

Table des matières

1	Eléments de calcul tensoriel	3
1.1	Définitions générales	4
1.1.1	Tenseurs d'ordre 1	4
1.1.2	Produit tensoriel	4
1.1.3	Contraction d'un tenseur selon un couple d'indice	4
1.2	Tenseurs d'ordre 2	4
1.2.1	Matrice d'un tenseur d'ordre 2	5
1.2.2	Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2	5
1.2.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur	6
1.2.4	Contractions de deux tenseurs d'ordre 2	7
1.2.5	Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2	7
1.2.6	Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur	7
1.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2	8
1.4	Calcul différentiel sur les tenseurs	8
1.4.1	Gradient d'un champ de tenseurs	9
1.4.2	Divergence d'un champ de tenseurs	10
1.5	Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs	11
1.5.1	coordonnées cartésiennes orthonormées	11
1.5.2	coordonnées cylindriques	11
1.5.3	coordonnées sphériques	13
2	Descriptions du mouvement des milieux continus	15
2.1	Introduction	15
2.2	Description Lagrangienne	16
2.2.1	Définition	16
2.2.2	Vitesse et accélération lagrangiennes	18
2.3	Approche eulérienne du mouvement	18
2.3.1	Définition	19
2.3.2	Lignes de courant	20
2.3.3	Mouvements permanents (ou stationnaires)	20
3	Tenseurs de déformation	23
3.1	Tenseurs de déformation en transformation finie	23
3.1.1	Transport des vecteurs matériels	23
3.1.2	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green	24
3.1.3	Déformation de Green-Lagrange	25
3.1.4	Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange	26

3.2	Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé	27
3.2.1	Hypothèse de petites perturbations (HPP) - Définition	27
3.2.2	Condition de compatibilité géométrique	28
3.2.3	Forme générale des solutions du problème 3.23	30
3.2.4	Bref commentaires sur les mesures de déformation	31
3.2.5	Annexe : Rotation infinitésimale	31
4	Cinématique des milieux continus - Taux de déformation	33
4.1	Taux de déformation volumique	33
4.2	Tenseur taux de déformation	34
4.3	Dérivées particulières d'un champ	35
4.3.1	Définition	35
4.3.2	Application au calcul de l'accélération eulérienne	36
4.3.3	Conservation de la masse	37
4.4	Dérivées particulières d'une intégrale de volume	37
4.4.1	Formulation et application à la conservation de la masse	37
4.4.2	Une 2e application : la conservation de la quantité de mouvement .	38
4.5	Annexe : expression de l'accélération	39
5	Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel	41
5.1	Modélisation des efforts extérieurs	41
5.2	Lemme du tétraèdre	43
5.3	Tenseur des contraintes de Cauchy	45
5.3.1	Définition et interprétation physique	45
5.3.2	Equation d'équilibre	46
5.3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	46
5.3.4	Discontinuités du champ de contraintes	47
5.4	Dualisation de l'équation de la dynamique	47
5.4.1	Théorème des puissances virtuelles	47
5.4.2	Théorème des travaux virtuels	48
5.4.3	Puissance et travail des efforts extérieurs dans le mouvement réel .	49
6	Comportement élastique du solide tridimensionnel	51
6.1	Comportement élastique en condition isotherme	51
6.2	Comportement élastique linéaire	52
6.3	Comportement élastique linéaire isotrope	54
6.4	Définition du chargement	56
6.5	Equations et méthode de résolution en déplacement des problèmes d'élasticité 3D	58
6.5.1	Définition de la solution d'un problème d'élasticité et méthodes . .	58
6.5.2	Méthode de résolution par les déplacements	59
6.5.3	Expérience de traction simple	60
6.6	Annexe : Méthode de résolution par les contraintes	62
7	Introduction à la Mécanique des Fluides	63

Chapitre 1

Eléments de calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus (MMC) introduit dans ses concepts, outre des scalaires et des vecteurs, des éléments d'algèbre linéaire tels les formes multilinéaires. Ces objets mathématiques, que l'on désigne par le terme de "tenseurs" y jouent un rôle primordial. De manière générale, l'utilisation des tenseurs découle de la nécessité de décrire les phénomènes physiques sous une forme indépendante du système de coordonnées. L'objectif visé dans ce chapitre est, sans souci de formalisme mathématique, de donner les connaissances élémentaires suffisantes pour l'utilisation du calcul tensoriel en mécanique des milieux continus. Le choix délibéré fait est le suivant :

- L'espace considéré euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire,
 - On n'utilisera que des bases orthonormées et les coordonnées cartésiennes associées. Dans cette optique, l'écriture en notation intrinsèque permettra de généraliser les diverses relations que l'on établira.
- Les calculs en coordonnées spatiales curvilignes nécessiteraient un formalisme plus général pour lequel le lecteur est renvoyé à des ouvrages spécialisés.

On se limite donc ici à une présentation succincte des notions de calcul tensoriel nécessaires pour l'étude des milieux continus abordés dans cet enseignement (solide élastique tridimensionnel, fluides newtoniens, etc.).

convention d'Einstein :

On munit E d'une base orthonormée (\underline{e}_i) ($1 \leq i \leq p$) et l'on note u_i la i -ième composante du vecteur \underline{u} . Sauf mention explicite du contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, dite convention d'Einstein : si un même indice figure 2 fois dans une expression, il y a sommation sur cet indice.

exemples :

Le vecteur \underline{u} peut s'écrire $u_i \underline{e}_i$.

Le produit scalaire $\underline{a} \cdot \underline{b}$ peut s'écrire $a_i b_i$.

Considérons maintenant l'écriture suivante : $a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, 3$. Elle représente un système de 3 équations (i prenant distinctement les valeurs 1 ou 2 ou 3) à trois inconnues (sommation sur j , pour chaque i fixé). L'indice i qui spécifie ici un terme particulier, s'appelle un indice libre ou franc. On notera que dans l'écriture précédente, la dénomination de l'indice, j , appelé indice muet ou de sommation, est sans importance. On aurait pu remplacer cet indice par un autre (par exemple k). On voit sur cet exemple apparaître une règle générale. Dans les deux membres d'une égalité, on doit trouver, dans chaque monôme, le même nombre d'indices libres désignés par les mêmes lettres. Ceci

permet de vérifier rapidement la cohérence des équations.

Cette convention, également appelée convention de l'indice muet, permet d'alléger les écritures des expressions intervenant dans les calculs en Mécanique des Milieux Continus (MMC).

1.1 Définitions générales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle tenseur d'ordre n une forme n -linéaire sur E .

1.1.1 Tenseurs d'ordre 1

Etant de dimension finie, E est isomorphe à son dual E^* . Ainsi, au vecteur \underline{a} , il est possible d'associer la forme linéaire a^* telle que $(\forall \underline{u}) a^*(\underline{u}) = \underline{a} \cdot \underline{u}$. Grâce à cet isomorphisme, on convient d'identifier le vecteur \underline{a} et la forme linéaire a^* , de sorte que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs d'ordre 1. Par convention, ils sont notés par une lettre soulignée une fois.

1.1.2 Produit tensoriel

Etant donnés deux tenseurs \mathcal{T} et \mathcal{T}' d'ordres respectifs p et q , on appelle produit tensoriel de \mathcal{T} et \mathcal{T}' et l'on note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ le tenseur d'ordre $p + q$ défini par :

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p) \mathcal{T}'(\underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) \quad (1.1)$$

L'extension au produit tensoriel de n tenseurs est immédiate. Ainsi, on appelle produit tensoriel des n vecteurs \underline{a}_i le tenseur d'ordre n suivant :

$$\underline{a}_1 \otimes \dots \otimes \underline{a}_n(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{u}_1) \times \dots \times (\underline{a}_n \cdot \underline{u}_n) \quad (1.2)$$

1.1.3 Contraction d'un tenseur selon un couple d'indice

Soit \mathcal{T} un tenseur d'ordre p . On appelle contraction de \mathcal{T} selon ses deux derniers indices le tenseur \mathcal{T}^c d'ordre $p - 2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^c(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}, \underline{e}_i, \underline{e}_i) \quad (1.3)$$

On vérifie sans peine que cette définition est indépendante du choix de la base (\underline{e}_i) . En modifiant la place des \underline{e}_i dans le p -uplet, il est évidemment possible de contracter \mathcal{T} selon un couple arbitraire d'indices.

A titre d'exemple, la contraction du produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ selon ses deux indices n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs :

$$\underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b} \quad (1.4)$$

1.2 Tenseurs d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 sont les formes bilinéaires sur E . On convient de souligner 2 fois la lettre désignant un tenseur d'ordre 2.

1.2.1 Matrice d'un tenseur d'ordre 2

La matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base (\underline{e}_i) est une matrice carrée de terme général

$$T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad (1.5)$$

où $\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ est le scalaire obtenu en appliquant la forme bilinéaire $\underline{\underline{T}}$ au couple de vecteurs $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. En vertu de la linéarité de $\underline{\underline{T}}$ par rapport à chacun de ses arguments, on note que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(u_i \underline{e}_i, v_j \underline{e}_j) = T_{ij} u_i v_j \quad (1.6)$$

On note $\underline{\underline{\delta}}$ le tenseur dont la matrice a pour terme d'indice ij le symbole de Kronecker δ_{ij} . D'après (1.6), le tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{\delta}}(\underline{u}, \underline{v}) = \delta_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (1.7)$$

${}^t \underline{\underline{T}}$ désigne le transposé du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini de la façon suivante :

$${}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) \quad (1.8)$$

On observe que les matrices de $\underline{\underline{T}}$ et ${}^t \underline{\underline{T}}$ sont transposées l'une de l'autre.

Le produit tensoriel des deux vecteurs \underline{a} et \underline{b} , noté $\underline{a} \otimes \underline{b}$, constitue un exemple important de tenseur d'ordre 2. Conformément à la définition (1.2), on a :

$$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v}) \quad \underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.9)$$

Il résulte immédiatement de (1.5) que le terme général de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est égal à $a_i b_j$. En particulier, le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ est le scalaire $\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}$.

Partant de (1.6) et compte tenu de (1.9), nous obtenons :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = T_{ij} u_i v_j = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.10)$$

La famille des produits tensoriels $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ constitue donc une base de l'espace des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.11)$$

1.2.2 Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2

Au tenseur $\underline{\underline{T}}$, on associe l'endomorphisme T de même matrice. On a donc :

$$T(\underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \quad (1.12)$$

On vérifie alors sans peine que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \quad (1.13)$$

On définit par ce procédé un isomorphisme de l'espace des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel E . Cet isomorphisme permet d'étendre aux tenseurs certains concepts propres aux endomorphismes, tels que l'inverse, le déterminant, la trace ...

