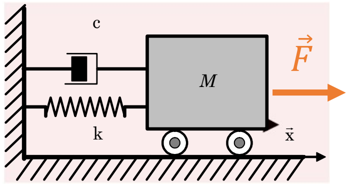
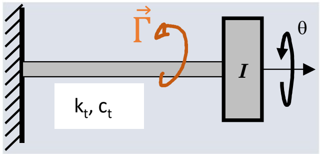
Vibrations 1ddl
quelques fiches mémo

1ddl - Equation du mouvement

	PFD	Conservation énergie	Equ. Lagrange





PFD

$$\sum F_{ext/x} = m\ddot{x}$$

$$\sum \Gamma_{ext/x} = I\ddot{\theta}$$

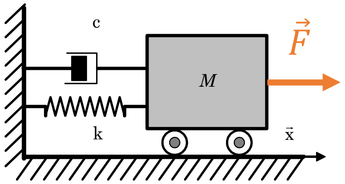
Conservation énergie

$$\frac{d}{dt}(T-U) + \Pi_d = \Pi_e$$

Equ. Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \Gamma$$

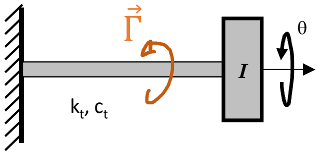


$$F_{élastique} = -kx$$
$$F_{frot\ visqueux} = -c\dot{x}$$

$$\Pi_d = c\dot{x}^2$$
$$\Pi_e = F\dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

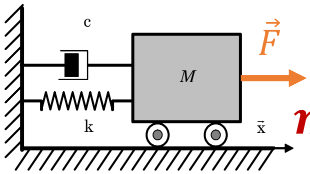


$$\Gamma_{élastique} = -k_t\theta$$
$$\Gamma_{frot\ visqueux} = -c_t\dot{\theta}$$

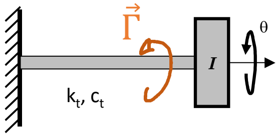
$$\Pi_d = c_t\dot{\theta}^2$$
$$\Pi_e = \Gamma\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$
$$U = \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

$$D = \frac{1}{2}c_t\dot{\theta}^2$$



$$\boldsymbol{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F}$$



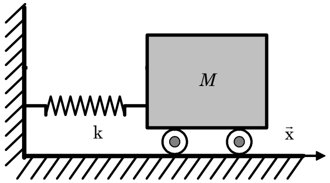
$$\boldsymbol{I\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = \Gamma}$$

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

MASTER Spi Sciences pour l'ingénieur

1ddl – vibrations libres

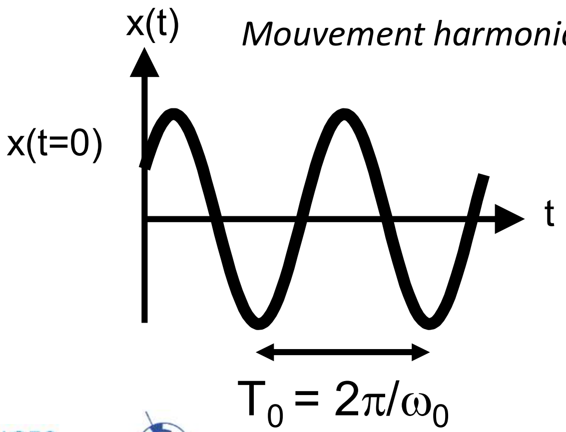
Système non amorti



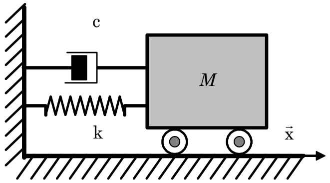
$$x(t) = X\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

$$\boxed{pulsation\ propre: \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Mouvement harmonique



