F} - \underline{\gamma}) = 0 \quad (5.18)$$

L'équation (5.18) a le même contenu physique que l'identité (5.6) dont elle est issue : elle exprime de façon locale le postulat de la loi fondamentale concernant les forces.

### 5.3.3 Symétrie du tenseur des contraintes

Confrontons les deux expressions du moment des efforts extérieurs, à savoir (5.3) et (5.5), qui proviennent respectivement de la loi fondamentale et de notre modélisation des efforts extérieurs. En utilisant (5.18), nous obtenons :

$$\int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \text{div} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{x} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t \quad (5.19)$$

Ecrite en projection, par exemple sur  $\underline{e}_3$ , cette relation donne :

$$\int_{\Omega'_t} \left( x_1 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} - x_2 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \right) d\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_t} (x_1 \sigma_{2j} n_j - x_2 \sigma_{1j} n_j) dS_t \quad (5.20)$$

En intégrant par parties dans le membre de gauche, on trouve

$$\int_{\Omega'_t} \left( x_1 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} - x_2 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \right) d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} (x_1 \sigma_{2j} n_j - x_2 \sigma_{1j} n_j) dS_t \quad (5.21)$$

En comparant (5.20) et (5.21), on obtient finalement

$$\int_{\Omega'_t} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d\Omega_t = 0 \quad (5.22)$$

L'égalité  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  résulte du fait que cette égalité a lieu pour tout sous-système de  $\Omega_t$ . On trouve de même  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  et  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$  en projetant (5.19) sur  $\underline{e}_2$  et  $\underline{e}_1$  respectivement. Le tenseur des contraintes de Cauchy est donc symétrique.



### 3.3.4 Cercles de Mohr

On considère le vecteur-contrainte  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  agissant sur l'élément de surface  $\underline{n}dS$ . Il est la somme d'une composante colinéaire à la normale  $\underline{n}$  et de sa projection sur le plan contenant l'élément de surface :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_n \underline{n} + \underline{\tau} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$$

Le scalaire  $\sigma_n$  qui définit la composante selon la normale du vecteur-contrainte porte à ce titre le nom de contrainte normale. Son signe indique si l'élément de surface est soumis à une traction ( $\sigma_n > 0$ ) ou une compression ( $\sigma_n < 0$ ). De même, le vecteur  $\underline{\tau}$  est appelé contrainte tangentielle. Notons que cette dénomination désigne également souvent sa norme  $\tau = |\underline{\tau}|$ . Le plan de Mohr est le plan  $(\sigma_n, \tau)$ .

Il offre un mode de représentation commode du vecteur-contrainte (figure 5.5).

Plus précisément, notons (dans cet ordre)  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  les valeurs principales du tenseur des contraintes.  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_3$ ) est la contrainte principale majeure (resp. mineure).  $\sigma_2$  est la contrainte intermédiaire. Le but de cette section est d'établir que le vecteur-contrainte pointe à l'intérieur d'une région délimitée par les trois cercles de la figure 5.5.

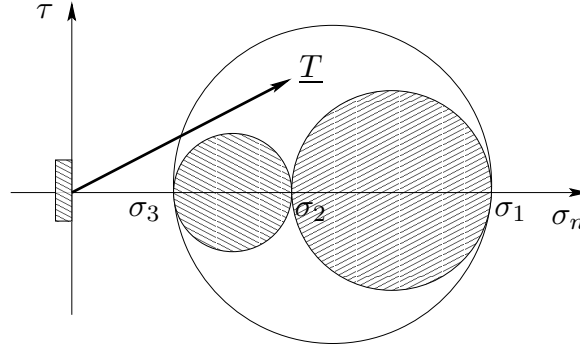


FIGURE 5.5: Cercles de Mohr

On désigne ci-dessous par  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{E}_2$ , et  $\underline{E}_3$  les directions principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 + \sigma_2 \underline{E}_2 \otimes \underline{E}_2 + \sigma_3 \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3$$

Si le vecteur unitaire  $\underline{n}$  se décompose dans cette base selon

$$\underline{n} = \alpha_1 \underline{E}_1 + \alpha_2 \underline{E}_2 + \alpha_3 \underline{E}_3$$

le vecteur-contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_1 \alpha_1 \underline{E}_1 + \sigma_2 \alpha_2 \underline{E}_2 + \sigma_3 \alpha_3 \underline{E}_3$$

et donc

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2$$

Par ailleurs, la contrainte normale  $\sigma_n$  est donnée par :

$$\sigma_n = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\pi} = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2$$

Enfin, la propriété  $|\boldsymbol{\pi}| = 1$  fournit :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

Rassemblons ces trois relations scalaires dans une identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \sigma_n^2 + \tau^2 \end{pmatrix}$$

L'inversion de la matrice de Vandermonde du membre de gauche permet d'exprimer les  $\alpha_i^2$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) en fonction de  $\sigma_n$ ,  $\tau$  et des valeurs principales des contraintes.

$$\alpha_i^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_j)(\sigma_n - \sigma_k)}{(\sigma_i - \sigma_j)(\sigma_i - \sigma_k)} \geq 0$$

Dans cette expression,  $i$ ,  $j$  et  $k$  désignent des entiers distincts de  $\{1, 2, 3\}$ . Pour  $i = 1$ , le dénominateur est positif<sup>1</sup>. On en déduit que

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \quad (5.23)$$

Il en va de même pour  $i = 3$ , d'où :

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \quad (5.24)$$

En revanche, l'inégalité est inversée pour  $i = 2$  :

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0 \quad (5.25)$$

Or, il est facile de vérifier que

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_i)(\sigma_n - \sigma_j) = 0$$

est l'équation du cercle centré sur l'axe des abscisses, passant par les points  $\sigma_n = \sigma_i$  et  $\sigma_n = \sigma_j$  de cet axe. Il résulte donc des équations (5.23), (5.24) et (5.25) que le vecteur contrainte pointe à l'extérieur des deux petits cercles de la figure 5.5 et à l'intérieur du grand cercle.

---

1. Puisque l'on a fixé  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .