Vibrations & Ondes

Vibrations - Modélisation en systèmes discrets

Septembre 2020

Schéma global de résolution d'un problème de vibrations

Valable pour un système discret ou continu

- **Objectif :**
  Connaître le champ des déplacements dynamiques d'une structure.
- **Problème :**
  Comment modéliser la déformation et les efforts dynamiques ?
- **Étape initiale :**
  Description de la structure par des variables locales.

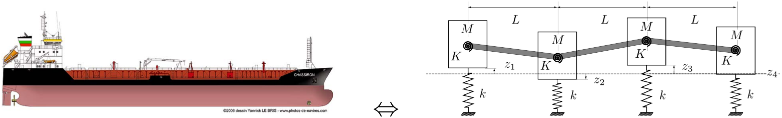


FIGURE – Modèle discret d'un pétrolier à 4 ddl

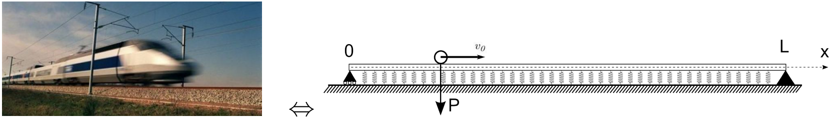


FIGURE – Modèle continu d'une voie de TGV

Schéma global de résolution d'un problème de vibrations

Cas d'un système discret

Outil choisi : Équations de Lagrange (= Équilibre dynamique)

- 1 système mécanique $\rightarrow N$ paramètres généralisés indépendants q_i
- Calcul de l'énergie cinétique $T(\dot{q}_i)$
- Calcul de l'énergie potentielle élastique $U(q_i)$
- Lagrangien : $L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$
- PPV : Calcul des efforts généralisés Q_i
- N équations de Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i}$$

Ce sont les équations du mouvement.

Équations du mouvement

- Les équations du mouvement sont des équations différentielles.
- Elles traduisent l'évolution de la déformation élastique du système
- Elles portent sur des variables dites coordonnées généralisées
- $q_i(t)$: **coordonnées généralisées**
  - Variables indépendantes décrivant compètement l'état déformé du système
  - **Petits mouvements** autour d'un équilibre stable $(q_i)_0$.

$$\|q_i\| \ll \epsilon$$

$\rightarrow \cancel{2^{nd}\text{ordre}}$ $\rightarrow$ équations linéaires.

  - *Rappel : Équilibre stable* $\leftrightarrow$ Minimum d'énergie potentielle :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \forall i$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Un fil rouge

FIGURE – Système réel

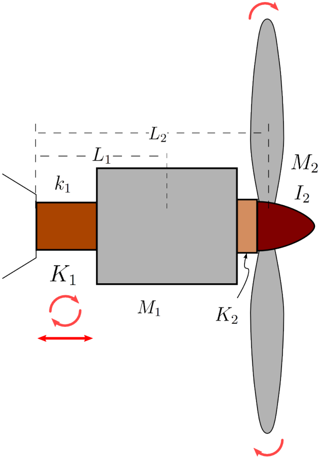
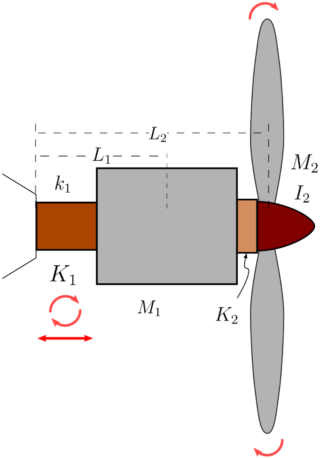


FIGURE – Modèle paramétré

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Paramètres pour une étude dans le plan

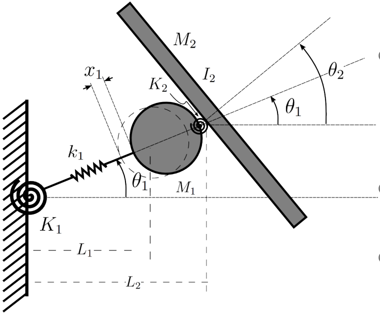


- Support moteur :
  - Raideur à la traction : k_1 (N/m),
  - Raideur à la torsion : K_1 (Nm/rad)
- Moteur :
  - masse M_1 (kg)
  - Déplacement longitudinal : x_1 (m),
  - Déplacement angulaire : θ_1 (rad)
- Palier-Arbre d'Hélice :
  Raideur à la torsion : K_2 (Nm/rad)
- Hélice :
  - Moment d'inertie I_2 (kgm^2)
  - Déplacement angulaire : θ_2 (rad)

Les centres de gravité à l'équilibre sont repérés par L_1 et L_2.

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

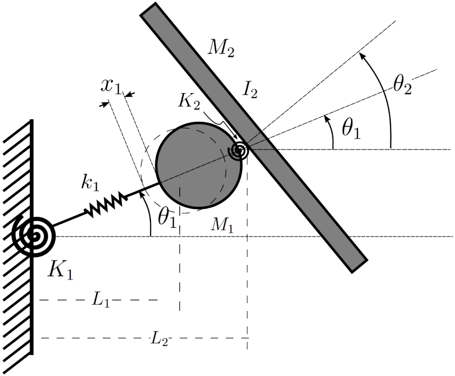
Paramètres pour une étude dans le plan



- Support moteur :
  - Raideur à la traction : k_1 (N/m),
  - Raideur à la torsion : K_1 (Nm/rad)
- Moteur :
  - masse M_1 (kg)
  - Déplacement longitudinal : x_1 (m),
  - Déplacement angulaire : θ_1 (rad)
- Palier-Arbre d'Hélice :
  Raideur à la torsion : K_2 (Nm/rad)
- Hélice :
  - Moment d'inertie I_2 (kgm^2)
  - Déplacement angulaire : θ_2 (rad)

Les centres de gravité à l'équilibre sont repérés par L_1 et L_2.

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice



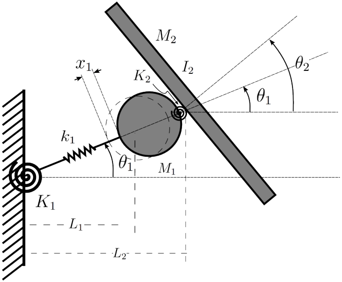
Le modèle a 3 degrés de liberté.

Son état à chaque instant est complètement décrit par 3 coordonnées généralisées, fonctions du temps.
On note le vecteur d'état :

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Calcul des déplacements au 1^{er} ordre



Translations

- Moteur

$$
\begin{aligned}
\vec{OG}_1 &= (L_1 + x_1)(\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) \\
(\theta_1 \ll 1) &\approx (L_1 + x_1)(\vec{x} + \theta_1 \vec{y}) \\
(1^{er} ordre) &\approx (L_1 + x_1)\vec{x} + L_1\theta_1\vec{y} \\
\Rightarrow \vec{V}_1 &= \dot{x}_1\vec{x} + L_1\dot{\theta}_1\vec{y} \\
\Rightarrow V_1^2 &= \dot{x}_1^2 + L_1^2\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

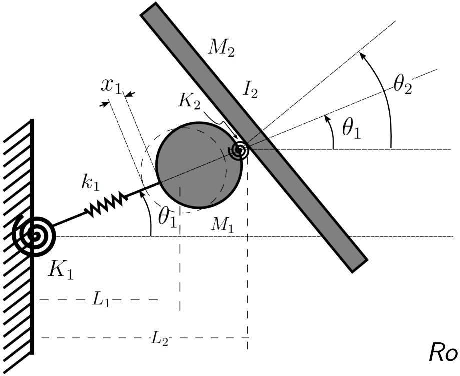
- Hélice $\quad V_2^2 = \dot{x}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_1^2$

Rotation

- Hélice dans le repère fixe : θ_2

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Énergie Cinétique



Translation

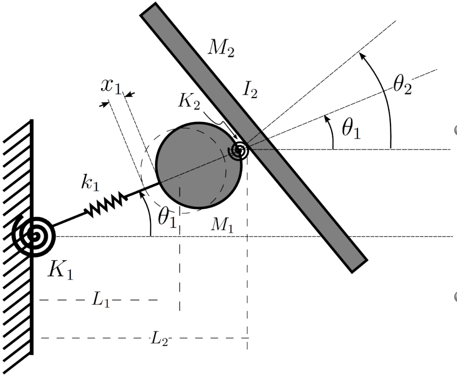
$$
\begin{aligned}
T_t &= \frac{1}{2}M_1V_1^2 + \frac{1}{2}M_2V_2^2 \\
&= \frac{1}{2}M_1(\dot{x}_1^2 + L_1^2\dot{\theta}_1^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}M_2(\dot{x}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_1^2) \\
&= \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_1L_1^2 + M_2L_2^2)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

