Modèle discret d'un pétrolier soumis à la houle

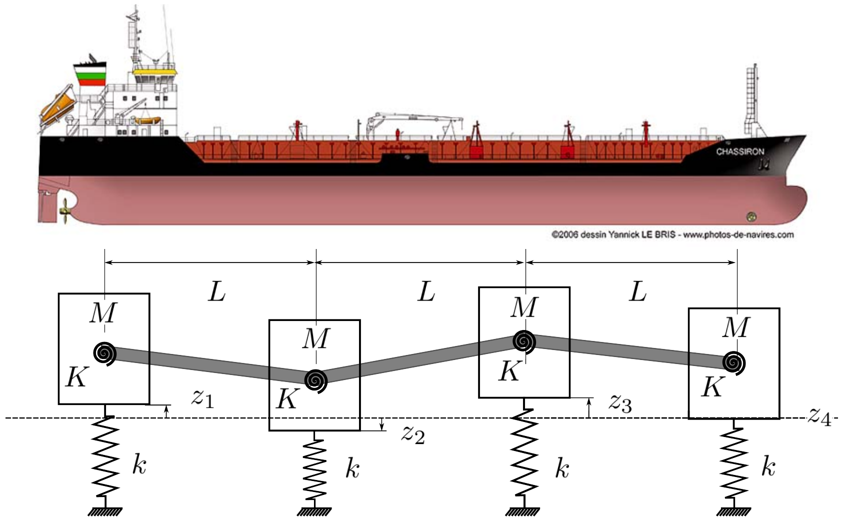


FIGURE 1 – Modèle du pétrolier à 4 degrés de liberté

L'objectif du problème est de modéliser simplement les déformations dynamiques d'un pétrolier sous l'action des vagues.

Le pétrolier est constitué d'une partie arrière hébergeant le château surmontant la salle des machines, et d'une partie avant contenant les réservoirs à pétrole.

Modélisation

Inerties

Pour le modèle on décompose le navire en 4 compartiments : le compartiment arrière (machines et château) et 3 réservoirs à pétrole. On suppose pour simplifier que les 4 compartiments ont une masse M identique. En effet, lorsqu'elles ne sont pas chargées de pétrole, les cales sont généralement remplies d'eau de mer et l'on peut considérer qu'un réservoir plein a une masse identique à celle du compartiment arrière. Comme indiqué par le dessin ci-dessus, les 4 éléments du modèle ont des dimensions identiques et leur centres sont séparés d'une distance L. On suppose que **leur déplacement est seulement vertical** et on note les déplacements mesurés par rapport à la position d'équilibre statique z_1, z_2, z_3 et z_4. Le vecteur des coordonnées généralisées est noté $\mathbf{z}$

1. Calculer l'énergie cinétique T du pétrolier
   [Solution]
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2\right)$$

2. En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$ du système.
   [Solution]
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

Raideurs

Les mécanismes qui rappellent le pétrolier à sa position d'équilibre sont de deux natures : la flottabilité et la raideur de structure.

Flottabilité : La poussée d'Archimède et le poids se combinent pour ramener indépendamment les 4 compartiments à leur position d'équilibre ($z_i = 0$). Pour modéliser cet effort de rappel, on affecte à chaque compartiment une raideur notée k.

La force de rappel s'écrit pour un compartiment : $F = (\rho_0 V - M)g$ avec :

— $V = S(z + z_0)$ = volume immergé du compartiment (z_0= Position statique)

— S = section horizontale du compartiment.

— ρ_0 = masse volumique de l'eau de mer.

3. Quelle est l'expression de k ?
   [Solution]
$$F = (\rho_0 S(z + z_0) - M)g \Leftrightarrow k = \rho_0 S g$$
   Le terme de pesanteur disparait lorsqu'on utilise la position z mesurée par rapport à la position d'équilibre statique z_0
4. Écrire l'énergie potentielle de flottabilité des 4 compartiments en fonction de k.
   [Solution]
$$U = \tfrac{1}{2}k\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2\right)$$

5. Quelle est la matrice de raideur de flottabilité $\mathbf{K_f}$?
   [Solution]
$$\mathbf{K_f} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Structure : Les caractéristiques élastiques de la structure du navire tendent à ramener l'ensemble dans un état non déformé ($z_i - z_{i+1} = 0$). Pour modéliser cet effort de rappel, on considère un ressort de torsion de raideur K (Nm/rad).

