

6	Comportement élastique du solide tridimensionnel	49
		50
6.1	Comportement élastique en condition isotherme	50
6.2	Comportement élastique linéaire	51
6.3	Comportement élastique linéaire isotrope	52
6.3.1	Formulation de la loi dite de Hooke	52
6.3.2	Expérience de traction simple	54
6.4	Définition du chargement	55
6.5	Equations et méthodes de résolution des problèmes d'élasticité 3D	56
6.5.1	Définition de la solution d'un problème d'élasticité et méthodes	56
6.5.2	Méthode de résolution par les déplacements	58

Chapitre 6

Comportement élastique du solide tridimensionnel

La problématique de la loi de comportement est de grande importance en mécanique des milieux continus. Dans l'hypothèse des transformations infinitésimales auxquelles nous allons nous limiter, il s'agit d'établir le lien existant entre les efforts intérieurs, représentés par le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et les déformations représentées par le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Cette question se pose à l'échelle du volume élémentaire que nous avons appelé point matériel. Dans ce chapitre, plutôt introductif, nous nous placerons dans la situation où l'on peut négliger les couplages thermomécaniques, c'est-à-dire les effets d'une variation de température sur les contraintes et les déformations.

Dans la pratique expérimentale, une éprouvette homogène du matériau étudié joue le rôle de ce point matériel. On s'efforce d'appliquer à celle-ci des états de contrainte, de déformation uniformes. L'approche phénoménologique de la loi de comportement consiste à tenter de trouver une formulation mathématique rendant compte le plus fidèlement possible des observations disponibles. On se restreindra au comportement élastique dans le cadre particulier des évolutions isothermes en exploitant une définition énergétique de l'élasticité.

6.1 Comportement élastique en condition isotherme

On soumet l'éprouvette du matériau étudié à une histoire de déformation $t \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On admet que les champs de déformations et de contraintes sont uniformes dans l'éprouvette qui joue donc le rôle d'un point matériel. Dans les conditions de cet essai, le comportement élastique peut être défini par le fait que l'énergie mécanique totale W fournie à l'éprouvette au cours de cette histoire de chargement ne dépend en fait que de l'état final, c'est-à-dire de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(T)$. On va montrer que l'état de contraintes peut être calculé à partir de la connaissance de la fonction $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow W(\underline{\underline{\varepsilon}})$. On note w l'énergie W rapportée au volume initial de l'éprouvette et l'on écrit

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) = \int_0^T \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} dt \quad (6.1)$$

En dérivant par rapport au temps T , on obtient

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) \dot{\varepsilon}_{ij} = \underline{\underline{\sigma}}(T) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (6.2)$$

En l'absence de restriction physique sur les histoires de déformations possibles, tous les choix du taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ sont possibles. Il en résulte que

$$\sigma_{ij}(T) = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) \quad (6.3)$$

ce que nous noterons de façon intrinsèque sous la forme suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.4)$$

On obtient donc le tenseur des contraintes en dérivant $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ par rapport au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La donnée de la fonction $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ caractérise complètement le comportement élastique en condition isotherme. Elle est appelée énergie élastique de déformation¹. Pour se familiariser avec (6.4), on pourra utilement revenir au cas particulier où le système mécanique est un ressort de raideur k , la force F jouant le rôle de la contrainte et l'allongement x celui de la déformation. La transcription de la relation (6.4) énonce que la force F est la dérivée de l'énergie $\frac{1}{2}kx^2$ par rapport à l'allongement x .

6.2 Comportement élastique linéaire

Nous savons que l'hypothèse de transformations infinitésimales entraîne que les déformations soient elles-mêmes infinitésimales. Dans ce domaine des petites déformations, et en raison de la linéarité supposée du comportement, l'énergie nécessaire pour amener l'éprouvette dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'écrit :

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk} \quad (6.5)$$

pour lequel on a supposé (et pour toute la suite) que l'état de référence de l'éprouvette est l'état naturel, c'est à dire par définition l'état initial sans contrainte contrainte.

