Exercice 1 : Déformations

Soit le mouvement d'un milieu continu défini par le champ de vitesses en description eulérienne suivant :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \alpha\, x_2\, \underline{e}_1,$$

où α est une constante positive donnée.

1. Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$, la particule occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Donner l'équation de la trajectoire de la particule $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

La représentation lagrangienne du mouvement s'obtient en intégrant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_1(\underline{x}, t) = \alpha x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v_2(\underline{x}, t) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = v_3(\underline{x}, t) = 0, \end{cases}$$

avec la condition initiale $\underline{x}(t = 0) = (X_1, X_2, X_3)$.
De la seconde équation, on en déduit que $x_2 =$ constante et compte tenu de la condition initiale $x_2 = X_2$. En reportant alors dans la 1e équation, on a $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha x_2 = \alpha X_2$ que l'on peut alors intégrer sous la forme $x_1 = \alpha X_2\, t + C$ avec C une constante.
Compte tenu de la condition initiale $x_1 = X_1$ et $x_3 = X_3$, on en déduit aisément la représentation lagrangienne du mouvement suivante

$$\begin{cases} x_1 = \alpha X_2\, t + X_1, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation paramétrique de la trajectoire (t jouant le rôle du paramètre). La trajectoire est ici une droite parallèle à l'axe des x_1 située dans le plan $x_3 = X_3$.

2. Déterminer les composantes du tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$. La transformation est-elle homogène ? Déterminer les composantes du tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}$, du tenseur de déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ et du tenseur $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$.

Les composantes du tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ sont par définition données par

$$F_{ij}(\underline{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

On en déduit facilement l'expression de la matrice associée au tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$:

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La transformation est bien définie car $\det \underline{\underline{F}} = 1 > 0$ pour tout $\underline{X}$ et tout temps t et est finie.
La transformation est homogène car le tenseur $\underline{\underline{F}}$ ne dépend pas des coordonnées du vecteur $\underline{X}$, mais dépend uniquement du temps t : $\underline{\underline{F}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{F}}(t)$.
On en déduit que tout segment droit avant transformation restera droit après transformation.

Le tenseur des dilatations étant défini par la relation $\underline{\underline{C}} = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}$, il a pour expression

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & (\alpha t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur de déformation de Green Lagrange est donné par la relation $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha t}{2} & 0 \\ \dfrac{\alpha t}{2} & \dfrac{(\alpha t)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur $\underline{\underline{G}}$ est défini par $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$, soit

$$G_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}.$$

Il convient donc de former l'application $\underline{\Psi}$ inverse de la transformation $\underline{\Phi}$, qui s'obtient ici facilement par inversion de la transformation $\underline{\Phi}$ sous la forme

$$\begin{cases} X_1 = -\alpha x_2\, t + x_1, \\ X_2 = x_2, \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

Les composantes du tenseur $\underline{\underline{G}}$ ont donc pour expression

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi directement former $\underline{\underline{F}}^{-1}$ en tant qu'inverse de $\underline{\underline{F}}$.

3. On considère à l'instant $t = 0$ le carré $OA_0B_0C_0$ de coté η tel que $OA_0 = \eta \underline{e}_1$ et $OC_0 = \eta \underline{e}_2$. Déterminer le transformé de ce carré à l'instant $t = T$. Calculer l'accroissement de la longueur de la diagonale OB_0 en exploitant l'expression et les propriétés du tenseur de Green-Lagrange. Vérifier le résultat géométriquement. En suivant une démarche analogue, calculer l'angle entre les vecteurs OA et OC transformés à l'instant $t = T$ de OA_0 et OC_0. Vérifier le résultat géométriquement.

On commence par chercher les positions des transformés des points O, A_0, B_0, C_0 après transformation. Il suffit pour cela d'appliquer l'expression de la transformation pour chaque point, ainsi pour le point O_0, on a

$$\underline{x}_O = \underline{\Phi}(\underline{X}(O_0), t = T) = \begin{pmatrix} X_1(O_0) + \alpha X_2(O_0)\, T \\ X_2(O_0) \\ X_3(O_0) \end{pmatrix}.$$

et donc comme les coordonnées du point O_0 sont $\underline{X}(O_0) = (X_1(O_0) = 0, X_2(O_0) = 0, X_3(O_0) = 0)$, on obtient

$$\underline{x}_O = \underline{\Phi}(\underline{X}(O_0), t = T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le point O reste donc fixe dans la transformation.
Regardons maintenant le transformé du point A_0 de coordonnées $\underline{X}(A_0) = (X_1(A_0) = \eta, X_2(A_0) = 0, X_3(A_0) = 0)$, on a

$$\underline{x}_A = \underline{\Phi}(\underline{X}(A_0), t = T) = \begin{pmatrix} X_1(A_0) + \alpha X_2(A_0)\, T = \eta \\ X_2(A_0) = 0 \\ X_3(A_0) = 0 \end{pmatrix}.$$