Lorsque T est inversible, on appelle inverse du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\underline{\underline{T}}^{-1}$, le tenseur

associé à l'endomorphisme T^{-1} .

On appelle déterminant (resp. trace) du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\det \underline{\underline{T}}$ (resp. $\text{tr} \underline{\underline{T}}$) le déterminant (resp. la trace) de l'endomorphisme associé :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det T \quad ; \quad \text{tr} \underline{\underline{T}} = \text{tr} T \quad (1.14)$$

On remarque que l'endomorphisme associé au tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ (voir (1.7)) n'est autre que l'identité de l'espace vectoriel.

1.2.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur

On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et \underline{v} et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le vecteur¹ obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}$ selon les deux derniers indices². En utilisant l'équivalence vecteur-tenseur d'ordre 1 et la définition (1.3), on obtient :

$$(\forall \underline{u}) \quad \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}(\underline{u}) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}(\underline{u}, \underline{e}_j, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{e}_j) \underline{v} \cdot \underline{e}_j = u_i T_{ij} v_j = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \quad (1.15)$$

Il en résulte que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = T(\underline{v}) \quad (1.16)$$

En comparant (1.13) et (1.15), on observe en outre que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.17)$$

Par exemple, dans le cas particulier $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$, (1.17) s'écrit

$$(\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.18)$$

On en déduit que

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.19)$$

On appelle produit contracté de \underline{v} et de $\underline{\underline{T}}$ et l'on note $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}$ le vecteur obtenu en contractant $\underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les deux premiers indices :

$$(\forall \underline{u}) \quad (\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_i, \underline{u}) = v_i \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{u}) = v_i T_{ij} u_j = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.20)$$

L'application de (1.17) à ${}^t \underline{\underline{T}}$ donne

$${}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot ({}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.21)$$

En utilisant ce résultat dans (1.20), on a finalement :

$$\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} = {}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} \quad (1.22)$$

On déduit au passage de (1.19) et de (1.22) que

$$\underline{v} \cdot \underline{a} \otimes \underline{b} = (\underline{v} \cdot \underline{a}) \underline{b} \quad (1.23)$$

En rapprochant (1.17) et (1.22), on observe que l'on a :

$$\underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = {}^t \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = \underline{v} \cdot ({}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.24)$$

En définitive, l'ordre des parenthèses étant indifférent, on choisit de noter $\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le scalaire $\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v})$:

$$\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.25)$$

¹resp. le tenseur d'ordre 1

²De fait, il s'agit d'une convention conforme, en raisonnant en composantes, au produit de la matrice de $\underline{\underline{T}}$ par le vecteur colonne de \underline{v} .

1.2.4 Contractions de deux tenseurs d'ordre 2

Soient $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ deux tenseurs d'ordre 2 associés respectivement aux endomorphismes T et T' . On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}$ selon les indices 2 et 3. On a donc

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_k, \underline{e}_k, \underline{e}_j) = T_{ik}T'_{kj} \quad (1.26)$$

La matrice de $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ ayant pour terme d'indice ij le scalaire $T_{ik}T'_{kj}$, $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ est donc le tenseur associé à l'endomorphisme $T \circ T'$. En particulier, étant associé à l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel, le produit $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} \quad (1.27)$$

$\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}^{-1}$ sont donc inverses pour le produit contracté des tenseurs d'ordre 2.

À titre d'exemple, considérons le produit contracté des tenseurs $\underline{a} \otimes \underline{b}$ (terme général $a_i b_j$) et $\underline{c} \otimes \underline{d}$ (terme général $c_i d_j$). D'après (1.26), le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d}$ est $a_i b_k c_k d_j$, soit $(\underline{b} \cdot \underline{c}) a_i d_j$. On a donc :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d} = (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \otimes \underline{d} \quad (1.28)$$

1.2.5 Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2

On appelle produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}}$ le scalaire obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}$ selon les couples d'indices (2,3) et (1,4) :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}} = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_j, \underline{e}_i) = T_{ij}T'_{ji} \quad (1.29)$$

On observe que $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}}$ n'est autre que la trace du produit contracté $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$. La double contraction des tenseurs d'ordre 2 est donc une opération commutative :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}} = \text{tr} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}} = \underline{\underline{T'}} : \underline{\underline{T}} \quad (1.30)$$

1.2.6 Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur

On considère une fonction scalaire ψ de la variable tensorielle $\underline{\underline{T}}$. On suppose que ψ est dérivable par rapport aux composantes T_{ij} . On a donc :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} dT_{ij} \quad (1.31)$$

On pose

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.32)$$

Avec cette notation, (1.31) s'écrit encore

$$d\psi = \frac{{}^t \partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} : d\underline{\underline{T}} \quad (1.33)$$

Ceci constitue la définition intrinsèque de la dérivée de ψ par rapport à $\underline{\underline{T}}$.

1.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2

Soit \mathbb{C} un tenseur d'ordre 4. On pose

$$C_{ijkl} = \mathbb{C}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l) \quad (1.34)$$

Avec le même raisonnement qu'en (1.11), on obtient :

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (1.35)$$

Le produit doublement contracté $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ est défini comme la contraction de $\mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les couples d'indices (4,5) et (3,6). C'est donc un tenseur d'ordre 2. Le terme d'indice ij de la matrice de $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ vaut :

$$\underline{e}_i \cdot (\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{e}_j = \mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l, \underline{e}_l, \underline{e}_k) = C_{ijkl} T_{lk} \quad (1.36)$$

de sorte que

$$\mathbb{C} : \underline{\underline{T}} = C_{ijkl} T_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.37)$$

On définit également le produit doublement contracté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}$. C'est le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant le tenseur $\underline{\underline{T}} \otimes \mathbb{C}$ selon les couples d'indices (1,4) et (2,3). On obtient sans peine :

$$\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = T_{lk} C_{kl ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.38)$$

Notons que l'égalité $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ n'a lieu que si la matrice du tenseur \mathbb{C} possède la propriété de symétrie $C_{kl ij} = C_{ijkl}$.

On dispose enfin de l'identité suivante :

$$(\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}) : \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}} : (\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}') = T_{ji} C_{ijkl} T'_{lk} \quad (1.39)$$

L'ordre des parenthèses étant indifférent, le scalaire ci-dessus pourra être noté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}'$.

Remarque : Outre la définition intrinsèque des tenseurs (forme multilinéaire), un autre moyen dont on dispose pour vérifier la tensorialité d'un objet à partir de ses composantes est qu'il vérifie des règles de changement de base qui seront évoquées dans la présentation orale de cet enseignement. On pourra à titre d'exercice, vérifier que les tenseurs introduits à l'aide des diverses opérations satisfont bien aux règles de changement de base appropriées.

1.4 Calcul différentiel sur les tenseurs

En mécanique des milieux continus, les tenseurs sont en général fonction des variables d'espace et de temps. On est donc en présence de champs tensoriels.

La dérivation de ces champs par rapport aux variables d'espace conduit à l'introduction d'opérateurs aux dérivées partielles tels que le gradient, la divergence, le laplacien, le rotationnel.

On suppose que tous les champs tensoriels considérés par la suite sont suffisamment réguliers pour que toutes les expressions écrites aient un sens. De même, on suppose désormais que la base (\underline{e}_i) est *cartésienne* et orthonormée.

1.4.1 Gradient d'un champ de tenseurs

On considère pour commencer un champ de vecteurs³, c'est-à-dire une application $\underline{X} \rightarrow \underline{\Phi}(\underline{X})$. On suppose que les composantes Φ_i sont différentiables. On a donc

$$d\underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \right) \cdot d\underline{X} \quad (1.40)$$

Il existe donc un tenseur d'ordre 2 reliant les différentielles $d\underline{X}$ et $d\underline{\Phi}$. Il sera noté $\underline{\nabla} \underline{\Phi}$ ⁴ :

$$d\underline{\Phi} = \underline{\nabla} \underline{\Phi} \cdot d\underline{X} \quad (1.41)$$

D'après (1.40), on a

$$\underline{\nabla} \underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.42)$$

(1.41) constitue la définition intrinsèque du gradient de $\underline{\Phi}$. Elle permet notamment de déterminer $\underline{\nabla} \underline{\Phi}$ dans un système de coordonnées non nécessairement cartésien orthonormé. A titre d'exemple, calculons le gradient du champ de vecteurs \underline{e}_r en coordonnées cylindriques. On remarque d'abord que l'on a $d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta$. Puis l'on écrit la différentielle $d\underline{X}$ en fonction des différentielles des coordonnées cylindriques :

$$d\underline{X} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z \quad (1.43)$$

On en déduit que $r d\theta = \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X}$ dont on tire finalement

$$d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta = \frac{1}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X} \Rightarrow \underline{\nabla} \underline{e}_r = \frac{1}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (1.44)$$

Soit à présent $\underline{X} \rightarrow \underline{\mathcal{T}}(\underline{X})$ un champ de tenseurs d'ordre p . L'égalité (1.40) se généralise immédiatement sous la forme suivante :

$$d\underline{\mathcal{T}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \right) \cdot d\underline{X} \quad (1.45)$$

Le gradient $\underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}}$ reliant linéairement les différentielles $d\underline{X}$ et $d\underline{\mathcal{T}}$ est donc un tenseur d'ordre $p+1$. Il est défini de façon intrinsèque par

$$d\underline{\mathcal{T}} = \underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}} \cdot d\underline{X} \quad (1.46)$$

et dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées par

$$\underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \quad (1.47)$$

³resp. de tenseurs d'ordre 1

⁴On utilisera le cas échéant la notation $\underline{\underline{grad}} \underline{\Phi}$

1.4.2 Divergence d'un champ de tenseurs

On considère un champ de tenseurs \mathcal{T} d'ordre $p \geq 1$. On appelle divergence de \mathcal{T} , et l'on note $\operatorname{div} \mathcal{T}$, la contraction de $\nabla \mathcal{T}$ selon ses deux derniers indices. $\operatorname{div} \mathcal{T}$ est donc un tenseur d'ordre $p - 1$.

Dans le cas d'un champ de vecteurs, on déduit de (1.4) et de (1.42) que

$$\operatorname{div} \underline{\Phi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} \quad (1.48)$$

En coordonnées non cartésiennes orthonormées, on utilisera la définition intrinsèque. Ainsi, d'après (1.4) et (1.44), nous obtenons immédiatement $\operatorname{div} \underline{e}_r = 1/r$.

