Pré-requis d'analyse vectorielle et matricielle (Chapitre 1)

1. Rappeler les règles de la convention de sommation sur les indices répétés.

2. Soient une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$, $\underline{v}$ *et* $\underline{w}$ *deux champs de vecteurs de composantes* $v_i(x_1, x_2, x_3)$ *et* $w_i(x_1, x_2, x_3)$, *avec* $i = 1, 2, 3$ *et deux matrices* (3×3) $[\,A\,]$ *et* $[\,B\,]$ *inversibles de composantes* $A_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ *et* $B_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ *avec* $(i, j) = 1, 2, 3$ *dans le repère orthonormé* $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ *cartésien.*

Exprimer les composantes des grandeurs suivantes dans le système de coordonnées cartésien en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés.

- *le produit scalaire* $\underline{v}\,.\,\underline{w}$ *et le produit vectoriel* $\underline{v} \wedge \underline{w}$ *des vecteurs* $\underline{v}$ *et* $\underline{w}$, *la norme* $\|\underline{v}\|$ *du vecteur* $\underline{v}$.
- *la transposée* $[\,A\,]^T$ *de la matrice* $[\,A\,]$, *sa trace* $Tr[\,A\,]$.
- *le produit* $[\,A\,]\,\underline{v}$ *de la matrice* $[\,A\,]$ *par le vecteur* $\underline{v}$, *le produit* $[\,A\,][\,B\,]$ *des matrices* $[\,A\,]$ *et* $[\,B\,]$,
- *les grandeurs* $Tr(\,[\,A\,]^T\,)$, $Tr(\,[\,A\,][\,B\,]\,)$, $Tr(\,[\,B\,][\,A\,]\,)$, $Tr(\,\lambda[\,A\,]\,)$ *où* λ *est un scalaire réel,*
- *la différentielle d'une fonction scalaire* $f(x_1, x_2, x_3)$: $d\,f$,
- *le vecteur gradient de la fonction scalaire* $f(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\nabla} f$,
- *le laplacien de la fonction scalaire* $f(x_1, x_2, x_3)$: Δf,
- *la divergence du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $div\,\underline{v}$,
- *le rotationnel du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{rot}\,\underline{v}$,
- *le laplacien du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$, $\underline{\Delta}\,\underline{v}$:
- *la matrice gradient du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}$.

Donner les définitions intrinsèques des opérateurs $\underline{\nabla} f$, $\Delta\, f$, $div\,\underline{v}$.

3. Exercices d'applications d'auto-entrainement.

3.1. Soit $f(x_1, x_2, x_3)$ *la fonction scalaire donnée par* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 + x_3$ *exprimée dans le repère cartésien orthonormé* $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

- *Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction* $f(x_1, x_2, x_3)$.
- *Donner l'expression de la différentielle totale* $d\,f$ *de la fonction* $f(x_1, x_2, x_3)$.
- *Donner l'expression du vecteur gradient* $\underline{\nabla} f$.
- *Donner l'expression du laplacien de la fonction scalaire* $f(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer la norme du vecteur* $\underline{v} = \underline{\nabla} f$.
- *Construire le vecteur* $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$ *unitaire (de norme 1) à partir du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.

3.2. Soit les champs de vecteurs $\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1\,x_2\,\underline{e}_1 + x_1^2\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$ *et* $\underline{w}(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1\,\underline{e}_2$ *exprimés dans le repère cartésien orthonormé* $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

- *Calculer le produit scalaire des vecteurs* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$ *et* $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer le produit vectoriel des vecteurs* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$ *et* $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer la divergence du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer le rotationnel du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer le vecteur laplacien du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer la matrice gradient du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.

Calcul indiciel

1. *Donner les expressions des grandeurs suivantes :*

$$\delta_{ii}, \qquad \delta_{ij}\, v_j, \qquad \delta_{ij}\, \delta_{jl},$$

où δ_{ij} désignant le symbole de Krönecker et $\underline{v}$ un vecteur.

2. *Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2, ${}^T\underline{\underline{A}}$ sa transposée, écrire sous forme indicielle :*

$$(\mathit{trace}\,\underline{\underline{A}}\,)^2, \quad \mathit{trace}\,(\,\underline{\underline{A}}\ {}^T\underline{\underline{A}}\,), \quad \mathit{trace}\,\underline{\underline{A}}^2\,, \quad \mathit{trace}\left[(\,\underline{\underline{A}}\ {}^T\underline{\underline{A}}\,)^2\right].$$

3. Soient f une fonction scalaire, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux champs de vecteurs, établir :

$$\mathrm{div}\ (\,f\,\underline{A}\,) \;=\; f\,\mathrm{div}\ \underline{A} \,+\, \underline{A}\,.\,\underline{\nabla}\,f \qquad \underline{\mathrm{rot}\ }\,(\,f\,\underline{A}\,) \;=\; f\,\underline{\mathrm{rot}\ }\,\underline{A} \,+\, \underline{\nabla}\,f\ \wedge\,\underline{A},$$

$$\mathrm{div}\ (\,\underline{A}\,\wedge\,\underline{B}\,) \;=\; \underline{B}\,.\,\underline{\mathrm{rot}\ }\,\underline{A} \,-\, \underline{A}\,.\,\underline{\mathrm{rot}\ }\,\underline{B}.$$

4. a) Vérifier que si A_{ij} est une quantité symétrique par rapport au couple d'indices (i, j) et B_{ij} une quantité antisymétrique, on a : $A_{ij}\,B_{ij} \;=\; 0$.

b) Soient α, β deux fonctions scalaires et $\underline{v}$ un champ de vecteurs, calculer :

$$\mathrm{div}\ (\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}\,) \qquad \underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\nabla}\,\alpha\,), \qquad \mathrm{div}\ (\,\underline{\nabla}\,\alpha\,\wedge\,\underline{\nabla}\,\beta\,).$$

5. Etablir les relations suivantes :

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{iqr} \;=\; \delta_{jq}\,\delta_{kr} \,-\, \delta_{jr}\,\delta_{kq}, \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijp} \;=\; 2\,\delta_{kp}, \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} \;=\; 6.$$

On admettra la relation suivante où det désigne le déterminant de la matrice :

$$\det\begin{pmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{pmatrix} = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr}.$$

5. Etablir les formules suivantes pour $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont des champs de vecteurs :

$$\underline{u}\,\wedge\,(\,\underline{v}\,\wedge\,\underline{w}\,) \;=\; (\,\underline{u}\,.\,\underline{w}\,)\,\underline{v} \,-\, (\,\underline{u}\,.\,\underline{v}\,)\,\underline{w}, \quad \underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}\,) \;=\; \underline{\nabla}\,(\,\mathrm{div}\,\underline{u}\,) \,-\, \underline{\Delta}\,\underline{u}\,,$$

$$(\underline{\underline{\nabla}}\ \underline{v}\,)\,.\,\underline{v} \;=\; \frac{1}{2}\,\underline{\nabla}\ \underline{v}^2 \,+\, \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}\,\wedge\,\underline{v}$$