Chapitre 1 : Bases de la Thermoelasticité linéaire

1. Milieu Continu : concept, descriptions géométrique et du mouvement

1.1 Notion de milieu continu

1.2 Description géométrique : référentiel, repère et configuration

1.3 Descriptions du mouvement : lagrangienne et eulérienne

2. Deformations d'un milieu continu

2.1 Tenseur gradient de déformation

2.2 Formules de transport

2.3 Tenseur des deformations de dilatation

2.4 Tenseur des déformations de Green-lagrange

2.5 Déplacement

2.6 Transformation infinitésimale et tenseur de déformation linéarisée

2.7 Compatibilité des déformations

2.8 Tenseur des taux de déformation

3. Représentation des efforts

3.1 Hypothèse de Cauchy - vecteur contrainte

3.2 Tenseur des contraintes de Cauchy

3.3 Equations locales du mouvement

3.4 Conditions aux limites en effort et condition de saut

3.5 Etats de contraintes classiques

3.6 Linéarisation des equations locales du mouvement

4 - Loi de Comportement de solides élastiques

4.1 Cadre de la thermoelasticité sans liaison interne

4.2 Thermoelasticité linéarisée

4.3 Propriétés de symetrie

4.4 Symetrie matérielles

Chapitre 1 : Bases de la thermoelasticité linéaire

- Chapitre 1 -

Bases de la thermoélasticité linéaire

1 Milieu continu : concept, descriptions géométrique et du mouvement

1.1 Notion de milieu continu.

Un milieu, qu'il s'agisse d'un liquide, gaz ou solide pourra être considéré comme un milieu continu si, à l'échelle où il est étudié, on peut supposé que :

- le milieu se présente comme un continuum de points : chaque point est entouré d'un petit volume de matière de taille infinitésimale par rapport à la taille du milieu étudié. Au cours d'un mouvement, le point et le volume infinitésimal qui l'entoure se déplace collectivement. le volume de matière infinitésimal est appelé "point matériel" ou "particule.

- Deux particules ou points matériels voisins restent voisins au cours du mouvement du milieu étudié. On parle de conservation de la proximité géométrique.

- Deux particules voisines ont des propriétés physiques qui évoluent au cours du temps de façon comparable

Cette notion de milieu continu doit être mise en relation avec l'échelle d'étude du milieu. Cette échelle est qualifiée d'échelle macroscopique par rapport à l'échelle corpusculaire ou atomique du physicien, ce qui ne veut pas dire pour autant que les objets étudiés par les mécanicien sont forcément de grande taille. Ces tailles peuvent en effet être de l'ordre de 10^9m pour une planète, 10^4m pour un massif rocheux, 10^2m pour un ouvrage d'art, 10^1m pour une automobile, 10^{-1}m pour un turbine, 10^{-6}m pour une micropompe

Ainsi, une dune de sable (ou encore un barrage) étudiée dans sa globalité pourra être considérée comme un milieu continu. A l'échelle du grain de sable, la dune sera considérée comme un milieu granulaire. Mais, si l'on souhaite étudier le milieu constitutif lui même, chaque grain peut être aussi considéré comme un milieu continu.

O 1.2 Description géométrique : référentiel, repère et configurations

. la formulation mathématique permettant de décrire la notion de milieu continu demande d'introduire la notion de référentiel, qui est l'outil de mesure, et la notion de configuration qui est la modélisation géométrique du milieu tout au long de son évolution au cours du temps..

. le mouvement d'un milieu continu se mesure dans l'espace physique euclidien par rapport à un observateur. le référentiel $\mathcal{R}$ est l'espace euclidien qui suit le mouvement de l'observateur choisi. Il est caractérisé par :

- une chronologie, choisie une fois pour toutes, c'est l'échelle du temps de la mécanique classique qui sera valable pour tous les observateurs

- l'ensemble des points de l'espace euclidien animé du mouvement de l'observateur.

. Pour repérer les positions spatiales du milieu dans un référentiel $\mathcal{R}$ on utilise un repère R souvent orthonormé, d'origine O

$R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)(t)$.

- Un <u>même référentiel</u> <u>peut être muni</u> de <u>plusieurs repères</u>. Les grandeurs physiques doivent être indépendantes du repère utilisé dans un référentiel donné. On dit qu'elles sont <u>intrinsèques</u>. Les grandeurs physiques seront représentées par des vecteurs (déplacement, vitesse) et des tenseurs d'ordre 2 que nous assimilerons à des matrices (3,3) (de déformations, contraintes)

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel attaché à un observateur, deux repères orthonormés

$R(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)(t)$ et $R'(O\ \underline{e}'_1, \underline{e}'_2\ \underline{e}'_3)(t)$ à un même instant t

avec $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad \underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \delta_{ij}$ $\quad \delta$ symbole de Krönecker

soit $\underline{u}$ un vecteur $\quad \underline{u} = u_i\,\underline{e}_i = u'_i\,\underline{e}'_i \quad$ $\underline{u}$ grandeur intrinsèque

en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés

ou encore
$$\underline{u} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2\ \ \underline{e}_3]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\underline{e}'_1\ \ \underline{e}'_2\ \ \underline{e}'_3]\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix}$$

On a
$$\underline{u} \cdot \underline{e}_j = u_j = (u'_i\ \underline{e}'_i) \cdot \underline{e}_j$$
cette formule n'est autre que la formule de changement de base

ou encore
$$\underline{u} \cdot \underline{e}'_j = u'_j = (u_i\ \underline{e}_i) \cdot \underline{e}'_j$$

soit
$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_3 \end{bmatrix} [\underline{e}_1\ \ \underline{e}_2\ \ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

ou encore
$$\underline{u}' = \underline{\underline{Q}}\ \underline{u} \quad \text{avec } \underline{\underline{Q}} \text{ orthogonale telle que } \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}}$$

car $[\underline{e}_1, \underline{e}_2\ \underline{e}_3]\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$ $\quad (\underline{e}_1, \underline{e}_2\ \underline{e}_3)$ base orthonormée. de même pour $\underline{e}'_i$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \begin{bmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_2 \end{bmatrix} \underbrace{[\underline{e}_1\ \ \underline{e}_2\ \ \underline{e}_3]\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{1}}} [\underline{e}'_1\ \ \underline{e}'_2\ \ \underline{e}'_3] = \underline{\underline{1}}$$

- le choix de l'observateur n'est pas unique. Par exemple pour étudier le mouvement du pneu d'une roue, on peut choisir un observateur lié à la route ou un observateur suivant la roue dans sa rotation. Cela conduit à deux choix de référentiel. On passe d'un référentiel à un autre par un mouvement de translation plus de rotation (mouvement appelé de corps rigide).