Rotation : $T_r = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$

Total : $T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(M_1L_1^2 + M_2L_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Énergie potentielle de déformation



- *Ressort de traction k_1*

$$U_{1_t} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2$$

- *Ressort de torsion K_1*

$$U_{1_r} = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2$$

- *Ressort de torsion K_2*

$$U_{2_r} = \frac{1}{2} K_2 (\theta_2 - \theta_1)^2$$

Total : $U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\theta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \theta_2^2 - \frac{1}{2} 2 K_2 \theta_1 \theta_2$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Équations du mouvement

Les équations du mouvement sont synthétisées par le Lagrangien :

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$

avec

$$\begin{array}{llll} T = & \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}_1^2 & +\frac{1}{2}(M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\dot{\theta}_1^2 & +\frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 & \\ U = & \frac{1}{2} k_1 x_1^2 & +\frac{1}{2}(K_1 + K_2)\theta_1^2 & +\frac{1}{2} K_2 \theta_2^2 & -\frac{1}{2} 2 K_2 \theta_1 \theta_2 \end{array}$$

Les **équations de Lagrange** donnent les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ avec } q_i = x_1, \theta_1, \theta_2 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (M_1 + M_2) & \ddot{x}_1 & + & k_1 & x_1 & & & = & 0 \\ (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2) & \ddot{\theta}_1 & + & (K_1 + K_2) & \theta_1 & - & K_2 & \theta_2 & = & 0 \\ I_2 & \ddot{\theta}_2 & + & K_2 & \theta_2 & - & K_2 & \theta_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Identification de la matrice d'inertie ou matrice de masse

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

est de la forme quadratique générale : $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$
On peut l'écrire **sous forme matricielle** :

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 + M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}}$$

$\mathbf{M}$: **matrice d'inertie** (ou de masse), symétrique positive et inversible

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Identification de la matrice de raideur

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2\theta_2^2 - \frac{1}{2}2K_2\theta_1\theta_2$$

est de la forme quadratique générale : $U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij} q_i q_j$

On peut l'écrire **sous forme matricielle** :

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{t}}\mathbf{K}\mathbf{q}}$$

$\mathbf{K}$: **matrice de raideur**, symétrique et inversible

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Équation matricielle du mouvement

Les équations du mouvement :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
(M_1+M_2) & \ddot{x}_1 & + & k_1 & x_1 & & & = & 0 \\
(M_1L_1^2+M_2L_2^2) & \ddot{\theta}_1 & + & (K_1+K_2) & \theta_1 & - & K_2 & \theta_2 = & 0 \\
I_2 & \ddot{\theta}_2 & + & K_2 & \theta_2 & - & K_2 & \theta_1 = & 0
\end{array}\right.$$

peuvent s'écrire **sous forme matricielle** :

$$\begin{pmatrix} M_1+M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1L_1^2+M_2L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, en l'absence d'amortissement et de forces extérieures appliquées, on peut écrire les équations de Lagrange sous la forme :

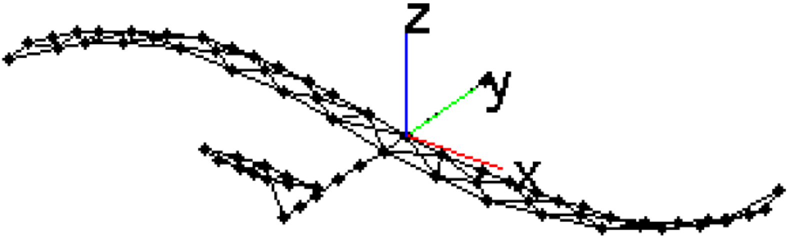
$$\boxed{\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0}}$$

Généralisation aux systèmes à N ddl

- N variables en déplacement indépendantes (translations ou rotations) :

$$q_r(t), r = 1, ..., N$$

- **Vecteur des coordonnées généralisées** $\rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{t})$



Équations du mouvement libre - Cas Général

Procédure d'écriture

- Identifier les paramètres de :

  Déplacement - Inertie - Raideur

- Écrire :
  - L'**Énergie cinétique** et identifier la **matrice d'inertie** :

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \rightarrow \mathbf{M}$$

  - L'**Énergie potentielle** et identifier la **matrice de raideur** :

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{t}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}q_iq_j \rightarrow \mathbf{K}$$

On arrive à l'équation matricielle du mouvement libre :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{q}(t)$ est le vecteur des fonctions de déplacement libre *à identifier*.
- Les $q_i(t)$ sont les déplacement vibratoires "naturels" du système.

Procédure d'identification des Modes propres

Système libre $\rightarrow$ Modes de vibration naturels ou propres

Pour observer ces modes naturels ou **modes propres**, il faut :

- Pas d'effort extérieur appliqué de façon durable
- Conditions initiales en déplacement et/ou en vitesse $\neq 0$

Pour obtenir leur expression analytique, il faut résoudre l'équation homogène :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{1}$$

On pose que les solutions sont de la forme :

$$q_i(t) = X_i e^{\jmath\omega t} \rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{X} e^{\jmath\omega t} \tag{2}$$

Donc

$$\ddot{q}_i(t) = -\omega^2 X_i e^{\jmath\omega t} \rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{X} e^{\jmath\omega t} = -\omega^2 \mathbf{q}$$

Les inconnues à identifier sont :

- la pulsation naturelle ou pulsation propre ω
- l'amplitude X_i de chaque coordonnée généralisée $q_i(t)$ *i.e.* $\mathbf{X}$.

Procédure d'identification des Modes propres

Pulsations naturelles = Valeurs propres du système d'équations du mouvement

$$q_i(t) = X_i e^{\jmath\omega t} \rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- On injecte la forme de solution supposée dans l'éq. du mvt libre :

$$(2) \rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\mathbf{X}\cancel{e^{\jmath\omega t}} = 0 \quad \forall t \tag{3}$$

- CNS pour une solution non triviale à (3) $\Rightarrow$ déterminant nul :

$$\exists \text{ Solutions à } (3) \Rightarrow \det\left(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right) = 0 \tag{4}$$

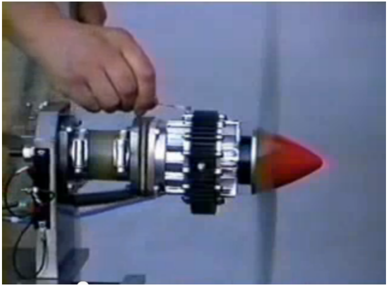
- Si les N C.G. sont bien indépendantes, l'équation (4) est le **polynôme caractéristique** de degré N en ω^2
- $\exists$ toujours pour (4) N racines ω_r^2 distinctes et > 0 :

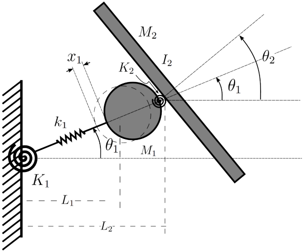
$$\omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_r^2, ..., \omega_N^2$$

- Les N ω_r sont les **valeurs propres** du système linéaire (3).

