

Exercice 1 : Tenue d'un réservoir cylindrique en pression

On considère un tube cylindrique de génératrices parallèles à l'axe \underline{e}_3 , de longueur L , de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e , avec $r_i < r_e$. Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope. On désigne par (λ, μ) les coefficients de Lamé et (E, ν) les modules de Young et coefficient de Poisson.

On cherche à étudier la tenue du tube en équilibre sous les sollicitations suivantes :

- ★ la paroi intérieure $r = r_i$ est soumise à un effort surfacique de pression p_i ,
- ★ la paroi latérale extérieure $r = r_e$ est libre d'effort,
- ★ les sections droites terminales $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ sont également libres d'efforts,
- ★ les efforts volumiques sont négligeables.
- ★ le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est justifié.

1. Écrire les équations et conditions aux limites du problème.

Les efforts volumiques étant négligeables, l'équation d'équilibre local s'écrit en tout point de la pièce

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0},$$

Le matériau étant élastique linéaire, isotrope et homogène, la loi de comportement est la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{Trace} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}},$$

où le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement et a pour expression

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\xi} + {}^t \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\xi} \right).$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}, & \text{sur la section } z = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}, & \text{sur la section } z = L, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_r) = -p_i(-\underline{e}_r), & \text{sur la surface latérale interne } r = r_i, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r = \underline{0}, & \text{sur la surface latérale externe } r = r_e, \end{cases}$$

2. Déterminer les éléments de réduction au point O des torseurs associés aux efforts extérieurs appliqués. Commenter.

Les éléments de réduction du torseur des efforts volumiques sont donnés par les relations

$$\begin{cases} \underline{R}_f = \iiint_{\Omega} \underline{f} \, d\omega \\ \underline{M}_f(O) = \iiint_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{f} \, d\omega. \end{cases}$$

et sont donc nuls ($\underline{R}_f = \underline{0}$ et $\underline{M}_f(O) = \underline{vect}0$), les efforts volumiques étant négligés.

Les éléments de réduction des torseurs associés aux efforts surfaciques extérieurs appliqués sur une surface S sont définis par

$$\begin{cases} \underline{R} = \iint_S \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \, dS, \\ \underline{M}(O) = \iint_S \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \, dS. \end{cases}$$

Les densités surfaciques d'effort étant nulles sur les surfaces $x_3 = 0$, $x_3 = L$ et $r = r_e$, les résultantes et moments sont nuls.

Les éléments de réduction du torseur des efforts surfaciques appliqués sur la surface $r = r_i$ sont donnés par les relations

$$\begin{cases} \underline{R} = \iint_S \underline{\underline{\sigma}} (-\underline{e}_r) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^L p_i \underline{e}_r r_i \, d\theta \, dz = p_i r_i L \int_0^{2\pi} (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) \, d\theta = \underline{0}, \\ \underline{M}(O) = \iint_S \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^L (r_i \underline{e}_r + z \underline{e}_z) \wedge p_i \underline{e}_r r_i \, d\theta \, dz = \frac{1}{2} p_i r_i L^2 \int_0^{2\pi} \underline{e}_\theta \, d\theta = \underline{0}. \end{cases}$$

On retrouve bien l'équilibre global de la pièce : la somme des résultantes des efforts extérieurs exercés sur la pièce est nulle, ainsi que les moments en un point $\underline{R} = \underline{M}(O) = \underline{0}$. On aurait pu exploiter cette propriété pour obtenir les éléments de réduction du torseur des efforts surfaciques appliqués sur la surface $r = r_i$ sans faire de calcul.

3. En utilisant l'égalité suivante : $\text{rot}(\text{rot } \underline{\xi}) = \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) - \Delta \underline{\xi}$, où rot , div , grad et Δ désignent respectivement les opérateurs rotationnel, divergence, gradient et laplacien d'un vecteur, montrer que le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ doit nécessairement vérifier l'équation suivante en tout point du tube :

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) - \mu \text{rot}(\text{rot } \underline{\xi}) = \underline{0}.$$

Pour établir cette équation (équation de Lamé) on explicite les équations d'équilibre et loi de comportement en indicel.

$$\begin{cases} \text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}, \\ \underline{\sigma} = \lambda \text{Trace } \underline{\varepsilon} \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon}, \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{\xi} + {}^t \text{grad } \underline{\xi}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\xi_{i,j} + \xi_{j,i}). \end{cases}$$

En introduisant dans l'équation d'équilibre la relation de comportement et en exploitant le fait que le milieu est homogène (les coefficients de Lamé sont constants), on obtient