Le point A_0 reste donc également fixe dans la transformation.
De la même manière le point C_0 de coordonnées $\underline{X}(C_0) = (X_1(C_0) = 0, X_2(C_0) = \eta, X_3(C_0) = 0)$ se transforme en C de coordonnées

$$\underline{x}_C = \underline{\Phi}(\underline{X}(C_0), t = T) = \begin{pmatrix} X_1(C_0) + \alpha X_2(C_0)\, T = \alpha\eta T \\ X_2(C_0) = \eta \\ X_3(C_0) = 0 \end{pmatrix}.$$

Le point C_0 est donc translaté dans la transformation selon l'axe $\underline{e}_1$ de $\alpha\eta T$.
Enfin, le point B_0 de coordonnées $\underline{X}(B_0) = (X_1(B_0) = \eta, X_2(B_0) = \eta, X_3(B_0) = 0)$ se transforme en B de coordonnées

$$\underline{x}_B = \underline{\Phi}(\underline{X}(B_0), t = T) = \begin{pmatrix} X_1(B_0) + \alpha X_2(B_0)\,T = \eta + \alpha\eta T \\ X_2(B_0) = \eta \\ X_3(B_0) = 0 \end{pmatrix}.$$

Le point B_0 est donc également translaté dans la transformation selon l'axe $\underline{e}_1$ de $\alpha\eta T$.
Pour construire les transformés des points, on peut aussi introduire le vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$ défini par :

$$\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 - X_1 \\ x_2 - X_2 \\ x_3 - X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X_2 T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À l'instant $t = T$, les coordonnées du point A sont

$$\underline{x}_A = \underline{X}_{A_0} + \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées des points B et C à l'instant $t = T$ sont directement

$$\underline{x}_B = \underline{X}_{B_0} + \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \eta + \alpha\eta T \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{x}_C = \underline{X}_{C_0} + \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \alpha\eta T \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La transformation étant homogène, les côtés du carré $[O, A_0, B_0, C_0]$ restent droits comme dit précédemment, de sorte que le transformé du segment $[O, A_0]$ est le segment $[O, A]$, le transformé du segment $[O, C_0]$ est le segment $[O, C]$, le transformé du segment $[A_0, B_0]$ est le segment $[A, B]$ et le transformé du segment $[C_0, B_0]$ est le segment $[C, B]$.

Le carré se transforme donc en un parallélogramme.

On aurait pu également déterminer les équations des courbes transformées des côtés du carré. Tous les points du côté OA_0 ont pour coordonnées $(X_1, 0, 0)$ avec $0 \leq X_1 \leq \eta$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Le côté OA_0 reste donc inchangé dans la transformation.
Tous les points du côté OC_0 ont pour coordonnées $(0, X_2, 0)$ avec $0 \leq X_2 \leq \eta$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x_1 = \alpha X_2 T, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Les points du côté OC_0 sont donc après transformation sur la droite d'équation $x_1 = \alpha x_2 T$.
Tous les points du côté C_0B_0 ont pour coordonnées $(X_1, \eta, 0)$ avec $0 \leq X_1 \leq \eta$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x_1 = \alpha\eta T + X_1, \\ x_2 = \eta, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Les points du côté C_0B_0 sont tous translatés selon $\underline{e}_1$ d'une valeur $\eta\alpha T$.
Tous les points du côté A_0B_0 ont pour coordonnées $(\eta, X_2, 0)$ avec $0 \leq X_2 \leq \eta$. Après transformation, les coordonnées de ces points deviennent

$$\begin{cases} x_1 = \alpha X_2 T + \eta = \eta + \alpha T x_2, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Les points du côté A_0B_0 sont donc après transformation sur la droite d'équation $x_1 = \eta + \alpha T x_2$.

Pour calculer l'accroissement de la longueur de la diagonale OB_0, nous allons exploiter les définitions mêmes des tenseurs de dilatation ou de déformations de Green Lagrange et leurs expressions données précédemment. Les termes sur la diagonales de ces tenseurs caractérisent les accroissements de longueur.

