Ondes et vibrations - MU4MEM03
Contrôle continu 1 - Lundi 15 novembre 2021

Durée : 1 heure 30
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

• Space X

L'objectif est d'analyser l'atterrissage de la fusée de Space X sur la plateforme flottante ASDS (Autonomous Spaceport Drone Ship). A cette fin, un modèle simple à deux degrés de liberté est proposé pour étudier la réponse après contact avec la plateforme. On fera l'hypothèse que la différence entre la position initiale de contact et la position d'équilibre du système est négligeable.

On modélise la fusée par un système, représenté sur la figure ci-dessous, composé de deux masses ponctuelles de valeur $4m$ pour représenter le premier étage de la fusée et de valeur m représentant les étages supérieurs. Le tout est relié par deux ressorts linéaires de raideurs k et $3k$ ainsi que par deux amortisseurs visqueux de coefficients C et $3C$.

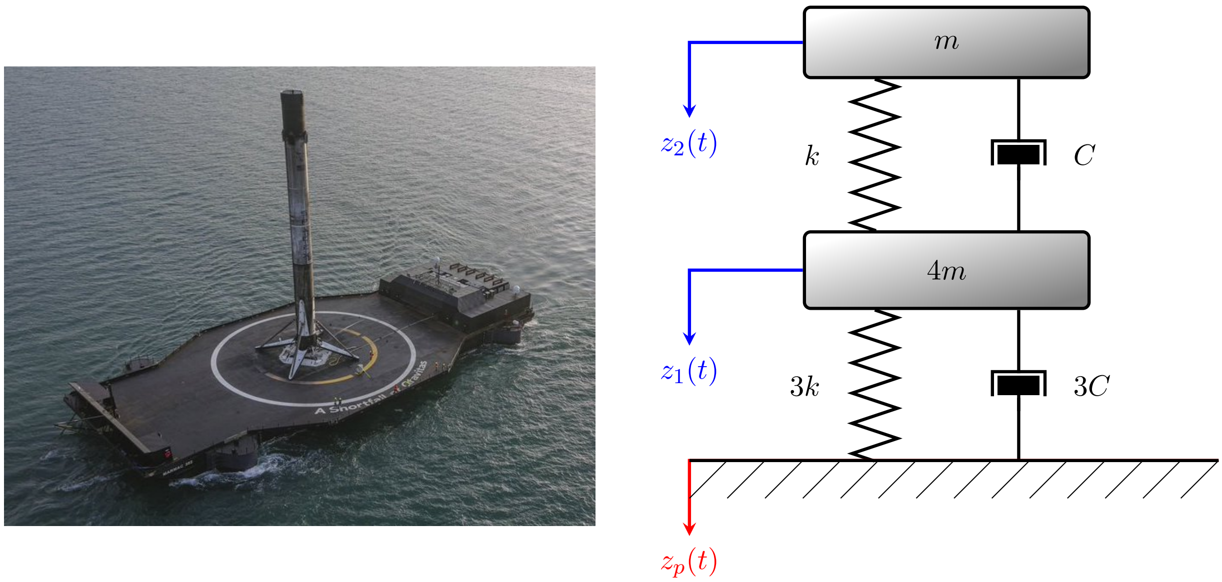

FIGURE 1 – Lanceur Space X : plateforme flottante et modélisation

On suppose que les déplacements sont verticaux et on note les déplacements mesurés par rapport à la position d'équilibre statique $z_1(t)$ et $z_2(t)$. Le vecteur des coordonnées généralisées est alors $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Une fois la fusée complètement arrêtée sur la plateforme, on souhaite connaître le comportement de la fusée lorsque la plateforme se déplace sous l'effet de la houle ayant un déplacement $z_p(t) = z_0 \sin(\Omega t)$.

◇ Dans un premier temps on cherche à déterminer les **caractéristiques modales** du système (régime libre). On considère pour cette étude que la barge est fixe ($z_p(t) = 0$).

1) a) Calculer l'énergie cinétique T du système et en déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$.