Système amorti (amortissement visqueux)



$$\boxed{facteur\ d'amortissement: \ \xi = \frac{c}{2m\omega_0}}$$

$\xi \geq 1 : pas\ d'oscillations$

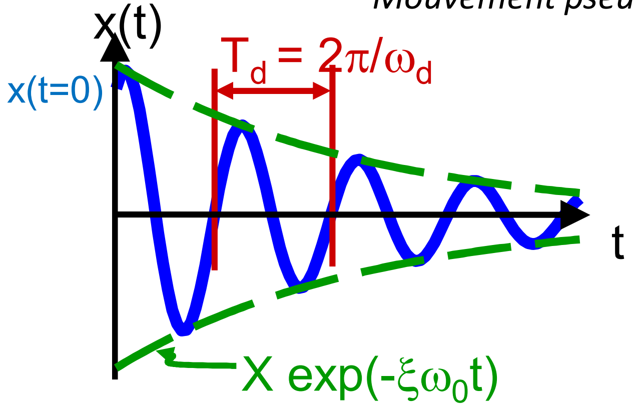
$\xi < 1 : oscillations$

$\boldsymbol{\xi < 1}$ régime sous-critique

$$x(t) = [X\cos(\omega_d t - \varphi_t)]e^{-\xi\omega_0 t}$$

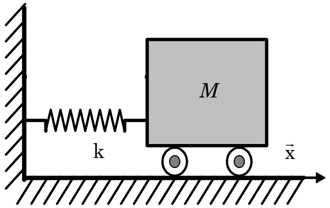
$$\boxed{pseudo-pulsation: \ \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

Mouvement pseudo harmonique amorti



1ddl – vibrations libres

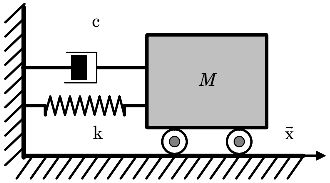
Système non amorti



$$x(t) = X\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

$$pulsation\ propre:\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Système amorti (amortissement visqueux)



$$facteur\ d'amortissement:\ \xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

$\boldsymbol{\xi < 1}$ régime sous-critique

$$x(t) = [X\cos(\omega_d t - \varphi_t)]e^{-\xi\omega_0 t}$$

$$pseudo-pulsation:\ \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

C.I : $x(t=0) = x_0 \qquad \frac{dx}{dt}(t=0) = v_0$

Amplitude et phase :

$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + {x_0}^2}$$

$$tan\varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

Amplitude et phase :

$$X = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

$$tan\varphi = \frac{v_0 + x_0\xi\omega_0}{\omega_d x_0}$$

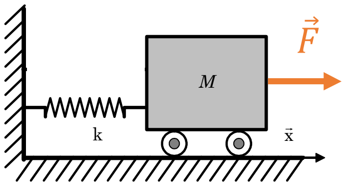
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

MASTER Spi Sciences pour l'ingénieur

1ddl – vibrations forcées

Système non amorti

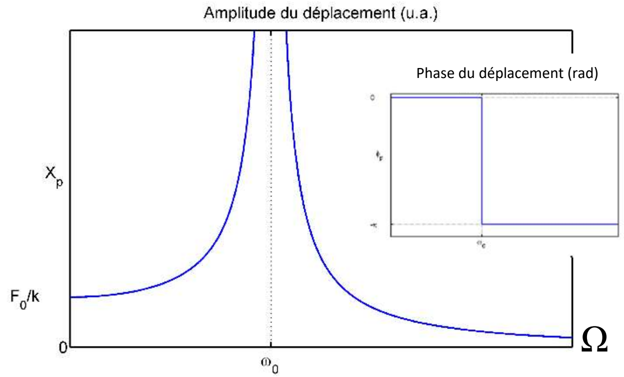
$\xi = 0$



Excitation harmonique

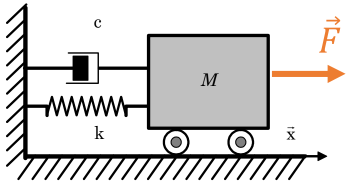
$$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$$

Réponse en fréquence du régime permanent



$$x(t) = \overbrace{X_t\cos(\omega_0 t - \varphi_t)}^{\text{Régime libre}} + \underbrace{X_p\cos(\Omega t - \varphi_p)}_{\text{Régime permanent}}$$