Une grandeur physique est dite objective si son observation par deux observateurs différents est identique. Ainsi le vecteur joignant les position géométriques de deux points d'un milieu à un instant t est une grandeur objective. En revanche, la vitesse d'une particule à un instant t n'est pas une grandeur objective

- Parmi tous les référentiels, il est courant en mécanique de faire le choix du référentiel galiléen. l'existence de ce référentiel est postulé par la loi fondamentale de la dynamique. Dans ce référentiel, on a proportionalité entre force imposé et accélération

- la configuration d'un milieu continu à un instant t dans un référentiel donné est définie par la position géométrique de l'ensemble de ces points matériels repérés dans le référentiel choisi. le repérage de la position d'un point matériel se fait au moyen du vecteur position

$\underline{OM} = \underline{x} = x_i \underline{e_i}$ dans le repère R choisi dans le référentiel $\mathcal{R}$

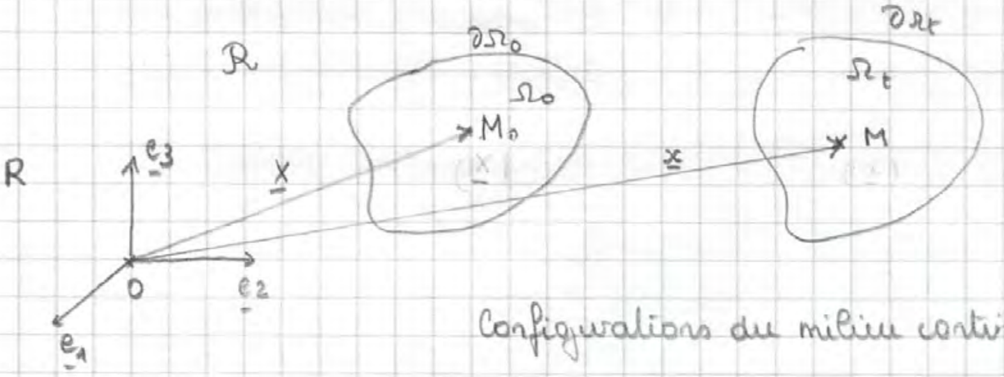
(x_1, x_2, x_3) désignent les coordonnées du point matériel M à l'instant t.

le volume occupé par l'ensemble des points matériels du milieu continu à l'instant t est noté Ω_t et sa frontière $\partial\Omega_t$

- Une configuration particulière du milieu continu est la configuration à l'instant t_0 fixé comme instant initial. On prend généralement $t_0 = 0$. Cette configuration est appelée configuration de référence ou encore initiale. Les points du milieu continu à cet instant t_0 sont repérés par leurs vecteurs positions notés

$\underline{OM_0} = \underline{X} = X_i \underline{e_i}$ $\underline{X}$ coordonnées initiales ou de Lagrange

le volume occupé par le milieu à cet instant t_0 est noté Ω_0 et sa frontière $\partial\Omega_0$



Configurations du milieu continu de référence et actuelle

○ 1.3 Descriptions du mouvement d'un milieu continu : lagrangienne et eulérienne

- Une première modélisation du mouvement d'un milieu continu a été proposée par L. Lagrange (1736 - 1813). Dans cette description, le mouvement est caractérisé par une application Φ :

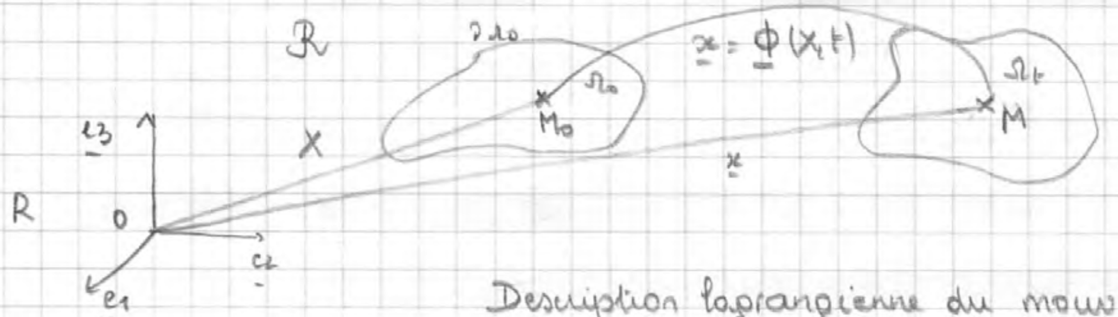
$$\phi : \begin{cases} \Omega_0 \longrightarrow \Omega_t & \forall t \in [0,T] \text{ intervalle d'étude} \\ M_0 \longrightarrow M & M \text{ étant la position du point à l'instant } t \text{ qui était en } M_0 \text{ à l'instant } t_0 \end{cases}$$

soit encore $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ $\forall t \in [0,T]$, $\forall \underline{X} \in \Omega_0$ ou $x_i = \phi_i(\underline{X}, t)$ $\;i = 1,2,3$

l'application $\underline{\phi}$ vérifie :

$$\phi(\underline{X}, t=0) = \underline{X} \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0$$

Cette représentation du mouvement qui s'exprime en fonction de la configuration initiale est appelée représentation Lagrangienne.
Elle est bien adaptée aux solides pour lesquels la configuration initiale est bien identifiée avec la configuration non déformée.