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Calcul des pulsations propres





On a obtenu l'équation matricielle du mouvement :

$$\begin{pmatrix} M_1+M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1L_1^2+M_2L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Calcul des pulsations propres

On avait l'équation matricielle du mouvement :

$$\begin{pmatrix} M_1+M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1L_1^2+M_2L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\omega^2 \begin{pmatrix} M_1+M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1L_1^2+M_2L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1-(M_1+M_2)\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2-(M_1L_1^2+M_2L_2^2)\omega^2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2-I_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour qu'une solution $\begin{pmatrix} x_1 & \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix}^t$ (non nulle) existe, il faut :

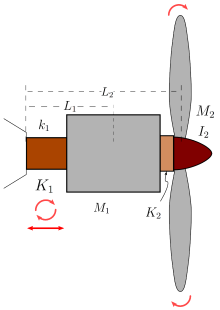
$$\det \begin{pmatrix} k_1-(M_1+M_2)\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2-(M_1L_1^2+M_2L_2^2)\omega^2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2-I_2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Calcul des pulsations propres

$$\det\begin{pmatrix} k_1-(M_1+M_2)\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2-(M_1L_1^2+M_2L_2^2)\omega^2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2-I_2\omega^2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (k_1-(M_1+M_2)\omega^2)\left[\left(K_1+K_2-(M_1L_1^2+M_2L_2^2)\omega^2\right)(K_2-I_2\omega^2)-K_2^2\right]=0$$



Application numérique :
(Caractéristiques approximatives)

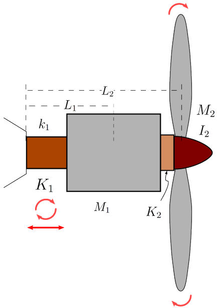
$M_1 = 5$ kg
$k_1 = 100$ N/ 2 mm $= 5.10^5$ N/m
$K_1 = 100$ N $\times$ 0.5 m/ 0.2 rad $=$ 250 Nm/rad
$L_1 = 0.5$ m
$M_2 = 3$ kg
$I_2 \approx \frac{M_2 l_h^2}{12} = 5$ kg . $(1.5\text{m})^2/12 = 0.94$ kg.m^2
$K_2 = 25K_1 = 6250$ Nm/rad
$L_2 = 0.75$ m

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Calcul des pulsations propres

Polynôme caractéristique de degré 3 en ω^2 :

$$(k_1 - (M_1 + M_2)\omega^2)\left[\left(K_1 + K_2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\omega^2\right)(K_2 - I_2\omega^2) - K_2^2)\right] = 0$$



Application numérique :
(Caractéristiques approximatives)
$M_1 = 5$ kg
$k_1 = 100$ N/ 2 mm $= 5.10^5$ N/m
$K_1 = 100$ N $\times$ 0.5 m/ 0.2 rad $=$ 250 Nm/rad
$L_1 = 0.5$ m
$M_2 = 3$ kg
$I_2 \approx \frac{M_2 l_h^2}{12} = 5$ kg . $(1.5\text{m})^2/12 = 0.94$ kg.m^2
$K_2 = 25K_1 = 6250$ Nm/rad
$L_2 = 0.75$ m

Résolution numérique $\rightarrow$ 3 racines $\omega_r = 2\pi f_r, (r = 1, 2, 3)$:

r	1	2	3
ω_r^2	70	1325	6250
f_r(Hz)	1.34	18.3	39.8

Procédure d'identification des Modes propres (suite)

1 fréquence propre donne 1 mode propre

- Les ω_r sont les N pulsations propres du système vibrant.
- Les f_r sont ses fréquences propres.
- Dans son mouvement libre (*en l'absence de force extérieures*), le système ne peut vibrer qu'à ses fréquences propres.
- A chaque fréquence propre, correspond une forme particulière de vibration : le mode propre ou mode naturel.

Modes naturels = Vecteurs propres de l'équation du mouvement

Chaque ω_r substitué dans le système (3) : $\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_r^2\right)\mathbf{X_r} = 0$
$\rightarrow$ 1 vecteur colonne $\mathbf{X}_r$ d'amplitudes relatives des $q_i \rightarrow X_{ir}$:

$$\omega_r \rightarrow (3) \Rightarrow \mathbf{X}_r = \begin{pmatrix} X_{1r} \\ \vdots \\ X_{ir} \\ \vdots \\ X_{Nr} \end{pmatrix} \qquad (r = 1, \ldots, N)$$

Procédure d'identification des Modes propres (suite)

Modes propres ou naturels = Vecteurs propres de l'équation du mouvement

Les vecteurs propres $\mathbf{X}_r$ sont donnés pour chaque pulsation propre ω_r par le système à N lignes suivant :

$$\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_r^2\right)\mathbf{X_r} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N}(k_{ij} - \omega_r^2 m_{ij})X_{jr} = 0 \qquad i = 1, .., N \tag{5}$$

- Le système (5) est linéaire et homogène.
- (N-1) équations indépendantes
- $\Rightarrow$(N-1) solutions indépendantes.
- Il reste une composante indéterminée.
- Pour lever l'indétermination $\rightarrow$ Normalisation des modes propres

Normalisation des modes propres

- On note $\tilde{X}_{ir}$ les composantes normalisées
- Les conventions de normalisation sont arbitraires, mais les valeurs relatives des composantes sont indépendantes de la convention choisie.

Conventions de normalisation usuelles

- Normalisation t.q. l'une des composantes $= 1$

  Poser $\tilde{X}_{ir} = 1$ et en déduire les $\tilde{X}_{jr}$ restant.

- Normalisation à 1 t.q.

$$\sum_i \tilde{X}_{ir}^2 = 1$$

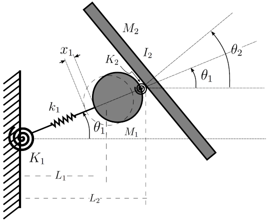
- Normalisation par rapport à la matrice d'inertie :

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} = Cte$$

  Cette constante arbitraire peut, par ex., être la masse totale

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Identification des modes propres



On rappelle les fréquences propres obtenues :

$$\omega_1^2 = 70 \qquad \omega_2^2 = 1325 \qquad \omega_3^2 = 6250$$

$$(f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz)$$

On résout le système suivant pour r = 1,2 et 3

$$\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_r^2\right)\mathbf{X_r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 - (M_1+M_2)\omega_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 + K_2 - (M_1L_1^2 + M_2L_2^2)\omega_r^2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 - I_2\omega_r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1r} \\ X_{2r} \\ X_{3r} \end{pmatrix} = 0$$

Après résolution numérique et normalisation, on obtient les vecteurs propres :

$$\tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5.2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz$$

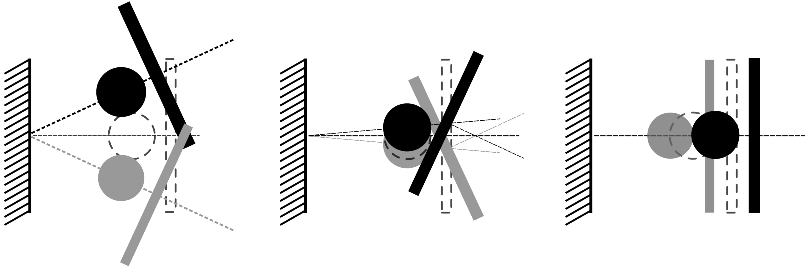
Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Représentation et interprétation des modes propres : Déformées modales

$$\tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5.2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_\mathbf{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz$$

Les coordonnées sont les amplitudes relatives des déplacements x, θ_1 et θ_2



Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Représentation et interprétation des modes propres : Déformées modales

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5.2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz$$

Matrice modale

Pour la suite, on définit la **matrice modale $\mathbf{X}$**

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & \mathbf{X}_r & \dots & \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{r1} & \dots & X_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & \dots & X_{rr} & \dots & X_{Nr} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & \dots & X_{rN} & \dots & X_{NN} \end{pmatrix}$$

- les colonnes sont les vecteurs propres du système
- les colonnes peuvent être normalisées
- la matrice modale est un opérateur de changement de base ...
- elle permet de simplifier l'écriture des résultats à suivre.

Expression générale des déplacements libres

Forme générale

Finalement pour l'équation (1) du mouvement en mode libre :

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0}$$

- N solutions possibles $(\omega_r, \mathbf{X_r})$ (et aussi $-\omega_r$!)
- (1) est linéaire$\Rightarrow$ toute C.L. des $(\omega_r, \mathbf{X_r})$ est solution.

