Bases de la Mécanique des milieux continus

Chapitre 7

Introduction à la Mécanique des Fluides

A la différence des solides, la notion de configuration de référence est en général dépourvue d'intérêt pour la compréhension des évolutions d'un fluide. En effet, comme on le verra les efforts intérieurs qui se développent au sein d'un fluide ne sont pas fonction des évolutions du système à partir d'un état particulier fixé à l'avance. Par conséquent, la description lagrangienne s'avère inadaptée et l'on préferera le mode eulérien de description de la cinématique, objet du chapitre 4.
Dans le présent chapitre qui vise une introduction à la mécanique des fluides, on se limite aux modèles de fluide parfait et de fluide visqueux newtonien. Dans une première section, on présente des généralités sur les fluides et on introduit la loi de comportement des fluides newtoniens. Une seconde section est ensuite consacrée à un btref exposé de la statique des fluides. Puis on établit les équations (de Navier-Stokes) régissant la dynamique des fluides. Le chapitre se poursuit par une revue des conditions aux limites entre un fluide et un obstacle (typiquement la paroi d'un solide), et entre deux fluides non miscibles. La dernière section est dédiée à la description et la résolution de deux problèmes classiques d'écoulement stationnaire de fluides visqueux incompressbles : écoulement entre deux plaques planes parallèles, écoulement de Poiseuille.

7.1 Généralités sur les fluides - Fluides Newtoniens

7.1.1 Classification des fluides

On désigne sous le nom général de fluides, des milieux continus matériels qui peuvent se mettre sous une forme quelconque lorsqu'ils sont soumis à des efforts même très faibles. Cette définition permet d'exclure les milieux plastiques, qui se comportent comme des solides tant que les contraintes en leur sein ne dépassent pas un certain seuil. Les fluides recouvrent trois grandes catégories : gaz, liquides et plasmas. Mais on rencontre des états plus originaux : lorsqu'on dépasse la température critique d'un équilibre liquide vapeur d'un corps pur (état superfluide). Les fluides s'opposent aux solides, bien que dans certains cas, il ne soit pas facile de trancher. Souvent c'est une question d'échelle. En fait, la distinction n'a pas forcément beaucoup d'importance. Si on est capable de trouver une

loi de comportement approprié pour le milieu, on peut ignorer sa nature.
D'un point de vue mathématique, on dit qu'un milieu continu est un fluide si le tenseur de contraintes est une fonction des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (partie symétriqque du gradient du champ de vitesse eulérien) : $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{grad\, u}}(\underline{x}, t) + {}^t\underline{\underline{grad\, u}}(\underline{x}, t)\right)$. Il en résulte l'existence d'une application f telle que

$$\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{d}}) \tag{7.1}$$

De plus, on supposera l'isotropie du milieu.
On notera que le tenseur des contraintes de Cauchy, $\underline{\underline{\sigma}}$, ainsi que celui des taux de déformation, $\underline{\underline{d}}$ sont deux grandeurs eulériennes. Ainsi, les fluides n'ont qu'une mémoire instantannée.
Plusieurs critères sont utilisés pour classer les fluides :

— nature : gaz, liquides, plasmas (ces derniers ne seront pas traités dans ce cours introductif ; la matière devient un plasma quand elle est chauffée à très haute température (environ 2 000 degrés Celsius)) ;
— compressibilité : les gaz sont bien évidemment compressibles. Une des caractéristiques des liquides est leur faible compressibilité.
— viscosité : cette propriété introduit des efforts liés aux gradients de vitesse dans le fluide. Nous l'examinerons dans ce qui suit.

