Elasticité

Exercice d'entrainement

Soit un milieu qui occupe dans sa configuration non déformée le domaine parallélépipèdique $0 \leq X_1 \leq L_1$, $0 \leq X_2 \leq L_2$, $0 \leq X_3 \leq L_3$ rapporté au repère orthonomé $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ. Le solide est encastré dans un bâti rigide fixe (vecteur déplacement nul) sur toutes ses faces excepté la face $X_3 = L_3$. Cette surface est soumise à un effort de pression réparti $-p\,\underline{e}_3$. Les efforts volumiques sont négligés. Sous ce chargement, la pièce est en équilibre et l'hypothèse des petites transformations est supposée satisfaite.
On recherche le champ de déplacement sous la forme $\underline{\xi}(\underline{X}) = \xi(X_3)\,\underline{e}_3$.

- Justifier la forme du champ de déplacement proposée pour ce problème.
- Montrer que la fonction $\xi(X_3)$ vérifie nécessairement la condition aux limites $\xi(X_3 = 0) = 0$ pour conduire à une solution du problème.
- Etablir l'équation différentielle que doit nécessairement satisfaire la fonction $\xi(X_3)$ pour que le champ de déplacement proposé puisse être solution du problème.
- En déduire que la fonction $\xi(X_3)$ est nécessairement une fonction linéaire de X_3.
- Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu associé à ce champ de déplacement.
- Traduire les conditions aux limites en efforts sur la face $X_3 = L_3$.
- En déduire l'expression du champ de déplacement solution $\underline{\xi}(\underline{X}) = -p/(\lambda + 2\mu)\,X_3\,\underline{e}_3$.
- Calculer les densités d'efforts surfaciques exercées sur les faces $X_1 = 0$, $X_1 = L_1$ et $X_2 = 0$, $X_2 = L_2$. Interpréter la nature de ces efforts et les représenter

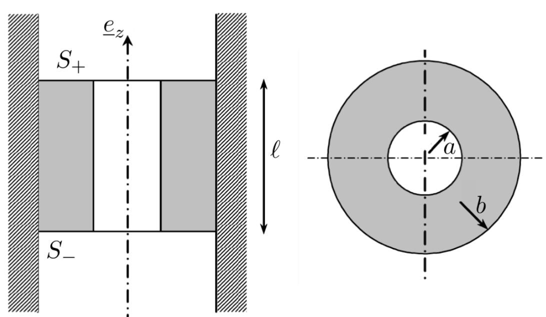
---

Extraction d'un bouchon

Un bouchon $(\mathcal{D})$ cylindrique de révolution, d'axe $O\vec{e}_z$, de rayon intérieur a, de rayon extérieur b ($b > a$), de longueur ℓ, limité par deux sections droites S_- et S_+ d'équations respectives $z = -\ell/2$ et $z = +\ell/2$, est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ.

Ce bouchon est collé sur la surface S_b d'équation $r = b$ à un tube rigide fixe. Les sections droites S_- et S_+ sont soumises à des densités d'efforts surfaciques telles que le torseur des efforts sur chacune des deux couronnes soit nul.

On cherche à extraire le bouchon en exerçant sur la surface latérale intérieure S_a d'équation $r = a$ une densité surfacique d'effort $\dfrac{\mathcal{F}}{2\pi a \ell}\,\vec{e}_z$ où $\mathcal{F}$ est une constante positive donnée. Les forces volumiques sont négligées.



1. Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'équilibre du bouchon.
2. On recherche un champ de déplacements solution de ce problème de la forme $\underline{\xi}(r, \theta, z) = \xi(r)\underline{e}_z$.
   Expliciter l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction $\xi(r)$.
   Intégrer cette équation.
3. Déterminer un couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ solution du problème.
4. En quels points du bouchon la contrainte tangentielle maximale τ_{max} atteint-elle sa plus grande valeur?
5. On suppose que la condition d'adhésion le long de S_b est vérifiée tant que :
   $$\tau_{max} < \tau^* \quad \text{en} \quad r = b \quad \text{avec } \tau^* \text{ constante positive donnée,}$$
   (Le bouchon glisse le long de cette paroi dès que l'égalité est atteinte).
   Calculer alors l'effort minimum $\mathcal{F}_{min}$ que l'on doit exercer pour pouvoir extraire le bouchon.