A titre d'illustration de la relation (6.5), il est instructif de considérer un ressort de raideur k . Nous adoptons x comme variable d'état qui joue le rôle de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas tridimensionnel. L'énergie fournie au ressort dans une évolution quelconque à partir de l'état initial vaut :

$$w = \frac{1}{2} k x^2 \quad (6.6)$$

Le coefficient k joue dans (6.6) le rôle du tenseur \mathbb{C} dans (6.5). En extrapolant, on pressent que le tenseur \mathbb{C} généralise le concept de raideur dans le contexte tridimensionnel. Comme le tenseur de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est symétrique, les composantes de \mathbb{C} satisfont $C_{ijkl} = C_{ijlk}$

1. ou, plus précisément, densité volumique lagrangienne d'énergie élastique de déformation.

ainsi que $C_{ijkl} = C_{jikl}$. Par ailleurs, les couples (i, j) et (k, l) étant choisis, on note que le groupement $\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}$ intervient dans la définition de l'énergie par les deux termes $\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}$ et $\frac{1}{2}C_{klij}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}$. En d'autres termes, sa contribution est contrôlée par la somme $\frac{1}{2}(C_{klij} + C_{ijkl})$, de sorte que l'on ne restreint pas la généralité en imposant la symétrie des couples (i, j) et (k, l) , c'est-à-dire en imposant $C_{klij} = C_{ijkl}$.

Avec ces conventions, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (6.7)$$

Cette relation, qui s'écrit également en composantes $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{lk}$, traduit la loi de comportement élastique linéaire issue de la dérivée première de l'énergie.

Notons que l'équation (6.7) peut être inversée de façon à exprimer la déformation en fonction de la contrainte :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1} \quad (6.8)$$

6.3 Comportement élastique linéaire isotrope

Nous considérons ici un matériau élastique linéaire et recherchons les simplifications qu'apporte l'hypothèse d'isotropie dans l'écriture de la loi de comportement.

6.3.1 Formulation de la loi dite de Hooke

L'énergie mécanique $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ nécessaire pour amener l'éprouvette dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dépend a priori des valeurs principales du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ainsi que de ses directions principales. A titre d'exemple, deux extensions simples dans lesquelles la même déformation ε est appliquée respectivement selon les directions \underline{e}_1 et \underline{e}_2 (figure 6.1) ne consomment pas en général la même énergie mécanique :

$$w(\varepsilon \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) \neq w(\varepsilon \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (6.9)$$

Ceci résulte du fait que le matériau peut comporter des directions de renforcement et des directions de faiblesse.

A l'inverse, un matériau est dit isotrope si toutes les directions de l'espace sont équivalentes du point de vue mécanique. Dans ces conditions, l'orientation des directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est sans effet sur la valeur de $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$. En particulier, l'égalité a lieu dans (6.9).

On exprime l'indépendance de $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ vis-à-vis des directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en écrivant que cette énergie est une fonction des trois invariants isotropes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = w(I_1, I_2, I_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} \end{cases} \quad (6.10)$$

Ayant en vue la formulation d'une loi de comportement linéaire, on se limite à (6.5). La fonction quadratique isotrope (s'annulant en 0) la plus générale comporte un terme linéaire

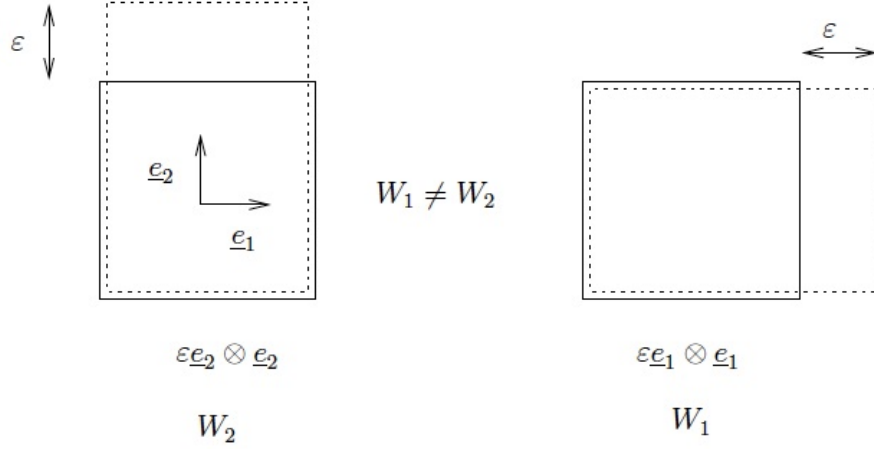


FIGURE 6.1 – extensions simples dans 2 directions orthogonales

en I_1 et deux termes du second degré respectivement en I_1^2 et I_2 . Etant du troisième degré, l'argument I_3 n'intervient pas. On cherche donc $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ sous la forme suivante :