7.1.2 Fuides newtoniens

La viscosité est une propriété caractéristique de la majorité des fluides. Elle s'applique aussi bien aux gaz qu'aux liquides, même si elle est plus importante pour les liquides.
L'expérience indique qu'en plus de la pression régnant dans le fluide (et notée p), les efforts intérieurs représentés par le tenseur des contraintes de Cauchy comportent une partie qui est fonction du taux de déformation, $\underline{\underline{\tau}}$, dite, contrainte visqueuse :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tau}}, \tag{7.2}$$

Il apparait que la loi de comportement d'un fluide est fournie par la donnée d'une relation entre $\underline{\underline{\tau}}$ et $\underline{\underline{d}}$.
Définition d'un fluide newtonien : Un fluide est newtonien lorsque l contrainte visqueuse $\underline{\underline{\tau}}$ est une fonction linéaire de $\underline{\underline{d}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \lambda tr(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{d}} \tag{7.3}$$

λ et μ sont des coefficients scalaires, dits de viscosités. Malgré la similarité des notations, il convient de ne pas confondre les coefficients de viscosité, homogènes à une pression multipliée par le temps (l'unité est le Poiseuille, Pl) avec les coefficients de Lamé en élasticité, homogènes à une pression (MPa). Par ailleurs, en s'appuyant sur la décomposition de $\underline{\underline{d}}$ en parties sphérique et déviatorique, la relation de comportement peut se mettre sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + Ktr(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{d}}' \tag{7.4}$$

dans lequel on a posé $3K = 3\lambda + 2\mu$ et $\underline{\underline{d}}'$ désigne la partie déviatorique du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$. Le coefficient K est dénommé viscosité de volume. Il n'intervient dans la loi de comportement que si l'écoulement se fait avec des variations de volumes. On peut montrer que le coefficient de compressibilité du fluide K ainsi que μ doivent être positifs.

Exemples de valeurs de la viscosité La viscosité d'un fluide dépend en général de son état thermodynamique (Température, Pression). Cette dépendance varie suivant la nature du fluide. Pour l'eau, la référence pour μ est à 1 mPl (mili Poiseuille), le Poiseuille étant égal à $1Pa.s$.

Comme pour tous les liquides la viscosité décroît avec la température : pour l'eau à $20°C$ on a $1,79mPl$, tandis qu'à $100°C$ on a une valeur de $0,28mPl$. Ce phénomène s'explique par le fait que lorsque la température augmente, les interactions faibles entres les molécules diminuent et donc cela abaisse la "cohésion" des particules fluides, notamment par dissociation des amas de molécules.

Les huiles ont des valeurs de viscosité très variables : elles peuvent passer de quelques $10mPl$ à quelques $100mPl$. Les liquides courants qui ont les viscosités les plus extrêmes sont la glycérine ($1.5Pl$) et l'éther ($0.24mPl$).

La viscosité dans les gaz est beaucoup plus faible que dans les liquides. Par exemple dans l'air à $20°C$ sous 1 atmosphère on a $18\mu Pl$. Le comportement des gaz vis-à-vis de la température est opposé à celui des liquides : il croît avec la température comme avec la pression. Cela s'explique par l'augmentation des échanges moléculaires entre les particules fluides. Pour l'air : à $0°C$ on a $11\mu Pl$, tandis qu'à $1000°C$ on a une valeur de $49\mu Pl$.

7.2 Statique des fluides

Dans le cas statique, le champ de vitesse est nul (fluide au repos), ce qui conduit à la nullité du tenseur taux de déformations. La loi de comportement se réduit ainsi à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}}, \tag{7.5}$$

L'équation de continuité (conservation de la masse) est sans objet dans un tel cas, tandis que les quations de mouvement (conservation de la quantité de mouvement) conduit à

$$div\,\underline{\underline{\sigma}} + \rho\underline{f} = 0 \tag{7.6}$$

Si on suppose que la seule force volumique présente est celle liée à la pesanteur, $\underline{f} = \underline{g}$, l'équation de la statique s'exprime alors

$$-\underline{gradp} + \rho\underline{g} = 0 \tag{7.7}$$

En raison de la présence de ρ dans cette équation, sa résolution requiert de statuer sur la nature du fluide, c'est à dire en pratique de prendre en compte ou non la compressibilité du fluide. Cette distinction s'avère importante, les calculs étant assez différents dans les 2 cas. On notera d'ailleurs que de ce point de vue, l'étude de la statique des fluides se révèle d'un certain intérêt en montrant les différences entre fluides compressibles et incompressibles.