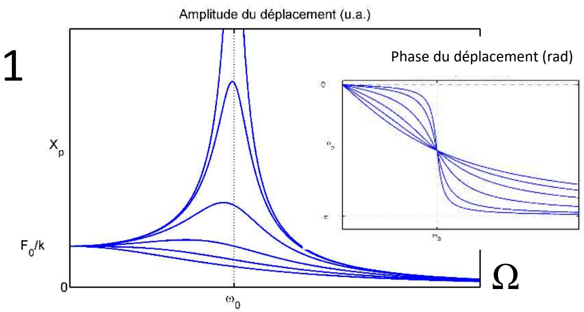
Système amorti $\xi < 1$



Excitation harmonique

$$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$$

Réponse en fréquence

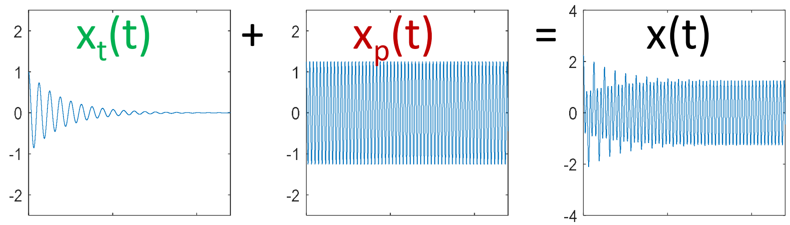


Réponse temporelle

$$x(t) = \underbrace{\left[X_t\cos(\omega_d t - \phi_t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \overbrace{X_p\cos(\Omega t - \phi_p)}^{\text{Réponse permanente}}$$

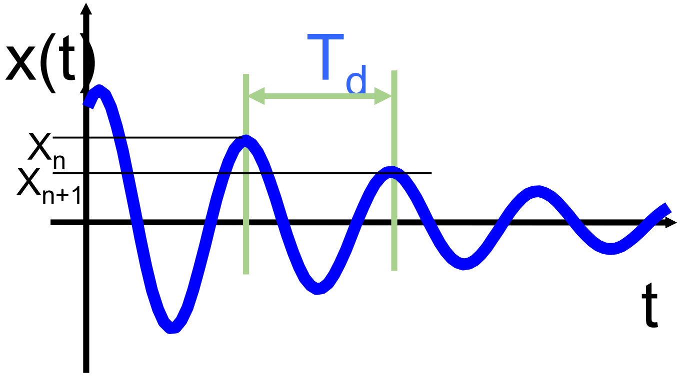
$$\boxed{X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\xi\Omega\omega_0)^2}}}$$

$$\boxed{\phi_p(\Omega) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)}$$



1ddl – mesure de l'amortissement

« Décrément logarithmique »