Dans le cas d'un champ de tenseurs d'ordre 2, le gradient est un tenseur d'ordre 3. D'après (1.11) et (1.47), on a en effet

$$\underline{\nabla T} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial X_k} \otimes \underline{e}_k = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \quad (1.49)$$

La contraction d'un produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}$ selon les indices 2 et 3 est égale, par définition, à $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c}$ et vaut donc $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ (voir section 1.2.3 et (1.19)). On a donc

$$\operatorname{div} \underline{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k} \underline{e}_i \delta_{jk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \underline{e}_i \quad (1.50)$$

1.5 Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs

1.5.1 coordonnées cartésiennes orthonormées

coordonnées

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans la base orthonormée $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{OM} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$$

fonction scalaire

$$f = f(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_i \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

champ de tenseurs d'ordre 2

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

1.5.2 coordonnées cylindriques

coordonnées

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$$

$$d\underline{M} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z$$

$$d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta ; d\underline{e}_\theta = -\underline{e}_r d\theta ; d\underline{e}_z = 0$$

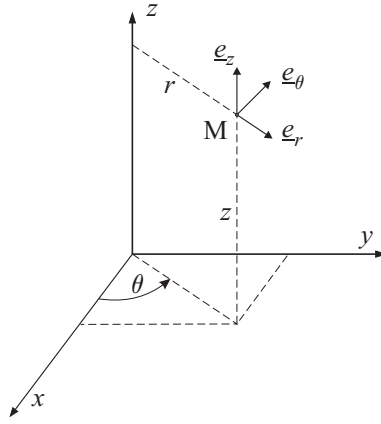


FIG. 1.1 – coordonnées cylindriques.

fonction scalaire

$$f = f(r, \theta, z)$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_z \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (\{i, j\} \in (r, \theta, z))$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{T}} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r \\
& + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\
& + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \underline{e}_z
\end{aligned}$$

1.5.3 coordonnées sphériques

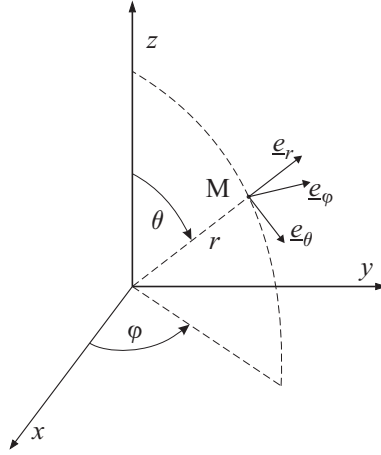


FIG. 1.2 – coordonnées sphériques.

coordonnées

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r$$

$$d\underline{M} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_r = d\theta \underline{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_\theta = -d\theta \underline{e}_r + \cos \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_\varphi = -\sin \theta d\varphi \underline{e}_r - \cos \theta d\varphi \underline{e}_\theta$$

fonction scalaire

$$f = f(r, \theta, \varphi)$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \cotan \theta v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta v_\theta + v_r \right) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta \frac{v_\theta}{r} + 2 \frac{v_r}{r}$$

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (\{i, j\} \in (r, \theta, \varphi))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cotan \theta) \right) \underline{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cotan \theta + 3T_{r\theta}] \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cotan \theta] \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

Chapitre 2

Descriptions du mouvement des milieux continus

2.1 Introduction

Un corps physique est un ensemble de points matériels qui sont liés par des liaisons internes spécifiques. La matière est discontinue à l'échelle moléculaire et même à une échelle plus grande (p. ex. celles des cristaux d'un métal). Le point de vue de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) est tel que l'on se place à l'échelle d'un élément de volume suffisamment petit pour être traité comme un infiniment petit, et qui pourtant contient un très grand nombre de molécules (de cristaux). A cette échelle d'analyse, dite 'macroscopique', la matière se présente comme un milieu continu, c'est à dire un milieu dans lequel les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre, sauf éventuellement le long de certaines surfaces (de discontinuités). En particulier, on suppose que la distribution de masse est continue et non, comme dans la "réalité", concentrée dans une partie de volume très petite.

La validité de cette hypothèse de continuité dépend évidemment de l'échelle d'observation, donc des volumes appréhendés par les instruments de mesure. Les fluctuations des mesures seront alors appréhendées par leurs moyennes spatiale et temporelle considérées comme indépendantes du nombre de molécules appartenant au volume durant la mesure. C'est cette homogénéité statistique qui justifie en quelque sorte le concept de milieu continu. En général, un appareil appréhendant un volume de $10^{-2}mm \times 10^{-2}mm \times 10^{-2}mm$ pourra être considéré comme fournissant une mesure locale. En effet, les phénomènes observés habituellement en MMC ne subissent pas de variations notables sur une distance de 0.01 mm, à l'exception toutefois de certains phénomènes particuliers (p. ex. onde de choc, zone de cavitation dans un fluide, fissuration de solides etc..). Il est alors judicieux d'assimiler ces zones à des surfaces de discontinuités¹.

Ces restrictions ne doivent pas faire perdre de vue que le schéma 'milieu continu' est un outil très précieux et puissant qui permet de traiter de très nombreux problèmes de mécanique, notamment ceux qui se posent couramment à l'ingénieur. Enfin, la continuité

¹Le milieu lui même peut présenter une hétérogénéité à notre échelle (ex : alliages métalliques composés de monocristaux, milieux granulaires, matériaux composites). Dans ces cas, la particule doit être de taille grande par rapport à la taille moyenne des constituants.

du milieu devant être maintenue au cours de l'évolution de celui-ci, des conditions de régularité mathématique (continuité et différentiabilité) devront être vérifiées par les fonctions qui seront introduites pour la description des mouvements.

Décrire un système matériel c'est identifier, à tout instant t , les particules de ce système. Ceci revient à connaître leurs mouvements. On se propose dans ce chapitre de présenter les deux modes usuels de description du mouvement d'un milieu continu : la description matérielle (Lagrange) et la description spatiale (Euler). On précisera au préalable la notion de configuration d'un système matériel.

2.2 Description Lagrangienne

2.2.1 Définition

La modélisation de milieu continu tridimensionnel consiste à représenter le système mécanique considéré comme un volume de l'espace et à décrire toutes les grandeurs qui s'y rattachent comme des champs définis sur le volume en question. Notons Ω_o le volume qu'occupe le système avant qu'il subisse la transformation que l'on se propose d'étudier. La géométrie du système avant transformation est appelée *configuration initiale* ou *configuration de référence* notée κ_0^2 .

Les constituants élémentaires du système sont des volumes infinitésimaux. On les appelle particules ou points matériels. Etant donné un repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de l'espace affine, chaque point matériel est repéré par sa position \underline{X} dans la configuration initiale κ_0 , dans lequel il occupe le volume $d\Omega_o$.

Pour décrire mathématiquement la transformation, le point de vue dit *lagrangien* consiste à se donner la trajectoire de chacun des points matériels au moyen d'une fonction $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de la position initiale \underline{X} et du temps t :

$$t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (2.1)$$

A t fixé, l'application définie sur Ω_o par

$$\underline{X} \rightarrow \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$

permet de déterminer le domaine Ω_t qu'occupe le milieu continu (ou le système mécanique) dans la configuration à l'instant t (configuration actuelle), notée κ_t . \underline{x} désigne la position dans la configuration Ω_t du point matériel initialement situé en \underline{X} . Pour $t = 0$, on a évidemment $\underline{x} = \underline{X}$, ce qui signifie que l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, 0)$ est l'identité de l'espace affine :

$$\underline{X} = \underline{\phi}(\underline{X}, 0) \quad (2.3)$$

On introduit aussi le déplacement $\xi(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} . Il s'agit du vecteur d'origine \underline{X} et d'extrémité $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$:

$$\xi(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X} = \underline{x} - \underline{X} \quad (2.4)$$

Pour pouvoir calculer les vitesses des points matériels sur leurs trajectoires (2.1), on supposera pour tout \underline{X} que l'application $t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de la variable t est continue et dérivable.

²Dans la suite, Ω_o pourra désigner aussi bien le domaine géométrique ou le volume au sens scalaire

La continuité par rapport à t de cette application est nécessaire pour garantir que les vitesses restent finies.

Pour rendre compte mathématiquement de l'idée que des points matériels infiniment proches le restent, on impose à l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de (2.2) d'être continue par rapport à la variable \underline{X} . Par ailleurs, pour formaliser le concept intuitif de déformation, on pressent qu'il sera nécessaire de rendre compte des variations locales de la fonction $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$. Une description mathématique précise de celles-ci nécessite la différentiabilité de la fonction en question. On notera que la continuité des dérivées partielles $\partial\phi_i/\partial X_j$ par rapport au temps résulte, pour tout \underline{X} de celle de la fonction $t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

On note $J(\underline{X}, t)$ le jacobien de la transformation subie par le point matériel \underline{X} entre les instants 0 et t . Il s'agit par définition du déterminant de la matrice jacobienne (de composantes les $\partial\phi_i/\partial X_j$) :

$$J(\underline{X}, t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.5)$$

La propriété (2.3) indique que $J(\underline{X}, 0) = 1$. Dès lors, la continuité en $t = 0$ de l'application $t \rightarrow J(\underline{X}, t)$ impose qu'il existe un intervalle de temps sur lequel

$$\forall \underline{X}, t) \quad J(\underline{X}, t) > 0 \quad (2.6)$$

Sous réserve de cette condition, la formule de changement de variable dans les intégrales multiples fournit l'expression du volume occupé par le système à l'instant t en fonction du jacobien $J(\underline{X}, t)$

$$\Omega_t = \int_{\Omega_o} J(\underline{X}, t) d\Omega_o \quad (2.7)$$

La relation (2.7)³ transcrite au niveau du volume élémentaire se traduit par

$$d\Omega_t = J(\underline{X}, t) d\Omega_o \quad (2.8)$$

Ce résultat permet d'interpréter le jacobien $J(\underline{X}, t)$ comme la dilatation volumique du volume élémentaire entre les configurations initiale et actuelle. La relation (2.8), appelée *formule de transport des volumes élémentaires*, fournit un premier exemple du rôle joué par le gradient de la transformation $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ entre les instants 0 et t dans le calcul des déformations, en l'occurrence volumiques ici.

