

2 Au départ, en quittant l'arc : vibrations libres en flexion

1. Dans un premier temps, on néglige la présence de la pointe.

Après que la flèche quitte la corde, l'empennage entre en contact avec la poignée de l'arc. Ce contact impose une déformation initiale et engendre une vibration de flexion libre pendant la phase de vol.

On rappelle l'équation générale des vibrations libres transverses dans une poutre droite, portant sur le déplacement transverse $v(x, t)$.

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} f(x, t) \quad \text{avec} \quad C_T = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

2. Sous quelle forme générale peut-on chercher la solution de cette équation ? Justifier ce choix.
3. Préciser ensuite les dépendances en temps $\phi(t)$ et en position sur la poutre $X(x)$ ainsi que la relation entre les paramètres caractéristiques ω et γ .

Solution: Solution stationnaire : $v(x, t) = \phi(t)X(x)$

Dépendance temporelle : $\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Dépendance spatiale : $X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x$

Relation de dispersion : $\omega = C_T \gamma^2$

démo voir partie cours...

La forme générale des modes propres peut aussi s'écrire :

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

4. Dans le cas particulier de la flèche, quelles conditions aux limites faut-il considérer ?

Solution: : Poutre Libre-Libre

5. Expliciter les quatre conditions aux limites physiques et leur traduction mathématique.

Solution: : Bord libre en $x = 0$

Effort tranchant nul en $x = 0$

$$T(0, t) = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^3 v(0, t)}{\partial x^3} = 0, \forall t$$

Moment de flexion nul au bord $x = 0$

$$M(0, t) = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0, \forall t$$

Soit : $X'''(0) = 0$ et $X''(0) = 0$

Bord libre en $x = L$: $X'''(L) = 0$ et $X''(L) = 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= D_1 \gamma (-\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_2 \gamma (-\sin \gamma x - \sinh \gamma x) + D_3 \gamma (\cos \gamma x + \cosh \gamma x) \\ &\quad + D_4 \gamma (\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ X'(x) &= D_1 \gamma^2 (-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2 \gamma^2 (-\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_3 \gamma^2 (-\sin \gamma x + \sinh \gamma x) \\ &\quad + D_4 \gamma^2 (-\sin \gamma x - \sinh \gamma x) \end{aligned}$$

6. **Solution:** $X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$ et $X'''(0) = 0 \Rightarrow D_4 = 0 \Rightarrow X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x)$ | $X''(L) = 0$ et $X'''(L) = 0$ donnent le système

$$(S) \begin{cases} -\sin \gamma L + D_1(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) + D_3(+\sinh \gamma L) = 0 \\ D_1(\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_3(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant doit être nul. Ce qui donne l'équation :

$$\det(S) = 0 \Leftrightarrow \cos \gamma L \cosh \gamma L = 1$$

avec $D_2 = 0$ $\Rightarrow X'''(x) = D_1 \gamma^3 (+\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_3 \gamma^3 (-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_4 \gamma^3 (-\cos \gamma x - \cosh \gamma x)$

donc $(\dot{x}): X''''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{D_4 = 0}$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} : & \quad \begin{cases} D_1 (-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) + D_3 (-\sin \gamma L + \sinh \gamma L) = 0 \\ \text{(iii)} : \quad D_1 (\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_3 (-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) = 0 \end{cases} \quad (S) \end{aligned}$$

• Une CNS pour avoir une solution non triviale est que :

$$\begin{aligned} & (-\cos \gamma L + \cosh \gamma L)^2 - (\sin \gamma L + \sinh \gamma L)(-\sin \gamma L + \sinh \gamma L) = 0 \\ \Rightarrow & \underline{\cos^2 \gamma L} + \underline{\cosh^2 \gamma L} - 2 \cos \gamma L \cosh \gamma L + \underline{\sin^2 \gamma L} - \underline{\sinh^2 \gamma L} \\ & 1 + 1 - 2 \cos \gamma L \cosh \gamma L = 0 \Rightarrow \boxed{\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1} \end{aligned}$$

Les racines de l'équation de dispersion précédente sont obtenues numériquement et notées $\gamma_n L$.

7. Expliquer comment on identifie les modes propres $X_n(x)$ et donner les fréquences propres associées ω_n .

Solution: Pour trouver les modes propres, on résout le système linéaire (S) pour chaque valeur de $\gamma_n L$.
Ce qui donne le rapport $(D_3/D_1)_n$. Les fréquences propres sont données par :

$$\omega_n = c_T \gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma_n L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

