Exercice 1 : Écoulement de deux fluides non miscibles

Deux fluides homogènes, newtoniens, visqueux, incompressibles, non miscibles, s'écoulent dans la direction $\underline{e}_z$ entre deux parois planes fixes, parallèles d'équation $x = \pm a$. Le fluide 1, de masse volumique ρ_1, de viscosité μ_1 s'écoule entre les plans $x = -a$ et $x = 0$ et le fluide 2 de masse volumique ρ_2, de viscosité μ_2 entre les plans $x = 0$ et $x = a$. Cette configuration est supposée stable, l'interface entre les fluides reste le plan $x = 0$. L'écoulement est crée par une différence de pression imposée entre la section située en $z = 0$ et la section située en $z = L$. On désigne par P_0 la pression uniforme imposée sur la section $z = 0$ et par P_L la pression uniforme imposée sur la section $z = L$ et on suppose ces pressions telles que $P_0 > P_L$. L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, les lignes de courant étant des droites parallèles à la direction $\underline{e}_z$. Les longueurs des parois L selon $\underline{e}_z$ et ℓ selon $\underline{e}_y$ sont supposées grandes devant leur écartement $2a$, de sorte que les effets de bords sont négligeables et le champ de vitesse pourra être supposé indépendant de la variable y. Enfin, les forces de gravité sont supposées négligeables.

1. Après avoir explicité toutes les hypothèses, écrire les équations de conservation et les conditions aux limites de l'écoulement. On convient de noter v_i et p_i les vecteurs vitesse et champ de pression dans le fluide i, i prenant les valeurs 1 ou 2.

Les fluides sont homogènes de sorte que $\rho_i(\underline{x}, t) = \rho_i(t)$ dans chacun des deux milieux i.
Les fluides sont visqueux, newtoniens, de sorte que la loi de comportement dans chaque milieu s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{x}, t) \;=\; -\,p_i(\underline{x}, t)\,\underline{\underline{I}} \;+\; \lambda_i \,\text{trace}\; \underline{\underline{d}}(\underline{v}_i)\,\underline{\underline{I}} \;+\; 2\,\mu_i\,\underline{\underline{d}}(\underline{v}_i)(\underline{x}, t). \tag{1}$$

avec

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}_i) \;=\; \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v}_i) + \underline{\underline{\nabla}}^T(\underline{v}_i)\right) \tag{2}$$

Les fluides sont incompressibles, de sorte que dans chaque milieu :

$$\text{div}\;\underline{v}_i \;=\; 0 \tag{3}$$

et la loi de comportement se réduit finalement à (loi de comportement d'un fluide newtonien, visqueux et incompressible) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{x}, t) \;=\; -\,p_i(\underline{x}, t)\,\underline{\underline{I}} \;+\; 2\,\mu_i\,\underline{\underline{d}}(\underline{v}_i)(\underline{x}, t). \tag{4}$$

L'écoulement est stationnaire, de sorte que :

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t}(\underline{x}, t) \;=\; 0,\;\; \frac{\partial p_i}{\partial t}(\underline{x}, t) \;=\; 0,\;\; \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_i}{\partial t}(\underline{x}, t) \;=\; 0, \tag{5}$$

de sorte que $\underline{v}_i(\underline{x}, t) \;=\; \underline{v}_i(\underline{x})$, $p_i(\underline{x}, t) \;=\; p_i(\underline{x})$, $\underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{x}, t) \;=\; \underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{x})$.
L'écoulement est laminaire et les lignes de courant sont des droites parallèles à la direction $\underline{e}_z$, cela impose que les champs de vitesses dans les deux fluides sont colinéaires à la direction $\underline{e}_z$: $\underline{v}_i(\underline{x}) \;==\; v_i(x, y, z)\,\underline{e}_z$. Comme par hypothèse le champ de vitesse est supposé indépendant de la variable y, l'hypothèse d'incompressibilité s'écrit :

$$\frac{\partial v_i}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

De sorte que le vecteur vitesse v_i dans chaque fluide ne dépend donc que de la variable x : $\underline{v}_i(\underline{x}) \;==\; v_i(x)\,\underline{e}_z$. Le tenseur gradient de vitesse s'écrit alors dans chaque milieu :