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \xi_{k,kj} \delta_{ij} + \mu (\xi_{i,jj} + \xi_{j,ij}) = (\lambda + \mu) [\text{grad}(\text{div } \underline{\xi})]_i + \mu [\Delta \underline{\xi}]_i,$$

ou encore en notation intrinsèque (l'équation de Lamé est vraie dans tout système de coordonnées orthonormées)

$$\text{div } \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi},$$

d'où en exploitant la relation $\text{rot}(\text{rot } \underline{\xi}) = \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) - \Delta \underline{\xi}$ (relation établie au TD1 de calcul indicel) :

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} = (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) - \mu \text{rot}(\text{rot } \underline{\xi}) = \underline{0}.$$

4. Les symétries géométriques et mécaniques (matériau et chargement) du problème incitent à rechercher le champ de déplacements dans le tube sous la forme :

$$\underline{\xi}(r, z) = r f(r) \underline{e}_r + g(z) \underline{e}_z,$$

dans le système des coordonnées cylindriques $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Montrer que sous cette hypothèse le champ de déplacement vérifie nécessairement en tout point du tube :

$$\text{div } \underline{\xi}(r, \theta, z) = \text{constante}.$$

En déduire les formes de $f(r)$ et $g(z)$.

En recherchant la solution sous la forme $\underline{\xi}(r, z) = r f(r) \underline{e}_r + g(z) \underline{e}_z$, on a obligatoirement $\text{rot } \underline{\xi} = \underline{0}$ (voir formulaire).

On en déduit immédiatement que $\text{grad}(\text{div } \underline{\xi}) = \underline{0}$ et ainsi que $\text{div } \underline{\xi} = \text{constante}$ en tout point de la pièce.

Explicitons maintenant les équations différentielles satisfaites par les fonctions $f(r)$ et $g(z)$ en traduisant $\text{div } \underline{\xi} = \text{constante}$ en tout point de la pièce. D'après le formulaire, on a en tout point

$$\text{div } \underline{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial [r^2 f(r)]}{\partial r} + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) + \frac{dg(z)}{dz}.$$

De sorte que en tout point, en exploitant le fait que les fonctions $f(r)$ et $g(z)$ sont à variables séparées

$$r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) = C \quad \text{et} \quad \frac{dg(z)}{dz} = C'.$$

où C et C' sont des constantes.

Considérons tout d'abord l'équation satisfaite par $f(r)$.

La solution se décompose en une partie associée à la solution $f^h(r)$ de l'équation homogène (avec second membre nul) et une

solution particulière $f^p(r)$.

La solution $f^h(r)$ de l'équation homogène vérifie :

$$\frac{df^h(r)}{f^h(r)} = -\frac{2dr}{r}$$

soit encore

$$\ln f^h(r) = -2 \ln r + \text{Cte} = \ln \frac{1}{r^2} + \text{Cte}.$$

de sorte que

$$f^h(r) = \frac{a}{r^2} + b.$$

où a et b sont des constantes quelconques.

Une solution particulière $f^p(r)$ s'obtient avec la méthode de la variation de la constante, ou encore directement ici $f^p(r) = c$, avec c une constante quelconque.

De sorte que la fonction $f(r) = f^h(r) + f^p(r)$ est de la forme générale :

$$f(r) = \frac{a}{r^2} + b.$$

où a et b sont des constantes quelconques.

La fonction $g(z)$ s'obtient par simple intégration sous la forme :

$$g(z) = cz + d.$$

où c et d sont des constantes quelconques.

Le vecteur déplacement solution du problème est donc recherché sous la forme suivante

$$\underline{\xi}(r, z) = rf(r)\underline{e}_r + g(z)\underline{e}_z = \left(\frac{a}{r} + br\right)\underline{e}_r + (cz + d)\underline{e}_z.$$

où a, b, c et d sont des constantes quelconques.

Cette forme assure que le tenseur des contraintes associé par la loi de Hooke satisfait les équations d'équilibre du problème.

5. Déterminer les composantes du tenseur des déformations et des contraintes dans la base des coordonnées cylindriques. On s'assurera que le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = C,$$

où A, B, C sont des constantes, les autres composantes étant nulles.