La solution générale s'écrit donc avec la matrice modale $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X} \begin{pmatrix} P_1^+ e^{\jmath\omega_1 t} + P_1^- e^{-\jmath\omega_1 t} \\ \vdots \\ P_r^+ e^{\jmath\omega_r t} + P_r^- e^{-\jmath\omega_r t} \\ \vdots \\ P_N^+ e^{\jmath\omega_N t} + P_N^- e^{-\jmath\omega_N t} \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} P_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ P_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \\ \vdots \\ P_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow q_i(t) = \sum_r X_{ir}(P_r^+ e^{\jmath\omega_r t} + P_r^- e^{-\jmath\omega_r t}) = \sum_r X_{ir} P_r \cos(\omega_r t + \phi_r)$$

- (P_r, ϕ_r) ou (P_r^+, P_r^-) : $2N$ coefficients de la C.L. à déterminer

Expression générale des déplacements libres

Forme matricielle

Rq : Pour alléger les développements, on adopte la notation complexe en amplitude et phase. La forme réelle de la solution sera la partie réelle du résultat complexe.

$$q_i(t) = \sum_r X_{ir} P_r e^{\jmath(\omega_r t + \phi_r)} = \sum_r X_{ir} P_r e^{\jmath \phi_r} e^{\jmath \omega_r t}$$

En utilisant une **notation matricielle**, on peut simplifier les expressions.

- On définit les vecteurs suivants tous de dimension N :
  - le vecteur des pulsations propres $\boldsymbol{\omega}$,
  - les vecteurs des amplitudes $\mathbf{P}$,
  - le vecteur des phases $\boldsymbol{\phi}$.
- La solution générale en vibrations libres peut finalement s'écrire :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X}\mathbf{P} e^{\jmath \boldsymbol{\phi}} e^{\jmath \boldsymbol{\omega} t}$$

- La paire de vecteurs $(\mathbf{P}, \phi)$ est constituée de $2N$ coefficients qui restent à déterminer

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Expression des déplacements libres

On a les modes propres et les fréquences propres associées :

$$\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5.2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz$$

Les déplacement libres s'écrivent rapidement grâce à la matrice modale :

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 t} \\ P_2 e^{\jmath\phi_2} e^{\jmath\omega_2 t} \\ P_3 e^{\jmath\phi_3} e^{\jmath\omega_3 t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Soit en développant pour être plus explicite :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1(t) & = & P_3 e^{\jmath\phi_3} e^{\jmath\omega_3 t} & & \\ \theta_1(t) & = & P_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 t} & + & P_2 e^{\jmath\phi_2} e^{\jmath\omega_2 t} \\ \theta_2(t) & = & P_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 t} & - & 5.2 P_2 e^{\jmath\phi_2} e^{\jmath\omega_2 t} \end{array} \right.$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Expression des déplacements libres

En notation complexe, l'expression générale des déplacements libres s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x_1(t) & = & P_3 e^{\jmath\phi_3} e^{\jmath\omega_3 t} & & \\ \theta_1(t) & = & P_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 t} & + & P_2 e^{\jmath\phi_2} e^{\jmath\omega_2 t} \\ \theta_2(t) & = & P_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 t} & - & 5.2 P_2 e^{\jmath\phi_2} e^{\jmath\omega_2 t} \end{array}\right.$$

Et les déplacements réels s'écrivent finalement :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x_1(t) & = & P_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) & & \\ \theta_1(t) & = & P_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) & + & P_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \theta_2(t) & = & P_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) & - & 5.2 P_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{array}\right.$$

Pour que le mouvement libre soit totalement déterminé, il reste à identifier les scalaires $P_1, P_2, P_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ c'est à dire la paire de vecteurs $(\mathbf{P}, \boldsymbol{\phi})$

Déplacements libres pour un état donné

La solution générale en vibrations libres s'écrit :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X}\mathbf{P}e^{\jmath\boldsymbol{\phi}}e^{\jmath\boldsymbol{\omega}t}$$

- Pour que le mouvement libre soit totalement déterminé, il faut identifier les paires de vecteurs à N dimensions $(\mathbf{P}, \boldsymbol{\phi})$
- Il suffit de connaitre les $2N$ positions et vitesses du système à un instant donné.
- On prend par exemple les conditions initiales (à t = 0) :

$$(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \rightarrow 2N \text{ équations scalaires :}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{P}\mathbf{X}e^{\jmath\boldsymbol{\phi}} & = & \mathbf{q}(0) \\ \jmath\boldsymbol{\omega}\mathbf{P}\mathbf{X}e^{\jmath\boldsymbol{\phi}} & = & \dot{\mathbf{q}}(0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_r P_r e^{\jmath\phi_r} X_{ir} & = & q_i(0) \\ \sum_r \jmath\omega_r P_r e^{\jmath\phi_r} X_{ir} & = & \dot{q}_i(0) \end{array} \right.$$

$\rightarrow N$ couples (P_r, ϕ_r)

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Expression des déplacements libres - Contribution des modes en amplitude et phase

$$\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\-5.2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_1 = 1.34Hz \qquad f_2 = 18.3Hz \qquad f_3 = 39.8Hz$$

Si les CI $x_1^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \dot{x}_1^0, \dot{\theta}_1^0, \dot{\theta}_2^0$ sont connues, on a 6 éqs pour 6 inconnues :

$$\mathbf{q}^0 = \begin{pmatrix}x_1^0\\\theta_1^0\\\theta_2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -5.2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1e^{\jmath\phi_1}\\P_2e^{\jmath\phi_2}\\P_3e^{\jmath\phi_3}\end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}^0 = \begin{pmatrix}\dot{x}_1^0\\\dot{\theta}_1^0\\\dot{\theta}_2^0\end{pmatrix} = \jmath\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -5.2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1e^{\jmath\phi_1}\\P_2e^{\jmath\phi_2}\\P_3e^{\jmath\phi_3}\end{pmatrix}$$

Dont on déduit : $(P_1, \phi_1), (P_2, \phi_2), (P_3, \phi_3)$

Quelques remarques sur les modes propres

- Lorsque le système vibre selon un **mode propre**, toutes les **cordonnées généralisées**
  - évoluent en phase ou en opposition de phase
  - à la fréquence propre associée au mode propre.

  évoluent **en phase ou en opposition de phase**.
- Pour que le système vibre selon un **mode propre**, il suffit soit :
  - en mouvement libre : de choisir une déformation initiale proportionnelle au vecteur propre associé.
  - en mouvement forcé : d'exciter le système à la fréquence propre correspondante en un point qui n'est pas un noeud de vibrations du mode considéré.
- Pour une déformation initiale quelconque le mouvement libre résultant est une combinaison linéaire de tous les modes propres.
- Pour une excitation de fréquence quelconque, le mouvement permanent résultant est une combinaison linéaire de tous les modes propres.

Base modale - Base des modes propres

La déformation du système s'exprime comme composition des modes propres :

$$\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}\bar{\mathbf{P}}e^{\jmath\omega t} \Leftrightarrow q_j(t) = \sum_r X_{jr}P_r e^{\jmath\phi_r}e^{\jmath\omega_r t} = \sum_r X_{jr}\bar{P}_r e^{\jmath\omega_r t}$$

On définit le mode propre comme

$$p_r(t) = \bar{P}_r e^{\jmath\omega_r t}$$

On a alors :

$$q_j(t) = \sum_r X_{jr}p_r(t)$$

Soit la relation de changement de base entre l'espace des déformations réelles et l'espace des modes propres :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$$

- $\mathbf{p}$ est le vecteur des **coordonnées modales**.
- Les coord. modales sont des C.L. des coord. généralisées et réciproquement.
- $\mathbf{p}(t) =$ amplitude des modes au cours du tps $\neq$ déplacements réels.

Base modale

Orthogonalité des modes propres - Démonstration

Base des modes propres = base complète et orthogonale ?

Un mode propre est caractérisé par

- une pulsation propre
- un vecteur propre à N composantes (N DDL)

Le **Mode** $r \rightarrow (\omega_r, \mathbf{X_r})$ vérifie la relation (5) :

$$\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_r^2\right)\mathbf{X_r} = 0 \Leftrightarrow \sum_j (k_{ij} - \omega_r^2 m_{ij}) X_{jr} = 0 \Leftrightarrow \sum_j k_{ij} X_{jr} = \omega_r^2 \sum_j m_{ij} X_{jr}$$

On multiplie par X_{is} et on somme sur i :

$$\sum_{i,j} k_{ij} X_{jr} X_{is} = \omega_r^2 \sum_{i,j} m_{ij} X_{jr} X_{is} \tag{7}$$

Base modale

Orthogonalité des modes propres - Démonstration

Mode s idem :

$$\sum_{i,j} k_{ij} X_{is} X_{jr} = \omega_s^2 \sum_{i,j} m_{ij} X_{is} X_{jr} \tag{8}$$

On a donc :

$$(8) - (7) \Leftrightarrow (\omega_s^2 - \omega_r^2) \sum_{i,j} m_{ij} X_{is} X_{jr} = 0$$

Par conséquent :

- si $r \neq s$ alors

$$\sum_{i,j} m_{ij} X_{is} X_{jr} = 0$$

  Les modes propres sont orthogonaux .