7.2.1 Cas des fluides incompressibles

Expression de la pression : Dans ce cas, la masse volumique reste constante : $\rho = \rho_0$. Si on choisit comme axe $\underline{z}$ la verticale ascendante, l'équation d'équilibre devient :

$$\underline{gradp} + \rho_0 g \underline{z} = 0 \tag{7.8}$$

dont l'intégration conduit immédiatement à

$$p = p_0 - \rho_0 g z \tag{7.9}$$

avec p_0 la valeur de la pression à l'altitude $z = 0$.
Pour illustrer le propos, on pourra considérer une immersion hydrostatique de $h = 10m$. Dans ce cas, l'augmentation de pression vaut

$$\Delta p = \rho_0 g h = 10^5 Pa \tag{7.10}$$

qui est de l'ordre de la pression atmosphérique.
Pour être complet, on évoquera le principe d'Archimède (qui n'en est en fait pas un puisqu'il découle entièrement des équations de la Mécanique des Milieux continus) dont on se contentera ici de rappeler juste l'énoncé :

Enoncé du principe d'Archimède : Tout corps Ω entièrement ou partiellement plongé dans un liquide au repos subit de la part de ce dernier une poussée verticale dirigée vers le haut égale au poids du liquide déplacé et appliqué au centre de gravité géométrique de la partie immergée.

7.2.2 Fluides compressibles

On s'intéresse à présent au cas de gaz parfaits compressibles pour lesquels on se propose de déterminer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude. La différence avec un liquide provient du fait que la masse volumique ne peut pas être considérée comme constante.
L'équation de la statique est à nouveau donnée par (7.7), soit $\frac{dp}{dz} = -\rho g$.
Pour simplifier, placon nous dans le cas isotherme, il vient :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \tag{7.11}$$

d'où

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} M g \tag{7.12}$$

puis par intégration

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} z} \tag{7.13}$$

avec p_0 la pression à l'altitude $z = 0$. En assimilant par exemple l'air à un gaz parfait de masse molaire $29g$, le passage du niveau de la mer à une altitude de $1000m$ entraine une variation de pression telle que : $\frac{p}{p_0} = 0,88$.

7.3 Equations de la dynamique des fluides

On se propose de présenter les équations de la dynamique des fluides, d'abord dans le cas des fluides incompressibles, puis en prenant en compte la compressibilité.

7.3.1 Cas des fluides visqueux incompressibles

Les inconnues du problème d'écoulement sont la pression $p(\underline{x})$ et les 3 composantes de la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x})$. L'équation locale traduisant l'incompressibilité du fluide s'écrit :

$$div\underline{V} = 0 \tag{7.14}$$

En reportant la relation de comportement du fluide newtonien incompressible (7.3) dans les équations de mouvement, $div\,\underline{\underline{\sigma}} + \rho\underline{f} = \rho\gamma = \rho\frac{d\underline{V}}{dt}$, il vient :

$$-\underline{gradp} + \rho\underline{f} + 2\mu div(\underline{\underline{d}}) = \rho\frac{d\underline{V}}{dt} \tag{7.15}$$

Détaillons le calcul de $div(\underline{\underline{d}})$ en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$div(2\underline{\underline{d}}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})\underline{e}_i \tag{7.16}$$

qui s'écrit, en tenant compte de l'incompressibilité

$$div(2\underline{\underline{d}}) = \Delta V_i\underline{e}_i + \underline{grad}(div\underline{V}) = \Delta V_i\underline{e}_i \tag{7.17}$$

En reportant ce résultat dans (7.15), on obtient les équations dites de Navier-Stokes pour le fluide visqueux incompressible :

$$-\underline{gradp} + \rho\underline{f} + 2\mu\Delta\underline{V} = \rho\frac{d\underline{V}}{dt} = \rho(\frac{\partial\underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}\underline{V}.\underline{V}) \tag{7.18}$$

où $\Delta\underline{V}$ désigne le champ de vecteur dont les composantes en cartésiennes orthonormées sont les laplaciens des composantes du champ $\underline{V}$ (cf. chapitre calcul tensoriel).
On notera que pour un fluide parfait incompressible ces équations se réduisent à

$$-\underline{gradp} + \rho\underline{f} = \rho(\frac{\partial\underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}\underline{V}.\underline{V}) \tag{7.19}$$

qui sont les équations d'Euler.