Connaissant la forme générale du vecteur déplacement, on peut maintenant former les expressions du tenseur des déformations linéarisées. Les composantes non nulles du tenseur des déformations ont pour expressions en exploitant le formulaire

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{a}{r} + br \right) = -\frac{a}{r^2} + b, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\xi_r}{r} = \frac{a}{r^2} + b, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = c.$$

En exploitant la loi de Hooke, on peut alors former les expressions des composantes non nulles du tenseur des contraintes

$$\sigma_{rr} = \lambda(2b + c) + 2\mu b - 2\mu \frac{a}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda(2b + c) + 2\mu b + 2\mu \frac{a}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = 2\lambda b + (\lambda + 2\mu)c.$$

et donc

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = C,$$

avec les relations suivantes entre les constantes

$$A = \lambda(2b + c) + 2\mu b, \quad B = 2\mu a, \quad C = 2\lambda b + (\lambda + 2\mu)c.$$

6. Traduire les conditions aux limites et achever la résolution du problème. On explicitera les champ de déplacement, de déformations et de contraintes solutions.

Sur les surfaces $z = 0$ et en $z = L$, la condition aux limites de bord libre s'écrit pour tout r ($r_i < r < r_e$) et tout θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) :

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(r, \theta, z = 0) = 0, & \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = 0) = 0, & \sigma_{zz}(r, \theta, z = 0) = 0, \\ \sigma_{rz}(r, \theta, z = L) = 0, & \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) = 0, & \sigma_{zz}(r, \theta, z = L) = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de l'expression du tenseur des contraintes, cette condition est satisfaite si $C = 0$.

Les conditions aux frontières sur les surfaces latérales $r = r_i$ et $r = r_e$ du cylindre s'écrivent pour tout θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) et tout z ($0 < z < L$) :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r = r_i, \theta, z) &= -p_i, & \sigma_{r\theta}(r = r_i, \theta, z) &= 0, & \sigma_{rz}(r = r_i, \theta, z) &= 0, \\ \sigma_{rr}(r = r_e, \theta, z) &= 0, & \sigma_{r\theta}(r = r_e, \theta, z) &= 0, & \sigma_{rz}(r = r_e, \theta, z) &= 0, \end{aligned}$$

et sont donc satisfaites si les constantes A, B et C qui interviennent dans la forme générale du tenseur des contraintes sont données par :

$$A = \tilde{p}_i, \quad B = r_e^2 \tilde{p}_i, \quad C = 0, \quad \text{avec} \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}.$$

Le tenseur des contraintes ainsi obtenu est la solution exacte du problème posé. Il satisfait l'ensemble des équations et conditions aux limites du problème.

Les composantes du tenseur des déformations linéarisées sont obtenues à partir de la loi de Hooke exprimée sous forme inverse :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}},$$

d'où

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\tilde{p}_i}{E} \left[1 - \nu - (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right], \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\tilde{p}_i}{E} \left[1 - \nu + (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right], \quad \varepsilon_{zz} = -2\nu \frac{\tilde{p}_i}{E}.$$

Le vecteur déplacement s'obtient en procédant par identification avec les expressions du tenseur des déformations linéarisées. On a :

$$\xi_r = \left(\frac{a}{r} + b r \right), \quad \text{et donc} \quad \varepsilon_{rr} = -\frac{a}{r^2} + b = \frac{\tilde{p}_i}{E} \left[1 - \nu - (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right].$$

$$\xi_z = (c z + d), \quad \text{et donc} \quad \varepsilon_{zz} = c = -2\nu \frac{\tilde{p}_i}{E}.$$

d'où

$$a = (1 + \nu) r_e^2 \frac{\tilde{p}_i}{E}, \quad b = (1 - \nu) \frac{\tilde{p}_i}{E}, \quad c = -2\nu \frac{\tilde{p}_i}{E}.$$

Ces constantes permettent bien de vérifier l'expression de la composante $\varepsilon_{\theta\theta}$:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\xi_r}{r} = \frac{\tilde{p}_i}{E} \left[1 - \nu + (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right]$$

Le vecteur déplacement a donc pour expression

$$\underline{\underline{\xi}} = \left(\frac{\tilde{p}_i}{E r} [(1 + \nu) r_e^2 + (1 - \nu) r^2] \right) \underline{\underline{e}}_r + \left(-2\nu \frac{\tilde{p}_i}{E} z + d \right) \underline{\underline{e}}_z$$

Ce vecteur déplacement est une solution du problème posé. On remarque que la constante d reste indéterminée. La solution du problème en déplacement n'est pas unique, elle est définie à une translation près selon $\underline{\underline{e}}_z$.