- si $r = s$ alors

$$\sum_{i,j} m_{ij} X_{ir} X_{jr} = cte = m_r$$

  $m_r =$ Masses modales

Base modale

Relation d'orthogonalité des modes

En notation matricielle, on a :

$$\boxed{\mathbf{X_s^t M X_r} = \delta_{rs} m_r}$$

- Les modes propres sont $\mathbf{M}$-orthogonaux .
- les m_r sont les **masses modales**.
- m_r est la masse apparente (masse dynamique) du système dans le mode r.
- On définit la **Matrice modale d'inertie**

$$\mathbf{X^t M X} = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & m_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & m_N \end{pmatrix} = \mathbf{M_p}$$

Base modale

Relation d'orthogonalité des modes

On montre de la même manière :

$$\boxed{\mathbf{X_s^t K X_r} = \delta_{rs} k_r}$$

- Les modes propres sont $\mathbf{K}$-orthogonaux .
- Les k_r sont les **raideurs modales**.
- k_r est la raideur apparente (raideur dynamique) du système dans le mode r.
- On définit la **Matrice modale de raideur**

$$\mathbf{X^t K X} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & k_N \end{pmatrix} = \mathbf{K_p}$$

Base modale

Matrice diagonale des pulsations propres

A partir des matrices modales d'inertie et de raideur, on obtient la matrice des pulsations propres

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta} = \mathbf{M_p^{-1}K_p} &= \begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{k_r}{m_r} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{k_N}{m_N} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad \mathbf{\Delta} &= \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_r^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Base modale

Expression de T et U en coordonnées modales

Les vecteurs des coordonnées et des vitesses généralisées s'écrivent :

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p} \quad et \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}\dot{\mathbf{p}}$$

L'énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}\dot{\mathbf{p}})^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\mathbf{X}\dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}\mathbf{X}\dot{\mathbf{p}}$$

De la même manière pour l'énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{t}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}\mathbf{p})^{\mathbf{t}}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{p} \Leftrightarrow U = \frac{1}{2}\mathbf{p}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{p}$$

Finalement :

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{t}}\mathbf{M}_{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} \quad et \quad U = \frac{1}{2}\mathbf{p}^{\mathbf{t}}\mathbf{K}_{\mathbf{p}}\mathbf{p}$$

- Les matrices modales étant diagonales les expressions développées sont très simples, et ne contiennent aucun terme croisé.
- Il n'y a pas de couplage apparent dans la base modale.

Base modale

Équations du mouvement libre dans la base modale

Dans la base physique des coordonnées généralisées, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M\ddot{q}} \quad + \quad \mathbf{Kq} \quad = \quad 0$$

Changement de base : $\mathbf{q} = \mathbf{Xp}$

$$\begin{array}{rcccccc}
 & \Leftrightarrow & \mathbf{MX\ddot{p}} & + & \mathbf{KXp} & = & 0 \\
(\mathbf{X}^t\times) & \Leftrightarrow & \mathbf{X^tMX\ddot{p}} & + & \mathbf{X^tKXp} & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & \mathbf{M_p\ddot{p}} & + & \mathbf{K_pp} & = & 0 \\
(\mathbf{M_p}^{-1}\times) & \Leftrightarrow & \mathbf{M_p^{-1}M_p\ddot{p}} & + & \mathbf{M_p^{-1}K_pp} & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & \mathbf{\ddot{p}} & + & \mathbf{\Delta p} & = & 0
\end{array}$$

L'équation du mouvement en base modale ne fait plus intervenir que des matrices diagonales : Il n'y a plus de termes de couplage.

Base modale

Équations du mouvement libre dans la base modale

Dans la base des coordonnées modales *i.e.* des modes propres, les équations du mouvement vibratoire libre s'écrivent donc :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Delta p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0 \\ \dots \\ \ddot{p}_r + \omega_r^2 p_r = 0 \\ \dots \\ \ddot{p}_N + \omega_N^2 p_N = 0 \end{cases}$$

Conclusions sur la base modale

- L'équation du mouvement se réduit à N équations **découplées**
- 1 système à N ddl $\rightarrow$ N systèmes à 1 ddl indépendants
- Résolution simple des variables modales $p_i(t)$
- Interprétation physique : $p_i(t) =$ variation temporelle du mode i .
- Retour aux déplacements observables : $\mathbf{q} = \mathbf{Xp}$

La base modale sera particulièrement utile pour déterminer les réponses à des conditions initiales données et aux excitations extérieures

Réponse à un état initial quelconque

Contribution des modes au mouvement libre

Le système est soumis initialement :

- à la déformation $\mathbf{q}^0$
- avec une vitesse de déformation $\dot{\mathbf{q}}^0$

Comme :

$$\mathbf{q(t)} = \mathbf{XPe}^{\jmath\phi} e^{\jmath\omega t} = \mathbf{X\bar{P}} e^{\jmath\omega t} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \jmath\omega\mathbf{X\bar{P}} e^{\jmath\omega t}$$

On a le système linéaire suivant de 2N équations pour identifier les $\bar{\mathbf{P}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}^0 = \mathbf{X\bar{P}} \\ \dot{\mathbf{q}}^0 = \jmath\omega\mathbf{X\bar{P}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{X^{-1}q^0} \\ \bar{\mathbf{P}} = -\jmath\left(\omega\mathbf{X}^{-1}\right)\dot{\mathbf{q}}^0 \end{array} \right.$$

Finalement on peut identifier le vecteur des amplitudes modales complexes par l'opération matricielle suivante :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X^{-1}} & -\jmath\left(\omega\mathbf{X}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^0 \\ \dot{\mathbf{q}}^0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur complexe $\bar{\mathbf{P}}$ exprime la contribution de chaque mode au mouvement libre résultant des conditions initiales

Réponse à une excitation extérieure

Vue générale

- Des efforts extérieurs sont appliqués au système
- On identifie un vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$
- l'équation du mouvement sous forme matricielle devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

- La solution de l'équation, réponse forcée du système, se décompose :
  - *En termes mathématiques* :

    Solution complète = Solution générale + Solution particulière
  - *En termes physiques* :

    Mouvement global = Réponse libre + Réponse forcée

Réponse à une excitation extérieure

Identification des efforts généralisés

- Soient les forces $\vec{F}_k$ et moments $\vec{\Gamma}_k$ appliqués au système
- Ces efforts sont appliqués aux points M_k
- La vitesse virtuelle au point M_k est notée $\vec{V}_k^*$
- La vitesse de rotation virtuelle au point M_k est notée $\vec{\Omega}_k^*$
- La puissance virtuelle des efforts extérieurs est :

$$\mathcal{P}^* = \sum_k \vec{F}_k.\vec{V}_k^* + \vec{\Gamma}_k.\vec{\Omega}_k^*$$

- Réécrire $\mathcal{P}^*$ en fonction des vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}}$:

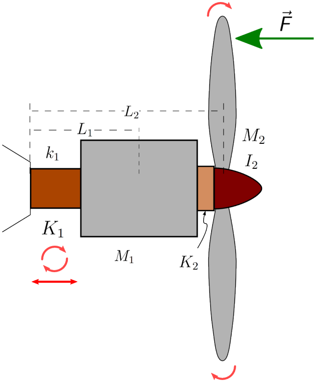
$$\mathcal{P}^* = \sum_i Q_i(t)\dot{q}_i^* = \mathbf{Q^t}\dot{\mathbf{q}}^*$$

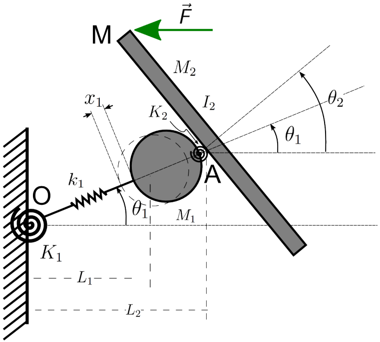
- L'équation du mouvement s'écrit finalement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \tag{9}$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Identification des efforts extérieurs