La dilatation subie par un élément infinitésimal de matière $\underline{\mathrm{d}M_0}$ de longueur $\mathrm{d}\ell_0$ de direction unitaire $\underline{n}_0$ au cours d'une transformation quelconque est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\ell^2}{\mathrm{d}\ell_0^2} = \underline{n}_0 . \underline{\underline{C}} . \underline{n}_0,$$

ou dl désigne la longueur du vecteur infinitésimal $\underline{\mathrm{d}M}$ transformé de $\underline{\mathrm{d}M_0}$

Soit encore en notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\frac{\mathrm{d}\ell^2}{\mathrm{d}\ell_0^2} = n_{0\alpha}\, C_{\alpha\beta}\, n_{0\beta},$$

On a également la relation suivante en introduisant le tenseur des déformations de Green Lagrange $\underline{\underline{E}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\ell^2 - \mathrm{d}\ell_0^2}{\mathrm{d}\ell_0^2} = 2\, \underline{n}_0 . \underline{\underline{E}} . \underline{n}_0 = 2\, n_{0_\alpha}\, E_{\alpha\beta}\, n_{0_\beta},$$

Dans le cas considéré d'une transformation homogène, ces relations restent vraies pour toute longueur non nécéssairement inifinitésimale. C'est le cas de l'exercice.

Dans le cas de la diagonale OB_0, le vecteur unitaire $\underline{n}_0$ (de norme 1) est

$$\underline{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2),$$

Le carré de la dilatation de longueur subie par la diagonale du carré a alors pour expression :

$$\frac{||OB||^2}{||OB_0||^2} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & \alpha t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha T}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha T}{\sqrt{2}} + \frac{(\alpha T)^2 + 1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha T}{2} + \frac{\alpha T}{2} + \frac{(\alpha T)^2 + 1}{2} = 1 + \alpha T + \frac{(\alpha T)^2}{2}$$

De la même manière si cette fois on exploite le tenseur de Green Lagrange, on a

$$\frac{||OB||^2 - ||OB_0||^2}{||OB_0||^2} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha t}{2} & 0 \\ \frac{\alpha t}{2} & \frac{(\alpha t)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha t}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha t}{2\sqrt{2}} + \frac{(\alpha t)^2}{2\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2}$$

Ce résultat peut être vérfié géométriquement sur la figure (avec la relation de Pythagore) :

$$\begin{cases} ||OB_0||^2 = 2\eta^2, \\ ||OB||^2 = (\eta + \alpha\eta T)^2 + \eta^2 = \eta^2 \left(2 + \alpha^2 T^2 + 2\alpha T\right), \end{cases}$$

d'où
$$\frac{||OB||^2 - ||OB_0||^2}{||OB_0||^2} = \frac{\eta^2\left(2+\alpha^2T^2+2\alpha T\right) - 2\eta^2}{2\eta^2} = \alpha T + \frac{\alpha^2 T^2}{2}.$$
Pour déterminer la variation angulaire entre les vecteurs OA et OC transformés à l'instant $t = T$ de OA_0 et OC_0, nous exploitons maintenant la relation générale :

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta_0 + 2E_{\alpha\beta}n_{0_\alpha}\tau_{0_\beta}}{\sqrt{1+2E_{\alpha\beta}n_{0_\alpha}n_{0_\beta}}\sqrt{1+2E_{\alpha\beta}\tau_{0_\alpha}\tau_{0_\beta}}}$$

en notant θ (respectivement θ_0) l'angle complémentaire à l'angle entre OA et OC (respectivement à l'angle entre OA_0 et OC_0), $\underline{n}_0$ et $\underline{\tau}_0$ les vecteurs unitaires des directions OA_0 et OC_0
On applique ici ces formules avec $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ (direction de OA_0), $\underline{\nu}_0 = \underline{e}_2$ (direction de OC_0) et $\theta_0 = 0$.

On en déduit :
$$\sin\theta = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}} = \frac{\alpha T}{\sqrt{1+(\alpha T)^2}}.$$
Là encore cette expression peut être retrouvée géométriquement en appliquant le théorème de Pythagore.

4. On considère à l'instant $t = 0$ le cube dont une face est le carré $OA_0B_0C_0$. Quel est le transformé de ce cube à l'instant $t = T$? Déterminer la variation de volume de ce cube entre l'état déformé et non déformé en exploitant la formule de transport d'un élément de volume.

D'après la formule de transport d'un élément de volume inifinitésimal, on a

$$\mathrm{d}\Omega = \det\underline{\underline{F}}\,\mathrm{d}\Omega_0$$

Puisque $\det\underline{\underline{F}} = 1$, on a $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega_0$, donc $\Omega = \Omega_0$, le cube ne subit aucune variation de volume dans la transformation.

