

MU4ME14-Solides : Modélisation des Solides Déformables

TD 1 - Thermoélasticité**Récipient sphérique sous pression et sous chargement thermique**

On se propose d'étudier le comportement d'un récipient sphérique sous l'effet d'une pression interne et d'un gradient de température induit par la présence d'un gaz liquifié à l'intérieur. En supposant l'hypothèse de petites perturbations valide (HPP), cette étude sera réalisée en deux étapes : d'abord, l'application de la pression interne (étude purement élastique), ensuite l'application du chargement thermique (étude thermoélastique), et finalement la combinaison des deux chargements (superposition des effets).

On note R_i et R_e les rayons interne et externe du récipient, respectivement. Le matériau constitutif du récipient est considéré élastique linéaire et isotrope de constantes de Lamé λ et μ et on désigne par α le coefficient de dilatation thermique linéique.

On fixe le repère d'axes $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, ayant pour origine le centre de la sphère, et on choisit de travailler en coordonnées sphériques r, θ, φ (base locale $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$), compte tenu de la symétrie radiale du problème.

Partie 1 : application de la pression interne

Le récipient est en contact avec l'air atmosphérique à l'extérieur (pression de référence $p_e = 0$) et un gaz est contenu dans la cavité sphérique, soumis à une pression p_i .

1. Écrire les équations et les conditions aux limites pour le problème d'élastostatique ainsi décrit.
2. Après avoir justifié le choix d'un champ de déplacements radial du type $\underline{u}^{\text{pr}} = u^{\text{pr}}(r)\underline{e}_r$ sur la base des symétries du problème, exprimer en fonction de u^{pr} les composantes du tenseur symétrique des déformations $\underline{\epsilon}$.
3. Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en fonction du déplacement u^{pr} , et écrire ensuite l'équation que les composantes de contraintes doivent respecter afin de vérifier l'équilibre.
4. Montrer que la solution en déplacement est de la forme : $u^{\text{pr}}(r) = ar + \frac{b}{r^2}$ et déterminer les expressions des constantes a et b .
5. Calculer les contraintes et les déformations à partir de la solution en déplacement.

Partie 2 : application d'une élévation de température uniforme

À l'état naturel, le récipient est en équilibre thermique avec le milieu ambiant. La température correspondante sera notée T_0 . On applique ensuite au récipient un changement en température constant et uniforme : $\Delta T = T^* - T_0$.

1. Écrire les équations et les conditions limites du problème de thermoélasticité ainsi défini.
2. Calculer les déformations thermiques $\underline{\epsilon}^{\text{th}}$ ainsi que les "contraintes d'origine thermique" $\underline{\sigma}^{\text{th}}$ associées à ce chargement.
3. Calculer les contraintes $\underline{\sigma}$ occasionnées par le saut de température appliqué au récipient. Pour cela, on pourra considérer le champ de déplacements d'origine thermique de la forme : $\underline{u}^{\Delta T} = u^{\Delta T}(r)\underline{e}_r$ en raison de la symétrie du problème.

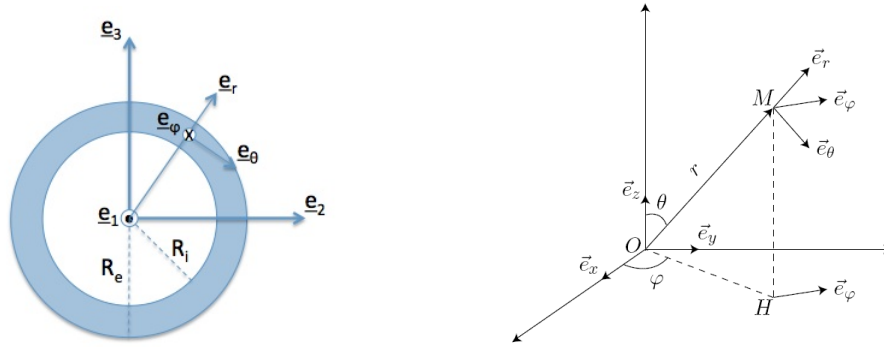
Montrer qu'un tel chargement thermique n'induit pas de contraintes dans le récipient.

Partie 3 : application d'un gradient de température dans l'épaisseur

On considère finalement le récipient en contact avec l'air à la température ambiante ($T = T_0$ sur la surface extérieure), et rempli d'un gaz liquifié ($T = T_1$ sur la surface interne avec $(T_1 < T_0)$). Dans le but de simplifier les calculs, on suppose que T_0 et T_1 sont respectivement les températures des parois externe et interne du récipient à l'équilibre thermique.

1. Écrire les équations et les conditions limites du problème de thermoélasticité ainsi défini.
2. Montrer qu'un champ de température de la forme : $T(r) = A + \frac{B}{r}$ est solution du problème thermique ainsi défini pour le récipient sphérique. Déterminer les expressions des constantes A et B .
3. Calculer les déformations thermiques $\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}}$ ainsi que les "contraintes d'origine thermiques" $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{th}}$.
4. Calculer les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ occasionnées par le gradient de température appliqué au récipient. Pour cela, on pourra considérer le champ de déplacements d'origine thermique de la forme : $\underline{\underline{u}}^{\text{grad}} = u^{\text{grad}}(r)\underline{\underline{e}}_r$ en raison de la symétrie du problème.

Partie 4 : application de la pression et d'un gradient de température En tenant compte des linéarités du problème, calculer le champ de déplacements et l'état de contraintes dans le récipient soumis simultanément au chargement de pression décrit dans la partie 1, et au gradient de température décrit dans la partie 3.



Représentation schématique du réservoir - Système de coordonnées sphériques

Formulaire en coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

$$\underline{\underline{e}}_r = \sin \theta \cos \varphi \underline{\underline{e}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \underline{\underline{e}}_2 + \cos \theta \underline{\underline{e}}_3, \quad \underline{\underline{e}}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \underline{\underline{e}}_1 + \cos \theta \sin \varphi \underline{\underline{e}}_2 - \sin \theta \underline{\underline{e}}_3, \quad \underline{\underline{e}}_\varphi = -\sin \varphi \underline{\underline{e}}_1 + \cos \varphi \underline{\underline{e}}_2,$$

$$\text{Gradient d'une fonction scalaire : } \underline{\underline{\text{grad}}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{\underline{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{\underline{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{\underline{e}}_\varphi$$

$$\text{Laplacien d'une fonction scalaire : } \Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{Divergence d'un vecteur : } \text{div } \underline{\underline{u}}(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \tan \theta}$$

Rotationnel d'un vecteur :

$$\underline{\underline{\text{rot}}} \underline{\underline{u}}(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r \tan \theta} \right) \underline{\underline{e}}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) \underline{\underline{e}}_\theta + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \underline{\underline{e}}_\varphi$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{v}})(r, \theta, \varphi)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{v}})(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r \tan \theta} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \tan \theta} + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$

Divergence d'un tenseur symétrique :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{e}}_r = \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2 A_{rr} - A_{\theta\theta} - A_{\varphi\varphi}) + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_{r\theta},$$

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{e}}_\theta = \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3 A_{r\theta}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} (A_{\theta\theta} - A_{\varphi\varphi}),$$

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{e}}_\varphi = \frac{\partial A_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3 A_{r\varphi}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} 2 A_{\theta\varphi}.$$