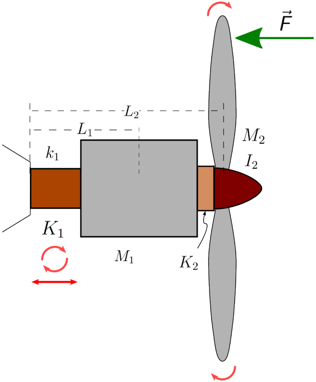


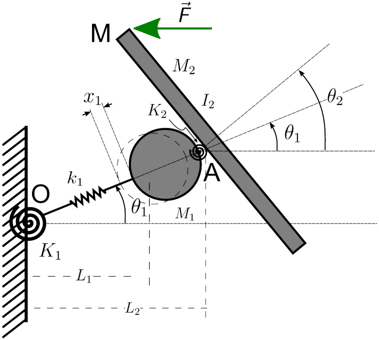


- $\vec{F}$: Force horizontale appliquée en M. Force équivalente obtenue par intégration d'une force répartie (turbulences, ...)
- Déplacement virtuel du point M (1^{er} ordre, petits mvts) ?

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Déplacement et vitesse virtuels des points d'application des efforts extérieurs



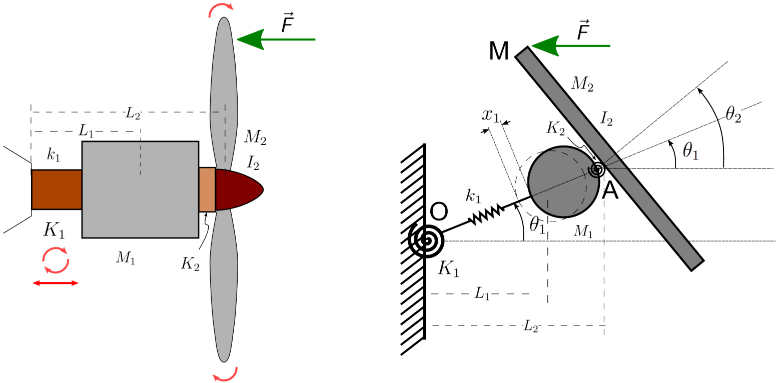


$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = (L_2 + x_1 - \frac{l_h}{2}\theta_2)\vec{x} + (L_2\theta_1 + \frac{l_h}{2})\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}^*_M = (\dot{x}^*_1 - \frac{l_h}{2}\dot{\theta}^*_2)\vec{x} + L_2\dot{\theta}^*_1\vec{y}$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Puissance virtuelle des efforts extérieurs



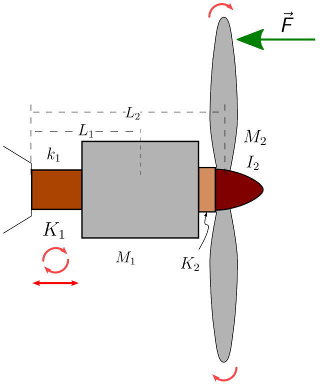
$$\vec{V}_M^* = (\dot{x}_1^* - \frac{l_h}{2}\dot{\theta}_2^*)\vec{x} + L_2\dot{\theta}_1^*\vec{y}$$

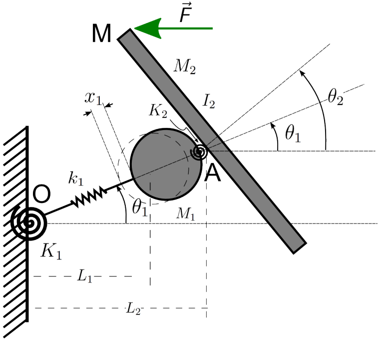
La puissance virtuelle s'écrit :

$$\mathcal{P}^* = \vec{F}.\vec{V}_M^* = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1^* - \frac{l_h}{2}\dot{\theta}_2^* \\ L_2\dot{\theta}_1^* \end{pmatrix} = -F\dot{x}_1^* + F\frac{l_h}{2}\dot{\theta}_2^*$$

Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Identification de efforts généralisés





d'où le vecteur des efforts généralisés :

$$\mathcal{P}^* = -F\dot{x}_1^* + F\frac{l_h}{2}\dot{\theta}_2^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} -F(t) \\ 0 \\ \frac{l_h}{2}F(t) \end{pmatrix}$$

Réponse à une excitation extérieure

Recherche directe

- Quelle solution particulière à l'équation (9) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{q}(t)?$$

- $\mathbf{Q}$: Vecteur des efforts généralisés donné par le PPV :

$$\mathcal{P}^* = \mathbf{Q}^{\mathbf{t}}\dot{\mathbf{q}}^*$$

- Chaque composante de $\mathbf{Q}$ constitue une excitation.
- On résout le système d'équations pour chaque excitation.
- La solution globale est donnée par superposition des réponses obtenues.
- La méthode de résolution dépend de la nature de l'excitation

Réponse à une excitation extérieure

Utilisation de la base modale - résolution numérique

- Quelle solution particulière à l'équation (9) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{q}(t)?$$

- $\mathbf{Q}$: Vecteur des efforts généralisés donné par le PPV :

$$\mathcal{P}^* = \mathbf{Q}^\mathbf{t}\dot{\mathbf{q}}^*$$

- Changement de base ($\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p}$) dans (9) :

$$\begin{array}{rcccccc} & \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} & + & \mathbf{K}\mathbf{q} & = & \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{X}^\mathbf{t}\mathbf{M}\mathbf{X}\ddot{\mathbf{p}} & + & \mathbf{X}^\mathbf{t}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{p} & = & \mathbf{X}^\mathbf{t}\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \end{array}$$

- On note $\mathbf{Q_p}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}^\mathbf{t}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ le vecteur des **efforts modaux**

$$\begin{array}{rcccccc} \Leftrightarrow & \mathbf{M_p}\ddot{\mathbf{p}} & + & \mathbf{K_p}\mathbf{p} & = & \mathbf{Q_p}(t) \\ \Leftrightarrow & \ddot{\mathbf{p}} & + & \boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} & = & \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{Q_p}(t) \end{array}$$

Réponse à une excitation extérieure

Utilisation de la base modale - résolution numérique

- l'équation du mouvement forcé dans la base modale s'écrit donc :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Delta p} = \mathbf{M_p^{-1} Q_p}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = \frac{1}{m_1} Q_{p_1}(t) \\ \vdots \\ \ddot{p}_r + \omega_r^2 p_r = \frac{1}{m_r} Q_{p_r}(t) \\ \vdots \\ \ddot{p}_N + \omega_n^2 p_N = \frac{1}{m_N} Q_{p_N}(t) \end{cases}$$

- Ces équations sont découplées $\rightarrow$ résolution simple
- On calcule les coordonnées modales *i.e.* le vecteur $\mathbf{p}(t)$
- Pour connaitre l'expression des vrais déplacements, on revient à la base physique des coordonnées généralisées :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Xp}(t)$$

Réponse à une excitation harmonique de pulsation Ω

L'excitation et la réponse ont la même fréquence

- Équation du mouvement forcé :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} = \mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{p}}(t)$$

- Effort généralisé harmonique de pulsation Ω :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E}\cos(\Omega t) \Leftrightarrow Q_i(t) = E_i\cos(\Omega t)$$

- Réponse de la structure = mvt harmonique de même pulsation.
- Pour l'ensemble des coordonnées modales, on a :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\cos(\Omega t) \qquad \ddot{\mathbf{p}}(t) = -\Omega^2\mathbf{P}\cos(\Omega t)$$

- Les amplitudes $\mathbf{P}$ sont à déterminer

Réponse à une excitation harmonique de pulsation Ω

Réponse en fréquence des coordonnées modales - Système à 1DDL

- L'équation du mouvement forcé en base modale devient :

$$\mathbf{\ddot{p} + \Delta p = M_p^{-1} X^t Q(t)} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{\Delta} - \Omega^2 \mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{M_p^{-1} X^t E}$$

- On obtient facilement le vecteur des amplitudes des coordonnées modales :

$$\mathbf{P}(\Omega) = (\mathbf{\Delta} - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M_p^{-1} X^t E}$$