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + 2\mu I_2 \quad (6.11)$$

On vérifie sans peine les règles de dérivation suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\delta}} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases} \quad (6.12)$$

de sorte que les équations d'état (6.4) calculées avec l'énergie libre de (6.11) s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (6.13)$$

La relation (6.13) constitue la loi de comportement du *matériau élastique linéaire isotrope et sans état initial de contrainte*. On note que le calcul du tenseur des contraintes en fonction de celui des déformations requiert la donnée des deux constantes λ et μ . Ces coefficients, λ , μ , portent le nom de constantes de Lamé et sont homogènes à une contrainte (MPa).

La confrontation avec les équations d'état (6.7) de l'élasticité linéaire dans le cas général conduit à souligner dans (6.13) la spécificité suivante :

— Le tenseur d'élasticité \mathbb{C} ne dépend plus que des deux constantes λ et μ .

En inversant (6.13a), on obtient la déformation en fonction de la variation de température et de la contrainte :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\delta}} \quad (6.14)$$

où l'on a posé

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{3\lambda + 2\mu} \quad (6.15)$$

E porte le nom de *module de Young*. Il est homogène à une contrainte. ν , appelé *coefficient de Poisson*, est sans dimension. La détermination expérimentale et l'interprétation physique de E et ν seront présentées à la section 6.3.2. Voici quelques valeurs typiques :

	$E \text{ (GPa)}$	ν
béton	≈ 30	$0,2$
acier doux	200	$0,25 - 0,30$
granite	70	$0,27$

(6.16)

On montre que la forme quadratique $\frac{\lambda}{2}I_1^2 + 2\mu I_2$ qui représente l'énergie élastique de déformation w est définie positive si et seulement si $E > 0$ et $\nu \in]-1, 1/2[$:

$$(\forall \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \frac{\lambda}{2}I_1^2 + 2\mu I_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0, \nu \in]-1, 1/2[\quad (6.17)$$

Ces conditions assurent la stabilité du matériau². On verra dans l'étude des problèmes classiques (traction simple, compression isotrope ...) qu'elles assurent également la conformité des solutions avec l'intuition.

6.3.2 Expérience de traction simple

Interprétation de E et ν

La résultante \underline{F} des forces qu'il faut exercer sur la section $X_3 = H$ pour imposer le déplacement δ de cette section est obtenue par intégration du vecteur-contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$:

$$\underline{F} = F \underline{e}_3 = \int_{X_3=H} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 dA = E \mathcal{S} \frac{\delta}{H} \underline{e}_3 \quad (6.18)$$

où \mathcal{S} désigne l'aire de la section droite de la pièce. Le module de Young est donc la pente de la droite donnant la force normalisée F/S en fonction de la déformation axiale δ/H . L'interprétation du coefficient de Poisson est obtenue en analysant la déformée de la pièce sous l'action de la traction qui lui est imposée. A un mouvement de corps rigide près, la section droite de cote X_3 subit une translation verticale de vecteur $X_3 \delta / H \underline{e}_3$, composée avec une homothétie d'axe $O \underline{e}_3$ et de rapport $1 - \nu \delta / H$. Dans la pratique, le coefficient de Poisson est un scalaire positif. Il rend donc compte d'un effet de rétrécissement des sections que l'on observe sur une pièce en traction. On notera que les déformations dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et dans la direction \underline{e}_3 sont de signes opposés et que l'on a $\nu = -\varepsilon_{11}/\varepsilon_{33}$.

2. En effet, s'il existait un état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour lequel $w(\underline{\underline{\varepsilon}}) < 0$, il serait possible de récupérer de l'énergie mécanique dans la transition de l'état initial vers l'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$. L'état initial serait donc instable.

