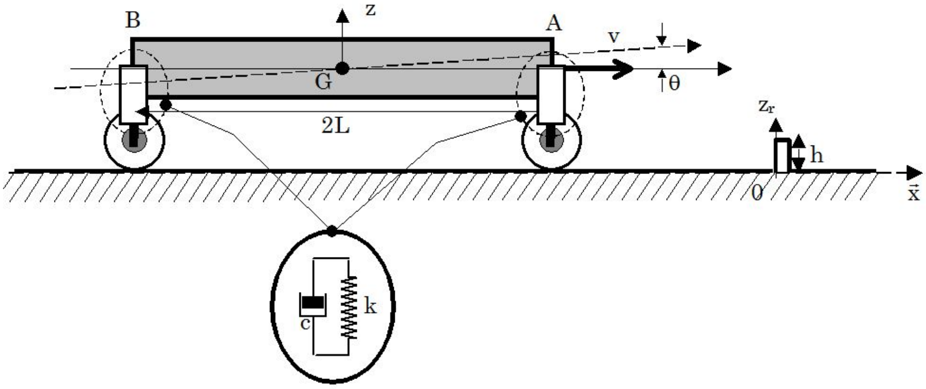
Vibrations du châssis d'une voiture

L'objectif du problème est de modéliser simplement la réponse d'une automobile après le franchissement d'un ralentisseur. Cette réponse est étudiée du point de vue du passager, c'est à dire dans un repère lié au véhicule. L'automobile est modélisée par une poutre homogène de masse M et de longueur $2L$, supportée à ses deux extrémités par des suspensions identiques caractérisées par une raideur k et un amortissement c. Les roues et les pneumatiques sont supposés indéformables et de masse négligeable impliquant que les variations de la route sont intégralement transmises aux suspensions. Ce modèle induit deux degrés de liberté et on choisit comme coordonnées généralisées les déplacements verticaux z_A et z_B des extrémités A et B de la poutre, comptés à partir de la position d'équilibre statique.



1 Régime d'oscillations libres

Dans un souci de simplification, on considère dans un premier temps une route plane.Déterminer les matrices d'inertie **M**, de raideur **K** et de dissipation **C** du système.

1. **Solution:** L'énergie potentielle a pour expression

$$U = \frac{1}{2}k(z_A^2 + z_B^2).$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{z}_A + \dot{z}_B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\left(\frac{\dot{z}_B - \dot{z}_A}{2L}\right)^2 = \frac{1}{6}M\left(\dot{z}_A^2 + \dot{z}_B^2 + \dot{z}_A\dot{z}_B\right)$$

La fonction de dissipation a pour expression

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{z}_A^2 + \dot{z}_B^2).$$

Ces trois expressions peuvent être mises sous les formes respectives

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(z_A, z_B)\mathbf{K}\begin{pmatrix} z_A \\ z_B \end{pmatrix}, \\ T = \frac{1}{2}(\dot{z}_A, \dot{z}_B)\mathbf{M}\begin{pmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}, \\ D = \frac{1}{2}(\dot{z}_A, \dot{z}_B)\mathbf{C}\begin{pmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où les matrices d'inertie **M**, de raideur **K** et de dissipation **C** ont pour expression

$$\mathbf{M} = \frac{M}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les pulsations propres du système.

Solution: Des matrices déterminées à la question 1), le système d'équation suivant est obtenu :

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}\ddot{z}_A\\ \ddot{z}_B\end{pmatrix}+\mathbf{K}\begin{pmatrix}z_A\\ z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix}z_A\\ z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_A\\ Z_B\end{pmatrix}e^{j\omega t}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix}2k-\frac{2}{3}M\omega^2 & -\frac{1}{3}M\omega^2\\ -\frac{1}{3}M\omega^2 & 2k-\frac{2}{3}M\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_A\\ Z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc obtenues par l'annulation du déterminant de la matrice

$$\det(\omega)=(2k-\frac{2}{3}M\omega^2)^2-\frac{1}{9}M^2\omega^4=\frac{1}{3}\left(M^2\omega^4-8kM\omega^2+12k^2\right).$$

Ainsi, les deux pulsations propres ont pour expression

$$\begin{cases}\omega_1=\omega_0\sqrt{2},\\ \omega_2=\omega_0\sqrt{6},\end{cases}$$

avec $\omega_0^2=\dfrac{k}{M}$.

3. Déterminer et représenter les modes propres associés.

Solution: On cherche les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ tels que $\mathbf{X}_i e^{j\omega_i t}$ soit solution du problème aux valeurs propres. Le vecteur propre $\mathbf{X}_i={}^t\left(X_{1i},X_{2i}\right)$ se calcule pour chaque valeur propre à partir de l'expression

$$\begin{pmatrix}2k-\frac{2}{3}M\omega_1^2 & -\frac{1}{3}M\omega_1^2\\ -\frac{1}{3}M\omega_1^2 & 2k-\frac{2}{3}M\omega_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}\\ X_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

On obtient donc pour ω_1

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}\\ X_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

d'où

$$X_{12}=X_{11}$$
$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_2

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{21}\\ X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$X_{22}=-X_{21},$$

d'où

$$\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Le premier mode est assimilable à un mode de pompage toute la voiture vibre verticalement de manière uniforme. Le second mode est assimilable à un mode de tangage car les déplacements des extrémités sont de même valeur et de signes opposés.

