Exercice 1 : Extraction d'un bouchon

Un bouchon ($\mathcal{D}$) cylindrique de révolution, d'axe $O\underline{e}_z$, de rayon intérieur a, de rayon extérieur b ($b > a$), de longueur ℓ, limité par deux sections droites S_- et S_+ d'équations respectives $z = -\ell/2$ et $z = \ell/2$, est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ. Ce bouchon est collé sur la surface S_b d'équation $r = b$ à un tube rigide fixe. Les sections droites S_- et S_+ sont soumises à des densités d'efforts surfaciques telles que le torseur des efforts sur chacune des deux couronnes soit nul. On cherche à extraire le bouchon en exerçant sur la surface latérale intérieure S a d'équation $r = a$ une densité surfacique d'effort $\mathcal{F}/(2\pi a\ell)\underline{e}_z$ où $\mathcal{F}$ est une constante positive donnée. Les forces volumiques sont négligées.

1. Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'équilibre du bouchon.

Les efforts volumiques étant négligeables, l'équation d'équilibre local s'écrit

$$\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \underline{0}, \text{ en tout point } \underline{x}.$$

La loi de comportement est la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \lambda \text{ Trace } \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x})\underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}), \text{ en tout point } \underline{x},$$

où le tenseur des déformations a pour expression

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{\xi}(\underline{x}) + {}^T\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{\xi}(\underline{x})\right) \text{ en tout point } \underline{x}.$$

Sur la surface $r = b$, le bouchon est parfaitement collé à un tube rigide fixe, les trois composantes du vecteur déplacement sont donc nulles :

$$\underline{\zeta}(r = b, \theta, z) = \underline{0}, \text{ pour tout } \theta \in [0, 2\,\pi[, \; z \in [-\,l/2, +\,l/2].$$

Les extrémités du bouchon sont soumises à des densités surfaciques d'efforts tels que les torseurs associés soient nuls, soit

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}\,(r, \theta, z = +l/2)\,.\,\underline{e}_3 = \underline{F}_{+l/2}, & \text{avec } \underline{F}_{+l/2} \text{ inconnu,} \\ \underline{\underline{\sigma}}\,(r, \theta, z = -l/2)\,.\,(-\underline{e}_3) = \underline{F}_{-l/2}, & \text{avec } \underline{F}_{-l/2} \text{ inconnu,} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{S+} \underline{F}_{+l/2}\,\mathrm{d}S = \underline{0}, \\ \displaystyle\iint_{S+} \underline{OM} \wedge \underline{F}_{+l/2}\,\mathrm{d}S = \underline{0}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \displaystyle\iint_{S-} \underline{F}_{-l/2}\,\mathrm{d}S = \underline{0}, \\ \displaystyle\iint_{S-} \underline{OM} \wedge \underline{F}_{-l/2}\,\mathrm{d}S = \underline{0}. \end{cases}$$

Enfin, sur la surface intérieure $r = a$, la densité surfacique est connue et les conditions aux limites sont donc

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(r = a, \theta, z)(-\underline{e}_r) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi a\ell}\underline{e}_z, \qquad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\,\pi[, \; z \in [-\,l/2, +\,l/2].$$

2. On recherche un champ de déplacements solution de ce problème de la forme $\underline{\xi}(r, \theta, z) = \zeta(r)\,\underline{e}_z$. Expliciter l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction $\zeta(r)$. Intégrer cette équation.

Pour que le champ de déplacement proposé puisse conduire à une solution du problème, il doit nécessairement conduire à un champ de contrainte qui vérifie l'équilibre. Cela sera le cas s'il satisfait l'équation de Lamé-Navier qui s'écrit en l'absence d'effort volumique sous la forme (cf. exercice tube cylindrique sous pression) :

$$(\lambda + \mu)\;\underline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\underline{\xi}(\underline{x})) + \mu\,\underline{\Delta}\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{0}, \text{ en tout point } \underline{x}.$$

En se reportant au formulaire en coordonnées cylindriques, compte tenu de la forme supposée $\underline{\xi}(r, \theta, z) = \zeta(r)\,\underline{e}_z$, on obtient

$$\operatorname{div}\underline{\xi}(\underline{x}) \;=\; 0 \text{ en tout point } \underline{x}.$$

et donc

$$\underline{\Delta}\underline{\xi}(\underline{x}) \;=\; \underline{0}, \text{ en tout point } \underline{x}.$$

Puisque ξ_r et ξ_θ sont nuls et ξ_z dépend seulement de r, cette équation vectorielle se réduit donc à (voir formulaire) $\Delta\xi_z = 0$, soit :

$$\Delta\xi_z = \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\,\xi}{dr}\right) = 0, \text{ pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

On a donc

$$r\frac{\partial\xi}{\partial r} = A, \text{ pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

ou encore

$$\xi(r) = A\,\ln(r) + B, \text{ pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

où A et B sont des constantes inconnues à ce stade.