6.4 Définition du chargement

On se place dans le cadre d'hypothèses déjà adoptées : évolution quasistatique du système, transformation infinitésimale, petits déplacements.

Le chargement appliqué à une structure tridimensionnelle est défini par des données sur les efforts et sur les déplacements.

données sur le déplacement

Dans le cadre des données dites de type classique auquel nous nous limitons ici à des données sur le déplacement ; celles-ci portent sur la valeur de certaines composantes du vecteur déplacement qui est prescrite sur certaines parties de la frontière $\partial\Omega_o$ du système. Il s'agit donc de conditions aux limites. Plus précisément, on note \mathcal{S}_{ξ_i} la partie de la frontière où la composante ξ_i est donnée et l'on note ξ_i^d la valeur qui lui est attribuée³. On a donc

$$(\forall \underline{x} \in \mathcal{S}_{\xi_i}) \quad \xi_i(\underline{x}) = \xi_i^d(\underline{x}) \quad (6.19)$$

On parle d'encastrement lorsque le vecteur déplacement est donné égal à 0 sur une partie de la frontière.

Les données sur le déplacement sont rassemblées symboliquement sous la notation \mathcal{D}^C :

$$\mathcal{D}^C = \{\mathcal{S}_{\xi_i}, \xi_i^d\} \quad (6.20)$$

données en efforts

Il s'agit de données qui portent sur les efforts extérieurs appliqués au système. Ce sont d'une part de forces à distance et d'autre part de forces de contact décrites par une densité surfacique sur la frontière $\partial\Omega_o$.

Les forces à distance doivent être données sous la forme d'une densité volumique $\rho \underline{F}^d$ dont les propriétés ont été discutées au chapitre ayant porté sur le tenseur des contraintes.

En revanche, la densité surfacique \underline{T} sur $\partial\Omega_o$ n'est pas en général une donnée du problème. Ainsi, si le déplacement est prescrit sur une partie de la frontière, les efforts nécessaires pour obtenir ce déplacement sont inconnus⁴. Le cadre des conditions aux limites de type classique consiste à prescrire certaines composantes de la force surfacique sur certaines parties de la frontière. On note \mathcal{S}_{T_i} la partie de la frontière sur laquelle la composante T_i est donnée et l'on note T_i^d la valeur qui lui est attribuée. On a donc

$$(\forall \underline{x} \in \mathcal{S}_{T_i}) \quad T_i(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad (6.21)$$

Notons qu'une partie de la frontière où la force surfacique est donnée égale à 0 est dite *libre de contraintes*.

On rassemble symboliquement l'ensemble des données en efforts sous la notation \mathcal{D}^S :

$$\mathcal{D}^S = \{\rho \underline{F}^d, \mathcal{S}_{T_i}, T_i^d\} \quad (6.22)$$

Nous venons de voir qu'il pouvait y avoir incompatibilité entre données statiques et données cinématiques. En l'occurrence, il convient de prescrire en chaque point de la frontière et pour chaque direction de l'espace une information scalaire portant soit sur le déplacement