6. Montrer que la force de rappel induite par un ressort de torsion pour une petite déformation Δz est de la forme indiquée sur la figure(2) :

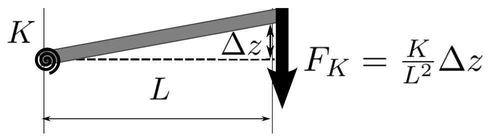


FIGURE 2 – Modèle pour l'effort de structure du pétrolier

   [Solution] Couple de torsion : $\Gamma = K\theta = K\frac{\Delta z}{L} = LF_K$ d'où la force de rappel de structure : $F_K = K\frac{\Delta z}{L^2}$
7. Écrire l'énergie potentielle de structure associée aux ressorts K.
   [Solution]
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(\overbrace{(z_1 - z_2)^2}^{Ressort_1} + \overbrace{(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2}^{Ressort_2} + \overbrace{(z_3 - z_2)^2 + (z_3 - z_4)^2}^{Ressort_3} + \overbrace{(z_3 - z_4)^2}^{Ressort_4}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(2(z_1 - z_2)^2 + 2(z_2 - z_3)^2 + 2(z_3 - z_4)^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(2z_1^2 + 4z_2^2 + 4z_3^2 + 2z_4^2 - 4z_1z_2 - 4z_2z_3 - 4z_3z_4) \end{aligned}$$
8. Quelle est la matrice de raideur de structure $\mathbf{K_s}$?
   [Solution]
$$\mathbf{K_s} = \frac{K}{L^2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Équation du mouvement :

9. En l'absence d'amortissement, quelle équation matricielle décrit le mouvement libre du système ?
   [Solution]
$$\mathbf{M\ddot{z}} + (\mathbf{K_s} + \mathbf{K_f})\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

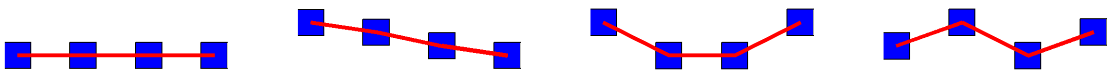
Mouvement libre : Modes et fréquences propres

10. Comment procède-t-on pour identifier les fréquences propres f_j ?
    [Solution] On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques : $z_i(t) = Z_i e^{\jmath\omega t}$. Cela donne le système linéaire :
    $$((\mathbf{K_s} + \mathbf{K_f}) - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{Z} = 0$$
    Il faut s'assurer que les solutions $\mathbf{z}$ sont non nulles en résolvant l'équation aux valeurs propres en ω^4 :
    $$\left|(\mathbf{K_s} + \mathbf{K_f}) - \mathbf{M}\omega^2\right| = 0$$
    On obtient 4 valeurs propres,les pulsations propres $\omega_j (j = 1, ..., 4)$
    Les fréquence propres sont les $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$
11. Comment procède-t-on pour identifier les modes propres associés $\mathbf{Z_j}$?
    [Solution] Pour chacune des racines obtenues ω_j on obtient le vecteur propre associé $\mathbf{Z_j}$ en résolvant l'équation :
    $$((\mathbf{K_s} + \mathbf{K_f}) - \mathbf{M}\omega_j^2)\mathbf{Z_j} = 0$$

Si on considère un pétrolier de 200 000 tonnes, large de 60m et long de 300m, et qu'on donne à la structure une raideur de flexion $K = 10^{11}$ Nm/rad, une résolution numérique du système précédent donne les résultats suivants :

Mode	1	2	3	4
Fréquence propre (Hz)	0.12	0.21	0.34	0.43
	$\mathbf{Z_1}$	$\mathbf{Z_2}$	$\mathbf{Z_3}$	$\mathbf{Z_4}$
Matrice modale $\mathbf{Z}$	1	1	1	-0.4
Modes propres	1	0.4	-1	1
Déformées normalisées	1	-0.4	-1	-1
	1	-1	1	0.4

12. Représenter les 4 modes propres.
    [Solution]



13. Commenter ces modes en fonction de la fréquence associée et des risques vis à vis de la sécurité du navire.
    [Solution]
    — Le mode 1 est un mode de corps rigide (sans déformation élastique), c'est le pompage. Il n'est en rien nuisible au navire. En revanche il est nuisible aux marins sujets au mal de mer !
    — Le mode deux induit une petite déformation, mais il ressemble beaucoup au mode de corps rigide de tangage. Il est peu nuisible au navire, mais beaucoup au marin d'eau douce.
    — Pour le mode 3, on a une déformation importante, les compartiments centraux vibrant en opposition de phase avec les extrémités. 2 points de rupture possibles. Une houle de 0.34Hz est à éviter. Il faut régler la vitesse du navire pour cela.
    — Pour le mode 4, on a une déformation importante, tous les compartiments vibrant en opposition de phase . 3 points de rupture possibles. Une houle de 0.4Hz est à éviter. Il faut régler la vitesse du navire pour cela.
14. Quelle propriété mathématique vérifient les vecteurs propres ?
    [Solution] Les vecteurs propres sont orthogonaux.
15. Mettre en évidence cette propriété pour les vecteurs $\mathbf{Z_1}$ et $\mathbf{Z_2}$
    [Solution] Démonstration

$$\mathbf{Z_1^t M Z_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \\ -0.4 \\ -1 \end{pmatrix} = M(1 \times 1 + 1 \times 0.4 + 1 \times -0.4 + 1 \times -1) = 0$$

Mouvement forcé : Réponse au passage d'un train de houle

La houle est une onde de déplacement se propageant à la surface de la mer, sur des très grandes distances. Elle est engendrée par le vent.