On a vu que la continuité de $t \rightarrow J(\underline{X}, t)$ par rapport à t imposait la positivité du jacobien dans un certain intervalle. La relation (2.8) montre que l'annulation du jacobien correspondrait géométriquement à la disparition du volume élémentaire. Cet évènement est bien entendu exclue de la modélisation. Les observations qui précèdent font de la transformation du système entre les instants 0 et t une bijection de l'espace affine.

En résumé, les transformations du milieu continu tridimensionnel considérées dans le cadre de la présente modélisation sont définies à chaque instant t par des bijections continues et différentiables de l'espace affine $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, possédant les propriétés (2.3) et (2.6). Par ailleurs, la continuité et la dérivabilité de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ par rapport à t permettent le calcul de la vitesse des points matériels. Il en sera de même pour la continuité et la dérivabilité de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ à l'ordre 2 qui garantira le calcul de l'accélération.

³où l'on a noté de la même façon le domaine géométrique et son volume au sens scalaire

Nota Bene : Pour certaines situations, il apparaît que les hypothèses de continuité doivent être assouplies pour pouvoir inclure dans la modélisation un certain nombre de problèmes d'intérêt pratique : écoulement autour d'obstacle, cavitation dans un milieu fluide, jet de fluide, glissement dans un solide, fissuration d'une structure mécanique, apparition de bandes de cisaillement dans les matériaux, etc.. Ceci conduit à ne retenir pour la modélisation du milieu continu que les hypothèses de continuité et de continue différentiabilité par morceaux. Ce procédé permet d'introduire si nécessaire des surfaces de discontinuités dans la schématisation "milieux continus".

2.2.2 Vitesse et accélération lagrangiennes

Les hypothèses formulées au sujet de la régularité par rapport au temps de l'application (2.1) permettent de définir la vitesse $\underline{U}(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (2.9)$$

(2.9) définit la vitesse comme un champ sur la configuration initiale Ω_o . Celle-ci est dite Lagrangienne.

L'approche Lagrangienne est également dénommée description par trajectoire, celle-ci étant attachée à une particule. Une trajectoire désigne la courbe géométrique déterminée par le lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps.

On définit l'accélération lagrangienne $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} :

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\underline{X}, t) \quad (2.10)$$

Comme pour la vitesse, (2.10) définit l'accélération comme un champ sur la configuration initiale Ω_o .

Remarque sur la transformation inverse : Notons à présent $\underline{\psi}$ l'inverse de la fonction $\underline{\phi}$ de (2.2) :

$$\underline{x} \rightarrow \underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \quad (2.11)$$

Cette fonction permet de définir la vitesse comme un champ sur la configuration actuelle Ω_t . Plus précisément, la vitesse à l'instant t du point matériel situé à cet instant en \underline{x} est $\underline{u}(\underline{x}, t)$:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{\psi}(\underline{x}, t), t) \quad (2.12)$$

Les applications $\underline{X} \rightarrow \underline{U}(\underline{X}, t)$ et $\underline{x} \rightarrow \underline{u}(\underline{x}, t)$ sont appelées respectivement champs lagrangien et eulérien des vitesses. C'est précisément à la description eulérienne qu'est consacrée la section qui suit.

2.3 Approche eulérienne du mouvement

La description lagrangienne nécessite la connaissance d'une configuration de référence. Elle est bien adaptée à l'étude de nombreux problèmes en mécanique des solides. Si cette

description est la plus naturelle pour paramétrer le mouvement d'un milieu continu, il est évident qu'elle n'est pas la plus adaptée à tous les problèmes. En effet, dans le cas d'un fluide, il est impossible de suivre le mouvement individuel des particules fluides. On ne peut pas plus identifier leur position à un instant de référence. On utilise alors une description Eulérienne du milieu : on regarde ce qui se passe à un endroit donné indépendamment de la particule qui s'y trouve.

2.3.1 Définition

La description eulérienne du mouvement des milieux continus consiste à prendre à chaque instant la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre 2 instants t et $(t + dt)$. Ceci revient, pour l'aspect géométrique, à définir le mouvement par la donnée, à chaque instant t , de la vitesse \underline{u} , que l'on notera aussi \underline{U}_t , de la particule située au point géométrique M dans la configuration actuelle :

$$\underline{U}_t = \underline{U}_t(x, t) \quad (2.13)$$

Ainsi $\underline{U}_t(x, t)$ est bien la vitesse de la particule qui se trouve au point géométrique (\underline{x}) à l'instant t et qui, sauf cas particulier, ne sera plus au même point à un autre instant t' . Comme pour la description lagrangienne, l'approche eulérienne requiert la donnée d'une fonction vectorielle de 4 variables scalaires (dites eulériennes) qui sont les variables d'espace x_1, x_2, x_3 (relatives à la configuration actuelle) et le temps t . Il va de soi que l'on peut définir toute grandeur physique, dans un cadre eulérien sous la forme (par exemple pour une grandeur scalaire) : $B = b_t(x, t)$.

Du fait que les variables (x_1, x_2, x_3) sont des coordonnées spatiales, la description eulérienne est aussi appelée *description spatiale*.

Remarques :

i) Il convient de vérifier que la donnée du *champ de vitesses* $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ permet de bien définir le mouvement du milieu continu (au même titre que la description lagrangienne). Ce qui revient à montrer que la connaissance de $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ permet de déterminer la fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

ii) On a pris pour l'instant le soin de noter $\underline{U}(\underline{X}, t)$ et $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ les vitesses respectivement en variables de Lagrange et en variables eulériennes. On peut se poser maintenant la question des relations qui existent entre les 2 .

Considérons une particule passant au point repéré par le vecteur \underline{x} à l'instant t . Cette particule est en mouvement selon : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t)$. On peut alors écrire : $\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}_t(\underline{x}(\underline{X}, t), t)$. Ce qui peut s'écrire :

$$\left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right]_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = \left[\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right]_{\underline{x}}(\underline{x}, t) = \underline{U}_t(\underline{x}(\underline{X}, t), t).$$

Soit une particule fixée repérée par la variable \underline{X} . Si on omet cette variable dans l'écriture précédente, on a :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}_t(\underline{x}, t) \quad (2.14)$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivation par rapport à une fonction du temps seul lorsqu'on suit la particule dans son mouvement.

On obtient ainsi un système différentiel (3 équations à 3 fonctions scalaires x_i de la variable t) auquel on associe la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{X}$. La fonction vectorielle \underline{U}_t étant supposée suffisamment régulière, ce système possède une solution et une seule : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$. Le passage Euler-Lagrange peut donc être réalisé si l'on connaît la configuration initiale.

L'ensemble des trajectoires dans l'espace de toutes les particules constitue une famille de courbes à 3 paramètres (qui sont les coordonnées X_i de M_0). Le système différentiel à résoudre s'écrit :

$$\frac{1}{\underline{U}_{t1}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\underline{U}_{t2}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\underline{U}_{t3}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_3}{dt} = 1 \quad (2.15)$$

Sa solution se met est de la forme $x_i(t) = F_i(c_1, c_2, c_3, t)$.

Pour une particule donnée \underline{X} , la détermination des c_i par la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{X}$ permet d'obtenir la trajectoire (au même titre que la description lagrangienne).

2.3.2 Lignes de courant

Définition 11 : On appelle ligne de courant, à un instant T fixé, une courbe qui en chacun de ses points admet une tangente parallèle au vecteur-vitesse en ce point et à cet instant T .

s étant une abscisse curviligne, l'équation paramétrique de la ligne de courant $x_i = x_i(s)$ est obtenue en considérant que le vecteur vitesse $\underline{U}_t(\underline{x}(s), T)$ est colinéaire à $\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds}$. On obtient alors le système différentiel de 2 équations en x_1, x_2 et x_3 :

$$\frac{1}{\underline{U}_t^1(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\underline{U}_t^2(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{\underline{U}_t^3(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_3}{ds} \quad (2.16)$$

qui s'écrit :

$$\frac{dx_1}{\underline{U}_t^1(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_2}{\underline{U}_t^2(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_3}{\underline{U}_t^3(x_1, x_2, x_3, T)} \quad (2.17)$$

Les lignes de courant sont des familles de courbes géométriques à 2 paramètres. Si on choisit par exemple x_3 comme paramètre, alors $x_i = G_i(d_1, d_2, x_3, T)$ pour $i = 1, 2$.

Remarque : Malgré les apparences, les lignes de courant ne doivent pas être confondues avec les trajectoires.

- Le sens physique des deux types de courbes est très différent
- Les systèmes différentiels à résoudre sont également différents : variable temps dans le premier, temps fixé dans le second.

2.3.3 Mouvements permanents (ou stationnaires)

Définition 12 : Un mouvement de milieu continu est dit permanent (ou stationnaire) dans un référentiel R si le champ de vitesses exprimé en variables d'Euler est indépendant du temps t : $\left. \frac{\partial \underline{U}_t}{\partial t} \right|_{\underline{x}} = 0$

Autrement dit, en un point géométrique fixe \underline{x} la vitesse ne varie pas avec le temps. Elle peut néanmoins varier d'un point à un autre du milieu continu.

Remarque : Pour un mouvement permanent, les deux systèmes différentiels caractérisant respectivement les trajectoires et les lignes de courant prennent la forme commune suivante :

$$\frac{dx_1}{U_t^1(x_1, x_2, x_3,)} = \frac{dx_2}{U_t^2(x_1, x_2, x_3,)} = \frac{dx_3}{U_t^3(x_1, x_2, x_3,)} \quad (2.18)$$

Trajectoires et lignes de courant sont ainsi confondues pour les mouvements permanents.

Chapitre 3

Tenseurs de déformation

On adopte dans ce chapitre une vision lagrangienne, qui permettra par comparaison entre la configuration actuelle et la configuration de référence, d'introduire la notion de déformation. On commence d'abord à introduire les formules de transport convectif, du point matériel et d'un vecteur matériel élémentaire. Puis, par l'intermédiaire de l'outil très simple qu'est le produit scalaire de vecteurs on mettra en évidence la déformation, concept local mesurant le changement de forme local (variation de longueur, variation angulaire). L'étude du cas particulier où le système subit une transformation homogène, c'est-à-dire identique en tout point, sera plus spécifiquement abordé lors de la présentation orale de cet enseignement. Pour le cas général, objet de ce qui suit, où la transformation du système mécanique est quelconque, on fera appel à la notion de transformation homogène tangente ; celle-ci est définie par le tenseur gradient de la transformation dont on déduira notamment le tenseur de dilatation de Cauchy-Green ainsi que le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Lorsque la transformation est infinitésimale les formules se simplifient par linéarisation (section 3.2). Les techniques de mesures usuelles (jauges d'extensométrie) et leur méthodes de dépouillement seront abordées dans le cours oral. Enfin, le présent chapitre se termine sur la question de la compatibilité géométrique, à savoir si les déformations (on se limitera à la déformation linéarisée) sont compatibles avec la continuité du milieu et avec les conditions éventuellement imposées sur les déplacements au contour du système étudié. On notera que la non compatibilité des déformations est de nature à induire des efforts intérieurs qui, s'ils sont excessifs, peuvent entraîner des ruptures préjudiciables au système mécanique considéré.

