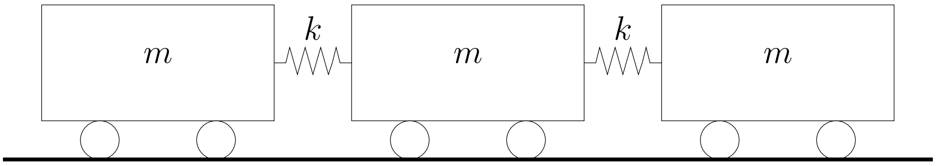
On étudie le modèle conservatif décrit par la figure suivante. Dans ce problème, les déplacements sont seulement horizontaux et la pesanteur n'est pas prise en compte. On note x_1, x_2, x_3 les positions respectives des 3 mobiles par rapport à leur position d'équilibre statique.



Régime d'oscillations libres

1. Écrire les énergies cinétique T et potentielle U.

Solution: L'énergie potentielle a pour expression

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 - kx_1x_2 - kx_2x_3.$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2.$$

2. Identifier les matrices de raideur $\mathbf{K}$ et d'inertie $\mathbf{M}$.

Solution: Ces deux expressions peuvent être mises sous les formes respectives

$$U = \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{K}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\mathbf{M}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix},$$

où les matrices d'inertie $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$ ont pour expression

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les pulsations propres du système.

Solution: Des matrices déterminées à la question 2), le système d'équation suivant est obtenu :

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \mathbf{K}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} e^{j\omega t}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc obtenues par l'annulation du déterminant de la matrice

$$\begin{aligned} \det(\omega) &= (k - m\omega^2)\left[(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2\right] - k^2(k - m\omega^2) \\ &= (k - m\omega^2)\left[(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - 2k^2\right] \\ &= -m\omega^2(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2). \end{aligned}$$

Ainsi, les trois pulsations propres ont pour expression

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \\ \omega_3 = \sqrt{3\dfrac{k}{m}}. \end{cases}$$

4. Calculer les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$. Représenter et discuter leur forme.

Solution: On cherche les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ tels que $\mathbf{X}_i e^{j\omega_i t}$ soit solution du problème aux valeurs propres. Le vecteur propre $\mathbf{X}_i = {}^t(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i})$ se calcule pour chaque valeur propre à partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} k - m\omega_i^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega_i^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_2

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_3

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{13} \\ X_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer la matrice modale $\mathbf{X}$.

Solution: La matrice modale a pour expression

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. En passant par la base modale, déterminer la forme générale des mouvements libres des 3 wagons

Solution: L'équation matricielle du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

En passant dans la base modale, on arrive au système découplé

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Delta p} = \mathbf{0}$$

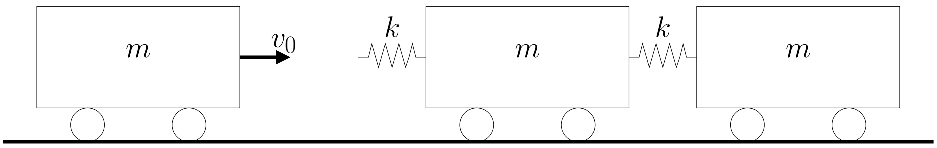
Qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1(t) = 0 \\ \ddot{p}_2(t) + \omega_2^2 p_2(t) = 0 \\ \ddot{p}_3(t) + \omega_3^2 p_3(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(t) = A_{11}t + A_{12} \\ p_2(t) = A_{21}\cos(\omega_2 t) + A_{22}\sin(\omega_2 t) \\ p_3(t) = A_{31}\cos(\omega_3 t) + A_{32}\sin(\omega_3 t) \end{cases}$$

Et le mouvement libre de chacun des 3 wagons est obtenu par $\mathbf{q} = \mathbf{Xp}$:

$$\begin{cases} q_1(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \\ q_2(t) = p_1(t) - 2p_3(t) \\ q_3(t) = p_1(t) - p_2(t) + p_3(t) \end{cases}$$

7. La voiture 1 est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $v_0 = 1$ m/s et roule vers les autres voitures immobiles. À l'instant $t = 0$, le contact se produit et les trois voitures restent accouplées.



Donner les 6 équations qui permettent d'obtenir les valeurs numériques des amplitudes des modes.