Description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu

. Cette application $\underline{\Phi}$ doit vérifier des propriétés de régularité pour respecter les concepts intuitifs de milieu continu :

- $\underline{\Phi}$ est une bijection de Ω_0 dans Ω_t. On désigne par Ψ la bijection réciproque

$$\underline{\Psi} \quad \Omega_t \longrightarrow \Omega_0$$
$$\quad M \longrightarrow M_0$$

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) \\ \forall \underline{X} \in \Omega_0 \;\; \forall t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t) \\ \forall \underline{x} \in \Omega_t \text{ et } \forall t \end{cases}$$

- $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ sont des applications continues par rapport à chacune de leurs variables $\underline{x}$, $\underline{X}$ et t

au moins par morceaux en espace pour permettre de traiter des problèmes avec des lignes de discontinuité comme des surfaces de rupture. Dans ce cas, la conservation de la proximité géométrique de points initialement voisins n'est plus satisfaite.

- $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ sont de classe C^1 en espace et temps, voire même C^2 de façon à pouvoir définir les vitesses, accélérations, déformations.

. On définit la vitesse et l'accélération du mouvement avec :

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \quad \forall t \quad = \frac{d\,\underline{OM}}{dt}$$

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial t^2}(\underline{X}, t). = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2}$$

On dira que ces grandeurs sont des grandeurs lagrangiennes.

. On définit également une <u>transformation rigidifiante</u>

$\underline{\phi}$ est une transformation rigidifiante sur une partie ω_0 de Ω_0 si et seulement si elle s'écrit comme la composée d'une translation et d'une rotation

soit $$\underline{\phi}(\underline{X},t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t).\underline{X} \qquad \forall \underline{X} \in \omega_0 \subset \Omega_0 \quad \forall t.$$

avec $\underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)$ une matrice orthogonale $\quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)\,\underline{\underline{\mathbb{R}}}^T(t) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^T(t)\,\underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{1}}$

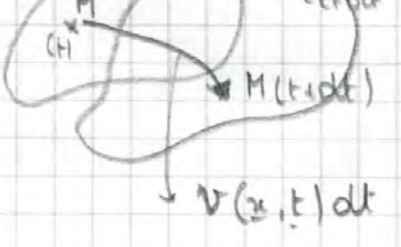
- la description lagrangienne du mouvement nécessite d'introduire une configuration initiale du milieu continu étudié. Ceci est difficile en mécanique des fluides par exemple. Pour surmonter cette difficulté, L. Euler (1707 - 1783) a proposé une représentation du mouvement par le champ de vitesse à l'instant t. Cette description est appelée la <u>description eulérienne</u>. Elle est caractérisée par la donnée de

$$\underline{v}(x,t) \quad \forall x \in \Omega_t \quad \forall t$$

Cette description permet une construction incrémentale du mouvement. A partir de la donnée de $\underline{v}(\underline{x},t)$ en tout point x de Ω_t, on peut déterminer la position du point à l'instant $t+dt$ par :

$$\underline{x} + \underline{v}(\underline{x},t)\,dt.$$

On dit que la representation eulérienne consiste à prendre à chaque instant t la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution du milieu entre les instants t et $t+dt$



$$\underline{x}_{t+dt} = \underline{x}_t + \underline{v}(\underline{x},t)\,dt$$

- Connaissant la description lagrangienne du mouvement, on obtient aisément la description eulérienne en égalant les expressions des vitesses $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t) \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \ \forall t$ connue $\Rightarrow \underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x},t)$

  et $\underline{V}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{\Phi}}{dt}(\underline{X},t)$

$$\Rightarrow \underline{v}(\underline{x},t) = \underline{V}(\underline{\Psi}(\underline{x},t),t) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_t \text{ et } \forall t$$

- Inversement, connaissant la description eulérienne, on obtient la description lagrangienne du mouvement par intégration du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}[\underline{\Phi}(\underline{X},t)] = \underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{\Phi}(\underline{X},t),t) \\ \underline{x}(t=0) = \underline{\Phi}(\underline{X},t=0) = \underline{X} \end{cases}$$

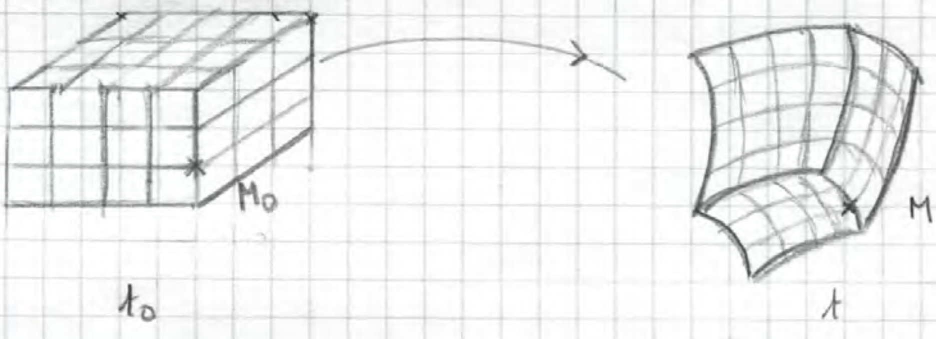
- Un mouvement défini sur Ω_t est dit rigidifiant sur une partie ω_t de Ω_t si et seulement si la vitesse s'écrit comme une superposition d'une translation et d'une rotation instantanée :

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}_0(t) + \underline{\omega}_0(t) \wedge \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \omega_t$$
$$= \underline{v}_0(t) + \underline{\underline{\Omega}}_0(t) \cdot \underline{x}$$

si $\underline{\omega}_0(t) = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\Omega}}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\Omega}}_0$ est antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}_0^t = -\underline{\underline{\Omega}}_0$

2. Déformations d'un milieu continu

- Nous allons nous intéresser maintenant à caractériser les changements locaux de forme qui se produisent à l'intérieur d'un milieu continu dans la transformation qui l'envoie de sa configuration de référence à sa configuration actuelle. Ici t est fixé, on ne s'intéresse plus aux positions intermédiaires.
- le milieu continu subit des déformations si la distance entre des points matériels varient au cours du temps.
- L'observation de l'emboutissage d'une pièce d'acier sur laquelle a été portée un marquage quadrillé avant emboutissage montre que la déformation n'est pas identique en tout point (applatissement près des bords et étirement au centre). La notion de déformation est donc une notion locale.
- le marquage permet de visualiser les transformations subies par un petit élément de matière.



