# Exercice 1 : État de contraintes dans une éprouvette en torsion

Un arbre cylindrique, de génératrices parallèles à l'axe $\underline{e}_3$, de hauteur $h$, de section circulaire de rayon $R$, est limité par la base $\Sigma_0$ située dans le plan $x_3 = 0$ et la base $\Sigma_h$ située dans le plan $x_3 = h$. On désigne par $\Sigma_l$ la surface latérale de la pièce. L'arbre, supposé en équilibre, est soumis en tout point $(x_1, x_2, x_3)$ au champ de contraintes suivant exprimé dans le repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, l'origine $O$ du repère étant prise au centre de la base $\Sigma_0$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Ax_2 \\ 0 & 0 & -Ax_1 \\ Ax_2 & -Ax_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $A$ est un scalaire constant positif.

## 1. Que peut-on dire des forces volumiques extérieures appliquées à la pièce ?

L'arbre étant à l'équilibre statique, son accélération $\underline{\gamma}$ est nulle. Son mouvement est donc régi en tout point par l'équation d'équilibre local

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) + \rho(\underline{x})\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0},$$

ou encore

$$\begin{cases} \sigma_{11,1}(\underline{x}) + \sigma_{12,2}(\underline{x}) + \sigma_{13,3}(\underline{x}) + \rho(\underline{x})f_1(\underline{x}) = 0, \\ \sigma_{21,1}(\underline{x}) + \sigma_{22,2}(\underline{x}) + \sigma_{23,3}(\underline{x}) + \rho(\underline{x})f_2(\underline{x}) = 0, \\ \sigma_{31,1}(\underline{x}) + \sigma_{32,2}(\underline{x}) + \sigma_{33,3}(\underline{x}) + \rho(\underline{x})f_3(\underline{x}) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Compte tenu de l'expression du tenseur des contraintes, on en déduit directement

$$\rho(\underline{x})f_1(\underline{x}) \;=\; \rho(\underline{x})f_2(\underline{x}) \;=\; \rho(\underline{x})f_1(\underline{x}) \;=\; 0$$

Il n'y a donc pas de forces volumiques extérieures appliquées à la pièce.

## 2. Calculer la densité surfacique d'efforts exercée sur la surface latérale $\Sigma_l$.

La densité surfacique d'efforts qu'exerce le milieu environnant situé du côté positif sur une surface élémentaire $dS$ est donnée par le vecteur contrainte

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}).\underline{n} = \underline{F}(\underline{x}), \qquad \forall x \in dS$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface $dS$ orienté vers le côté positif.
Cette caractérisation est appliquée ici sur la surface latérale du cylindre de rayon $R$.
La normale extérieure unitaire à la surface latérale est $\underline{n} = \underline{e}_r$, soit encore dans le système de coordonnées cartésiennes

$$\underline{e}_r = \cos\theta\,\underline{e}_1 + \sin\theta\,\underline{e}_2 = \frac{x_1}{R}\underline{e}_1 + \frac{x_2}{R}\underline{e}_2.$$

La densité surfacique d'efforts exercée par le milieu extérieur a donc pour expression

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}).\underline{e}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Ax_2 \\ 0 & 0 & -Ax_1 \\ Ax_2 & -Ax_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{R} \\ \frac{x_2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc après calcul $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$. La surface latérale du cylindre est donc libre d'efforts.

## 3. Quelles sont les densités surfaciques d'efforts s'exerçant sur les bases $\Sigma_0$ et $\Sigma_h$ ?

Les normales unitaires extérieures aux surfaces terminales $\Sigma_0$ et $\Sigma_h$ sont respectivement $\underline{n} = \underline{e}_3$ et $\underline{n} = -\underline{e}_3$. Les densités surfaciques d'efforts agissant sur ces deux surfaces ont donc pour expressions

$$\begin{cases} \underline{F}_0(x_1, x_2) = -Ax_2\underline{e}_1 + Ax_1\underline{e}_2, \\ \underline{F}_h(x_1, x_2) = Ax_2\underline{e}_1 - Ax_1\underline{e}_2. \end{cases}$$

Les vecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ peuvent être exprimés en fonction des vecteurs $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \cos\theta \underline{e}_r - \sin\theta \underline{e}_\theta, \\ \underline{e}_2 = \sin\theta \underline{e}_r + \cos\theta \underline{e}_\theta. \end{cases}$$

On en déduit les expressions en coordonnées cylindriques des densités surfaciques d'efforts agissant sur les surfaces $\Sigma_0$ et $\Sigma_h$ :

$$\begin{cases} \underline{F}_0(\underline{x}) = Ar\underline{e}_\theta, \\ \underline{F}_h(\underline{x}) = -Ar\underline{e}_\theta. \end{cases}$$

**4. Calculer les éléments de réduction en $O$ (résultante et moment) du torseur des efforts surfaciques s'exerçant sur la base $\Sigma_0$. Interpréter la nature des efforts extérieurs agissant sur cet arbre.**