Solution: Les conditions initiales sur le déplacement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnent directement $A_{12} = A_{22} = A_{32} = 0$. Les conditions initiales sur la vitesse,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ \omega_2 A_{21} \\ \omega_3 A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

fournissent le système suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} + \omega_2 A_{21} + \omega_3 A_{31} \\ A_{11} - 2\omega_3 A_{31} \\ A_{11} - \omega_2 A_{21} + \omega_3 A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{v_0}{3}, \\ A_{21} = \dfrac{v_0}{2\omega_2}, \\ A_{31} = \dfrac{v_0}{6\omega_3}. \end{cases}$$

Régime d'oscillations forcées

8. Le train est désormais en roulement à la vitesse constante v. L'un des essieux de la voiture deux est grippé de telle sorte qu'il en résulte une force harmonique longitudinale d'amplitude F_2 et de pulsation Ω telle que $\Omega = v/R$, où R est le rayon des roues. Écrire le système matriciel qui détermine les amplitudes $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ des mouvements des 3 voitures.

Solution: La puissance a pour expression,

$$P = \vec{F}_2.\vec{v}_2 = F_2 \sin(\Omega t)\dot{x}_2,$$

d'où

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice principale d'inertie a pour expression

$$\mathbf{p} = \mathbf{X^t M X} = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 6m \end{pmatrix}.$$

La matrice modale de raideur a pour expression

$$\mathbf{K_p} = \mathbf{X^t K X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 18k \end{pmatrix}.$$

La matrice des pulsations propres a pour expression

$$\Delta = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur **p** a donc pour expression

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{p}^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\Omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{3m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega^2} \\ 0 \\ \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le vecteur **q** a donc pour expression

$$\mathbf{q} = \mathbf{X p} = -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{3m} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega^2} \\ 0 \\ \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} = -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{m\Omega^2(3\omega_0^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \omega_0^2 \\ \omega_0^2 - \Omega^2 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

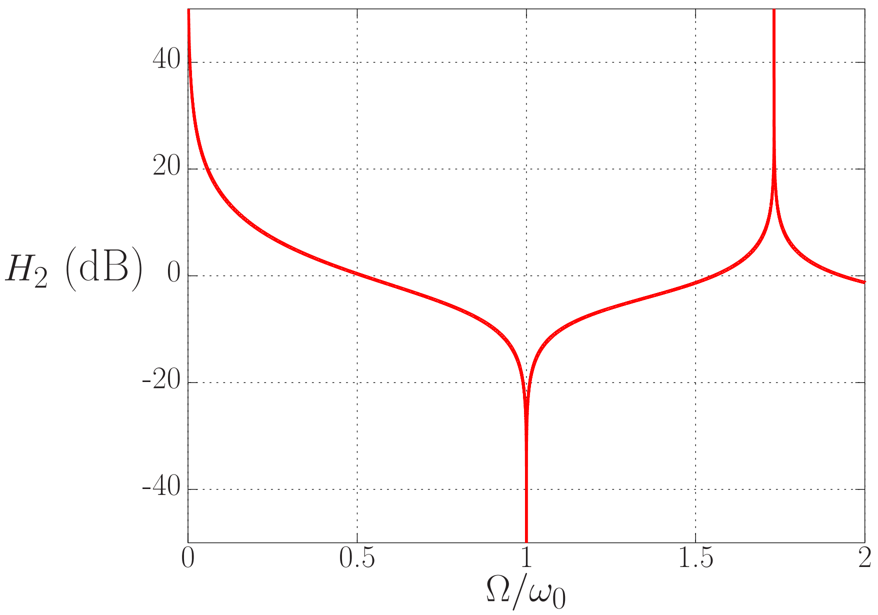
9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_2 = X_2/F_2$ en fonction du paramètre sans dimension $\beta = \Omega/\omega_0$. En déduire deux vitesses de roulement caractéristiques du mouvement de ②.

Solution: La fonction de transfert est donc :

$$H_2(\Omega) = \frac{X_2}{F_2} = \frac{1}{k} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2(\beta^2 - 3)}.$$

Deux vitesses caractéristiques sont

$$\begin{cases} V_1 = R\Omega_1 = R\omega_0, \\ V_2 = R\Omega_2 = \sqrt{3}R\omega_0. \end{cases}$$



40
20
0
-20
-40
H_2 (dB)
0
0.5
1
1.5
2
Ω/ω_0