3.1 Tenseurs de déformation en transformation finie

On s'intéresse à la transformation $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ subie par le système mécanique entre les instants 0 et t . L'instant t est ici fixé. La configuration atteinte à t sera appelée configuration actuelle.

3.1.1 Transport des vecteurs matériels

On se place au voisinage du point \underline{X} de la configuration initiale. La transformation transporte le point matériel \underline{X} et son voisin $\underline{X} + d\underline{X}$ en $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ et $\underline{x} + d\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X} + d\underline{X}, t)$ respectivement. Le vecteur matériel $d\underline{X}$, d'origine \underline{X} et d'extrémité $\underline{X} + d\underline{X}$ de la configuration initiale est donc représenté dans la configuration à t par le vecteur $d\underline{x}$,

d'origine \underline{x} et d'extrémité $\underline{x} + \underline{dx}$. Sur le plan mathématique, on fera la distinction qui s'impose entre le vecteur géométrique, classe d'équivalence de bipoints équipollents, et le vecteur matériel, dont la représentation mathématique, à l'image de celle du bipoint, nécessite la donnée d'une origine et d'une extrémité.

Par définition du gradient d'une fonction de la variable vectorielle \underline{X} , on établit sans peine la relation existant entre les vecteurs \underline{dX} et \underline{dx} :

$$\underline{dx} = \underline{\phi}(\underline{X} + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX} \quad \text{avec} \quad \underline{F} = \underline{\nabla \phi} \quad (3.1)$$

au second ordre près en $|\underline{dX}|$. La relation (3.1) est appelée *formule de transport des vecteurs matériels*. A \underline{X} fixé, le transport en question s'effectue de façon linéaire par rapport à \underline{dX} . Plus précisément, (3.1) indique que la transformation au voisinage de \underline{dX} est entièrement caractérisée par la donnée de l'image $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ du point \underline{X} et de l'endomorphisme associé au gradient $\underline{\nabla \phi}(\underline{X}, t)$. On appelle transformation tangente l'application affine définie au voisinage de \underline{X} par

$$\underline{X}' \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t) + \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot (\underline{X}' - \underline{X}) \quad (3.2)$$

Elle contient toute l'information nécessaire pour la description locale de la transformation.

3.1.2 Tenseur des dilatations de Cauchy-Green

Au sens commun, le concept de déformation s'oppose à celui de conservation des angles et des longueurs. Il est donc naturel d'introduire ce concept en cherchant à quantifier l'écart à l'isométrie dans la transformation considérée. La caractéristique mathématique de l'isométrie étant la conservation du produit scalaire, on est amené à calculer la variation de ce dernier dans la transformation considérée. Plus précisément, on se donne deux vecteurs matériels \underline{dX} et \underline{dX}' d'origine \underline{X} dans la configuration initiale. Leurs représentants dans la configuration actuelle (figure 3.1) sont les vecteurs \underline{dx} et \underline{dx}' d'origine $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ donnés par (3.1) :

$$\underline{dx} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX} \quad ; \quad \underline{dx}' = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX}' \quad (3.3)$$

Si l'application tangente de (3.2) était une isométrie, c'est-à-dire si \underline{F} était une rotation

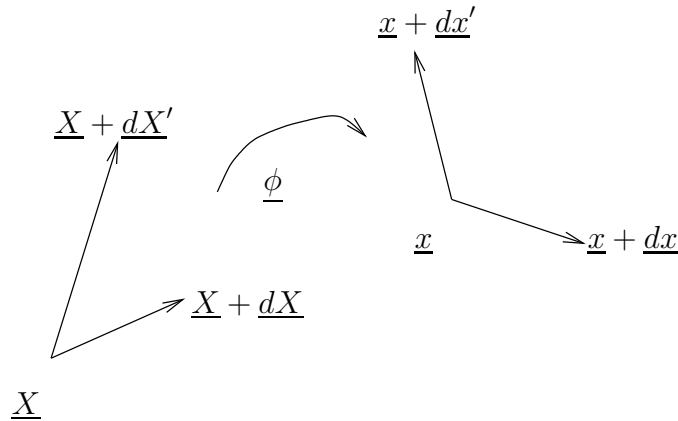


FIG. 3.1 – transport de vecteurs-matériels

ou l'identité de l'espace vectoriel, les produits scalaires $\underline{dX} \cdot \underline{dX}'$ et $\underline{dx} \cdot \underline{dx}'$ seraient égaux. En revanche, dans le cas général, on montre aisément que l'on a :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}' \quad (3.4)$$

où l'on a posé

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (3.5)$$

Le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{C}}$, entièrement formé à partir de $\underline{\underline{F}}$, est dénommé tenseur de dilatation de Cauchy-Green. Par sa définition même, il est symétrique. En tant que forme bilinéaire il est défini positif; en particulier, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Etant donné un vecteur matériel \underline{dX} de la configuration initiale, représenté dans la configuration actuelle par le vecteur \underline{dx} , on appelle dilatation dans la direction de \underline{dX} le rapport des longueurs $|\underline{dx}|$ et $|\underline{dX}|$:

$$\lambda(\underline{dX}) = \frac{|\underline{dx}|}{|\underline{dX}|} \quad (3.6)$$

Cette quantité peut être calculée en s'appuyant sur (3.4). Pour un vecteur unitaire \underline{n}_0 , on peut vérifier que :

$$\lambda(\underline{n}_0) = \sqrt{\underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n}_0} \quad (3.7)$$

En particulier, on a par exemple :

$$\lambda(\underline{e}_1) = \sqrt{C_{11}} \quad (3.8)$$

La variation angulaire entre deux directions initialement orthogonales peut également être déterminée en choisissant pour (3.4) 2 vecteurs \underline{dX} et \underline{dX}' orthogonaux (cf. cours oral ou paragraphe suivant eq. (3.17)).

3.1.3 Déformation de Green-Lagrange

Au lieu de comparer directement les produits scalaires des vecteurs infinitésimaux, on peut préférer procéder à leur différence. D'où :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}' = \underline{dX} \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{dX}' = 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{dX}' \quad (3.9)$$

où l'on a posé

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \quad (3.10)$$

$\underline{\underline{e}}$ est appelé *tenseur des déformations de Green-Lagrange*. Il est nul lorsque $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$, c'est-à-dire si $\underline{\underline{F}}$ est une rotation ou l'identité. Cette définition mathématique est donc bien compatible avec l'acception commune du mot 'déformation' puisqu'il n'y aura de déformation au point \underline{X} au sens de (3.10) que si la transformation tangente en ce point n'est pas un mouvement de corps rigide.

Compte tenu de (2.4), on note que

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \quad (3.11)$$

On tire de (3.10) et (3.11) une expression du tenseur de Green-Lagrange en fonction de $\underline{\underline{\xi}}$:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \cdot \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.12)$$

3.1.4 Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange

On commence par introduire les concepts de dilatation et de glissement pour quantifier les variations de longueurs et d'angles lorsque la transformation n'est pas une isométrie. On montre ensuite que ces quantités peuvent être déterminées à partir du tenseur des déformations.

On considère à présent deux vecteurs matériels orthogonaux \underline{dX} et \underline{dX}' de la configuration initiale, et leurs images \underline{dx} et \underline{dx}' dans le transport par la transformation (figure 3.2). On appelle glissement du couple de directions \underline{dX} et \underline{dX}' le complémentaire θ de l'angle entre \underline{dx} et \underline{dx}' :

$$(\underline{dx}, \underline{dx}') = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (3.13)$$

Voyons à présent comment calculer une dilatation ou un glissement en fonction de \underline{e} .

On considère tout d'abord dans (3.9) le cas particulier où $\underline{dX} = \underline{dX}'$ est un vecteur

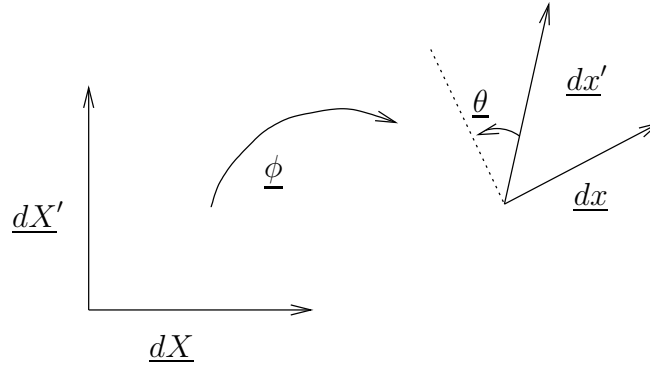


FIG. 3.2 – glissement d'un couple de directions

colinéaire au vecteur \underline{e}_i de la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On obtient :

$$|\underline{dx}|^2 - |\underline{dX}|^2 = 2 |\underline{dX}|^2 \underline{e}_i \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_i \quad (3.14)$$

sans sommation sur l'indice i . On a donc

$$e_{ii}(\underline{X}, t) = \frac{\lambda(\underline{dX})^2 - 1}{2} \quad (3.15)$$

qui prouve au passage que la dilatation ne dépend que de la direction du vecteur \underline{dX} .

Choisissons à présent \underline{dX} et \underline{dX}' respectivement colinéaires à \underline{e}_1 et \underline{e}_2 . L'application de (3.9) donne :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = 2 |\underline{dX}| |\underline{dX}'| \underline{e}_1 \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_2 \quad (3.16)$$

soit, d'après (3.13) et (3.15) :

$$e_{12} = \frac{1}{2} \sin \theta \sqrt{1 + 2e_{11}} \sqrt{1 + 2e_{22}} \quad (3.17)$$

On retiendra que la non nullité d'un terme diagonal est le signe d'une dilatation dans la direction correspondante, tandis que la non nullité d'un terme non diagonal indique la perte d'orthogonalité du couple de directions correspondant.

Il convient de rappeler le lien entre le tenseur de dilatations de Cauchy-Green et celui de Green-Lagrange : $\underline{C} = 2\underline{e} + \underline{1}$; ce lien permet d'exprimer les diverses quantités en fonction des composantes de l'un ou l'autre de ces 2 tenseurs.