7.3.2 Cas des fluides visqueux compressibles

Les inconnues du problème d'écoulement sont à présent la pression $p(\underline{x}, t)$, les 3 composantes de la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x}, t)$ et la densité $\rho(\underline{x}, t)$ (en raison de la compressibilité du fluide) . L'équation locale traduisant la conservation de la masse (équation de continuité) s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\underline{V} = 0 \tag{7.20}$$

Pour l'établissement des équations de Navier-Stokes dans le cas compressible, on suit la même démarche que précédemment, en reportant la relation de comportement (7.3) dans les équations de mouvement, $div\,\underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = \rho\gamma = \rho\frac{d\underline{V}}{dt}$. Sans donc l'hypothèse d'incompressibilité il vient :

$$-\underline{gradp} + (\lambda + \mu)\underline{grad}(div\underline{V}) + \mu\Delta\underline{V} + \rho\underline{f} = \rho\frac{d\underline{V}}{dt} = \rho(\frac{\partial\underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}\underline{V}.\underline{V}) \qquad (7.21)$$

qui sont les équations dites de Navier-Stokes pour le fluide visqueux incompressible.
Pour le fluide parfait compressible ces équations se réduisent également à celles d'Euler.

7.4 Types de conditions aux limites

Dans cette section on se propose de compléter les équations de la dynamique des fluides par les conditions aux limites usuellement rencontrées . En raison de la présence de 2 types de variables dans les équations du mouvement (variables cinématiques liées au champ de vitesse et variables dynamiques au travers du champ de contraintes), on distingue généralement :
- les conditions aux limites cinématiques, auxquelles doit satisfaire le champ de vitesse
- les conditions aux limites dynamiques auquelles sont assujetis les champs de contrainte et de vitesse au bord du domaine ou à l'interface entre deux fluides.

Nous examinerons ainsi deux situations usuelles : conditions à l'interface fluide-solide, conditions à l'interface entre deux fluides non miscibles.

7.4.1 Conditions à l'interface entre un fluide et un solide

Considérons un écoulement autour d'un obstacle solide animé d'un mouvement de vitesse $\underline{W}$ (éventuellement nulle, cas du solide immobile). On rappelle que le champ de vitesse en tout point de l'écoulement est noté $\underline{V}$. Pour l'écriture des conditions aux limites, on distingue :
- le cas du fluide parfait pour lequel des conditions d'imperméabilité (égalité des vitesse normales) doivent être satisfaites en tout point de l'interface :

$$\underline{V}.\underline{n} = \underline{W}.\underline{n} \qquad (7.22)$$

- le cas des fluides visqueux pour lequels, en raison de la viscosité, on observe une adhérence parfaite des particules se trouvant à l'interface "Fluide-Solide".Cela se traduit par une égalité des vecteur vitesses à cette interface.

$$\underline{V} = \underline{W} \qquad (7.23)$$

Dans le cas particulier de parois immobiles, la vitesse des particules s'annule évidemment le long de l'interface.

7.4.2 Conditions à l'interface entre 2 fluides non miscibles

On s'intéresse à présent à l'interface entre deux fluides notés 1 et 2, cette interface se déplaçant à une vitesse $\underline{W}$. Les champs de vitesse au sein des fluides 1 et 2 sont notés $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_2$ respectivement.

— le cas de fluides parfaits :
Les conditions cinématiques à l'interface entre les 2 fluides s'écrivent alors

$$\underline{V_1}.\underline{n} = \underline{V_2}.\underline{n} = \underline{W}.\underline{n} \tag{7.24}$$

et traduisent l'imperméabilité entre les 2 fluides.
Quant aux conditions dynamiques, elles correspondent à la continuité du vecteur contraintes en tout point de l'interface :

$$-p_1\underline{n} = -p_2\underline{n} \tag{7.25}$$

ce qui conduit à l'égalité des pressions en tout point de l'interface.