Solution:

$$T = \frac{1}{2}(4m)(\dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z}_2)^2 = \frac{1}{2}\dot{\underline{z}}^{\mathbf{t}}\,\mathbf{M}\,\dot{\underline{z}} \quad \text{donc} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

b) Calculer l'énergie potentielle U du système et en déduire la matrice de raideur $\mathbf{K}$.

Solution:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(3k)(z_1)^2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(4z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2\right) = \frac{1}{2}\underline{z}^{\mathbf{t}}\,\mathbf{K}\,\underline{z} \quad \text{donc} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Calculer la fonction de dissipation D et en déduire la matrice d'amortissement $\mathbf{C}$.

Solution:
Par analogie avec le calcul de U, on trouve que $D = \frac{1}{2}C\left(4\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 - 2\dot{z}_1\dot{z}_2\right) = \frac{1}{2}\dot{\underline{z}}^{\mathbf{t}}\,\mathbf{C}\,\dot{\underline{z}}$ donc $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4C & -C \\ -C & C \end{pmatrix}$

2) Calculer les pulsations propres du système.

Solution:

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{z}} + \mathbf{K}\underline{z} = \underline{0}.$$

On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques : $\underline{z}(t) = \underline{Z}e^{i\omega t}$, conduisant au système $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\underline{Z} = \underline{0}$. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution non nulle est :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \det\begin{pmatrix} 4k - \omega^2 4m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

soit $4(k - \omega^2 m)^2 - k^2 = \left[2(k - \omega^2 m) - k\right]\left[2(k - \omega^2 m) + k\right] = (k - 2\omega^2 m)(3k - 2\omega^2 m) = 0$

On trouve par conséquent comme pulsations propres $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$

3) Calculer les modes propres du système. Faire une représentation de ces derniers et les commenter.

Solution:
Pour le calcul des modes propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M})\underline{Z_i} = \underline{0}.$$

Pour le mode associé à $\omega_1^2 = \frac{k}{2m}$:

$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\underline{Z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ les plateaux de la fusée vibrent en phase

Pour le mode associé à $\omega_2^2 = \frac{3k}{2m}$:

$\begin{pmatrix} -2k & -k \\ -k & -k/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\underline{Z_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ les plateaux de la fusée vibrent en opposition de phase

4) Montrer que la matrice modale est $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Quelles relations mathématiques caractérisent cette base modale ?

Solution:

On obtient alors la matrice modale $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Ces relations s'appellent les relations d'orthogonalité.

Si l'on normalise par rapport à l'opérateur masse on a $\underline{Z_i}^t\,\mathbf{M}\,\underline{Z_j} = m_i\delta_{ij}$ avec m_i les masses modales.

Si l'on normalise par rapport à l'opérateur rigidité on a $\underline{Z_i}^t\,\mathbf{K}\,\underline{Z_j} = k_i\delta_{ij}$ avec k_i les raideurs modales.

Une fois les caractéristiques modales du système connues on peut trouver la **réponse transitoire** du système supposé ici sous-amorti ($\xi_1, \xi_2 < 1$). La solution transitoire, combinaison linéaire des modes propres, peut donc s'écrire sous la forme :

$$\underline{z}^{(t)} = z_1^{(t)}\underline{Z_1} + z_2^{(t)}\underline{Z_2} \quad \text{avec} \quad z_i^{(t)} = \left[A_i \sin(\omega_{di}\, t) + B_i \cos(\omega_{di}\, t)\right] e^{-\xi_i\omega_i t}$$

où $\omega_{di} = \sqrt{1-\xi_i^2}$ est la pseudo-pulsation et ξ_i le facteur d'amortissement associés au mode i.

5) Utiliser les conditions initiales (le compartiment supérieur a une vitesse initiale v_0) pour déterminer les A_i et B_i ($i = 1, 2$) et en déduire $z_1^{(t)}$ et $z_2^{(t)}$.