Dans une transformation quelconque, les segments peuvent ne pas rester droits. Mais si on se place à une échelle suffisamment petite, il est possible de remplacer une courbe par sa tangente et de supposer localement que la transformation est homogène, c'est à dire que des droites restent droites après transformation

- Différentes grandeurs (sous forme de tenseurs d'ordre 2) permettent de mesurer les transformations locales (allongement, distorsion angulaire

2.1 Tenseur gradient de transformation

- Soit M_0 et M'_0 deux points voisins dans la configuration initiale et (M et M') leurs transformés à l'instant t

On note $\underline{dM_0} = \underline{M_0M'_0}$ le vecteur infinitésimal d'extrémités M_0 et M'_0

D'après l'expression de la transformation et ses propriétés de différentiabilité on a en première approximation :

$$\underline{\phi}(\underline{OM_0} + \underline{dM_0}, t) = \underline{\phi}(\underline{OM'_0}, t)$$

$$= \underline{\phi}(\underline{OM_0}, t) + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{OM_0}, t) \cdot \underline{dM_0} + o(\|\underline{dM_0}\|)$$

- La transformation matérielle de deux points infiniment proches est donc donnée par

$$\underline{\phi}(\underline{OM'_0}, t) \simeq \underline{\phi}(\underline{OM_0}, t) + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{OM_0}, t) \cdot \underline{dM_0}$$

qui est une transformation affine d'origine M_0, somme d'une translation de vecteur $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ et d'une application linéaire caractérisée par le tenseur gradient de déformation

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\phi}(X, t)$$

Ou encore :

$$\underline{dx} = \underline{dM} = \underline{MM'} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\,\underline{dM_0} = \underline{\underline{F}}(X, t) \cdot \underline{dX_0}$$

- On peut remarquer que cette formule de transformation s'obtient directement par différentiation en $\underline{X}$ à t fixé de la transformation

$\underline{\phi}$: $\qquad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \Rightarrow \quad \underline{dx} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t)\,\underline{dX}$

ou encore en notation indicielle (avec convention de sommation)

$$dx_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}(\underline{X}, t)\,dX_\alpha = F_{i\alpha}(\underline{X}, t)\,dX_\alpha$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ gradient de la transformation au point $\underline{X}$ (M_0) apparaît comme caractérisant le transport d'un vecteur matériel infinitésimal. D'un point de vue mathématique, il s'agit de l'application linéaire tangente de la transformation au point M_0 à l'instant t.

- On convient de noter $J = \det(\underline{\underline{F}}(\underline{X},t))$ le jacobien de la transformation

D'après les propriétés de la transformation ϕ (continuité et différentiabilité continue), le jacobien $J(\underline{X},t)$ est continu par rapport à $\underline{X}$ et t. De plus il ne peut pas être nul ni infini car les matrices jacobiennes de $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ doivent être inversibles. Il conserve donc un signe constant sur Ω_0 et au cours du temps. Or $J(\underline{X},0) = \det[\underline{\underline{F}}(\underline{X},0)] = 1 \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0$

de sorte que $\left\{ \; 0 < J(\underline{X},t) < +\infty \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \;\; \forall t \right.$

2.2 Formules de transport

La connaissance du tenseur gradient de déformations $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ permet de décrire la façon dont des éléments géométriques infinitésimaux attachés au point $\underline{X}$ de Ω_0 (vecteur, volume, surface) se transforment (sont transportés) entre la configuration de référence et la configuration actuelle.

- Ainsi, on a vu au paragraphe précédent que $d\underline{M}_0$ un vecteur infinitésimal à partir du point M_0 de Ω_0 est transporté en $d\underline{M}(t)$ dans la configuration actuelle par la relation

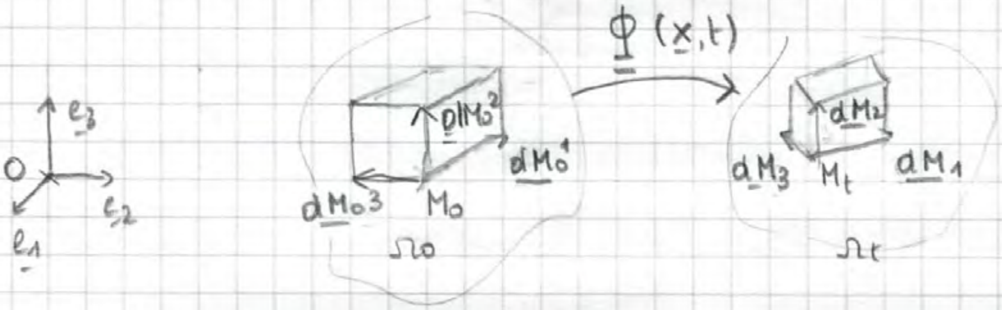
$$\left\{ \; d\underline{M}(t) = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\, d\underline{M}_0 \qquad \forall\, d\underline{M}_0 \in \Omega_0 \right.$$

- Un volume infinitésimal $|d\Omega_0|$ situé autour de M_0 dans la configuration de référence Ω_0 est transporté dans la configuration actuelle en $|d\Omega(t)|$ par la relation suivante :

$$\left\{ \; |d\Omega(t)| = J(\underline{X},t)\, |d\Omega_0| \qquad \forall\, |d\Omega_0| \in \Omega_0 \right.$$

S'il y a invariance de volume, on aura en particulier $J(\underline{X},t) = 1$

La formule de transport est admise ici. Elle se démontre aisément en introduisant le produit mixte des vecteurs $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$