3. L'exposant 'd' se rapporte à une grandeur donnée.

4. Il n'est pas possible d'imposer à la fois la tension et l'allongement d'un ressort.

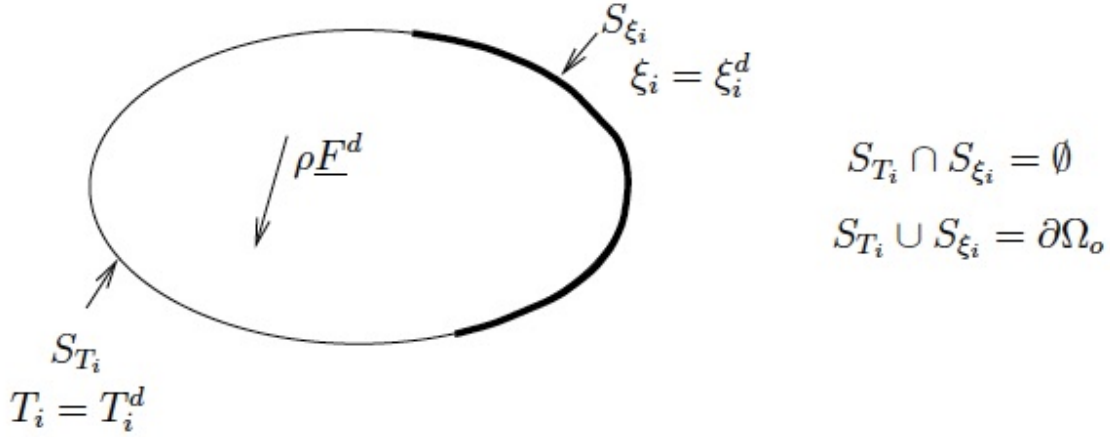


FIGURE 6.2 – conditions aux limites

(ξ_i^d) , soit sur la force surfacique (T_i^d) , sans qu'il soit possible de prescrire simultanément l'effort T_i et la grandeur cinématique duale ξ_i . Mathématiquement, ces considérations signifient que, pour chaque valeur de l'indice i , les ensembles \mathcal{S}_{T_i} et \mathcal{S}_{ξ_i} constituent une partition de la frontière du système :

$$\mathcal{S}_{T_i} \cup \mathcal{S}_{\xi_i} = \partial\Omega_o \quad ; \quad \mathcal{S}_{T_i} \cap \mathcal{S}_{\xi_i} = \emptyset \quad (6.23)$$

6.5 Equations et méthodes de résolution des problèmes d'élasticité 3D

6.5.1 Définition de la solution d'un problème d'élasticité et méthodes

On applique au système un chargement défini par les ensembles \mathcal{D}^C de (6.20) et \mathcal{D}^S de (6.22). On s'intéresse aux efforts intérieurs et à la transformation géométrique qui en résultent. En vue de caractériser la solution du problème, on introduit les concepts de champs de contraintes statiquement admissibles et de champs de déplacements cinématiquement admissibles.

champs de contraintes statiquement admissibles

Un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini sur Ω_o est dit statiquement admissible (s.a.) s'il est en équilibre avec les données en efforts \mathcal{D}^S . Il est donc soumis à l'équation locale d'équilibre pour la valeur $\rho_o \underline{\underline{F}}^d$ des forces de volume et aux conditions aux limites (6.21) :

$$\underline{\underline{\sigma}}' \text{ s.a. avec } \mathcal{D}^S \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \operatorname{div}_X \underline{\underline{\sigma}}' + \rho_o \underline{\underline{F}}^d = 0 \quad (\Omega_o) \\ \text{(b)} & [\underline{\underline{\sigma}}'] \cdot \underline{\underline{N}} = 0 \quad (\Sigma) \\ \text{(c)} & \sigma'_{ij} n_j = T_i^d \quad (\mathcal{S}_{T_i}) \end{cases} \quad (6.24)$$

L'ensemble des champs $\underline{\underline{\sigma}}'$ s.a. avec \mathcal{D}^S est noté \mathbf{S} .

champs de déplacements cinématiquement admissibles

Un champ de déplacements $\underline{\underline{\xi}}'$ défini sur Ω_o est dit cinématiquement admissible (c.a.) s'il est continu, continûment différentiable par morceaux, et s'il satisfait les conditions aux limites définies par \mathcal{D}^C :

$$\underline{\underline{\xi}}' \text{ c.a. avec } \mathcal{D}^C \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \underline{\underline{\xi}}' \in C^0; C^1 \text{ par morceaux} \\ \text{(b)} & \underline{\underline{\xi}}'_i = \underline{\underline{\xi}}_i^d \quad (\mathcal{S}_{\xi_i}) \end{cases} \quad (6.25)$$

L'ensemble des champs $\underline{\underline{\xi}}'$ c.a. avec \mathcal{D}^C est noté \mathbf{C} .