3.2 Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé

3.2.1 Hypothèse de petites perturbations (HPP) - Définition

La transformation du système entre les instants 0 et t est dite infinitésimale si, pour tout \underline{X} , le tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ est peu différent de l'identité. En vertu de (3.11), cette définition est équivalente à :

$$(\forall \underline{X}) \quad |\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \quad (3.18)$$

pour la norme usuelle dans R^9 .

Les conditions (3.18) sont dénommées Hypothèses de Petites Perturbations (HPP).

D'après (3.12), la condition de transformation infinitésimale sous la forme ci-dessus implique que les déformations soient elles-mêmes infinitésimales :

$$|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \Rightarrow |\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \quad (3.19)$$

Notons cependant que la réciproque de (3.19) est fausse. En effet, les rotations fournissent un contre-exemple puisque le tenseur de déformation est nul comme le montre (3.10), alors que la condition (3.18) est prise en défaut, sauf précisément dans le cas particulier des rotations infinitésimales.

Lorsque cette condition (3.18) est satisfaite, on peut négliger le terme du second ordre en $|\underline{\underline{\nabla \xi}}|$ dans l'expression (3.12) de $\underline{\underline{e}}$. On obtient *le tenseur des déformations linéarisé*, noté $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Il n'est autre que la partie symétrique du gradient de $\underline{\underline{\xi}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.20)$$

On prendra garde au fait que le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'a plus rien à voir avec le concept de déformation si la transformation n'est pas infinitésimale.

Puisque le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ constitue la forme linéarisée de $\underline{\underline{e}}$, les composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la base orthonormée de travail sont elles-mêmes obtenues en linéarisant celles de $\underline{\underline{e}}$, c'est-à-dire en négligeant les termes du second ordre en $|\underline{\underline{\nabla \xi}}|$. A partir de (3.15) et de (3.17), on obtient donc immédiatement

$$\varepsilon_{ii} = \lambda(\underline{e}_i) - 1 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (3.21)$$

et

$$\theta = 2\varepsilon_{12} \quad (3.22)$$

On retiendra que la matrice de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans une base orthonormée¹ donne

- sur la diagonale : l'écart à l'unité de la dilatation dans la direction correspondante ; on parle d'allongement relatif
- en dehors de la diagonale : la moitié du glissement du couple de directions correspondant.

¹ces résultats ne nécessitent pas que la base soit cartésienne. Ils sont valables en coordonnées sphériques ou cylindriques.

3.2.2 Condition de compatibilité géométrique

On se place ici dans l'hypothèse des transformations infinitésimales. On travaille avec une base *cartésienne et orthonormée*.

Les six composantes du tenseur des déformations linéarisé ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont calculées à partir des trois composantes du déplacement. Ainsi, un champ de tenseurs symétriques $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ n'est pas en général la partie symétrique du gradient d'un champ de déplacement. À l'inverse, le champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ est dit géométriquement compatible s'il existe un champ de vecteurs $\underline{\xi}$ solution du problème

$$\text{trouver } \underline{X} \rightarrow \underline{\xi}(\underline{X}) \text{ tel que } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} \right) \quad (3.23)$$

Pour qu'un tel champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ puisse être interprété comme le champ de déformations dans la transformation définie par $\underline{X} \rightarrow \underline{\xi}(\underline{X})$, il reste à vérifier que ce dernier satisfait la condition (3.18). Le but de cette section est de déterminer une condition nécessaire et suffisante de compatibilité géométrique.

condition nécessaire

On suppose que le champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ est géométriquement compatible. Il existe donc une solution $\underline{\xi}$ au problème (3.23). Soit $\underline{\underline{w}}$ la partie antisymétrique du gradient de $\underline{\xi}$:

$$\underline{\underline{w}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} - {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} \right) \quad (3.24)$$

En base cartésienne orthonormée, on fait alors la remarque que le gradient des composantes de $\underline{\underline{w}}$ peut être calculé en fonction des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Plus précisément, on a :

$$w_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (3.25)$$

où $a_{,i}$ désigne la dérivée partielle $\partial a / \partial X_i$. La preuve de (3.25) s'obtient sans peine en explicitant le membre de droite en fonction des dérivées secondes des ξ_i et en échangeant l'ordre des dérivations. L'égalité des dérivées secondes croisées de la composante w_{ij} s'écrit

$$\begin{cases} i \neq j \text{ fixés} \\ k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial X_l} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial X_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial X_l} \right) \quad (3.26)$$

Elle se traduit, d'après (3.25) par des conditions à satisfaire par les composantes du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\begin{cases} i \neq j \text{ fixés} \\ k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial X_l} (\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}) = \frac{\partial}{\partial X_k} (\varepsilon_{li,j} - \varepsilon_{jl,i}) \quad (3.27)$$

Ces relations qui sont une conséquence de l'existence d'une solution au problème (3.23) sont les conditions nécessaires de compatibilité géométrique.

condition suffisante

Nous allons montrer que la condition (3.27) est suffisante pour assurer localement l'existence d'une solution au problème (3.23). La preuve fournit en fait une méthode de détermination des solutions $\underline{\xi}$ de ce problème. Elle se développe en deux temps :

1. On considère pour commencer à $i \neq j$ fixés les six formes différentielles

$$(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i})dX_k \quad (3.28)$$

La condition (3.27) assure l'intégrabilité locale de cette forme différentielle. Soit w_{ij} une primitive, définie à une constante près. On a donc

$$w_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (3.29)$$

Malgré l'identité formelle avec (3.25), il convient de souligner que les w_{ij} de (3.25) et de (3.29) n'ont pas le même statut dans la mesure où le concept de partie antisymétrique du gradient de $\underline{\xi}$ est encore dépourvu de sens à ce stade de la démonstration où l'existence de $\underline{\xi}$ reste à prouver.

On remarque que l'on change le signe de la forme différentielle de (3.28) en échangeant les indices i et j . Il est donc possible de choisir les constantes d'intégration de sorte que $w_{ij} = -w_{ji}$. Au total, 3 constantes sont donc apparues dans la détermination des champs w_{12} , w_{13} et w_{23} .

2. L'indice i étant fixé, on s'intéresse à présent aux trois formes différentielles

$$(\varepsilon_{ij} + w_{ij})dX_j \quad (3.30)$$

Pour que celles-ci soient localement intégrables, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions

$$\frac{\partial}{\partial X_k}(\varepsilon_{ij} + w_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_j}(\varepsilon_{ik} + w_{ik}) \quad (3.31)$$

dont on montre sans peine qu'elles résultent de (3.27) et de (3.29). Soit alors ξ_i une primitive de la forme différentielle de (3.30), définie à une constante près. On a donc :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij} \quad (3.32)$$

En faisant usage de la convention $w_{ij} = -w_{ji}$ et de la symétrie du tenseur $\underline{\varepsilon}$ dans (3.32), on conclut que

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} = 2\varepsilon_{ij} \quad (3.33)$$

Ceci achève de démontrer que le champ de vecteurs de composantes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 est bien solution du problème (3.23). Les w_{ij} s'interprètent alors comme les composantes de la partie antisymétrique du gradient de $\underline{\xi}$.

3 nouvelles constantes d'intégration étant apparues dans la deuxième séquence, nous observons que la solution du problème (3.23), lorsqu'elle existe, est déterminée à six constantes près. La section 3.2.3 va préciser la signification de ces dernières.

3.2.3 Forme générale des solutions du problème 3.23

On s'intéresse tout d'abord aux solutions du problème (3.23) dans le cas $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$. Avant tout calcul, il est logique de s'attendre à trouver les champs de déplacement correspondant aux isométries de l'espace affine, c'est-à-dire les translations et les rotations.

Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ est évidemment géométriquement compatible. Les primitives w_{ij} des formes différentielles (3.28) sont des constantes formant une matrice antisymétrique. On pose :

$$w_{12} = -r \quad ; \quad w_{13} = +q \quad ; \quad w_{23} = -p \quad (3.34)$$

Les composantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 des champs $\underline{\xi}$ solutions sont obtenues par intégration des formes différentielles de (3.30). On trouve :

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda_1 - rX_2 + qX_3 \\ \xi_2 = \lambda_2 + rX_1 - pX_3 \\ \xi_3 = \lambda_3 - qX_1 + pX_2 \end{cases} \quad (3.35)$$

soit encore, sous forme vectorielle :

$$\underline{\xi}(\underline{X}) = \underline{\lambda} + \underline{\theta} \wedge \underline{X} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\lambda} = \lambda_i \underline{e}_i \\ \underline{\theta} = p\underline{e}_1 + q\underline{e}_2 + r\underline{e}_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

Le champ de déplacement $\underline{X} \rightarrow \underline{\lambda}$ est associé à la translation de vecteur $\underline{\lambda}$. Par ailleurs, d'après la section 3.2.5, la transformation associée au champ de déplacement $\underline{X} \rightarrow \underline{\theta} \wedge \underline{X}$ s'interprète comme une rotation infinitésimale² sous réserve que $|\underline{\theta}| \ll 1$. Comme prévu, les champs $\underline{\xi}$ de (3.36) satisfaisant cette condition peuvent donc être considérés, de façon approchée³, comme les déplacements dans les isométries de l'espace affine.

On note qu'un champ $\underline{\xi}$ de (3.36) est défini par 6 constantes, 3 d'entre elles déterminant la translation $\underline{\lambda}$, et les 3 autres déterminant le vecteur rotation $\underline{\theta}$. L'ensemble des solutions du problème (3.23) pour $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ est un espace vectoriel de dimension 6.

Soit à présent un champ $\underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$ géométriquement compatible et $\underline{\xi}^*$ une solution particulière de (3.23). Pour toute autre solution $\underline{\xi}$ de ce problème, le champ de déplacement $\delta\underline{\xi} = \underline{\xi} - \underline{\xi}^*$, dont la déformation linéarisée est nulle, est de la forme (3.36). La forme générale des solutions de (3.23) lorsque $\underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$ est donc :

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}^* + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

En d'autres termes, les solutions de (3.23) forment un espace affine de dimension 6. Elles sont définies à 3 degrés de liberté de translation et 3 degrés de liberté de rotation près.