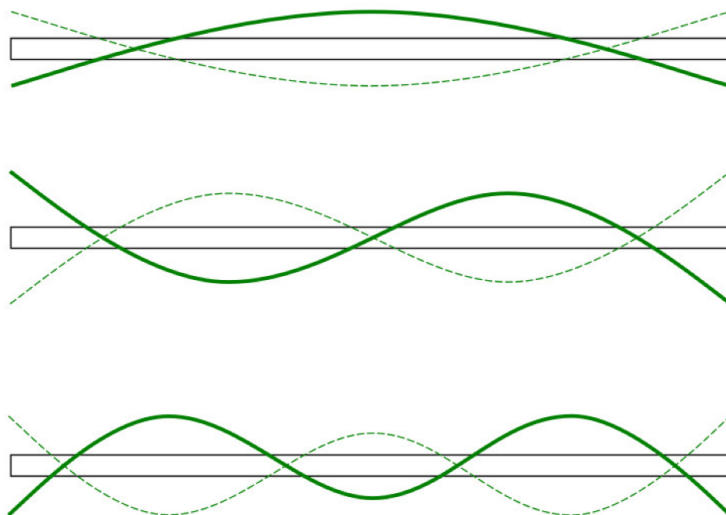
La résolution numérique du problème issu des conditions aux limites permet d'établir que les modes sont tels que

$$X_n(x) \approx \cos \gamma_n x + \cosh \gamma_n x + \sin \gamma_n x + \sinh \gamma_n x$$

Ce résultat est donné pour information, il ne sera pas utilisé dans la suite. Les modes seront représentés par $X_n(x)$.

8. Compte tenu des conditions aux limites cinématiques, tracer l'allure des 3 premiers modes propres.

Solution: 3 premiers modes transverses L-L



9. En écrivant les énergies cinétique et potentielle, identifier les masses modales m_n et les raideurs modales k_n en fonction de $X_n(x)$.

Solution: Énergie cinétique :

$$T_n = \int_0^L \frac{1}{2} \rho S (\dot{v}_n(x, t))^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\phi}_n^2 \int_0^L \rho S X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} m_n \dot{\phi}_n^2$$

on identifie la masse modale : $m_n = \int_0^L \rho S X_n^2(x) dx$

Énergie potentielle :

$$U_n = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \phi_n^2 \int_0^L EI X_n''^2(x) dx = \frac{1}{2} k_n \phi_n^2$$

on identifie la raideur modale : $k_n = \int_0^L EI X_n''^2(x) dx$

Au contact de l'empennage avec la poignée, la flèche se trouve déformée dans des conditions initiales notées :

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \dot{v}(x, 0) = 0$$

10. Montrer que la réponse libre $\checkmark(x, t)$ de la flèche à ces conditions initiales s'écrit :

$$v(x, t) = \sum_n \frac{\rho S}{m_n} \cos(\omega_n t) X_n(x) \int_0^L X_n(x) v_0(x) dx$$

Solution: On considère la solution écrite par décomposition modale :

$$v(x, t) = X(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x)$$

En utilisant les propriétés mathématiques de la base modale, on arrive à $\checkmark(x, t)$.

$$\begin{cases} A_n = \frac{\rho S}{m_n} \int_0^L X_n(x) v_0(x) dx \\ B_n = 0 \end{cases}$$



$$v(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) = \sum_n [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] X_n(x)$$

$$\text{or } v(x, 0) = v_0(x) = \underline{\sum_n A_n X_n(x)} \quad (a)$$

$$\dot{v}(x, t) = \sum_n \omega_n [-A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)] X_n(x)$$

$$\text{or } \dot{v}(x, 0) = 0 = \underline{\sum_n \omega_n B_n X_n(x)} \quad (b)$$

Pour faire disparaître la sommation on va utiliser les relations d'orthogonalité :

$$\int_0^L (b) X_m(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^L (a) X_m(x) dx$$

si $m \neq n$ $\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = 0$; on garde uniquement le cas où $m = n$

$$\bullet \int_0^L a_m B_m X_m^2(x) dx = 0 \Rightarrow B_m a_m \underbrace{\int_0^L X_m^2(x) dx}_{\frac{m_n}{\rho S}} = 0 \Rightarrow \boxed{B_m = 0}$$

$$\bullet \int_0^L A_m X_m^2(x) dx = A_m \underbrace{\int_0^L A_m X_m^2(x) dx}_{\frac{m_n}{\rho S}} = \int_0^L \rho_0(x) X_m(x) dx \Rightarrow \boxed{A_m = \frac{\rho S}{m_n} \int_0^L \rho_0(x) X_m(x) dx}$$

On prend finalement en compte la masse m de la pointe de la flèche.

11. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'ensemble en mouvement libre en fonction des raideurs modales k_n , des masses modales m_n et de la masse m de la pointe.
12. En déduire l'expression des nouvelles fréquences propres en les comparant à celles obtenues à la question 7

Solution: On écrit les énergies cinétique et potentielle :

— Énergie cinétique modale modifiée : $T_n = \frac{1}{2}(m_n + mX_n(L))\dot{\phi}_n^2$

— Énergie potentielle modale : $U_n = \frac{1}{2}k_n\phi_n^2$

d'où les nouvelles fréquences propres :

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n + mX_n(L)}} < \omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

$$T_{\text{masse}} = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial v(L,t)}{\partial t} \right]^2$$