Avec ces définitions, on appelle solution du problème le couple formé par un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ s.a. et un champ de déplacements $\underline{\underline{\xi}}$ c.a., tels que la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ soit en tout point du système reliée par l'équation d'état (6.7a) à la déformation dans le déplacement $\underline{\underline{\xi}}$:

$$(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}}) \text{ solution} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a.} & ; & \underline{\underline{\xi}} \text{ c.a.} \\ \text{(a)} & \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) \\ & \text{ou bien} \\ \text{(b)} & \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \end{cases} \quad (6.26)$$

En fixant la géométrie du système, l'hypothèse des petits déplacements rend linéaire l'équation locale de la statique (6.24a) ainsi que les conditions aux limites (6.24c) par rapport aux données en efforts ${}^5\rho_o \underline{\underline{F}}^d$ et T_i^d . On note également la linéarité des conditions aux limites cinématiques (6.25b) par rapport aux $\underline{\underline{\xi}}_i^d$. Enfin, la relation entre contraintes et déformations est elle-même linéaire⁶. Les ensembles \mathcal{S}_{ξ_i} et \mathcal{S}_{T_i} étant fixés, on vérifie alors sans peine que la solution $(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\sigma}})$ dépend de façon linéaire des données $\rho_o \underline{\underline{F}}^d$, T_i^d et $\underline{\underline{\xi}}_i^d$.

La définition de la solution suggère deux approches pour la résolution du problème. A la recherche d'un couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$ vérifiant (6.26), on peut :

- sélectionner un champ de contraintes s.a. et tenter, à partir des déformations associées à ces contraintes par la loi de comportement (6.26b) d'en déduire un champ de déplacements c.a. : c'est la *méthode de résolution par les contraintes*.

ou bien

- sélectionner un champ de déplacements c.a. et tenter de démontrer que le champ de contraintes qui lui est associé par la loi de comportement (6.26a) est s.a. : c'est la *méthode de résolution par les déplacements*.

On remarque que la méthode des contraintes procède par intégration puisqu'elle nécessite de remonter d'un champ de déformation vers un champ de déplacements, tandis que la méthode des déplacements qui passe par la détermination de la déformation à partir du

5. Soulignons que ce ne serait pas le cas si ces équations étaient écrites sur une configuration fonction du chargement.

6. Cette propriété repose en particulier sur l'hypothèse de transformation infinitésimale (chapitre 6)

déplacement procède par dérivation. On se limitera ici à la méthode de résolution en déplacement, celle basée sur le champ de contrainte étant traitée dans un enseignement ultérieur..

6.5.2 Méthode de résolution par les déplacements

Les étapes sont les suivantes :

1. On se donne $\underline{\xi} \in \mathbf{C}$.
2. On calcule la déformation associée $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\nabla}\underline{\xi} + {}^t\underline{\nabla}\underline{\xi})/2$.
3. On calcule $\underline{\underline{\sigma}}$ par (6.26a).
4. On teste si $\underline{\underline{\sigma}}$ est s.a. . Dans le cas positif, $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ est solution du problème.

En éliminant le champ de contraintes dans (6.24a) en fonction du champ de déplacements, on obtient une équation différentielle qui permet de tester directement sur le déplacement si les conditions de l'équilibre local sont satisfaites. Cette équation ne prend cependant de forme simple que dans le cas où *les caractéristiques élastiques du système sont homogènes et isotropes*. En supposant pour simplifier que l'état initial est naturel, et en introduisant (6.13a) dans (6.24a), on trouve :

$$\lambda \underline{\text{grad}}(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu \text{div } \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho \underline{F}^d = 0 \quad (6.27)$$

On remarque en outre que $\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{div } \underline{\xi}$ et que

$$\text{div } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\Delta \xi_i e_i + \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi})) \quad (6.28)$$

de sorte que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ associé à $\underline{\xi}$ (via $\underline{\underline{\varepsilon}}$) par la loi de comportement satisfait la condition (6.24a) si et seulement si $\underline{\xi}$ est solution de l'équation différentielle suivante

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} + \rho \underline{F}^d = 0 \quad (6.29)$$

qui porte le nom d'*équation de Navier*. L'intérêt de (6.29) réside dans le fait de regrouper une fois pour toutes les étapes 2 à 4 de la méthode des déplacements. Malheureusement, elle n'est pas une condition suffisante pour que $\underline{\xi}$ soit solution. En effet, pour qu'il soit s.a., le champ de contraintes doit également satisfaire les conditions aux limites en effort (6.24c). En revanche, si $\underline{\xi}$ possède une régularité suffisante et s'il n'existe pas de condition aux limites en contraintes, un champ de déplacements c.a. et satisfaisant (6.29) est solution du problème.