On notera ici que le transformation étant homogène la formule de transport d'un élément de volume inifinitésimal est ici vraie pour tout volume quelconque (pas nécessairement inifinitésimal), soit ici directement $\Omega = (\det\underline{\underline{F}})\,\Omega_0$.

5. Établir la formule suivante de transport d'un élément de surface orienté $\mathrm{d}S_0$ de normale $\underline{n}_0$ de la configuration initiale en un élément $\mathrm{d}S$ de normale $\underline{n}$ de la configuration courante :

$$\underline{n}\,\mathrm{d}S = \det(\underline{\underline{F}})^T\underline{\underline{G}}\,\underline{n}_0\,\mathrm{d}S_0.$$

On formera le produit vectoriel $\underline{\mathrm{d}x}\wedge\underline{\delta x}$ où $\underline{\mathrm{d}x}$ et $\underline{\delta x}$ sont des éléments matériels infinitésimaux issus du point M et on exploitera l'expression indicielle suivante du déterminant d'un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 :

$$\varepsilon_{ijk}\det(\underline{\underline{A}}) = \varepsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} = \varepsilon_{pqr}A_{pi}A_{qj}A_{rk}.$$

En déduire l'aire du carré $OABC$ déformé de $OA_0B_0C_0$. Vérifier le résultat géométriquement.

Le point de départ est d'écrire la relation
$$\underline{n}\,\mathrm{d}S = \underline{\mathrm{d}x}\wedge\underline{\delta x}.$$
En utilisant le tenseur $\underline{\underline{F}}$, on obtient ensuite

$$\underline{n}\,\mathrm{d}S = \left(\underline{\underline{F}}\,\underline{\mathrm{d}X}\right)\wedge\left(\underline{\underline{F}}\,\underline{\delta X}\right),$$

d'où
$$n_i\,\mathrm{d}S = \varepsilon_{ijk}\left(\underline{\underline{F}}\,\underline{\mathrm{d}X}\right)_j\left(\underline{\underline{F}}\,\underline{\delta X}\right)_k = \varepsilon_{ijk}F_{jm}\left(\underline{\mathrm{d}X}\right)_m F_{kl}\left(\underline{\delta X}\right)_l = \varepsilon_{ijk}F_{jm}\,\mathrm{d}X_m\,F_{kl}\,\delta X_l.$$
En multipliant cette équation par F_{ip} de chaque côté de l''egalité, on obtient

$$F_{ip}\,n_i\,\mathrm{d}S = \varepsilon_{ijk}F_{ip}F_{jm}\,\mathrm{d}X_m\,F_{kl}\,\mathrm{d}X_l$$

et compte tenu de la relation
$$\varepsilon_{ijk}\det(\underline{\underline{A}}) = \varepsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} = \varepsilon_{pqr}A_{pi}A_{qj}A_{rk},$$

on peut écrire

$$F_{ip}\, n_i \,\mathrm{d}S = \varepsilon_{pml} \det(\underline{\underline{F}}\,)\; \mathrm{d}X_{\,m}\, \delta X_l = \det(\underline{\underline{F}}\,)\,[\underline{\mathrm{d}X} \wedge \underline{\delta X}]_p\,,$$

ou encore

$$\left({}^T\underline{\underline{F}}\,\right)_{pi}\, n_i\,\mathrm{d}S = \det(\underline{\underline{F}}\,)\,[\underline{\mathrm{d}X} \wedge \underline{\delta X}]_p\,.$$

On peut donc écrire

$${}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{n}\,\mathrm{d}S = \det(\underline{\underline{F}}\,)\underline{n}_0\,\mathrm{d}S_0,$$

d'où

$$\underline{n}\,\mathrm{d}S = \det(\underline{\underline{F}}\,)({}^T\underline{\underline{F}}\,)^{-1}\underline{n}_0\,\mathrm{d}S_0 = \det(\underline{\underline{F}}\,)({}^T\underline{\underline{G}}\,)\,\underline{n}_0\,\mathrm{d}S_0.$$

En exploitant cette formule avec $\underline{n}_0 = \underline{e}_3$, comme $\det\underline{\underline{F}}\, = 1$ et en exploitant les expressions des composantes du tenseur $\underline{\underline{G}}\,$, on obtient alors

$$\underline{n}\,\mathrm{d}S = ({}^t\underline{\underline{G}}\,)\underline{e}_3\,\mathrm{d}S_0 = \underline{e}_3\,\mathrm{d}S_0.$$

Il n'y a donc pas de variation d'aire du carré $OA_0B_0C_0$ et la normale à la surface transfomée reste $\underline{e}_3$.