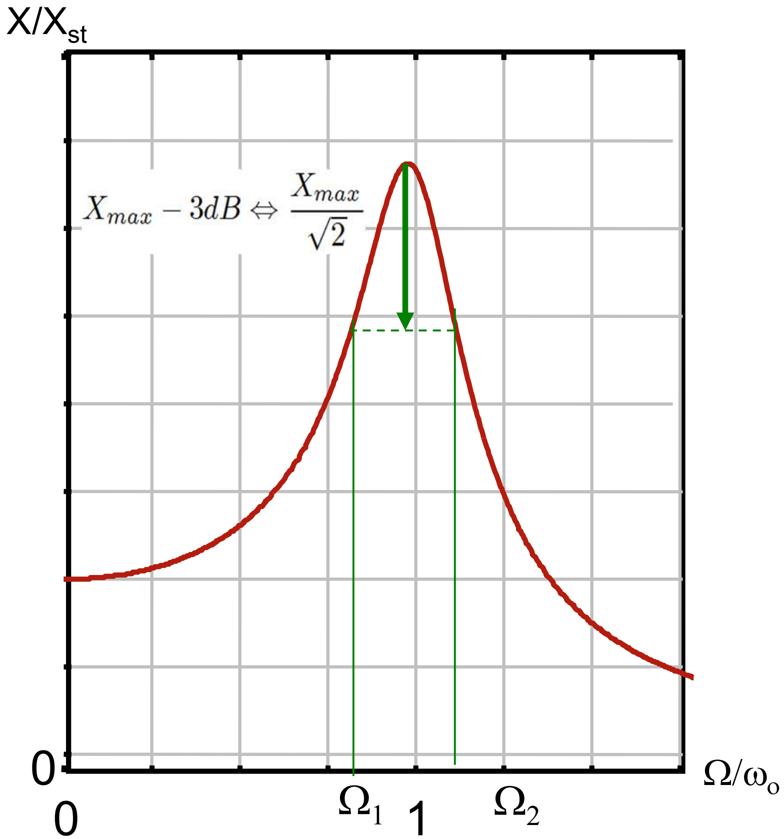


Décrément logarithmique :

$$\delta = ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{p} ln\frac{x_n}{x_{n+p}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}}$$

« Bande passante à -3dB »



$$\boxed{\xi \approx \frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2\Omega_{max}} \approx \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_0}}$$

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

MASTER Spi Sciences pour l'ingénieur

Vibrations nddl
quelques fiches mémo

Nddls conservatif – régime libre

Paramètres généralisés : $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}\dot{q}^t M \dot{q}$ => **matrice masse** M

Energie potentielle : U= $\frac{1}{2}q^t K q$ => **matrice raideur** K

Equation du mouvement en régime libre : $M\ddot{q} + K$q=0

Forme de la solution : $q = Qe^{j\omega} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} e^{j\omega t}$ => $\ddot{q} = -\omega^2 q$

=> Équation de mouvement : $(K - \omega^2 M)Qe^{j\omega t}$=0

Détermination des **pulsations propres** :
$\det(K - \omega^2 M) = 0$ => ω_i

Rq : si ω_i=0 : mode i = mode de corps rigide

Détermination des **vecteurs propres** :

Pour chaque ω_i : $(K - \omega_i^2 M)\, X_i e^{j\omega_i t}$= $(K - \omega_i^2 M) \underbrace{\begin{pmatrix} Q_{i1} \\ \vdots \\ Q_{ij} \\ \vdots \\ Q_{in} \end{pmatrix}}_{X_i} e^{j\omega_i t}$=0

- Normalisation (par ex Q_{i1}=1)
- Résolution
- => vecteurs propres X_i
- => **Matrice modale** : $X = (X_1\ X_2\ \cdots X_n)$

Réponse :

$$q(t) = \sum A_i \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ \vdots \\ Q_{ij} \\ \vdots \\ Q_{in} \end{pmatrix} e^{j\omega_i t} = X \begin{pmatrix} P_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \vdots \\ P_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{pmatrix} = X\, p(t)$$

Nddls conservatif – régime libre – Base modale

- **Matrice modale** : $X = (Q_1\ Q_2\ \cdots Q_n)$

Matrice modale

- **Changement de base** : $q(t) = X\,p(t)$

Coordonnées généralisées

Coordonnées modales

- **Matrice masse modale** : $M_p = X^t M X = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix}$

m_r : masse apparente du mode *r*

- **Matrice raideur modale** : $K_p = X^t K X = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$

k_r : raideur apparente du mode *r*

- **Matrice des pulsations propres** : $\Delta = M_p^{-1} K_p = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$

Équation du mouvement :
$\ddot{p} + \Delta p = 0$

⇓

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{p}_n + \omega_n^2 p_n = 0 \end{cases}$$

n équations découplées

⇓

$$\begin{cases} p_i(t) = A_{i1} t + A_{i2} \quad si\ \omega_i = 0 \\ \vdots \\ \tilde{p}_i(t) = A_{i1}\, e^{j\omega_i t} si\ \omega_i \neq 0 \\ ou \\ p_i(t) = A_{i1}\cos(\omega_i t) + A_{i2}\sin(\omega_i t) \end{cases}$$

⇓

Conditions Initiales =>
détermination des amplitudes modales A_{ij}

Orthogonalité : $X_s^t M X_r = \delta_{rs} m_r \quad et \quad X_s^t K X_r = \delta_{rs} k_r$