Cinématique - Descriptions lagrangienne et eulérienne

Pré-requis à travailler en autonomie

- *Avoir travaillé, appris le cours - chapitres 1 et 2 et mis en fiche les éléments essentiels.*
- *Revoir les méthodes d'intégration de systèmes différentiels du premier ordre.*
- *Connaître les équations des courbes classiques : droite, cercle, ellipse, parabole, hyberbole.*
- *Exercice d'auto-évaluation.*

a. Donner l'équation générale d'un cercle dans le plan $(0, x, y)$ centré au point $A : (x_A, y_A)$ et de rayon R et l'équation d'une ellipse dans le plan $(0, x, y)$ de demi grand axe a et de demi petit axe b centrée au point A.

b. Donner l'équation cartésienne d'une parabole dans le plan $(0, x, y)$ tangente au point $O : (0, 0)$ d'axe de symétrie $(0, y)$ et la représenter. Reprendre la question avec une parabole dans le plan $(0, x, y)$ tangente au point $O : (0, 0)$ d'axe de symétrie $(0, x)$.

c. Donner l'équation cartésienne d'une hyperbole d'asymptotes $y = -(b/a)\,x$ et $y = +(b/a)\,x$ dans le plan $(0, x, y)$ et la représenter.

d. Reconnaître la conique d'équation $x\,y = C$, où C est une constante non nulle.

e. Reconnaître la conique d'équation $x^2/16 - y^2/9 = 1$ et la représenter. Reprendre la question avec $x^2/16 - y^2/9 = -1$.

f. Reconnaître la conique d'équation $x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y = 0$ et la représenter.

g. Résoudre le système différentiel suivant où a une constante réelle donnée :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a\,x_2(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a\,x_1(t), \quad \textit{avec les conditions initiales } \; x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

h. Donner la solution générale du système différentiel suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2(t) + x_3(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\,x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_3(t).$$

i. Donner la solution générale du système différentiel suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2\,x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -\,x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t).$$

Exercice 1 : On considère le mouvement plan d'un milieu continu défini par la représentation du champ des vitesses en description eulérienne :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \alpha\,(\,x_1 \underline{e}_1 - x_2\,\underline{e}_2)$$

exprimé dans la base cartésienne $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, α étant un scalaire constant supposé positif. On désigne par $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les composantes à l'instant t courant du vecteur position de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ à l'instant $t = 0$.
Le milieu occupe à l'instant t le domaine $\Omega(t)$ défini par $x_1 > 0$, $x_2 > 0, x_3$ quelconque.

1 Déterminer les lignes de courant de l'écoulement et les représenter.

Calculer de deux façons différentes le champ des accélérations $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne.

2 Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement. On désignera par $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ la position à l'instant $t = 0$ de la particule considérée.

Expliciter les expressions de la vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et de l'accélération lagrangienne $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ en utilisant deux méthodes différentes.

3 En déduire l'équation de la trajectoire de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (1, 1, 0)$ à l'instant $t = 0$ et la représenter.

Exercice 2 : Le mouvement d'un milieu continu est défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(\underline{X},t) &= X_1 \cos[\omega(R)\,t\,] - X_2 \sin[\omega(R)\,t\,], \\ x_2(\underline{X},t) &= X_1 \sin[\omega(R)\,t\,] + X_2 \cos[\omega(R)\,t\,], \\ x_3(\underline{X},t) &= X_3, \end{aligned}$$

où $\underline{x}$ et $\underline{X}$ désignent respectivement les positions d'une même particule du milieu continu à des instants t et $t=0$ et où $\omega(R)$ est une fonction régulière de la variable $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

1 Calculer la vitesse lagrangienne du mouvement $\underline{V}(\underline{X},t)$.

Donner l'expression de l'accélération lagrangienne du mouvement $\underline{\Gamma}(\underline{X},t)$.

2 Expliciter la description eulérienne de la vitesse du mouvement $\underline{v}(\underline{x},t)$.

Calculer l'accélération eulérienne du mouvement $\underline{\gamma}(\underline{x},t)$ de plusieurs façons différentes.

3 Etablir l'équation des trajectoires, ainsi que celles des lignes de courant. Commenter.