3. Déterminer un couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ solution du problème.

Pour que le champ $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ soit solution, il doit nécessairement vérifier les conditions aux limites cinématiques du problème. Le déplacement étant nul en $r = b$, on a obligatoirement :

$$A\ln(b) + B = 0.$$

d'où

$$\xi(r) = A\ln\left(\frac{r}{b}\right) \text{ pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

Le champ de déplacement obtenu est cinématiquement admissible.
Il faut maintenant s'assurer que le champ de contraintes associé vérifie bien les conditions aux limites en efforts.
Pour cela, on calcule tout d'abord le champ de déformation en exploitant l'expression en cylindriques du tenseur gradient du champ de dacement. La seule composante non nulle est ε_{rz}qui vaut

$$\varepsilon_{rz}(r) = \varepsilon_{rz}(r) = \frac{A}{2r}, \quad \text{pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

On obtient ensuite l'expression du tenseur des contraintes par la loi de Hooke. La seule composante non nulle est σ_{rz} qui vaut

$$\sigma_{rz}(r) = \sigma_{rz}(r) = \mu\,\frac{A}{r}, \quad \text{pour tout } r \in [\,a,\, b\,].$$

La condition limite en effort en $r = a$ conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma_{rr}(r = a, \theta, z) = 0, \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\,\pi[,\ z \in]-l/2, +l/2[, \\ -\sigma_{r\theta}(r = a, \theta, z) = 0, \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\,\pi[,\ z \in]-l/2, +l/2[, \\ -\sigma_{rz}(r = a, \theta, z) = \dfrac{\mathcal{F}}{2\pi a\ell}, \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\,\pi[,\ z \in]-l/2, +l/2[. \end{cases}$$

Les deux premières relations sont automatiquement vérifiées compte tenu de l'expression du tenseur des contraintes et la troisième conduit à la relation

$$-\mu\,\frac{A}{a} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi a\ell}, \quad \text{soit} \quad A = -\frac{\mathcal{F}}{2\pi\mu\ell}.$$

On a donc obtenu

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\mathcal{F}}{2\pi r\ell}\left(\vec{e}_r\otimes\vec{e}_z + \vec{e}_z\otimes\vec{e}_z\right).$$

Ce champ de contrainte est solution du problème s'il vérifie les conditions aux extrémités du bouchon $z = \pm l/2$, toutes les autres conditions aux limites ayant déjà été vérifiées par ailleurs.
Or, le torseur des efforts extérieurs agissant sur les surfaces $z = \pm l/2$ a pour expression

$$\begin{cases} \underline{R} = \displaystyle\int_a^b\!\!\int_0^{2\pi} \sigma_{rz}(r, \theta, z = \pm l/2)\,\underline{e}_r\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathcal{F}}{2\pi\ell}\left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\underline{e}_r\,\mathrm{d}\theta\right) = \underline{0}, \\ \underline{M}(O) = \displaystyle\int_a^b\!\!\int_0^{2\pi} (r\underline{e}_r \pm l/2\underline{e}_z)\wedge\sigma_{rz}(r, \theta, z = \pm l/2)\,\underline{e}_r\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pm l/2\,\frac{\mathcal{F}}{2\pi\ell}\left(\int_a^b \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\underline{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \underline{0}. \end{cases}$$

De sorte que le couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ obtenu avec

$$\underline{\xi} = -\frac{F}{2\pi\mu\ell}\ln\left(\frac{r}{b}\right)\underline{e}_z, \quad \underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\mathcal{F}}{2\pi r\ell}\left(\vec{e}_r\otimes\vec{e}_z + \vec{e}_z\otimes\vec{e}_z\right).$$

est bien solution du problème posé.

4. En quels points du bouchon la contrainte tangentielle maximale τ_{max} atteint-elle sa plus grande valeur ?

Les contraintes principales sont solutions de l'équation

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}\right) = 0,$$

d'où

$$-\sigma\left(\sigma - \frac{\mathcal{F}}{2\pi r\ell}\right)\left(\sigma + \frac{\mathcal{F}}{2\pi r\ell}\right) = 0.$$

Les contraintes principales et les directions principales associées ont donc pour expressions respectives

$$\begin{cases} \sigma_I = -\dfrac{F}{2\pi r\ell}, \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{II} = \dfrac{F}{2\pi r\ell}, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \underline{e}_I = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_r + \underline{e}_z), \\ \underline{e}_{II} = \underline{e}_\theta, \\ \underline{e}_{II} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_r - \underline{e}_z). \end{cases}$$

La contrainte tangentielle maximale ayant pour expression

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(|\sigma_{III} - \sigma_I|) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi r\ell},$$

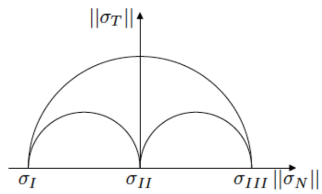
sa valeur maximale est atteinte en $r = a$ sur la surface intérieure et vaut

$$\max\left(\tau_{max}\right) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi a\ell}.$$

Si le matériau constitutif est sensible au cisaillement, c'est donc en $r = a$ que l'endommagement, la fragilisation de la pièce s'initiera. Les plans de cisaillement maximums ont pour normale les bissectrices des vecteurs propres extrêmes, soit

$$\underline{n} = \underline{e}_r \text{ et } \underline{n} = \underline{e}_z$$

ou encore les plans engendrés par $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ et $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$.



5. On suppose que la condition d'adhésion le long de S_b est vérifiée tant que :

$$\tau_{max} < \tau^\star \quad \textbf{en} \quad r = b \quad \textbf{avec} \quad \tau^\star \quad \textbf{constante positive donnée}$$

(Le bouchon glisse le long de cette paroi dès que l'égalité est atteinte).
Calculer alors l'effort minimum F_{min} que l'on doit exercer pour pouvoir extraire le bouchon.

La contrainte tangentielle maximale en $r = b$ vaut $\tau_{max}(r = b) = \dfrac{\mathcal{F}}{2\pi b\ell}$. Le bouchon glisse le long de la paroi $r = b$ dès que l'égalité est atteinte $\tau_{max}(r = b) = \tau^\star$.
De sorte que l'effort minimum $\mathcal{F}_{min}$ à appliquer sur le bouchon pour l'extraire est :

$$F_{min} = 2\pi b\ell\tau^\star.$$