

Pompage d'une nappe de pétrole

Une barge de récupération permettant d'enlever une couche de pétrole se trouvant en surface de la mer est composée d'un tapis roulant et d'une cuve de stockage, (Figure 1).

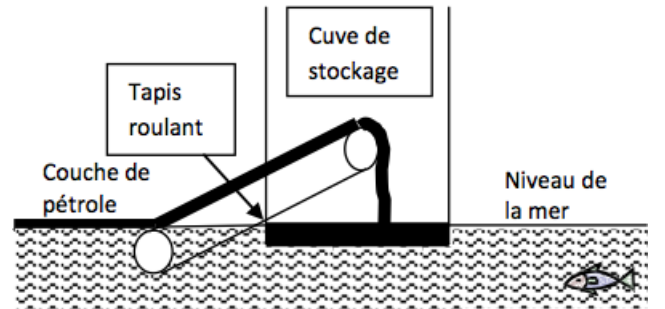


Figure 1: Dispositif de pompage

Son fonctionnement peut être schématisé de la façon suivante (Figure 2) : le dispositif composé d'un plan (π) formant un angle α avec l'horizontale est animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\underline{U} = U \underline{e}_1$, U étant constante. L'extrémité inférieure du dispositif est immergée dans la couche de pétrole. Une nappe d'épaisseur h de pétrole, supposée constante, est convectée dans la barge.

Le pétrole est considéré comme un fluide homogène de masse volumique ρ , newtonien, incompressible, de viscosité μ et de masse volumique constante ρ . L'air est de masse volumique et de viscosité tellement plus faibles que celles du pétrole qu'on admet que tout se passe comme si l'air, avec lequel la surface libre du pétrole en $x_2 = h$ est en contact, est de pression homogène P_a . On note g l'accélération de la pesanteur.

L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire. Le tapis est supposé suffisamment large (selon la direction \underline{e}_3) et long (selon la direction \underline{e}_1) pour que loin des bords latéraux et des extrémités inférieure et supérieure du tapis, l'écoulement soit dirigé selon la direction de plus grande pente, de sorte que la vitesse \underline{v} est supposée de la forme suivante : $\underline{v} = v(x_1, x_2) \underline{e}_1$.

1. Montrer que les lignes de courant sont parallèles à \underline{e}_1 .

En déduire la trajectoire d'une particule fluide initialement à la surface du pétrole en bas du tapis et advectée vers le haut du tapis.

2. Montrer que la vitesse \underline{v} ne dépend que de la variable x_2 .
3. Montrer qu'à la surface libre du pétrole, on a :

$$\frac{dv}{dx_2}(x_2 = h) = 0, \quad p(x_1, h) = P_a \quad \forall x_1,$$

où $p(x_1, x_2)$ est le champ de pression du pétrole.

4. En écrivant l'équation de Navier-Stokes, exprimer finalement la pression p , puis la vitesse v .

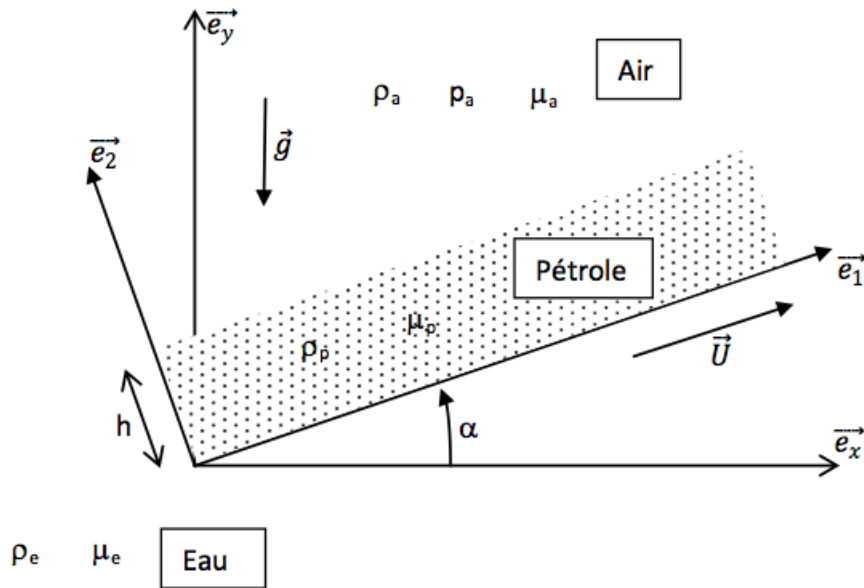


Figure 2: Schématisation du dispositif de pompage

5. En considérant U comme une donnée et h comme un paramètre variable, tracer le profil des vitesses du pétrole en fonction de h .

Vous distinguerez 3 cas : écoulement descendant, écoulement nul et écoulement montant le long de la surface libre, et vous donnerez les valeurs de h correspondantes en fonction de μ , U , ρ , g et α .

6. Calculer la force de frottement exercée par le fluide sur le tapis pour une surface de longueur l et de largeur b .
7. Calculer la puissance nécessaire pour motoriser le tapis.
8. *En exercice à la maison* Montrer que le débit D_m de fluide, pour une largeur b donnée du tapis roulant, s'écrit :

$$D_m = \rho b U h_0 \left(\tilde{h} - \frac{\tilde{h}^3}{3} \right),$$

où h_0 est l'épaisseur du film pour laquelle le débit est maximal à la vitesse de tapis donnée, dont vous donnerez l'expression, et où \tilde{h} est le rapport $\tilde{h} = h/h_0$.

Tracer D_m en fonction de \tilde{h} .

A quel cas (écoulement descendant ou écoulement nul) correspond la situation de débit maximal?