²dont le point fixe est l'origine O et dont le vecteur rotation est $\underline{\theta}$

³On remarque en effet que la déformation de Green-Lagrange (3.12) associée à un champ $\underline{\xi}$ de (3.36) n'est pas nulle : notant $\underline{\underline{\theta}}$ le tenseur antisymétrique associé à l'endomorphisme $\underline{X} \rightarrow \underline{\theta} \wedge \underline{X}$, elle vaut $\underline{\underline{\varepsilon}} = -\underline{\underline{\theta}}^2/2$. Il ne s'agit donc pas rigoureusement d'isométries. Cela renvoie au fait que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ne représente le concept de déformation que de façon approchée, dans l'hypothèse de transformation infinitésimale.

3.2.4 Bref commentaires sur les mesures de déformation

L'approche usuelle de détermination expérimentale des composantes du tenseur de déformation linéarisé s'appuie principalement sur des mesures d'allongement unitaire (cf. formule par exemple 3.21 pour la direction \underline{e}_1).

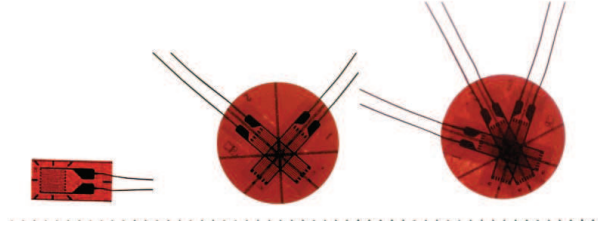


FIG. 3.3 – Jauge extensométrique unidirectionnelle et rosettes de jauges bi- et tridirectionnelles (photos : J. Salençon).

A cette fin, il existe de nombreuses techniques expérimentales (extensométrie, capteurs de déplacement, corrélation d'images, etc..) dont la plus courante est l'extensométrie par jauges électriques de déformation : le principe de la méthode consiste à faire subir à un fil la même extension que celle du matériau dans une direction donnée a priori, et à mesurer la variation de résistivité électrique correspondante. Ces jauges, collées à la surface du solide étudié, peuvent être seules ou groupées sous forme de rosettes jauges) (cf. figure 3.3). Si $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ représente le tenseur de déformation en un point M , la mesure donnée par une jauge collée en M dans une direction \underline{n} est égale à $\epsilon_n = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(M) \cdot \underline{n}$. Par exemple, dans le plan tangent à la surface du solide, en notant $\underline{n} = n_1 \underline{e}_1 + n_2 \underline{e}_2$, on a :

$$\epsilon_n = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + 2\varepsilon_{12}n_1n_2 \quad (3.38)$$

En choisissant judicieusement les directions de collage des jauges, ou la rosettes, on peut recueillir ainsi suffisamment d'information pour la détermination complète du tenseur de déformation (ici ses 3 composantes) dans le plan tangent à la surface du solide.

3.2.5 Annexe : Rotation infinitésimale

On considère une rotation \mathcal{R} de l'espace vectoriel de matrice $\underline{\underline{R}}$ dans une base orthonormée. Cette rotation est supposée infinitésimale, c'est-à-dire voisine de l'identité \mathcal{I} de l'espace vectoriel, de matrice notée $\underline{\underline{1}}$. On a donc $|\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}| \ll 1$, au sens de la norme de R^9 . On note $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$ l'écart à l'identité, de matrice $\underline{\underline{r}}$. Du caractère orthogonal de \mathcal{R} , on tire que

$${}^t\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}} = 0 \Rightarrow {}^t\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}} = O(|\underline{\underline{r}}|^2) \quad (3.39)$$

En d'autres termes, la matrice $\underline{\underline{r}}$ est antisymétrique, au second ordre près en $|\underline{\underline{r}}|$. A cet ordre d'approximation, on pourra donc considérer qu'une rotation infinitésimale est la somme de l'identité et d'un endomorphisme antisymétrique.

Une matrice antisymétrique en base orthonormée étant caractérisée par 3 scalaires indépendants, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques est un espace vectoriel

de dimension 3. On remarque par ailleurs qu'il est possible d'associer à tout vecteur $\underline{\theta}$ l'endomorphisme antisymétrique a_θ défini de la façon suivante :

$$\forall \underline{t}, \quad a_\theta(\underline{t}) = \underline{\theta} \wedge \underline{t} \quad (3.40)$$

L'ensemble $\{a_\theta, \underline{\theta} \in R^3\}$ étant manifestement un espace vectoriel de dimension 3, il coïncide donc avec l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques. Cela signifie que tout endomorphisme antisymétrique peut se mettre sous la forme (3.40) pour un choix judicieux du vecteur $\underline{\theta}$.

Revenant à présent au cas d'une rotation infinitésimale \mathcal{R} , on voit qu'il existe un vecteur $\underline{\theta}$ satisfaisant la condition $|\underline{\theta}| \ll 1$ tel que :

$$\forall \underline{t}, \quad \mathcal{R}(\underline{t}) = \underline{t} + \underline{\theta} \wedge \underline{t} + O(|\underline{\theta}|^2) \quad (3.41)$$

Dans la pratique, on négligera le terme du second ordre en $|\underline{\theta}|$.

Chapitre 4

Cinématique des milieux continus - Taux de déformation

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la notion de déformation en contexte eulérien, la donnée essentielle étant le champ de vitesse eulérien. On commence d'abord par introduire le taux de déformation volumique. Puis on introduit le tenseur taux (vitesse) de déformation, partie symétrique du gradient du champ de vitesse eulérien¹. Ce tenseur caractérise l'évolution de la déformation, rapportée à la configuration actuelle (servant à chaque instant de configuration de référence). On établit l'équation locale de la conservation de la masse. La notion de dérivation particulaire est ensuite exposée de manière plus précise, puis appliquée à une intégrale de volume. Cette dernière application permet de retrouver l'équation de la conservation de masse. En prévision du chapitre suivant sur les contraintes, on expose également, et de façon brève, les équations de la conservation de la quantité de mouvement.

Dans tout ce chapitre, le champ de vitesse eulérien sera noté \underline{u} .

4.1 Taux de déformation volumique

La connaissance du champ de vitesses eulérien donne accès aux variations de volume du système dans la transformation qu'il subit. On considère à cet effet un élément d'aire orienté de la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t . Il est défini comme le produit $\underline{n}dS$ de son aire dS par la normale unitaire extérieure \underline{n} à $\partial\Omega_t$. Au cours d'un intervalle de temps infinitésimal $[t, t+dt]$, cet élément d'aire balaye un volume cylindrique, dont les génératrices, colinéaires à \underline{u} , de longueur $|\underline{u}| dt$, s'appuyent sur le contour de l'élément. Le volume balayé est donc $\underline{u} \cdot \underline{n} dS dt$ (figure 4.1).

La variation du volume total du système est obtenue par intégration sur la frontière :

$$\Omega_{t+dt} - \Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} \underline{u} \cdot \underline{n} dS dt \quad (4.1)$$

de sorte que, en utilisant le théorème de la divergence, le taux de variation volumique est :

$$\dot{\overline{\Omega}}_t = \int_{\partial\Omega_t} \underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega_t} \text{div } \underline{u} d\Omega_t \quad (4.2)$$

¹La partie antisymétrique de ce gradient est dénommée *taux de rotation* ; il permet de définir au niveau local le mouvement infinitésimal de rotation de la matière.

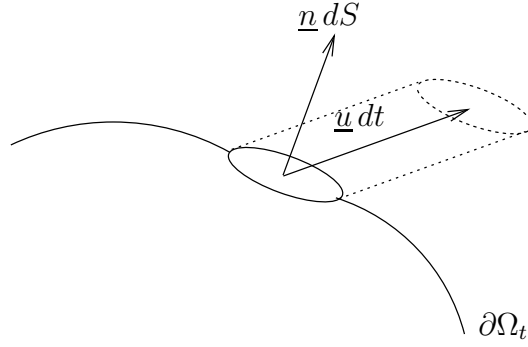


FIG. 4.1 – volume balayé par un élément d'aire

La notation \dot{b} représente la dérivée par rapport au temps de la grandeur b attachée à un élément matériel, en suivant cet élément matériel dans son mouvement. Cette dérivée sera dénommée *dérivée particulaire* de b , et sera aussi notée $\frac{db}{dt}$. On observera qu'en description lagrangienne, la dérivée particulaire s'identifie ainsi à la simple dérivée partielle par rapport à la variable temps, étant donné que les variables spatiales y permettent de repérer l'élément matériel concerné.

Considérons à présent un volume élémentaire $d\Omega_t$ de la configuration initiale situé initialement en \underline{X} où il occupait le volume $d\Omega_o$. On suit les variations de ce volume au cours du temps. La dérivation de (2.8) fournit d'abord

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \frac{\dot{J}}{J} d\Omega_t \quad (4.3)$$

Par ailleurs, la transcription de (4.2) pour un volume élémentaire s'écrit :

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \text{div } \underline{u} d\Omega_t \quad (4.4)$$

Le rapport $\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t}$ est appelé *taux de déformation volumique*. De la confrontation de (4.3) et (4.4), on tire la relation

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \text{div } \underline{u} = \frac{\dot{J}}{J} \quad (4.5)$$

4.2 Tenseur taux de déformation

On considère un vecteur matériel infinitésimal d'origine \underline{X} (resp. \underline{x}) et d'extrémité $\underline{X} + d\underline{X}$ (resp. $\underline{x} + d\underline{x}$) dans la configuration initiale (resp. actuelle). On s'intéresse à la vitesse de ce vecteur. Notée $\frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}}$, c'est par définition la dérivée par rapport au temps du vecteur $\underline{d\underline{x}}$. On peut calculer $\frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}}$ en utilisant la formule de transport des vecteurs matériels (3.1) :

$$\underline{d\underline{x}} = \underline{F} \cdot d\underline{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}} = \underline{\dot{F}} \cdot d\underline{X} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot d\underline{x} \quad (4.6)$$

Une autre façon de procéder consiste à expliciter $\underline{d\underline{x}}$ en fonction de \underline{X} et de $\underline{X} + d\underline{X}$

$$\underline{d\underline{x}} = \underline{\phi}(\underline{X} + d\underline{X}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow \frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}} = \begin{cases} \underline{U}(\underline{X} + d\underline{X}, t) - \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{\nabla U} \cdot d\underline{X} \\ \underline{u}(\underline{x} + d\underline{x}, t) - \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad } u} \cdot d\underline{x} \end{cases} \quad (4.7)$$

ce qui donne 2 façons (lagrangienne et eulérienne)² de déterminer $\dot{\underline{dx}}$.