4. En déduire l'expression de la matrice modale.

> **Solution:** La matrice modale a pour expression
>
> $$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Reprendre les questions 1 à 4 en considérant maintenant comme coordonnées généralisées le déplacement vertical z du centre d'inertie G de la poutre et l'angle de rotation θ de la poutre autour de G, comptés à partir de la position d'équilibre statique. Conclure

> **Solution:** Si on prend z et θ à la place de z_B et z_B, on a
>
> $$\begin{cases} U = \frac{1}{2}k(z+L\theta)^2 + \frac{1}{2}k(z-L\theta)^2 = \frac{1}{2}\left[2kz^2 + 2kL^2\theta^2\right], \\ T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[M\dot{z}^2 + \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2\right], \\ D = \frac{1}{2}c(\dot{z}+L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c(\dot{z}-L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\left[2c\dot{z}^2 + 2cL^2\dot{\theta}^2\right], \end{cases}$$
>
> et donc les matrices d'inertie $\mathbf{M}$, de raideur $\mathbf{K}$ et de dissipation $\mathbf{C}$ ont pour expressions respectives
>
> $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \dfrac{ML^2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2kL^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2cL^2 \end{pmatrix}.$$
>
> La résolution du problème aux valeurs propres conduit aux pulsations propres
>
> $$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{2}, \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{6}, \end{cases}$$
>
> et aux vecteurs propres associés :
>
> $$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Régime d'oscillations forcées

On considère maintenant que les variations de la hauteur $z_r(t)$ de la route se traduisent par les efforts $F_A(t)$ et $F_B(t)$ transmis au châssis par l'intermédiaire des suspensions respectivement en A et B. On suppose que les efforts $F_A(t)$ et $F_B(t)$ sont directement proportionnels à la hauteur $z_r(t)$ de la route, c'est à dire qu'on pose : $F(t) = \gamma z_r(t)$. Le ralentisseur de hauteur h franchi par l'automobile est modélisé par une distribution de Dirac de hauteur h : $z_r(x) = h\delta(x)$. On prend comme origine des temps l'instant où la première roue rencontre le ralentisseur. On note $t_0 = 2L/v$.

6. Déterminer les efforts généralisés et calculer leur transformée de Laplace.

> **Solution:** La puissance des efforts extérieurs ayant pour expression,
>
> $$P = F_A(t)\dot{z}_A(t) + F_B(t)\dot{z}_B(t),$$
>
> avec
>
> $$\begin{cases} F_A(t) = \gamma h\delta(t), \\ F_B(t) = \gamma h\delta(t-t_0), \end{cases}$$
>
> le vecteur des efforts généralisés s'écrit donc :
>
> $$\begin{pmatrix} Q_{z_A} \\ Q_{z_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma h\delta(t) \\ \gamma h\delta(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

Sa transformée de Laplace a donc pour expression,

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_z(s) \\ \tilde{Q}_\theta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma h \\ \gamma h e^{-t_0 s} \end{pmatrix}.$$

7. Donner l'expression de l'équation du mouvement dans l'espace de Laplace. On suppose toutes les conditions initiales nulles.

Solution: L'équation du mouvement dans l'espace de Laplace a pour expression

$$\mathbf{M}\left[s^2\tilde{\mathbf{q}} - s\mathbf{q}(0) - s\dot{\mathbf{q}}(0)\right] + \mathbf{C}\left[s\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}(0)\right] + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}}.$$

d'où

$$\left[s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}}.$$

8. Déterminer les composantes non nulles des matrices modales d'inertie, de raideur et de dissipation.

Solution: Les matrices modales d'inertie, de raideur et de dissipation ont pour expressions respectives

$$\begin{cases} \mathbf{M}_p = \mathbf{X}^t\mathbf{M}\mathbf{X} = M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_p = \mathbf{X}^t\mathbf{K}\mathbf{X} = 2k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_p = \mathbf{X}^t\mathbf{C}\mathbf{X} = 2c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

9. Donner l'expression du vecteur de coordonnées modales dans l'espace de Laplace. En déduire son expression dans l'espace réel.

Solution: Après changement de base, l'équation du mouvement dans l'espace de Laplace devient

$$\left[s^2\mathbf{M}_p + s\mathbf{C}_p + \mathbf{K}_p\right]\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{X}^t\tilde{\mathbf{Q}}.$$

On en déduit l'expression du vecteur $\tilde{\mathbf{p}}$:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left[s^2\mathbf{M}_p + s\mathbf{C}_p + \mathbf{K}_p\right]^{-1}\mathbf{X}^t\tilde{\mathbf{Q}},$$

d'où

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2 s^2 + c_2 s + k_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma h \\ \gamma h e^{-t_0 s} \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma h\left(1 + e^{-t_0 s}\right)}{m_1(s^2 + 2\xi_1\omega_1 s + \omega_1^2)} \\ \dfrac{\gamma h\left(1 - e^{-t_0 s}\right)}{m_2(s^2 + 2\xi_2\omega_2 s + \omega_2^2)} \end{pmatrix},$$

avec $c_i/m_i = 2\xi_i\omega_i$.

Compte tenu de la relation

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + a^2 + 2as + \omega_0^2},$$

on obtient finalement

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma h}{m_1} H(t) e^{-\xi_1 \omega_1 t} \sin(\omega_{1_d} t) + \dfrac{\gamma h}{m_1} H(t-t_0) e^{-\xi_1 \omega_1 (t-t_0)} \sin[\omega_{1_d}(t-t_0)] \\ \dfrac{\gamma h}{m_2} H(t) e^{-\xi_2 \omega_2 t} \sin(\omega_{2_d} t) + \dfrac{\gamma h}{m_2} H(t-t_0) e^{-\xi_2 \omega_2 (t-t_0)} \sin[\omega_{2_d}(t-t_0)] \end{pmatrix},$$

avec $\omega_{i_d} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$.

10. Déduire de la question précédente le vecteur de coordonnées généralisées dans l'espace réel.

Solution: Sachant que $\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p}$, on a

$$\begin{pmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) + p_2(t) \\ p_1(t) - p_2(t) \end{pmatrix}.$$