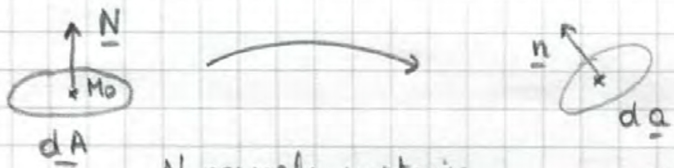
$d\Omega_0 = (d\underline{M}_0^1 \wedge d\underline{M}_0^2) \cdot d\underline{M}_0^3 \qquad d\Omega_t = (d\underline{M}_1 \wedge d\underline{M}_2) \cdot d\underline{M}_3$

avec $\quad d\underline{M}_i = \underline{\underline{F}}\, d\underline{M}_0^i$. D'après la formule $(\underline{u} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w}) = \varepsilon_{ijk}\, u_j v_k w_i$,

on a $\quad d\Omega_t = \varepsilon_{ijk} F_{j\alpha} d\underline{M}_{0\alpha} F_{k\beta} d\underline{M}_{0\beta} F_{i\gamma} d\underline{M}_{0\gamma} = J\, d\Omega_0$

- Une surface élémentaire infinitésimale $d\underline{A}$ orientée centrée autour de M_0 dans la configuration de référence se transporte dans la configuration actuelle en $d\underline{a}$ par la relation suivante

$$d\underline{a} = J(\underline{x},t) \quad {}^t(\underline{\underline{F}}^{-1})\, d\underline{A}$$



$\underline{N}$ normale unitaire à dA $\qquad$ $\underline{n}$ normale unitaire à da

$d\underline{A} = dA\, \underline{N} \qquad\qquad d\underline{a} = da\, \underline{n}$

Cette formule s'établit en considérant l'élément de volume qui s'appuie sur la la surface $d\underline{A}$ et de génératrice $\underline{M_0M'_0}$.

$$d\Omega_0 = d\underline{A} \cdot \underline{M_0M'_0} .$$

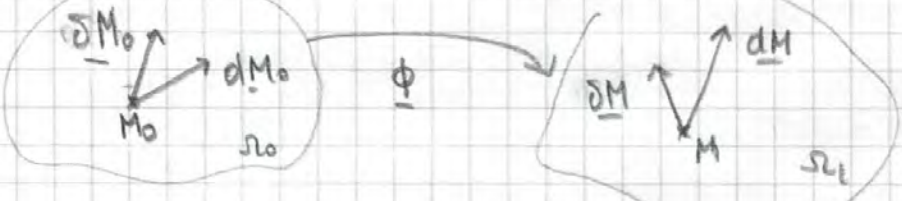
et sa transformé $\qquad d\Omega_t = d\underline{a} \cdot \underline{MM'}$

or $d\Omega_t = J\, d\Omega_0 = J\, d\underline{A} \cdot \underline{M_0M'_0}$

d'où $\qquad d\underline{a} \cdot \underline{\underline{F}}\, \underline{M_0M'_0} = J\, d\underline{A} \cdot \underline{M_0M'_0}$

○ 2.3. Tenseur de déformation de dilatation

- Afin de mettre en évidence la notion de déformations du milieu entre les configurations de référence et actuelle, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires $\underline{dM_o}$ et δM_o issus du même point M_o



- D'après la formule de transport d'un vecteur on a :

$$\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} = (\underline{\underline{F}}\, \underline{dM_o}) \cdot (\underline{\underline{F}}\, \underline{\delta M_o}) = \underline{dM_o}\, {}^t\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{F}}\, \delta M_o$$
$$= F_{i\alpha}\, dX_\alpha\, F_{i\beta}\, \delta X_\beta = dX_\alpha\, [({}^tF)_{\alpha i} F_{i\beta}]\, \delta X_\beta$$

soit $\left\{ \underline{dM} \cdot \underline{\delta M} = \underline{dM_o}\, \underline{\underline{C}}(X,t)\, \underline{\delta M_o} \right.$

le tenseur $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{F}}\, (X,t)$ est appelé tenseur de dilatation.

- le tenseur de dilatation est symétrique, défini positif

$${}^t\underline{\underline{C}}(X,t) = \underline{\underline{C}}(X,t)\ \forall \underline{X} \qquad \text{et} \qquad \forall \underline{X} \quad \underline{X} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{X} = |\underline{X}|^2 \geqslant 0$$
$$\text{si} \quad \underline{X}\, \underline{\underline{C}}\, \underline{X} = 0 \iff \underline{X} = \underline{0}$$

- le tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}$ permet de mesurer les variations de longueurs et d'angle entre la configuration actuelle et de référence.

Soient $\underline{dM_o}$ un vecteur élémentaire issu de M_o et $\underline{dM}$ son transformé

$\lambda = \dfrac{|\underline{dM}|}{|\underline{dM_o}|}$ représente la dilatation du vecteur $\underline{dM_o}$. Or

$$\left\{ \lambda = \frac{|\underline{dM}|}{|\underline{dM_o}|} = \frac{\left[\underline{dM_o} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{X},t) \cdot \underline{dM_o}\right]^{1/2}}{|\underline{dM_o}|} \right.$$

Si l'on suppose $|\underline{dM_o}|$ porté par $\underline{e_i}$, soit $\underline{dM_o} = |\underline{dM_o}|\, \underline{e_i}$

alors $\lambda = \sqrt{C_{ii}}$ (sans sommation sur i répété de sorte que la composante $C_{ii}^{(x,t)}$ du tenseur des dilatations mesure le carré de la dilatation subie par un vecteur matériel issu du point x porté par $\underline{e_i}$.

