Déformations

Pré-requis incontournables (à travailler en autonomie)
- *Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - début du chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.*
- *Savoir manipuler produit, transposée et inverse de matrice, calcul de valeurs propres et vecteurs propres.*

Exercice 1 d'auto-évaluation : Soit la matrice $[A] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. *Former la transposée* ${}^T[A]$ *de la matrice* $[A]$, *les produits matriciels* $[A]\,({}^T[A])$ *et* $({}^T[A])\,[A]$.
b. *Calculer l'inverse de la matrice* $[A]$.
c. *Calculer les valeurs propres de la matrice* $[A]$ *et les vecteurs propres associés..*
d. *Calculer les composantes du tenseur* $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}$ *gradient du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = k\,x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + (x_3 + kx_1^2)\,\underline{e}_3$.

Exercice 2 d'auto-évaluation : Soit la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X}, t) = (X_1 + \alpha t\,X_1)\,\underline{e}_1 + X_2\,\underline{e}_2 + X_3\,\underline{e}_3$ *où* α *est une constante strictement positive.*

a. *Calculer les composantes du tenseur gradient de transformation* $\underline{\underline{F}}$.
b. *La transformation est-elle bien définie ? est-elle homogène ?*
c. *Former la transformation inverse* $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$.
d. *Calculer les composantes du tenseur* $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$.
e. *Déterminer les positions des transformées des points* $A_0 : (0,1,1)$, $B_0 : (1,0,1)$ *et* $C_0 : (1,1,1)$, *ainsi que des transformés des segments* $[OA_0]$, $[OB_0]$, $[A_0C_0]$ *Les représenter.*

Exercice Le mouvement d'un milieu continu est défini en tout point de coordonnées $\underline{x}$ par le champ de vitesses en description eulérienne suivant :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \alpha\,x_2\,\underline{e}_1,$$

où α est une constante positive donnée et $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ le repère orthonormé associé au système de coordonnées cartésiennes.

1 Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$, la particule occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Donner l'équation de la trajectoire de la particule $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

2 Déterminer les composantes du tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$.

La transformation est-elle homogène ?

Déterminer les composantes du tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}$, du tenseur de déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ et du tenseur $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$.

3 On considère à l'instant $t = 0$ le carré $OA_0B_0C_0$ de coté η tel que $\underline{OA_0} = \eta\,\underline{e}_1$ et $\underline{OC_0} = \eta\,\underline{e}_2$.

Déterminer le transformé de ce carré à l'instant $t = T$.

Calculer la dilatation de longueur de la diagonale OB_0 en exploitant l'expression et les propriétés du tenseur de dilatation. Vérifier le résultat géométriquement.

En suivant une démarche analogue, calculer l'angle entre les vecteurs $\underline{OA}$ et $\underline{OC}$ transformés à l'instant $t = T$ de $\underline{OA_0}$ et $\underline{OC_0}$. Vérifier le résultat géométriquement.

4 On considère à l'instant $t = 0$ le cube dont une face est le carré $OA_0B_0C_0$.

Quel est le transformé de ce cube à l'instant $t = T$? Déterminer la variation de volume de ce cube entre l'état déformé et non déformé en exploitant la formule de transport d'un élément de volume.

5 Etablir la formule suivante de transport d'un élément de surface orienté dS_0 de normale $\underline{n}_0$ de la configuration initiale en un élément dS de normale $\underline{n}$ de la configuration courante :

$$\underline{n}\,dS = det(\underline{\underline{F}})\ {}^T\underline{\underline{G}}\,\underline{n}_0\,dS_0.$$

On formera le produit vectoriel $\underline{dx} \wedge \underline{\delta x}$ où $\underline{dx}$ et $\underline{\delta x}$ sont des éléments matériels infinitésimaux issus du point M et on exploitera l'expression indicielle suivante du déterminant d'un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 :

$$\epsilon_{ijk}\,det(\underline{\underline{A}}) = \epsilon_{pqr}\,A_{ip}\,A_{jq}\,A_{kr} = \epsilon_{pqr}\,A_{pi}\,A_{qj}\,A_{rk}.$$

En déduire l'aire du carré $OABC$ déformé de $OA_0B_0C_0$. Vérifier le résultat géométriquement.