- Et la réponse en coordonnées modales s'écrit simplement :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(\Omega) \cos(\Omega t)$$

- Sous forme développée :

$$p_r(t) = \sum_i \frac{X_{ir} E_i}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

- une fréquence propre est la fréquence de résonance du mode associé

Réponse à une excitation harmonique de pulsation Ω

Réponse en fréquence des coordonnées généralisées

- Réponses permanentes des coordonnées modales :

$$p_r(t) = \sum_i \frac{X_{ir}E_i}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

- Mouvement réel = Réponses des coordonnées généralisées :

$$\mathbf{q(t)} = \mathbf{Xp(t)}$$

- Pour chaque point j de la structure :

$$q_j(t) = \sum_r X_{jr}p_r(t) = \sum_{r,i} \frac{X_{jr}X_{ir}E_i}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

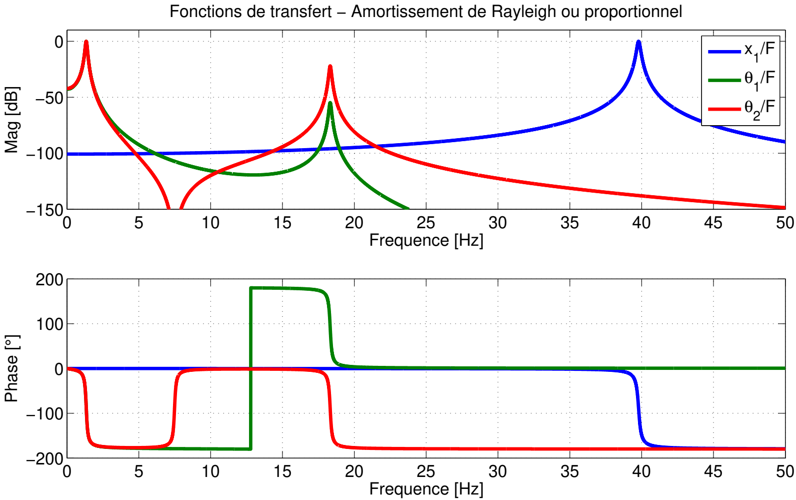
- Le vecteur des coordonnées généralisées s'écrit :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{M_p^{-1}X^tE}\cos\Omega t$$

- Pour chaque CG $\rightarrow$ résonance à chaque fréquence propre.

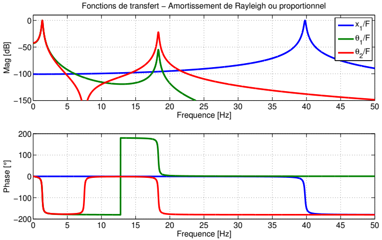
Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Réponse en fréquence (avec amortissement) - (cf code Matlab)



Exemple : Modélisation d'un moteur à hélice

Réponse en fréquence (avec amortissement) - (cf code Matlab)



- un DDL découplé : x_1
- Chaque résonance induit un saut de phase de $\pm\pi$
- Les pics sont de hauteur finie parce qu'on a introduit de l'amortissement. (voir + loin)

Réponse à une excitation quelconque

Résolution par transformée de Laplace

Dans l'espace symbolique de Laplace décrit par la variable s

$$\begin{array}{rcl} t & \longrightarrow & s \\ f(t) & \longrightarrow & \tilde{f}(s) \\ \dot{f}(t) & \longrightarrow & s\tilde{f}(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) & \longrightarrow & s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \end{array}$$

L'équation du mouvement (9) se simplifie :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \longrightarrow (s^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{q}}(s) = \tilde{\mathbf{Q}}(s) + \underbrace{\mathbf{M}\left(s\mathbf{q}(0) + \dot{\mathbf{q}}(0)\right)}_{\tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{s})}$$

- **matrice d'impédance** : $\mathbf{Z} = s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$
- **matrice de transfert** : $\mathbf{H} = \mathbf{Z}^{-1}$

Réponse à une excitation quelconque

Résolution par transformée de Laplace

- Réponse dans le domaine symbolique de Laplace :

$$\tilde{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{H}(s)(\tilde{\mathbf{Q}}(s) + \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{s}))$$

- Réponse dans l'espace temporel $\rightarrow$ Tr. de Laplace inverse. (cf. tables) :

$$\mathbf{q}(t) \longleftarrow \tilde{\mathbf{q}}(s)$$

- La partie de la réponse engendrée par $\tilde{\mathbf{I}}(s)$ dépend uniquement des conditions initiales. Elle est en fait identique à la réponse libre (Solution générale de l'équation homogène du mouvement)
- L'opération peut se mener aussi dans la base modale.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Équation du mouvement avec amortissement

- **Dissipation** = frottement externe ou structurel.
- **Modèle de Rayleigh** = amortissement visqueux
  = forces résistives proportionnelles à la vitesse :

$$\vec{F_v} = -a\vec{v}$$

- **Fonction de dissipation** = fonction de Rayleigh :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$$

  (Ses dérivées par rapport aux VGs donnent les forces dissipatives)
- $\mathbf{C}$ est la **matrice de dissipation** symétrique.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Équation du mouvement avec amortissement

- Efforts généralisés dûs aux frottements visqueux :

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

- Équations de Lagrange du système dissipatif :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \Leftrightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

- la i-ème ligne est la i-ème équation du mouvement :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = Q_i$$

- **Problème** : $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ ne sont pas diagonalisables simultanément
- $\Rightarrow$ Impossible de découpler les équations dans la base modale

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse du système libre - Forme générale

- On cherche la solution générale de l'équation du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{1}$$

- Solutions de la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$$

- Inconnues : $\lambda_r, \mathbf{X}$
- On a aussi : $\dot{\mathbf{q}} = \lambda_r \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$ et $\ddot{\mathbf{q}} = \lambda_r^2 \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$
- On substitue ces solutions dans (1) :

$$(\lambda_r^2\mathbf{M} + \lambda_r\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X} = 0 \tag{2}$$

- Solutions non triviales ($\mathbf{X} \neq 0$) $\Leftrightarrow$ déterminant nul.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse du système libre - Équation caractéristique

$$\lambda_r^2\mathbf{M} + \lambda_r\mathbf{C} + \mathbf{K} = 0 \tag{3}$$

Les N racines $\lambda_r(r = 1, ..., n)$ peuvent prendre plusieurs forme :

- *Réelles positives* : déplacements apériodiques décroissants, le système n'est pas vibratoire.
- **Complexes conjuguées** , partie réelle < 0 :

$$\lambda_r = -\underbrace{\alpha_r}_{>0} \pm i\omega_r = (\lambda_{r_+}, \lambda_{r_-})$$

  - Cas le plus fréquemment étudié
  - Modes complexes conjugués
  - Leur combinaison donne des oscillations amorties.
- *Imaginaires pures conjuguées* , cas exceptionnel dû à des forces d'amortissement particulières.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Cas particuliers d'amortissement : Relation de Caughey

- Si $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{C}$ non diagonalisables simultanément
  $\Rightarrow$ pas base de vecteurs propres orthonormée
  On n'étudiera pas ce cas
- Mais $\exists$ des cas où les 3 matrices sont simultanément diagonalisables
  Relation de Caughey : Condition suffisante sur $\mathbf{C}$:

$$\boxed{\mathbf{C}\mathbf{M}^{\mathbf{-1}}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{\mathbf{-1}}\mathbf{C}}$$

  $\rightarrow$ Alors le découplage est possible.
- Cas particulier souvent supposé dans les modèles :
  l'amortissement proportionnel

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

  a et b sont quelconques.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Cas particulier de l'amortissement proportionnel

Amortissement proportionnel :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

- La matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ se diagonalise dans la même base propre que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$

$$\mathbf{C_p} = \mathbf{X^t C X} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & c_N \end{pmatrix}$$

  Les c_r sont les **coefficients d'amortissement modaux**.
- Le modes propres sont à nouveau réels et orthogonaux
- Ce sont les modes propres du système conservatif.
- Il sont réunis dans la matrice modale $\mathbf{X}$

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse libre avec amortissement proportionnel

- On introduit la matrice modale dans l'équation du mouvement.