7. Quelles sont les valeurs des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en un point quelconque du tube ? On suppose que le tube reste élastique tant que le critère de la contrainte tangentielle maximale est respecté, soit :

$$\text{Sup}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) < \sigma_s,$$

où σ_s désigne la limite d'élasticité du matériau.

En quels points, le critère est-il atteint en premier lieu ?

En déduire la valeur limite de la pression à partir de laquelle le tube sort du domaine élastique.

Tracer l'évolution de cette pression limite en fonction du rapport r_e/r_i .

Mettre en évidence sur ce tracé que le fait d'accroître l'épaisseur du tube permet d'augmenter la pression supportable par le tube. Montrer également l'existence d'une pression limite au delà de laquelle aucun tube, si épais soit-il, ne peut rester élastique.

Le tenseur des contraintes est diagonale dans le repère de coordonnées cylindriques. On a :

$$\sigma_{rr} = \tilde{p}_i \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \tilde{p}_i \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right], \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ avec } \tilde{p}_i = \frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

Comme $\tilde{p}_i > 0$ et $r_i \leq r \leq r_e$, la contrainte σ_{rr} est toujours négative et la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est toujours positive. On peut donc ranger les contraintes principales par ordre croissant :

$$\sigma_I = \sigma_{rr} < \sigma_{II} = \sigma_{zz} < \sigma_{III} = \sigma_{\theta\theta}.$$

Les directions principales associées sont

$$\underline{e}_I = \underline{e}_r, \quad \underline{e}_{II} = \underline{e}_z, \quad \underline{e}_{III} = \underline{e}_\theta.$$

Compte tenu des signes des contraintes principales, on obtient l'expression en tout point de la pièce de la contrainte tangentielle maximale

$$\|\underline{\sigma}_T\|_{max} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} = \tilde{p}_i \frac{r_e^2}{r^2} = \frac{p_i r_i^2 r_e^2}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}$$

ou encore

$$\text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|) = 2\|\underline{\sigma}_T\|_{max} = |\sigma_I - \sigma_{III}| = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\tilde{p}_i \frac{r_e^2}{r^2} = \frac{2p_i r_i^2 r_e^2}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}.$$

La contrainte tangentielle maximale atteint son maximum pour les plus faibles valeurs de r , c'est-à-dire pour $r = r_i$ et vaut

$$\|\underline{\sigma}_T\|_{max} = \frac{p_i r_i^2 r_e^2}{r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)} = \frac{p_i r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2)}$$

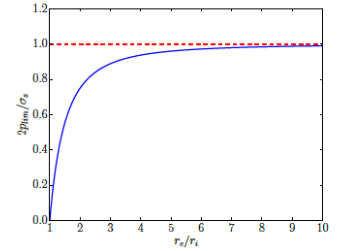
La limite d'élasticité étant donnée par la relation $2\|\underline{\sigma}_T\|_{max} < \sigma_s$, le tube reste dans le domaine élastique tant que :

$$\frac{2p_i r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} < \sigma_s,$$

et donc tant que la pression p_i reste inférieure à une pression limite p_{lim}

$$p_i < p_{lim} = \frac{r_e^2 - r_i^2}{2r_e^2} \sigma_s = \frac{\sigma_s}{2} \left[\frac{(r_e/r_i)^2 - 1}{(r_e/r_i)^2} \right].$$

L'évolution de la pression limite en fonction du rapport r_e/r_i est tracée à la figure ci-contre. On observe donc que plus l'épaisseur du tube augmente (r_e/r_i augmente), plus la valeur de la pression limite augmente. Toutefois, la pression limite ne peut pas dépasser la limite $\sigma_s/2$, quelle que soit la valeur de l'épaisseur. Rien ne sert d'augmenter fortement l'épaisseur du tube, on n'augmentera pas pour autant sa capacité à tenir le chargement de pression.



8. On suppose maintenant le tube mince, c'est à dire :

$$e = r_e - r_i \ll R = \frac{r_e + r_i}{2}$$

montrer que la contrainte circonférentielle est donnée par la formule suivante, appelée formule des tonneliers :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i R}{e} \quad (1)$$

Les rayons r_i et r_e sont donnés par les relations $r_i = R - e/2$ et $r_e = R + e/2$. La contrainte orthoradiale a pour expression

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i (R - e/2)^2}{(R + e/2)^2 - (R - e/2)^2} \left[1 + \frac{(R + e/2)^2}{r^2} \right] \approx \frac{p_i R}{2e} \left[1 + \frac{R^2 + eR}{R^2} \right] \approx \frac{p_i R}{e}.$$