Soit maintenant deux vecteurs infinitésimaux $\underline{dM_0}$ et $\underline{\delta M_0}$ issus de M_0 et initialement orthogonaux par exemple $\underline{dM_0} = |dM_0|\, e_i$ et $\underline{\delta M_0} = |\delta M_0|\, e_j$ avec $i \neq j$, leurs transformés $\underline{dM}$ et $\underline{\delta M}$ vérifient

$$\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} = \sin\theta\, |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}| = |dM_0|\, \underline{e_i}\, \underline{\underline{C}}\, |\delta M_0|\, e_j = |dM_0|\,|\delta M_0|\, C_{ij}$$

or $\dfrac{|dM_0|}{|dM|} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{ii}}}$

de sorte que $\left\{ \sin\theta = \dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}} \right.$ sans sommation sur indice repété

la composante C_{ij} avec $i \neq j$ du tenseur de dilatations permet donc de mesurer les variations d'angle subies dans le mouvement par deux vecteurs matériels initialement portés par $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$

o 2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Il est également pratique de comparer la variation du produit scalaire de deux vecteurs infinitésimaux, soit

$$\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} - \underline{dM_0} \cdot \underline{\delta M_0} = \underline{dM_0} \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{\delta M_0}$$

On definit alors le tenseur des deformations de Green-Lagrange

$$\left\{ \underline{\underline{E}}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(x,t) - \underline{\underline{1}}\right) = \frac{1}{2}\left({}^T\underline{\underline{F}}(x,t)\, \underline{\underline{F}}(x,t) - \underline{\underline{1}}\right) \right.$$

d'où $\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} - \underline{dM_0} \cdot \underline{\delta M_0} = 2\, \underline{dM_0} \cdot \underline{\underline{E}}(x,t) \cdot \underline{\delta M_0}$

- Le tenseur est symétrique. Il admet les mêmes direction principales que le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$

- Son introduction se justifie également par le résultat suivant :

Une transformation est rigidifiante sur le domaine $\omega_0 \subset \Omega_0$ si et seulement si le tenseur des déformations de Green Lagrange $\underline{\underline{E}}(x,t)$ est nul en tout point $\underline{X}$ de ω_0 :

$$\left\{ \underline{x} = \underline{\phi}(X,t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X} \iff \underline{\underline{E}}(X,t) = \underline{\underline{0}} \quad \forall \underline{X}\ \forall t \right.$$

preuve : i) Une transformation est rigidifiante par définition $\iff$

$$\underline{\phi}(\underline{X},t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X} \quad \text{avec} \quad {}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}\,{}^t\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}} \qquad \forall \underline{X} \in \omega_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\phi} = \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{F}}(X,t) = \underline{\underline{F}}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{C}}(X,t) = {}^t\underline{\underline{F}}(X,t)\,\underline{\underline{F}}(X,t) = {}^t\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{\underline{F}}(t) = {}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(X,t) - \underline{\underline{1}} \right) = \underline{\underline{0}} \qquad \forall \underline{X} \in \omega_0$$

ii) Réciproque admise (nécessite la décomposition polaire)

2.5 . Déplacement

le déplacement $\underline{u}(\underline{X},t)$ d'une particule située en M_0 dans la configuration de référence entre la configuration de référence et la configuration actuelle Ω_t est défini dans le référentiel $\mathcal{R}$ par le vecteur

$$\left\{ \underline{u}(\underline{X},t) = \underline{M_0 M} = \underline{x}(X,t) - \underline{X} = \underline{\phi}(X,t) - \underline{X} \right.$$

Il vient alors

$$\left\{ \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\phi}(X,t) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right.$$

$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}$ désigne le tenseur d'ordre 2 gradient de déplacement de composantes $\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}(x,t)$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{\underline{C}}(X,t) = {}^t\underline{\underline{F}}(X,t)\,\underline{\underline{F}}(X,t) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \\ + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \end{aligned} \right.$$

$$\mathbb{E}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\;\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right)$$

Ces deux formules mettent en évidence la non linéarité entre le champ de déformation de Green-Lagrange et le champ de déplacement.

2.6 Transformation infinitésimale et tenseur de déformations linéarisé

. La transformation du milieu entre les configurations de référence et actuelle dans le référentiel R est dite infinitésimale si et seulement si

$$|d\underline{M} - d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0| \quad \forall d\underline{M}_0 \in \Omega_0$$

la variation $d\underline{M} - d\underline{M}_0$ du vecteur matériel entre les configurations de référence et actuelle est petite vis à vis de la taille du vecteur $d\underline{M}_0$

soit encore

$$|(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})\, d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0| \quad \forall d\underline{M}_0 \in \Omega_0$$

ou

$$|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \cdot d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0|$$

et donc

$$|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t)| \ll 1 \qquad \forall \underline{X} \in \Omega_0$$

Concrètement, on parle de transformation infinitésimale quand la valeur de la norme du gradient de déplacement est inférieure au %

. Sous cette hypothèse, nous allons pouvoir linéariser les tenseurs de déformations $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{E}}$.

$$\underline{\underline{C}}(X,t) \simeq \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + O(|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}|^2)$$

$$\underline{\underline{E}}(X,t) \simeq \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right] + O(\|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\|^2)$$

On convient de noter $\underline{\underline{\varepsilon}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)(X,t)$

le tenseur des déformations linéarisées

qui est la partie symétrique du gradient de déplacement

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est un tenseur symétrique

et on a $\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}} + 2\,\underline{\underline{E}} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2)$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + O(|\nabla u|^2)$$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$J = \det(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla u}}) \simeq 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla u}}) + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2) = 1 + \operatorname{trace}\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) + O(|\nabla u|^2)$$

et donc
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{|d\Omega| - |d\Omega_0|}{|d\Omega_0|} &= J - 1 = \operatorname{trace}\underline{\underline{\varepsilon}} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2) \\ &= \operatorname{div}\underline{u} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2) \end{aligned} \right.$$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$\lambda = \frac{|\underline{dM}|}{|\underline{dM_0}|} = \sqrt{C_{ii}} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)}$$

où $\underline{dM_0} = dM_0\,\underline{e_i}$

et $\underline{dM}$ son transformé

soit donc $\dfrac{|\underline{dM}|}{|\underline{dM_0}|} \simeq 1 + \varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)$

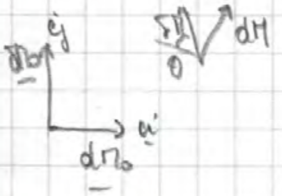
et donc
$$\left\{ \frac{|\underline{dM}| - |\underline{dM_0}|}{|\underline{dM_0}|} \simeq \varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2) \right.$$

ε_{ii} mesure donc au 1er ordre la variation d'allongement relatif d'un vecteur infinitésimal initialement porté par $\underline{e_i}$

De plus, $\quad \sin\theta = \dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}}$ devient au 1er ordre

$$\sin\theta \simeq \frac{2\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj} + O(\varepsilon^2)}} = 2\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2)$$

de sorte que, la composante ε_{ij} du tenseur des déformations linéarisées mesure au 1er ordre les variation d'angle subies dans le transport par deux vecteurs matériels infinitésimaux initialement portés par $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$ $\quad \left\{ \theta \simeq 2\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2) \right.$



- L'hypothèse des <u>transformations infinitésimales</u> implique des <u>déformations infinitésimales</u>. Mais la <u>réciproque est fausse</u>. On peut avoir des déformation petites et des grands déplacements qui ne conduisent pas à des transformation infinitésimales.