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v}_i) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_i}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{d}}(\underline{v}_i)$ s'écrit alors dans chaque milieu :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}_i) \;=\; \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v}_i) + \underline{\underline{\nabla}}^T(\underline{v}_i)\right) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\,\frac{dv_i}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,\frac{dv_i}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Et le tenseur des contraintes dans chaque fluide a pour expression :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} -p_i & 0 & \mu_i \dfrac{dv_i}{dx} \\ 0 & -p_i & 0 \\ \mu_i \dfrac{dv_i}{dx} & 0 & -p_i \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Les mouvements des deux fluides sont régis par l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui s'écrit (si l'on néglige les forces de pesanteur) :

$$\rho_i \left(\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}_i . \underline{v}_i \right) = \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_i, \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Et en injectant la loi de comportement dans cette équation, on obtient l'équation de Navier-Stokes dans chacun des milieux (valable pour des fluides newtoniens visqueux incompressibles) :

$$\rho_i \left(\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}_i . \underline{v}_i \right) = -\underline{\nabla} p_i + \mu_i \, \underline{\Delta}\, \underline{v}_i, \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Or ici, compte-tenu de l'expression de $\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}_i$, on a :

$$\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_i}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_i \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{12}$$

De sorte que en projetant sur les trois axes, on obtient les trois équations scalaires suivantes satisfaites dans chaque milieu par les inconnues du problème (p_i, v_i) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial z} = \mu_i \dfrac{d^2 v_i}{dx^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Ce système d'équation doit être complété maintenant par des conditions aux limites :
Sur les parois $x = -a$ et $x = a$, les fluides visqueux adhèrent aux parois qui sont fixes, les trois composantes du vecteur vitesse sont donc nulles (conditions de continuité entre un fluide visqueux et un solide indéformable fixe). Ici ces conditions se réduisent à :

$$v_1(x = -a) = 0 \qquad \text{et} \qquad v_2(x = a) = 0. \tag{14}$$

à l'interface $x = 0$ entre les deux fluides (interface qui reste plane), les deux fluides ne se mélangent pas, les conditions (entre deux fluides visqueux) sont les continuités du vecteur vitesse et du vecteur contraintes qui se réduisent ici à :

$$v_1(x = 0) = v_2(x = 0) \tag{15}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_1(x = 0, y, z) \cdot \underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}}_2(x = 0, y, z) \cdot \underline{e}_x \tag{16}$$

Soit encore, si l'on explicite l'expression du vecteur contraintes, compte-tenu de celle du tenseur des contraintes :

$$-p_1(0, y, z)\, \underline{e}_x + \mu_1 \frac{dv_1}{dx}(0, y, z)\, \underline{e}_z = -p_2(0, y, z)\, \underline{e}_x + \mu_2 \frac{dv_2}{dx}(0, y, z)\, \underline{e}_z \tag{17}$$

et donc

$$p_1(0, y, z) = p_2(0, y, z) \qquad \mu_1 \frac{dv_1}{dx}(0, y, z) = \mu_2 \frac{dv_2}{dx}(0, y, z) \tag{18}$$

pour tout y, z.
Reste enfin à écrire que les pressions sont données à l'entrée et sortie du canal, soit :

$$p_i(x, y, z = 0) = P_0, \qquad p_i(x, y, z = L) = P_L \tag{19}$$

pour tout x, y.