On souhaite définir maintenant le tenseur taux de déformation eulérien. Le point de départ est le résultat (4.7) : $\dot{\underline{dx}} = \underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}$. On en déduit :

$$\dot{\underline{dx}} \cdot \underline{dx}' = (\underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}) \cdot \underline{dx}' + \underline{dx} \cdot (\underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}') \quad (4.9)$$

qui s'écrit :

$$\dot{\underline{dx}} \cdot \underline{dx}' = \underline{dx} \cdot \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dx}' = 2 \underline{dx} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{dx}' \quad (4.10)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{d}}$, la partie symétrique du gradient de la vitesse eulérienne \underline{u} :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \quad (4.11)$$

Le tenseur du second ordre $\underline{\underline{d}}$ est appelé taux (vitesse) de déformation eulérien. L'étude détaillée et l'interprétation de ses composantes seront présentées lors du cours oral.

La partie antisymétrique du gradient de \underline{u} est le tenseur taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ défini par :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) - {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \quad (4.12)$$

A ce tenseur est associé un vecteur dual $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que $\forall \underline{dx}$,

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{dx} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{dx} \quad (4.13)$$

On peut aisément vérifier que $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \underline{rot} \underline{u}$.

Remarque : Dans l'hypothèse (3.18) des transformations infinitésimales, on observe, en utilisant (3.11) et (2.9) dans (4.8) que

$$\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \approx \underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.14)$$

En reportant ce résultat dans l'expression (4.11) de $\underline{\underline{d}}$, et en comparant avec (3.20), on constate que l'hypothèse des transformations infinitésimales autorise à confondre les tenseurs taux de déformation eulérien et lagrangien (en des points homologues) :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \approx \underline{\underline{\dot{\xi}}}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.15)$$

4.3 Dérivées particulières d'un champ

4.3.1 Définition

On considère une grandeur physique \mathcal{B} représentée à chaque instant sur la configuration initiale par un champ lagrangien $\underline{X} \rightarrow B(\underline{X}, t)$, et sur la configuration actuelle par un

²De la confrontation de (4.6) et de (4.7), on tire l'identité suivante :

$$\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.8)$$

champ eulérien $\underline{x} \rightarrow b(\underline{x}, t)$. On suit un point matériel initialement situé au point \underline{X} sur sa trajectoire (2.1). Les variations de la grandeur physique en question qu'enregistre un observateur attaché au point matériel sont décrites par la fonction

$$t \rightarrow B(\underline{X}, t) = b(\phi(\underline{X}, t), t) \quad (4.16)$$

On appelle dérivée particulière (c'est-à-dire "en suivant la particule") de la grandeur physique \mathcal{B} , et l'on note \dot{B} ou \dot{b} , la dérivée par rapport au temps au sens usuel de la fonction de (4.16). La position initiale \underline{X} de la particule est une constante vis-à-vis de la dérivation en question. En fonction de la représentation lagrangienne, on a donc

$$\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (4.17)$$

En fonction de la représentation eulérienne, il vient

$$\dot{b} = \frac{\partial}{\partial t} (b(\phi(\underline{X}, t), t)) = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (4.18)$$

En utilisant (2.9) et (2.12), on voit que

$$\dot{b}(\underline{x}, t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} b(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (4.19)$$

Le premier terme du membre de droite de (4.19) rend compte des variations dans le temps de la grandeur \mathcal{B} . Le second représente l'effet du mouvement du point matériel par lequel l'observateur qui lui est attaché subit l'hétérogénéité du champ $\underline{x} \rightarrow b(\underline{x}, t)$ à l'instant considéré.

4.3.2 Application au calcul de l'accélération eulérienne

A titre d'exemple, considérons le calcul de l'accélération d'un point matériel initialement situé en \underline{X} et actuellement (à t) en \underline{x} . L'approche lagrangienne s'appuie sur la donnée de la trajectoire :

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\underline{X}, t) \quad (4.20)$$

L'approche eulérienne repose sur l'observation que l'accélération est, par définition, la dérivée particulière de la vitesse, puisqu'elle se rapporte aux variations de la vitesse du point matériel sur sa trajectoire :

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{u}}(\underline{x}, t) \quad (4.21)$$

En appliquant (4.19), on a donc :

$$\underline{\gamma} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u} \quad (4.22)$$

L'expression ci-dessus montre en particulier que l'accélération peut être non nulle même si la vitesse eulérienne est indépendante du temps (régime permanent). L'accélération résulte alors purement de l'hétérogénéité du champ de vitesses.

La cohérence des deux approches du concept d'accélération se traduit par la relation

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \underline{\gamma}(\phi(\underline{X}, t), t) \quad \text{ou bien} \quad \underline{\Gamma}(\psi(\underline{x}, t), t) = \underline{\gamma}(\underline{x}, t) \quad (4.23)$$

On retrouve sans peine (4.22) en dérivant (2.12) par rapport à t au sens usuel.

4.3.3 Conservation de la masse

Soit $\rho(\underline{x}, t)$ le champ eulérien de masse volumique. Par définition, $\rho(\underline{x}, t)d\Omega_t$ représente la masse du point matériel contenu dans le volume élémentaire $d\Omega_t$. La conservation de la masse se traduit par le fait que cette quantité ne varie pas lorsque l'on suit le point matériel sur sa trajectoire. D'après (2.8), le point matériel occupait à l'instant initial au point \underline{X} le volume $d\Omega_o = d\Omega_t/J(\underline{X}, t)$. Il faut donc écrire que la fonction

$$t \rightarrow \rho(\phi(\underline{X}, t), t)J(\underline{X}, t)d\Omega_o \quad (4.24)$$

est constante, ce qui donne

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho}J = \dot{\rho}J + \rho\dot{J} = 0 \quad (4.25)$$

Compte tenu de (4.5), on trouve d'abord

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (4.26)$$

Puis, en utilisant (4.19) pour le calcul de $\dot{\rho}$, il vient encore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad (4.27)$$

Cette équation représente la forme locale de la conservation de la masse. elle est dénommée *Equation de continuité*. Notons qu'elle peut également être établie à l'aide de formules de dérivation particulière d'une intégrale de volume, qui suit.

4.4 Dérivées particulières d'une intégrale de volume

4.4.1 Formulation et application à la conservation de la masse

On considère une grandeur physique \mathcal{B} représentée par une densité volumique eulérienne $b(\underline{x}, t)$. Cela signifie que la quantité de la grandeur physique \mathcal{B} attachée au point matériel occupant le volume $d\Omega_t$ de la configuration actuelle est égale à $b d\Omega_t$.

La quantité de la grandeur physique \mathcal{B} contenue dans un système mécanique \mathcal{S} est obtenue par intégration sur le volume Ω_t qu'il occupe à l'instant t :

$$I(t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (4.28)$$

Dans l'esprit de l'opération de dérivation particulière, on s'intéresse aux variations de la fonction $I(t)$ lorsque l'on suit le système \mathcal{S} dans la transformation (2.2). On appelle dérivée particulière de la quantité de \mathcal{B} contenue dans \mathcal{S} la dérivée par rapport au temps de l'intégrale $I(t)$ de (4.28). La dérivation prend en compte à la fois la variation en fonction du temps de l'intégrande et celle du domaine d'intégration. En tenant compte de (4.4), il vient :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} (\dot{b} + b \operatorname{div} \underline{u}) d\Omega_t \quad (4.29)$$

qui se met également sous la forme :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div}(b \underline{u}) \right) d\Omega_t \quad (4.30)$$

Une application directe de ce résultat dans le cas où b représente la densité de masse volumique ρ (l'intégrale I représente alors la masse du système, et est telle que $\dot{I} = 0$) conduit immédiatement à la forme globale de la loi de conservation de la masse :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \right) d\Omega_t = 0 \quad (4.31)$$

d'où, par le lemme fondamental de la physique, on retrouve l'équation de continuité (4.27). Examinons à présent l'implication de l'équation de continuité sur le calcul des intégrales massiques. La grandeur physique \mathcal{B} est à présent représentée par une densité massique eulérienne $b(\underline{x}, t)$ telle que :

$$I(t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (4.32)$$

En notant que $\rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = dm$ se conserve en tant que masse de l'élément infinitésimal de volume $d\Omega_t$, il vient :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} \dot{b} \rho d\Omega_t \quad (4.33)$$

Pour calculer la dérivée particulière d'une intégrale définie à partir d'une densité massique, il suffit donc de dériver la densité en question sous le signe \int .

4.4.2 Une 2e application : la conservation de la quantité de mouvement

A titre d'exemple, examinons d'abord le cas où la grandeur physique \mathcal{B} est la quantité de mouvement. Pour un système \mathcal{S} occupant un domaine Ω_t , elle est donnée par $\int_{\Omega_t} \underline{u} \rho d\Omega_t$. On remarque que la densité massique de quantité de mouvement n'est autre que la vitesse \underline{u} . On déduit de (4.33) et de (4.21) que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \underline{u} \rho d\Omega_t \right) = \int_{\Omega_t} \dot{\underline{u}} \rho d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \underline{\gamma} \rho d\Omega_t \quad (4.34)$$

La dérivée particulière de la quantité de mouvement d'un système est donc égale à la quantité d'accélération de ce système.

On s'intéresse à présent à son moment cinétique par rapport au point fixe O, défini par $\int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{u} \rho d\Omega_t$. La densité massique est le produit vectoriel $\underline{x} \wedge \underline{u}$. En observant que $\dot{\underline{x}} = \underline{u}$ et que $\dot{\underline{u}} = \underline{\gamma}$, on trouve

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{u} \rho d\Omega_t \right) = \int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{\gamma} \rho d\Omega_t \quad (4.35)$$

pour lequel on a tenu compte du fait que $\underline{u} = \frac{d\underline{x}}{dt}$.

. En conclusion, la dérivée particulière du moment cinétique d'un système est donc égale au moment dynamique.

4.5 Annexe : expression de l'accélération

L'accélération est par définition la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\underline{\gamma} = \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} \quad (4.36)$$

Pour les applications, il est intéressant d'établir l'identité :

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{u} \wedge \underline{u} \quad (4.37)$$

Pour s'en convaincre, remarquons que

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}^2 = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_j \underline{e}_i = 2 \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{u} \quad (4.38)$$

où $\underline{\underline{\Omega}}$ désigne la partie antisymétrique du gradient de \underline{u} . Par définition du rotationnel, $\underline{\underline{\Omega}}$ et le vecteur $\underline{\text{rot}} \underline{u}$ sont reliés par :

$$(\forall \underline{a}) \quad \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{u} \wedge \underline{a} \quad \text{avec} \quad 2\Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (4.39)$$

L'identité (4.37) est obtenue en combinant (4.38) et (4.39).