Solution:

$\underline{z}^{(t)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z_1^{(t)}(0)\ \underline{Z_1} + z_2^{(t)}(0)\ \underline{Z_2} = \underline{0}$ soit $B_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $B_1 = B_2 = 0$

On trouve donc $z_i^{(t)} = A_i \sin(\omega_{di}\, t)e^{-\xi_i\omega_i t}$ soit $\dot{z}_i^{(t)} = A_i\left[\omega_{di}\cos(\omega_{di}\, t) - \xi_i\omega_i \sin(\omega_{di}\, t)\right] e^{-\xi_i\omega_i t}$

$\underline{\dot{z}}^{(t)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{z}_1^{(t)}(0)\ \underline{Z_1} + \dot{z}_2^{(t)}(0)\ \underline{Z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ soit $A_1\omega_{d1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A_2\omega_{d2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

donc $A_1 = \dfrac{v_0}{4\omega_{d1}}$ et $A_2 = -\dfrac{v_0}{4\omega_{d2}}$.

Par conséquent $z_1^{(t)} = \dfrac{v_0}{4\omega_{d1}}\sin(\omega_{d1}\, t)e^{-\xi_1\omega_1 t}$ et $z_2^{(t)} = -\dfrac{v_0}{4\omega_{d2}}\sin(\omega_{d2}\, t)e^{-\xi_2\omega_2 t}$

◇ La dernière étape va consister à déterminer la **solution permanente** $\underline{z}^{(p)}$ en étudiant le régime forcé introduit par le mouvement de la plateforme sous l'effet de la houle ($z_p(t) = z_0 \sin(\Omega t)$).

6) Montrer que les équations du système forcé peuvent alors se mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{z}} + \mathbf{C}\underline{\dot{z}} + \mathbf{K}\underline{z} = \underline{Q} \tag{1}$$

avec $\underline{Q} = \begin{pmatrix} 3C\dot{z}_p + 3kz_p \\ 0 \end{pmatrix}$ le second membre contenant les termes d'excitation.

Solution:

Pour le régime forcé on sait que les équations peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{z}} + \mathbf{C}\left(\underline{\dot{z}} - \underline{\dot{z}}_{exi}\right) + \mathbf{K}\left(\underline{z} - \underline{z}_{exi}\right) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \underline{z}_{exi} = z_p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{z}} + \mathbf{C}\underline{\dot{z}} + \mathbf{K}\underline{z} = \mathbf{C}\,\underline{\dot{z}}_{exi} + \mathbf{K}\,\underline{z}_{exi} = \underline{Q}$$

où $\underline{Q} = \dot{z}_p\, \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z_p\, \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{z}_p \begin{pmatrix} 3C \\ 0 \end{pmatrix} + z_p \begin{pmatrix} 3k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C\dot{z}_p + 3kz_p \\ 0 \end{pmatrix}$

7) Calculer les différentes matrices modales : de masse $\mathbf{M_p}$, d'amortissement $\mathbf{C_p}$ et de raideur $\mathbf{K_p}$.

Solution:

$\mathbf{M_p} = \mathbf{Z^tMZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8m & 0 \\ 0 & 8m \end{pmatrix}$

$\mathbf{K_p} = \mathbf{Z^tKZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 12k \end{pmatrix}$

De même $\mathbf{C_p} = \mathbf{Z^tCZ} = \begin{pmatrix} 4C & 0 \\ 0 & 12C \end{pmatrix}$

8) Lorsque l'amortissement est introduit dans le système, quelle relation doit vérifier la base modale $\mathbf{Z}$ pour avoir toujours une résolution simple du système ? L'expliciter et donner son nom. Vérifier que nous sommes dans ce cas de figure.

Solution:

Il faut que la matrice de dissipation vérifie la relation de Caughey : $\mathbf{CM^{-1}K} = \mathbf{KM^{-1}C}$. C'est le cas par exemple pour un amortissement "proportionnel" lorsque $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$. On conserve alors des équations découplées dans la base modale. C'est bien le cas ici ($\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{C}{k}$).

9) **a)** Montrer qu'en introduisant le vecteur des coordonnées modales $\underline{p}$, le système (1) peut s'écrire :

$$\ddot{\underline{p}} + 2\boldsymbol{\Lambda}\,\dot{\underline{p}} + \boldsymbol{\Delta}\,\underline{p} = \mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{Q} \tag{2}$$

b) Que représentent les matrices $\boldsymbol{\Delta}$ et $\boldsymbol{\Lambda}$? Explicitez-les.