2. Calculer les champs des vitesses et de pression en tout point de l'écoulement dans chacun des deux fluides.

D'après les équations de Navier-Stokes (13) projetées sur les trois axes, le champ de pression dans chaque milieu ne dépend que de la coordonnée z : $p_i(x,y,z) = p_i(z)$, de sorte que la troisième équation (13) s'écrit en tout point (x,z) :

$$\frac{dp_i}{dz} = \mu_i \frac{d^2 v_i}{dx^2}, \tag{20}$$

Or la quantité $\mu_i \dfrac{d^2 v_i}{dx^2}$ ne dépend que de la variable x et la quantité $\dfrac{dp_i}{dz}$ ne dépend que de la variable z, de sorte que

$$\frac{dp_i}{dz} = \mu_i \frac{d^2 v_i}{dx^2} = A_i. \tag{21}$$

avec A_i une constante. On en déduit alors les expressions suivantes pour la vitesse v_i et pour la pression p_i :

$$\begin{cases} p_i(z) = A_i\, z \,+\, B_i, \\ v_i(x) = \dfrac{A_i}{2\mu_i}\, x^2 + C_i\, x + D_i. \end{cases} \tag{22}$$

où B_i, C_i et D_i sont des constantes (différentes dans chaque milieu i).

Pour déterminer ces 8 constantes, nous exploitons les conditions aux limites du problème :

En $z = 0$, $p_i(0) = P_0$ pour $i = 1, 2$ de sorte que $B_1 = B_2 = P_0$ et en $z = L$, on a $p_i(L) = P_L$, de sorte que

$$A_1 = A_2 = \frac{P_L - P_0}{L} = A\,. \tag{23}$$

Les champs de pression sont donc égaux dans les deux fluides et ont pour expression

$$p_i = \frac{P_L - P_0}{L} z + P_0. \tag{24}$$

En $x = 0$, les conditions limites (15) et (18) (continuité du vecteur vitesse et du vecteur contraintes) fournissant deux équations scalaires (l'équation sur la composante normale du contraintes contrainte est automatiquement satisfaite du fait de l'égalité des champs de pression). On obtient :

$$\begin{cases} v_1(x=0) = v_2(x=0) = D_1 = D_2 = D, \\ \mu_1 \dfrac{dv_1}{dx}(x=0) = \mu_2 \dfrac{dv_2}{dx}(x=0) = \mu_1\, C_1 = \mu_2 C_2. \end{cases} \tag{25}$$

Les vitesses v_1 et v_2 sont nulles respectivement sur les parois $x = -a$ et $x = a$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} v_1(x = -a) = A\, a^2 - 2\,\mu_1\, C_1\, a + 2\,\mu_1\, D = 0, \\ v_2(x = +a) = A\, a^2 + 2\,\mu_2\, C_2\, a + 2\,\mu_2\, D = 0. \end{cases} \tag{26}$$

La résolution des quatre équations (25), (26) permet de déterminier les 4 constantes D_1, D_2, C_1, C_2.

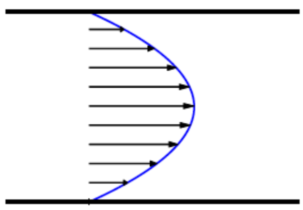
$$\begin{cases} D = -\dfrac{(P_L - P_0)a^2}{L(\mu_1 + \mu_2)}, \\ C_1 = \dfrac{(P_L - P_0)a}{2\mu_1 L}\, \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \\ C_2 = \dfrac{(P_L - P_0)a}{2\mu_2 L}\, \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}. \end{cases} \tag{27}$$

Les relations (22), (23) et (27) fournissent donc les inconnues du problème, les champs de pression et de vitesse dans chacun des fluides.

3. Vérifier les résultats obtenus en traitant le cas de deux fluides identiques. Quel est alors le profil de vitesse ?

Si les deux fluides sont identiques ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) alors les coefficients C_1 et C_2 sont nuls (d'après (27)) et les vitesses ont alors pour expression (d'après (22))

$$v_i(x) = \frac{(P_L - P_0)}{2L\mu}(x^2 - a^2). \tag{28}$$



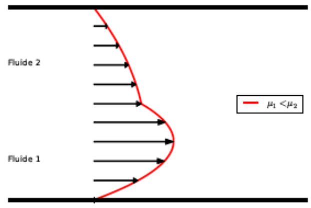
Le profil de vitesse est parabolique et est similaire à celui de l'écoulement du type Poiseuille (voir chapitre 7).