Le torseur des efforts surfaciques se réduit à la résultante $\underline{R}_h$ et le moment $\underline{M}_h$ définis par les relations respectives

$$\begin{cases} \underline{R}_h = \iint_{\Sigma_h} \underline{F}_h \,\mathrm{d}S, \\ \underline{M}_h(O) = \iint_{\Sigma_h} \underline{OM} \wedge \underline{F}_h \,\mathrm{d}S. \end{cases}$$

La résultante a pour expression

$$\underline{R}_h = \int_0^{2\pi}\int_0^R (Ax_2\underline{e}_1 - Ax_1\underline{e}_2) r \,\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\theta = \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^R A\sin\theta\, r^2 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\Big]\underline{e}_1 - \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^R A\cos\theta\, r^2 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\Big]\underline{e}_2 = \underline{0}.$$

Compte tenu de l'expression suivante du produit vectoriel pour tout point $M \in \Sigma_h$

$$\underline{OM} \wedge \underline{F}_h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Ax_2 \\ -Ax_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1h \\ Ax_2h \\ -Ax_1^2 - Ax_2^2 \end{pmatrix},$$

le moment au point $O$ a pour expression

$$\underline{M}_h(O) = \iint_{\Sigma_h} \left[Ax_1h\,\underline{e}_1 + Ax_2h\,\underline{e}_2 - A(x_1^2 + x_2^2)\underline{e}_3\right] r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

En exploitant le calcul effectué pour la résultante, on a

$$\iint_{\Sigma_h} [Ax_1h\underline{e}_1 + Ax_2h\underline{e}_2]\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \underline{0}$$

de sorte que

$$\underline{M}_h(O) = -A\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\underline{e}_3 = -\frac{\pi R^4 A}{2}\underline{e}_3.$$

Le même calcul effectué pour la surface $\Sigma_0$ donne une résultante $\underline{R}_0 = \underline{0}$ et un moment $\underline{M}_0(O) = -\underline{M}_h(O)$.
Le cylindre est donc soumis sur ces surfaces terminales à un couple de torsion selon $\underline{e}_3$ de même amplitude et de signe opposé donné par

$$|C| = \frac{\pi R^4 A}{2}. \tag{3}$$

.

**5. Déterminer les contraintes principales en tout point de la pièce et les directions principales associées.**

Le tenseur des contraintes est un tenseur d'ordre 2 symétrique et défini positif. Il admet donc en tout point $\underline{x}$ des valeurs propres réelles, appelées contraintes principales et les vecteurs propres associés, appelées directions principales , constituent une base orthonomée. Les contraintes principales en un point $\underline{x}$ sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ défini par la relation

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) - \lambda\,\underline{\underline{I}}\,) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & Ax_2 \\ 0 & -\lambda & -Ax_1 \\ Ax_2 & -Ax_1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - A^2x_1^2) + \lambda A^2x_2^2 = \lambda(A^2r^2 - \lambda^2)$$

Les trois valeurs propres sont donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = -Ar, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = Ar. \end{cases}$$

Le vecteur propre $\underline{v}_i(\vec{x})$ associé à la valeur propre $\lambda_i(\underline{x})$ au point $\underline{x}$ s'obtient ensuite en résolvant l'équation matricielle

$$(\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) - \lambda_i(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}\,)\underline{v}_i(\underline{x}) = \underline{0}.$$

On trouve alors dans le repère cartésien

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

En normalisant ces vecteurs propres pour former des vecteurs unitaires, on obtient

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_z + \underline{e}_\theta), \qquad \underline{v}_2 = \underline{e}_r, \qquad \text{et} \qquad \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_z - \underline{e}_\theta).$$

**6. Sachant que les matériaux fragiles rompent généralement lorsque la plus grande des contraintes principales atteint une valeur critique $\sigma_c$ , en quel(s) point(s) de l'arbre constitué d'un matériau métallique, cette valeur critique est-elle atteinte ? Quelle est la valeur maximale du couple de torsion à ne pas dépasser ?**

La plus grande des contraintes principales a pour expression

$$\sigma_N = \sigma_{III} = Ar.$$

la constante $A$ étant positive. Cette contrainte normale est maximale en $r = R$, d'où $\sigma_{N_{max}} = AR$. La constante $A$ peut être exprimée en fonction du couple $|C|$ par la relation

$$A = \frac{2}{\pi R^4}|C|, \tag{4}$$

Sachant que les matériaux fragiles sont susceptibles de rompre lorsque la contrainte normale dépasse la contrainte $\sigma_c$, le cylindre supportera la sollicitation tant que la valeur du couple de torsion vérifiera

$$|C| < \frac{\pi R^3}{2}\sigma_c.$$

**7. Sachant par ailleurss qu'en rupture fragile, la surface de rupture est souvent perpendiculaire à la direction principale associée à la contrainte principale maximale, expliquer le faciès de rupture présenté à la figure ci-dessous.**

La représentation de Mohr est donnée sur la figure ci-contre.
La contrainte principale maximale est la $\sigma_{III}$ de normale unitaire $\underline{n}_{III}$.
La normale à la surface de rupture est donc perpendiculaire à $\underline{n}_{III} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_z - \underline{e}_\theta)$.
Cela explique le faciès de rupture hélicoidale observé sur l'éprouvette.