Au passage d'un train de houle, les 4 compartiments subissent chacun un effort vertical F_i.

16. Calculer la puissance des efforts extérieurs.

    [Solution]

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{4} F_i \dot{z}_i$$

17. En déduire le vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$ en fonction des F_i.

    [Solution]

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

18. Écrire l'équation matricielle du mouvement forcé.

    [Solution]

$$\mathbf{M\ddot{z}} + (\mathbf{K_s} + \mathbf{K_f})\mathbf{z} = \mathbf{Q}$$

19. Montrer comment on peut découpler le système dans la base des coordonnées modales notées $\mathbf{p}$.

    [Solution] On substitue aux coordonnées généralisées $\mathbf{z}$ les coordonnées modales $\mathbf{p}$ telles que $\mathbf{z} = \mathbf{Zp}$. L'équation du mouvement forcé devient :

$$\begin{array}{rcl} & \mathbf{MZ\ddot{p}} + \mathbf{KZp} & = \mathbf{Q} \\ \times\mathbf{Z^t} \Leftrightarrow & \mathbf{Z^tMZ\ddot{p}} + \mathbf{Z^tKZp} & = \mathbf{Z^tQ} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M_p\ddot{p}} + \mathbf{K_pp} & = \mathbf{Z^tQ} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{\ddot{p}} + \mathbf{\Delta p} & = \mathbf{M_p^{-1}Z^tQ} \end{array}$$

    La matrice $\mathbf{\Delta}$ est la matrice diagonale des valeurs propres.
    Les matrices $\mathbf{M_p}$ et $\mathbf{K_p}$ sont elles aussi diagonales.
    Les deux dernières équations matricielles sont découplées.

    L'action de la houle est due aux variations locales de la poussée d'Archimède. C'est un phénomène harmonique d'amplitude et de longueur d'onde métriques. Pour une houle de longueur d'onde λ_H, de vitesse relative v_r par rapport au navire, les forces verticales sur chaque compartiment ont une pulsation $\Omega = 2\pi v_r/\lambda_H$ et elles diffèrent seulement par un déphasage φ_i. Pour le compartiment i, situé à la position l_i de l'extrémité du navire, la force due à la houle s'écrit :

$$F_i(t) = F_H e^{\jmath 2\pi \frac{l_i}{\lambda_H}} e^{\jmath\Omega t} = F_H e^{\jmath(\Omega t + \varphi_i)}$$

    Cette expression est donnée pour information ; le seul élément à prendre en compte est que la houle est harmonique de pulsation Ω.

20. Pour ce cas particulier d'excitation, écrire sous forme matricielle, le système découplé qui donne les coordonnées modales $\mathbf{p}$ en fonction du vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$.

    [Solution] Dans le cas d'une excitation harmonique, la réponse est harmonique de même pulsation. On note Ω cette pulsation. L'équation du mouvement dans la base modale devient :

$$(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{M_p^{-1}Z^tQ}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p} = (\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{M_p^{-1}Z^tQ}$$

    ou encore

$$\mathbf{p} = (\mathbf{K_p} - \Omega^2\mathbf{M_p})^{-1}\mathbf{Z^tQ}$$

21. Quelle opération matricielle écrit-on pour obtenir les mouvements réels $\mathbf{z}$ du navire en fonction de la pulsation Ω ?

    [Solution]

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Zp}(t)$$

22. Si on introduit de l'amortissement dans le système, à quelle condition la base modale **Z** permet-elle toujours une résolution simple du système ?

    [Solution] Il faut que la matrice de dissipation vérifie la relation de Caughey :

    $$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$$

    C'est le cas par exemple de l'amortissement proportionnel, lorsque $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$

    On conserve alors des équations découplées dans la base modale.

23. Pour ce type d'amortissement et pour les excitations harmoniques, écrire l'expression matricielle qui donne les coordonnées modales **p** en fonction du vecteur des efforts généralisés **Q**.

    [Solution] Un matrice de ce type procure une matrice principale de dissipation diagonale $\mathbf{C_p}$. Dans le cas de l'excitation harmonique, les coordonnées modales sont alors obtenues par l'opération :

    $$\mathbf{p} = (\mathbf{K_p} + \jmath\Omega\mathbf{C_p} - \Omega^2\mathbf{M_p})^{-1}\mathbf{Z^t}\mathbf{Q}$$