1. Établir les relations suivantes :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqr} = \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}, \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijp} = 2\delta_{kp} \qquad \textbf{et} \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

On admettra la relation suivante :

$$\textbf{det}\begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}$$

où det désigne le déterminant de la matrice.

Tout d'abord, calculons le déterminant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} &= \delta_{ip}\left(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{kq}\delta_{jr}\right) - \delta_{jp}\left(\delta_{iq}\delta_{kr} - \delta_{kq}\delta_{ir}\right) + \delta_{kp}\left(\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{jq}\delta_{ir}\right) \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{jr} - \delta_{jp}\delta_{iq}\delta_{kr} + \delta_{jp}\delta_{kq}\delta_{ir} + \delta_{kp}\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{kp}\delta_{jq}\delta_{ir}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqr} = (\delta_{ii} - 2)\delta_{jq}\delta_{kr} - (\delta_{ii} - 2)\delta_{kq}\delta_{jr} = \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{kq}\delta_{jr},$$

d'où

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijp} = \delta_{jj}\delta_{kp} - \delta_{kp} = 2\delta_{kp},$$

puis

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6.$$

2. Établir les formules suivantes :

$$\begin{cases} \underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (\underline{u}.\underline{w})\,\underline{v} - (\underline{u}.\underline{v})\,\underline{w}, \\ \underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}) = \underline{\mathrm{grad}}\,(\,\mathrm{div}\,\underline{u}) - \underline{\Delta u}, \\ \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}\right)\underline{v} = \dfrac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{v}^2 + \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} \wedge \underline{v}, \end{cases}$$

où $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont des champs de vecteurs.

On a

$$(\underline{u} \wedge \underline{A})_i = \varepsilon_{ijk}u_jA_k,$$

d'où

$$[\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w})]_i = \varepsilon_{ijk}u_jA_k = \varepsilon_{ijk}u_j\varepsilon_{kpq}v_pw_q = -\varepsilon_{kji}\varepsilon_{kpq}u_jv_pw_q,$$

Compte tenu de la réponse à la question 1, on a

$$\varepsilon_{kji}\varepsilon_{kpq} = \delta_{jp}\delta_{iq} - \delta_{ip}\delta_{jq},$$

d'où

$$[\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w})]_i = u_jw_jv_i - u_jv_jw_i,$$

ou encore

$$\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (\underline{u}.\underline{w})\underline{v} - (\underline{u}.\underline{v})\underline{w}.$$

On a

$$[\,\underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u})]_i = \varepsilon_{ijk}\left(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}\right)_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}u_{q,pj} = -\varepsilon_{kji}\varepsilon_{kpq}u_{q,pj} = -\delta_{jp}\delta_{iq}u_{q,pj} + \delta_{ip}\delta_{jq}u_{q,pj}$$

d'où

$$[\,\underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u})]_i = u_{j,ij} - u_{i,jj} =$$

ou encore

$$\underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}) = \underline{\mathrm{grad}}\,(\,\mathrm{div}\,\underline{u}) - \Delta\underline{u}.$$

On a

$$\begin{cases} \left[\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}\right)\underline{v}\right]_i = v_jv_{i,j}, \\ \dfrac{1}{2}\left[\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{v}^2\right]_i = \dfrac{1}{2}\left(v_k^2\right)_{,i} = \dfrac{1}{2}\left(v_kv_k\right)_{,i} = v_jv_{j,i}, \\ \left[\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} \wedge \underline{v}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\left(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}\right)_j v_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jpq}v_{q,p}v_k = v_jv_{i,j} - v_jv_{j,i} \end{cases}$$

donc on a bien

$$\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}\right)\underline{v} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{v}^2 + \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} \wedge \underline{v}.$$