4. Tracer le profil des pressions et vitesses dans les deux cas $\mu_1 < \mu_2$ et $\mu_2 < \mu_1$.

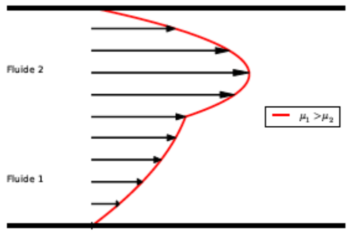
Le profil des pressions dans les deux fluides est linéaire et ne dépend pas de la viscosité des fluides.
Les extrémums des profils de vitesses s'obtiennent en cherchant les valeurs d'annulation de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}x} = \frac{A_i}{\mu_i} x_i + C_i = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_i = -\frac{\mu_i}{A_i} C_i = \frac{a}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \tag{29}$$

Si on a $\mu_1 < \mu_2$, alors l'extrémum de la vitesse a lieu en $x_1 = x_2 < 0$ et donc est atteint dans le milieu 1. Ce résultat est cohérent avec le fait que le fluide 1 étant moins visqueux, son écoulement est moins freiné par la paroi fixe en $x = -a$ à laquelle il adhère.



Si au contraire on a $\mu_1 > \mu_2$, alors l'extrémum de la vitesse ont lieu en $x_1 = x_2 > 0$ et est atteint dans le milieu 2.



5. Calculer la densité d'effort surfacique exercée par chacun des fluides sur les parois $x = \pm a$. Commenter la valeur et le signe du vecteur contrainte de viscosité sur ces parois.

La densité surfacique d'effort exercée par la paroi (P) $x = -a$ (milieu extérieur) sur le fluide 1 (milieu continu étudié) a pour expression (d'après la signification du vecteur contrainte)

$$\underline{f}_1^{Psur1} = \underline{\underline{\sigma}}.(-\underline{e}_x) = p_1(z)\underline{e}_x - \mu_1 \left.\frac{dv_i}{dx}\right|_{x=-a} \underline{e}_z. \tag{30}$$

On en déduit directement

$$\underline{f}_1^{Psur1} = \left(\frac{P_L - P_0}{L} z + P_0\right) \underline{e}_x + \frac{(P_L - P_0)a}{L} \frac{3\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1 + 2\mu_2} \underline{e}_z. \tag{31}$$

On voit que si $P_0 > P_L$ comme supposé, la paroi exerce une force de frottement (composante selon $\underline{e}_z$) qui est négative qui vient donc bien freiner l'écoulement.
La densité surfacique d'effort exercée par le fluide 1 sur la paroi $x = -a$ a pour expression :

$$\underline{f}_1^{1surP} = -\underline{f}_1^{Psur1} = -\left(\frac{P_L - P_0}{L} z + P_0\right) \underline{e}_x - \frac{(P_L - P_0)a}{L} \frac{3\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1 + 2\mu_2} \underline{e}_z. \tag{32}$$

De la même manière, on obtient la densité surfacique d'effort exercée par la paroi $x = a$ sur le fluide 2 :

$$\underline{f}_2^{Psur2} = -\left(\frac{P_L - P_0}{L} z + P_0\right) \underline{e}_x + \frac{(P_L - P_0)a}{L} \frac{\mu_1 + 3\mu_2}{2\mu_1 + 2\mu_2} \underline{e}_z. \tag{33}$$

De sorte que la densité surfacique d'effort exercée par le fluide 2 sur la paroi $x = +a$ a pour expression :

$$\underline{f}_2^{2surP} = +\left(\frac{P_L - P_0}{L} z + P_0\right) \underline{e}_x - \frac{(P_L - P_0)a}{L} \frac{\mu_1 + 3\mu_2}{2\mu_1 + 2\mu_2} \underline{e}_z. \tag{34}$$