Solution:

On substitue aux coordonnées généralisées $\underline{z}^{(p)}$ les coordonnées modales $\underline{p}$ telles que $\underline{z}^{(p)} = \mathbf{Z}\,\underline{p}$.
L'équation du mouvement forcé devient :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{MZ}\,\ddot{\underline{p}} + \mathbf{CZ}\,\dot{\underline{p}} + \mathbf{KZ}\,\underline{p} & = & \underline{Q} \\ \times\mathbf{Z^t} \Leftrightarrow & \mathbf{Z^tMZ}\,\ddot{\underline{p}} + \mathbf{Z^tCZ}\,\dot{\underline{p}} + \mathbf{Z^tKZ}\,\underline{p} & = & \mathbf{Z^t}\,\underline{Q} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M_p}\,\ddot{\underline{p}} + \mathbf{C_p}\,\dot{\underline{p}} + \mathbf{K_p}\,\underline{p} & = & \mathbf{Z^t}\,\underline{Q} \\ \times\mathbf{M_p^{-1}} \Leftrightarrow & \ddot{\underline{p}} + \mathbf{M_p^{-1}C_p}\,\dot{\underline{p}} + \mathbf{M_p^{-1}K_p}\,\underline{p} & = & \mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{Q} \\ \Leftrightarrow & \ddot{\underline{p}} + 2\boldsymbol{\Lambda}\,\dot{\underline{p}} + \boldsymbol{\Delta}\,\underline{p} & = & \mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{Q} \end{array}$$

où $\boldsymbol{\Delta}$ est la matrice diagonale des pulsations propres et $\boldsymbol{\Lambda}$ est la matrice des coefficients d'amortissement modale.

Le vecteur des coordonnées modales $\underline{p}$ vérifie donc $\ddot{\underline{p}} + 2\boldsymbol{\Lambda}\,\dot{\underline{p}} + \boldsymbol{\Delta}\,\underline{p} = \mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{Q}$

avec $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{M_p^{-1}K_p} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{k}{2m} & 0 \\ 0 & \dfrac{3k}{2m} \end{pmatrix}$ et $2\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M_p^{-1}C_p} = \begin{pmatrix} \dfrac{4C}{8m} & 0 \\ 0 & \dfrac{12C}{8m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{C}{2m} & 0 \\ 0 & \dfrac{3C}{2m} \end{pmatrix}$

10) On a affaire à une excitation harmonique de pulsation d'excitation Ω. En raison de la présence d'un terme d'amortissement on va passer à la notation "complexe", on cherche donc une solution particulière sous la forme $\underline{p} = \mathrm{Im}\left[\underline{P}e^{\mathrm{i}\Omega t}\right]$ (Im : partie imaginaire). Montrer alors que $\underline{P} = \dfrac{3z_0}{8m} \begin{pmatrix} D_1 - \mathrm{i}\hat{D}_1 \\ D_2 - \mathrm{i}\hat{D}_2 \end{pmatrix}$ avec D_1, D_2, $\hat{D}_1$ et $\hat{D}_2$ à expliciter.

Solution:

$z_p(t) = z_0 \sin(\Omega t) = \mathrm{Im}\left(\hat{z}_p(t)\right)$ avec $\hat{z}_p(t) = z_0 e^{\mathrm{i}\Omega t}$ alors $\dot{\hat{z}}_p(t) = \mathrm{i}\Omega z_0 e^{\mathrm{i}\Omega t}$ donc :