En effet si $|\underline{\underline{\nabla}} u| \ll 1$ alors $\underline{\underline{E}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^T)$ petit

mais prenons $\underline{\phi} = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t).\underline{X}$ c'est à dire une transformation rigidifiante $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}}$ et $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$

par contre $\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$ n'est pas petit forcement

et $\underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \frac{1}{2}\left({}^t(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}) + (\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}})\right) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{R}} + {}^t\underline{\underline{R}}) - \underline{\underline{1}} \neq \underline{\underline{0}}$

Cette situation de petites déformations et grands déplacements intervient notamment dans le cas des structures élancées poutres plaques.

- Compte-tenu de la remarque précédente, il est légitime de chercher les champs de déplacements $\underline{u}$ tel que $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{0}}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(X,t)) = \underline{\underline{0}} \quad \forall X \in \Omega_0 \iff \underline{u}(X,t) &= \underline{a}(t) + \underline{b}(t) \wedge \underline{X} \\ &= \underline{a}(t) + \underline{\underline{B}}(t).\underline{X} \\ \text{avec } \underline{\underline{B}} \text{ antisymétrique } {}^t\underline{\underline{B}} &= -\underline{\underline{B}} \end{aligned} \right.$$

preuve : - Si $\underline{u} = \underline{a}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\,\underline{X}$ avec $\underline{\underline{B}}$ antisymétrique

alors $\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{u} = \underline{\underline{B}}(t) \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{B}}(t) + {}^t\underline{\underline{B}}(t)) = \underline{\underline{0}}$

- Reciproquement s'obtient en intégrant le système de 6 equation aux dérivées partielles à 3 inconnues (u_1, u_2, u_3)

○ 2.7 <u>Compatibilité des déformations</u>

A partir d'un champ de déplacement $\underline{u}(X,t)$ on peut former le tenseur des déformation linéarisées avec la relation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{x},t)) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x},t)\right]$$

On peut se poser le problème inverse, étant donné un tenseur symétrique d'ordre 2 défini sur Ω_0 à quelles conditions ce champ est-il un champ de déformation de milieu continu en petites transformations, c'est à dire à quelles conditions existe-t-il un champ de déplacement $\underline{u}(\underline{X},t)$ dont il dérive au sens suivant.

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}(X,t) \text{ donné}$$

- Le problème général, dit de compatibilité géométrique d'un champ de déformation, correspond au <u>problème mathématique suivant</u> :
  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a six composantes indépendantes et $\underline{u}$ 3 composantes
  il existe nécessairement des conditions pour qu'un tel système à 6 équations indépendantes soit intégrable.
- D'un <u>point de vue physique</u>, ce problème de compatibilité géométrique correspond au fait que la continuité du milieu doit être conservée par ce champ de déformation.

Considérons à titre d'application, des processus physiques qui engendrent des déformations locales en absence d'efforts mécaniques. C'est le cas par exemple de l'évaporation d'eau par séchage d'un matériau. Cette évaporation peut conduire à diminuer la porosité du matériau et son volume en conséquence, ce qui crée des déformations locales. Ou encore, un chauffage induit une augmentation de volume et donc des déformations locales. Il s'agit alors de savoir si ces déformations sont compatibles, c'est à dire s'il existe un champ de déplacement qui en dérivent, qui va respecter la continuité du milieu (ou plus généralement si le champ de déplacement va vérifier les conditions aux limites en déplacement imposé

Si ce n'est pas le cas, on parle de déformations incompatibles. Quand un milieu continu est soumis à un champ de déformation incompatible, il doit mettre en place des efforts intérieurs pour assurer la continuité du milieu. Ces efforts intérieurs génèrent des déformations complémentaires telles que la somme des deux déformations soit compatible géométriquement.

Si ces efforts intérieurs nécessaires à la continuité géométrique du milieu sont trop importants vis à vis des capacités de résistance du matériau, ils ne peuvent s'instaurer et une autre solution géométrique compatible par morceaux se met alors en place avec des ruptures localisées dans le solide (exemple du sol craquelé lors du séchage, ou encore du flambage du rail sous forte chaleur).

- Un champ de déformation $\underline{\underline{e}}$ symétrique donné est compatible si et seulement si ses composantes dans le système de coordonnées cartésiennes satisfont les 6 équations indépendantes suivantes

$$e_{33,22} - 2e_{23,32} + e_{22,33} = 0$$

$$e_{32,31} - e_{12,33} - e_{33,12} + e_{13,23} = 0$$

et par permutation

$$e_{11,22} - 2e_{21,21} + e_{22,11} = 0$$

$$e_{12,13} - e_{23,11} - e_{11,23} + e_{13,12} = 0$$

$$e_{11,33} - 2e_{13,13} + e_{33,11} = 0$$

$$e_{13,12} - e_{32,11} - e_{11,32} - e_{12,13} = 0$$

- En pratique, une fois vérifiées les 6 conditions d'intégrabilité, le champ de déplacement qui dérive d'un tenseur de déformation symétrique s'écrit $\underline{u}(X,t) = \underline{u}^{part}(X,t) + \underline{a}(t) + \underline{\omega}(t) \wedge \underline{X}$

  avec $\underline{u}^{part}(\underline{X},t)$ solution particulière du système $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}^{par}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}(X,t)\right) = \underline{\underline{E}}$

- On remarque que les conditions d'intégrabilité portent sur les dérivées secondes du tenseur $\underline{\underline{E}}$ en coordonnées cartésiennes - Elles sont en conséquence automatiquement vérifiées dès que E_{ij} sont des fonctions affines des coordonnées $\underline{X}$

o 2.8 Tenseur taux de déformation

Jusque là, nous nous sommes intéressés à étudier sur un plan géométrique la déformation subie par un milieu entre la configuration de référence et la configuration actuelle, indépendamment de la vitesse à laquelle s'est produite cette transformation, c'est à dire sans se préoccuper de l'histoire intermédiaire.