— le cas de fluides visqueux :
Les conditions cinématiques à l'interface entre les 2 fluides s'écrivent alors

$$\underline{V_1} = \underline{V_2} = \underline{W} \tag{7.26}$$

et traduisent l'adhérence à l'interface entre les 2 fluides.
Quant aux conditions dynamiques, la continuité du vecteur contraintes à l'interface s'exprime :

$$(-p_1\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tau}}_1).\underline{n} = (-p_2\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tau}}_2).\underline{n} \tag{7.27}$$

7.5 Quelques problèmes d'écoulement simples stationnaires

On se propose d'étudier dans cette section deux problèmes classiques et élémentaires de mécanique des fluides. L'objectif principal est d'exposer la mise en équation du problème traité et de résoudre ce problème en s'appuyant sur les équations de dynamique des fluides. Pour la détermination complète de la solution on aura recours aux conditions aux limites. Dans ces 2 problèmes simples, les difficultés inhérentes au équations de Navier-Stokes seront contournées en recherchant la solution sous la forme d'un écoulement laminaire (à lignes de courant connues).

7.5.1 Ecoulement entre deux plaques planes parallèles (Couette plan)

Enoncé et mise en équation du problème

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques planes parralèles. L'écoulement est plan parallèle (plan O, x_1, x_2)). Les deux plaques planes sont d'équation $x_2 = 0$ et $x_2 = H$, respectivement, la donnée H étant un scalaire strictement positif. Le plan $x_2 = 0$ est immobile, tandis que $x_2 = H$ est animé d'un mouvement

de translation de vitesse U suivant $\underline{e_1}$, la donnée U étant une constante positive.
Le champ de vitesse est ainsi de la forme

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_1(x_1, x_2)\underline{e_1} + u_2(x_1, x_2)\underline{e_2} \tag{7.28}$$

On cherche la solution du problème sous la forme d'un écoulement laminaire dont les lignes de courants sont les droites $x_2 = constante$. Ceci réduit la recherche du champ de vitesse à celle d'une fonction scalaire $u_1(x_1, x_2)$, ce qui est de nature à simplifier significativement la résolution du problème.
Le fluide étant incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle, c'est à dire tel que $div\underline{V} = 0$. Il en résulte

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_1(x_2)\underline{e_1} \tag{7.29}$$

En notant $p(x_1, x_2, x_3)$ le champ de pression dans l'écoulement, et en négligeant les forces à distance (forces de volume), les équations de Navier-Stokes, (7.18), s'écrivent :

$$-\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 u_1(x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \quad ; \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \quad ; \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \tag{7.30}$$

La résolution de ces équations et la vérification des conditions aux limites permettront de déterminer entièrement les champs de pression et de vitesse de l'écoulement.
Le fluide étant visqueux, les conditions aux limites sur les deux plaques sont celles d'une adhérence parfaite qui s'expriment ici comme :

$$u_1(0) = 0 \quad ; u_1(H) = U \tag{7.31}$$

Résolution du problème

Les deux dernières équations de (7.30) indiquent que le champ de pression ne dépend ni de x_2 ni de x_3. Il vient donc $p = p(x_1)$. Le report dans la première équation de (7.30) donne :

$$\frac{\partial p(x_1)}{\partial x_1} = \mu\frac{\partial^2 u_1(x_2)}{\partial x_2^2} \tag{7.32}$$

Les 2 membres de cette égalité dépendent de x_1 et de x_2, respectivement. On en déduit qu'ils ne peuvent qu'être égaux à une constante que l'on notera $-C$. Il s'en suit :

$$p(x_1) = -Cx_1 + p_0 \tag{7.33}$$

En notant p_0 et p_L la pression dans les sections d'extrémité $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ (L étant la longueur du domaine d'écoulement), on a $C = \frac{p_0 - p_L}{L}$ d'où l'expression finale du champ de pression

$$p(x_1) = \frac{p_L - p_0}{L}x_1 + p_0 \tag{7.34}$$

On note que la distribution de pression dans l'écoulement est entièrement régie par la chute linéique de pression entre les 2 sections d'extrémité.