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 3kz_p + 3C\dot{z}_p \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\left[\begin{pmatrix} 3z_0\,(k + \mathrm{i}\Omega C) \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[\underline{F}e^{\mathrm{i}\Omega t}\right] \quad \text{avec} \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} 3z_0\,(k + \mathrm{i}\Omega C) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En passant à la notation "complexe" :

$$\underline{P}\left(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{1} + 2\mathrm{i}\Omega\mathbf{\Lambda}\right) = \mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{F}.$$

donc

$$\underline{P} = \left(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{1} + 2\mathrm{i}\Omega\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{F}.$$

or

$$\mathbf{M_p^{-1}Z^t}\underline{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8m} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3z_0\,(k + \mathrm{i}\Omega C) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3z_0\,(k + \mathrm{i}\Omega C)}{8m}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\left(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{1} + 2\mathrm{i}\Omega\mathbf{\Lambda}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + \mathrm{i}\dfrac{\Omega C}{2m}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\omega_2^2 - \Omega^2) + \mathrm{i}\dfrac{3\Omega C}{2m}} \end{pmatrix}$$

soit

$$\underline{P} = \frac{3z_0\,(k + \mathrm{i}\Omega C)}{8m}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + \mathrm{i}\dfrac{\Omega C}{2m}} \\ \dfrac{1}{(\omega_2^2 - \Omega^2) + \mathrm{i}\dfrac{3\Omega C}{2m}} \end{pmatrix} = \frac{3z_0}{8m}\begin{pmatrix} \dfrac{(k + \mathrm{i}\Omega C)\left[(\omega_1^2 - \Omega^2) - \mathrm{i}\dfrac{\Omega C}{2m}\right]}{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{\Omega C}{2m}\right)^2} \\ \dfrac{(k + \mathrm{i}\Omega C)\left[(\omega_2^2 - \Omega^2) - \mathrm{i}\dfrac{3\Omega C}{2m}\right]}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{3\Omega C}{2m}\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} = \frac{3z_0}{8m}\begin{pmatrix} D_1 - \mathrm{i}\hat{D}_1 \\ D_2 - \mathrm{i}\hat{D}_2 \end{pmatrix}$$

avec $D_1 = \dfrac{k(\omega_1^2 - \Omega^2) + \dfrac{\Omega^2 C^2}{2m}}{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{\Omega C}{2m}\right)^2}$; $D_2 = \dfrac{k(\omega_2^2 - \Omega^2) + \dfrac{3\Omega^2 C^2}{2m}}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{3\Omega C}{2m}\right)^2}$

et $\hat{D}_1 = \dfrac{\Omega^3 C}{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{\Omega C}{2m}\right)^2}$; $\hat{D}_2 = \dfrac{\Omega^3 C}{(\omega_2^2 - \Omega^2)^2 + \left(\dfrac{3\Omega C}{2m}\right)^2}$

11) En déduire le vecteur des coordonnées modales $\underline{p}$ puis finalement la solution permanente $\underline{z}^{(p)}$ en fonction de D_1, D_2, $\hat{D}_1$ et $\hat{D}_2$.

Solution:

On sait que $\underline{P}e^{\mathrm{i}\Omega t} = \underline{P}\left(\cos(\Omega t) + \mathrm{i}\sin(\Omega t)\right) = \dfrac{3z_0}{8m}\begin{pmatrix} (D_1 - \mathrm{i}\hat{D}_1)(\cos(\Omega t) + \mathrm{i}\sin(\Omega t)) \\ (D_2 - \mathrm{i}\hat{D}_2)(\cos(\Omega t) + \mathrm{i}\sin(\Omega t)) \end{pmatrix}$

on obtient alors : $\underline{p} = \mathrm{Im}\left[\underline{P}e^{\mathrm{i}\Omega t}\right] = \dfrac{3z_0}{8m}\begin{pmatrix} D_1\sin(\Omega t) - \hat{D}_1\cos(\Omega t) \\ D_2\sin(\Omega t) - \hat{D}_2\cos(\Omega t) \end{pmatrix}$

finalement $\underline{z}^{(p)} = \mathbf{Z}\,\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{p}$

soit $\underline{z}^{(p)} = \dfrac{3z_0}{8m} \begin{pmatrix} (D_1 + D_2)\sin(\Omega t) - (\hat{D}_1 + \hat{D}_2)\cos(\Omega t) \\ 2(D_1 + D_2)\sin(\Omega t) - 2(\hat{D}_1 - \hat{D}_2)\cos(\Omega t) \end{pmatrix}$