$$\begin{array}{lllll} & \mathbf{M\ddot{q}} & +\mathbf{C\dot{q}} & +\mathbf{Kq} & =0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{X^tMX\ddot{p}} & +\mathbf{X^tCX\dot{p}} & +\mathbf{X^tKXp} & =0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M_p\ddot{p}} & +\mathbf{C_p\dot{p}} & +\mathbf{K_pp} & =0 \end{array}$$

- Matrices diagonales $\quad\rightarrow\quad$ système de N équations découplées

$$m_r\ddot{p}_r + c_r\dot{p} + k_r p_r = 0 \qquad (r = 1, ..., n)$$

- Ce sont les équations d'oscillateurs dissipatifs élémentaires
- Elles s'expriment sur les coordonnées modales.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse libre avec amortissement proportionnel - Formulation matricielle

L'équation du mouvement avec amortissement proportionnel s'écrit :

$$\mathbf{M_p}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C_p}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K_p}\mathbf{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{C_p}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{K_p}\mathbf{p} = 0$$

- On obtient les équations découplées en coordonnées modales :

  $$\ddot{p}_r + \frac{c_r}{m_r}\dot{p}_r + \frac{k_r}{m_r}p_r = 0 \qquad (r = 1, ..., n)$$

  On définit :

  $$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \qquad 2\lambda_r = \frac{c_r}{m_r}$$

  Et les matrices diagonales associées :

  $$\mathbf{\Delta} = \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{K_p} = (\mathbf{X^t M X})^{\mathbf{-1}}(\mathbf{X^t K X}) = \mathbf{X^{-1}M^{-1}KX}$$

  $$\mathbf{2\Lambda} = \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{C_p} = (\mathbf{X^t M X})^{\mathbf{-1}}(\mathbf{X^t C X}) = \mathbf{X^{-1}M^{-1}CX}$$

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse libre avec amortissement proportionnel - Formulation matricielle

L'équation matricielle s'écrit alors :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M_p^{-1}} \mathbf{C_p} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M_p^{-1}} \mathbf{K_p} \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{2\Lambda} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Delta} \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

- N équations découplées nouvelles :

$$\ddot{p}_r + 2\lambda_r \dot{p}_r + \omega_r^2 p_r = 0 \qquad (r = 1, ..., N)$$

- λ_r : **coefficients d'amortissement modaux**.
- On reprend l'écriture habituelle :

$$\ddot{p}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{p}_r + \omega_r^2 p_r = 0 \qquad (r = 1, ..., N)$$

- $\xi_r = \frac{\lambda_r}{\omega_r}$: **facteurs d'amortissements modaux**, ou amortissements relatifs modaux.

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse forcée - Amortissement proportionnel - Cas d'une force harmonique

La résolution est identique au cas sans amortissement.

- Soit un effort généralisé harmonique de pulsation Ω :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E}\cos(\Omega t) \Leftrightarrow Q_i(t) = E_i \cos(\Omega t)$$

  Notation complexe pour simplifier :$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E}e^{\jmath\Omega t}$

- Réponse harmonique de même pulsation :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}e^{\jmath\Omega t}$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \jmath\Omega\mathbf{P}e^{\jmath\Omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\Omega^2\mathbf{P}e^{\jmath\Omega t}$$

  $\mathbf{P}$: vecteur des amplitudes complexes des coordonnées modales

- L'équation du mouvement forcé en base modale devient :

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{2\Lambda}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Delta p} = \mathbf{M_p^{-1}X^tQ(t)} \\ \Leftrightarrow \quad &(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I} + 2i\Omega\mathbf{\Lambda})\mathbf{P} = \mathbf{M_p^{-1}X^tE} \end{aligned}$$

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse en fréquence - Amortissement proportionnel

- L'équation du mouvement se simplifie :

$$(\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I} + 2i\Omega\mathbf{\Lambda})\mathbf{P} = \mathbf{M_p^{-1}X^tE}$$

- Le Vecteur des amplitudes complexes des coordonnées modales est :

$$\mathbf{P}(\Omega) = (\mathbf{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I} + 2i\Omega\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{M_p^{-1}X^tE}$$

- Finalement l'amplitude de chaque coordonnée modale $p_r(\Omega)$ s'écrit :

$$P_r(\Omega) = \sum_i \frac{1}{m_r}\frac{X_{ir}E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2\jmath\Omega\lambda_r} = \sum_i \frac{1}{m_r}\frac{X_{ir}E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2\jmath\xi_r\Omega\omega_r}$$

- On revient aux coordonnées généralisées (mouvement réel) par :

$$\mathbf{q(t) = Xp(t)}$$

Systèmes dissipatifs à N DDL

Réponse forcée harmonique - Amortissement proportionnel

- Pour chaque point j de la structure :

$$q_j(t) = \sum_r X_{jr} p_r(t) = \sum_{r,i} \frac{1}{m_r} \frac{X_{jr} X_{ir} E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2\jmath \xi_r \Omega \omega_r} e^{i\Omega t}$$

- En considérant l'amplitude et la phase du mode r :

$$P_r(\Omega) = \frac{1}{m_r \sqrt{(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2}} \quad \text{et} \quad \phi_r = \arctan\left(\frac{-2\xi_r \omega_r}{\omega_r^2 - \Omega^2}\right)$$

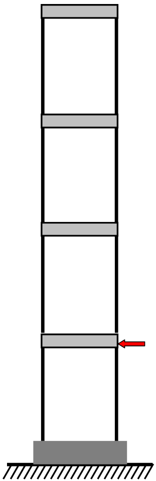
- On a l'expression réelle du mouvement harmonique forcé des C.G.

$$q_j(t) = \sum_{r,i} \frac{X_{jr} X_{ir} E_i}{m_r \sqrt{(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi_r)$$

Systèmes dissipatifs à N DDL

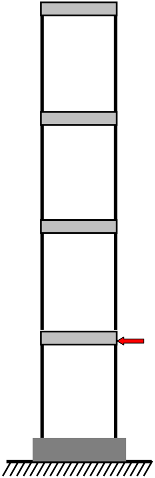
Système réel étudié en TP : Le bâtiment à 4 étages - code Matlab

Résultat numérique

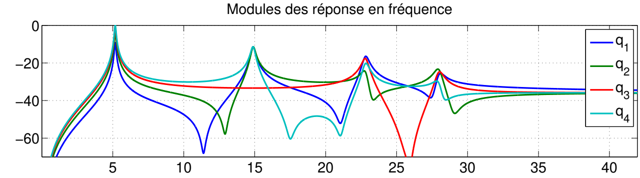


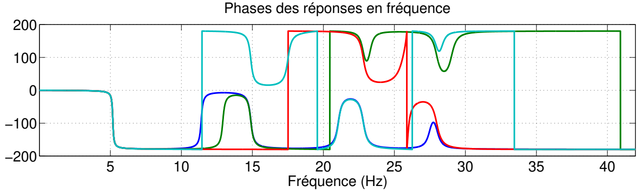
Systèmes dissipatifs à N DDL

Système réel étudié en TP : Le bâtiment à 4 étages - code Matlab



Résultat numérique





Ce qu'il faut retenir du système à 1 ddl

- Paramétrer un modèle : x ou θ, m, k, c, F, ...
- Établir et connaître l'équation du mouvement
- Établir et connaître la solution libre amortie

$$x_l(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_d t + \varphi)$$

- Établir et connaître la réponse à une force harmonique :
$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}\cos(\Omega t + \Phi(\Omega))}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 - 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}$ avec $\Phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{-2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$
- Connaitre la méthode de Laplace pour les excitations qqc.

Ce qu'il faut retenir des systèmes discrets à n ddl

- Paramétrer un modèle : x_i ou $\theta_i, m_i, k_i, c_i, F_i, ...(i = 1, ..., n)$
- Calculer les fonctions énergétiques : $T, U, \mathcal{D}, \mathcal{P}^*$
- Développer les équations de Lagrange $\rightarrow$ Eqs. du mouvement
- Identifier les matrices d'inertie, de raideur, de dissipation
- Identifier le vecteur des efforts généralisés
- Calculer les fréquences propres
- Calculer et interpréter les modes propres
- Normalisation et relations d'orthogonalité des modes
- Exprimer la solution libre en fonction des modes propres
- Déterminer la solution libre en fonction des CI
- Exprimer la solution forcée en fonction des modes propres
- Interpréter tout cela physiquement