Venons en maintenant à la détermination du champ de vitesse. En reconsidérant l'équation (7.32), c'est à dire donc $\mu \frac{d^2 u_1(x_2)}{dx_2^2} = -C$, il vient, après intégration et écriture des conditions aux limites (7.31) :

$$u_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} x_2(H - x_2) + \frac{U}{H} x_2 \tag{7.35}$$

où l'expression de C a été précédemment donnée.
Il apparait ainsi qu'outre la chute linéique de pression, représentée par C, la vitesse U de la plaque supérieure est l'autre grandeur qui contrôle le champ de vitesse de l'écoulement. Plus exactement, on note une compétition entre ces 2 données ; Pour l'allure précise du champ de vitesse, il conviendra notamment de distinguer les cas $C > 0$, $C = 0$ et $C < 0$. On est à même maintenant de déterminer le champ de vitesse de déformation puis, par la loi de comportement, la distribution des contraintes dans l'écoulement. Ceci fournit l'acces au calcul des efforts appliqués par le fluide sur les plaques planes.

7.5.2 Ecoulement de Poiseuille

Enoncé et mise en équation du problème

On considère un cylindre immobile, rectiligne, creux et de longueur L (supposée grande par rapport au diamètre, afin de diminuer l'influence des extrémités). Le Cylindre est de section circulaire, de rayon R. Les axes étant choisis (O, x_1, x_2, x_3), l'axe du cylindre est considéré porté par Ox_3, et les sections sont dans le plan $(O, X-1, x_2)$. On cherche un écoulement laminaire ayant les lignes de courant parallèles à Ox_3. Le champ de vitesse eulérien est ainsi de la forme :

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_3(x_1, x_2, x_3)\underline{e_3} \tag{7.36}$$

Le fluide étant incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle, $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$. Sa seule composante s'écrit alors

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) \tag{7.37}$$

d'où en reportant dans les équations Navier-Stokes, (7.18), avec le champ de pression $p(x_1, x_2, x_3)$, on obtient :

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \quad ; \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \quad ; -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} + \mu \Delta u_3(x_1, x_2) = 0 \tag{7.38}$$

avec $\Delta u_3 = \frac{\partial^2 u_3(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}$ le laplacien du champ scalaire $u_3(x_1, x_2)$.
Ces équations doivent être complétées par les conditions aux limites (adhérence) : $u_3 = 0$ sur le bord du cylindre, ce dernier dans le cas présent de la section circulaire considérée ici étant défini par $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

Résolution du problème

On cherche à de résoudre les équations (7.38), avec les conditions aux limites précisées ci dessus. Les deux premières indiquent que le champ de pression ne dépend ni de x_1 ni de x_2. Il vient donc $p = p(x_3)$. Le report dans la troisième équation de (7.38) fournit :

$$\frac{\partial p(x_3)}{\partial x_3} = \mu \Delta u_3(x_1, x_2) \tag{7.39}$$

Les 2 membres de cette égalité étant dépendant de x_3 et de (x_1, x_2), respectivement, on déduit qu'ils ne peuvent qu'être égaux à une constante que l'on notera $-C$. Il s'en suit pour le champ de pression :

$$p(x_3) = -Cx_3 + p_0 \tag{7.40}$$

où on a noté à nouveau p_0 et p_L la pression dans les sections d'extrémité $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ (L, longueur du domaine d'écoulement). On a $C = \frac{p_0 - p_L}{L}$ d'où l'expression finale du champ de pression

$$p(x_1) = \frac{p_L - p_0}{L} x_3 + p_0 \tag{7.41}$$

A nouveau, la distribution de pression dans l'écoulement est entièrement régie par la chute linéique de pression entre les 2 sections d'extrémité.
Pour la détermination du champ de vitesse, on considère que l'équation (7.39), c'est à dire maintenant

$$\mu \Delta u_3(x_1, x_2) = -C \tag{7.42}$$

Compte tenu de la géométrie cylindrique du domaine d'écoulement, avec une section circulaire de rayon R, on vérifie aisément que la solution de l'équation (7.42), avec les conditions aux limites (condition d'adherence) $u_3 = 0$ sur le bord $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, est donnée par

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{C}{4\mu}(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \tag{7.43}$$

où C est la chute linéique dont l'expression est fournie auparavant.
De manière évidente, la vitesse de l'écoulement est contrôlée par cette chute linéique de pression C.
nouveau, il est maintenant possible de déterminer le champ des taux de déformation puis, par la loi de comportement, la distribution des contraintes dans l'écoulement, et enfin les efforts appliqués par le fluide sur la paroi du tube cylindrique.