La déformation étant mesurée par le produit scalaire de deux vecteurs matériels infinitésimaux, la vitesse de déformation ou taux de déformation sera mesurée par $\frac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{\delta M})$, cette fois $\underline{dM_0}$, $\underline{\delta M_0}$ sont fixés.

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{\delta M}) = \frac{d}{dt}(\underline{dM}) \cdot \underline{\delta M} + \underline{dM} \cdot \frac{d}{dt}(\underline{\delta M})$$

or $\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt}(F_{i\alpha}\, dX_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) dX_\alpha$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}[V_i(X,t)]\, dX_\alpha \quad \text{avec } \underline{V} \text{ vitesse lagrangienne}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i(x,t))\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}\, dX_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} F_{j\alpha}\, dX_\alpha \quad (\underline{v} \text{ vitesse eulérienne})$$

d'où $\quad \dfrac{d}{dt}(\underline{dM}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{dx} = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{dM}$

et donc $\quad \dfrac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{\delta M}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(x,t)\, \underline{dx} \cdot \underline{\delta x} + \underline{dx} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{\delta x}$

soit $\quad \dfrac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{\delta M}) = \underline{dx} \cdot {}^t\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{\delta x} + \underline{dx} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{\delta x}$

$$\left\{ \frac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{\delta M}) = 2\, \underline{dx}\, \underline{\underline{d}}(x,t) \cdot \underline{\delta x} \right.$$

avec $\quad \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \dfrac{1}{2}\left[{}^t\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) + \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) \right]$ tenseur des taux de déformations

- le tenseur des taux de déformations est symétrique, il dépend linéairement du champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x},t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \dot{\underline{\underline{E}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \\ \text{avec } \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{E}}} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}} \right)^{\cdot} \end{array} \right.$$

en effet $\quad \dfrac{d}{dt}(\underline{dM}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{dM} = \dfrac{d}{dt}(\underline{\underline{F}}\, \underline{dM_0}) = \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{dM_0}$

$$= \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dM}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) = \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{d}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \frac{1}{2}\left[{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, {}^t\dot{\underline{\underline{F}}} + \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1} \right]$$

$$= {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \dot{\underline{\underline{E}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}$$

- les composantes de $\underline{\underline{d}}$ s'interprètent physiquement de façon analogue à celles du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$, mais en terme de taux de variation par rapport à la configuration actuelle. La configuration actuelle devient configuration de référence et la configuration à $t + dt$ (avec dt petit) la configuration déformée dans un mouvement infinitésimal.

Ainsi si $\underline{dM} = |\underline{dM}|\, \underline{e_i}$, $\qquad |\underline{dM}|^2 = \underline{dM}\cdot\underline{dM}$

$$\frac{d}{dt}\left(|\underline{dM}|^2\right) = 2\,|\underline{dM}|^2\, \underline{e_i}\cdot\underline{\underline{d}}\cdot\underline{e_i}$$

d'où
$$2\,\dot{\overline{|\underline{dM}|}}\;\underline{dM} = 2\,|\underline{dM}|^2\; d_{ii}$$

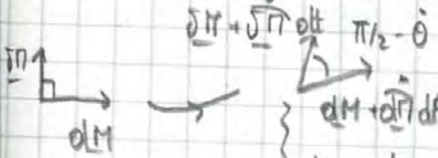
et
$$\left\}\; d_{ii} = \frac{|\dot{\underline{dM}}|}{|\underline{dM}|} \right. \qquad \text{sans sommation sur } i$$

$\}$ d_{ii} représente le taux d'extension ou taux d'allongement unitaire dans la direction $\underline{e_i}$.

Soient $\underline{dM} = |\underline{dM}|\,\underline{e_i}$ $\qquad \underline{\delta M} = |\underline{\delta M}|\,\underline{e_j}$ $\qquad \underline{dM}\cdot\underline{\delta M} = |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}|\;\underline{e_i}\cdot\underline{e_j}$

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM}\cdot\underline{\delta M}) = |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}|\;\dot{\overline{\sin\theta}} \simeq |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}|\;\dot{\theta} = 2\,|\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}|\; d_{12}$$

d'où
$$\left\}\; \dot{\theta} = 2\; d_{ij}(x,t) \right.$$



$\}$ d_{ij} avec $i \neq j$ représente le taux de glissement de deux directions orthogonales selon $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$ au point M

- Un mouvement est rigidifiant sur une partie de Ω_t si et seulement si $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{0}} \quad \forall\, \underline{x} \in \Omega_t$

  mouvement rigidifiant $\iff \underline{v} = \underline{a}(t) + \underline{b}(t)\wedge\underline{x} \iff \underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \underline{\underline{0}}$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$\left\{\begin{aligned} \underline{\underline{d}}(\underline{v}(\underline{x},t)) &= \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{u}}(\underline{X},t)) + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u}|^2) \\ &= \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{u}(\underline{X},t)) + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u}|^2) \end{aligned}\right.$$

en effet
$$(\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial X_\beta}\frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} = (\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{V})_{i\beta}\,(F^{-1})_{\beta j}$$

d'où
$$\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} = \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{V}\;\mathbb{F}^{-1} = \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{V}(X,t)\,(\mathbb{1} + \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u})^{-1}$$
$$= \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{V}\,(\mathbb{1} - \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u} + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u}|^2)) = \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{V} + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u}|^2)$$