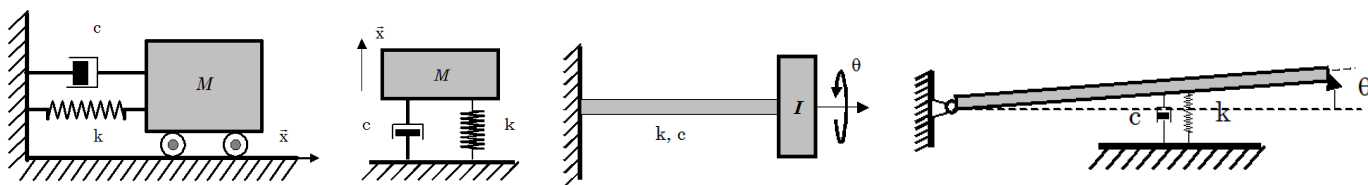


## Exercice 1 : Modèles simples à 1 DDL



### Mise en équation par le principe fondamental de la dynamique

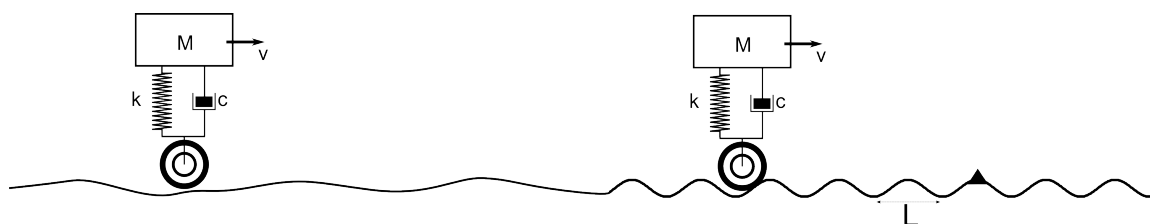
1. Faire le bilan des forces qui agissent sur la masse  $m$ .
2. Appliquer le principe fondamental de la statique.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique.
4. Dédire l'équation du mouvement.

### Mise en équation par l'équation de Lagrange

5. Calculer l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie potentielle  $U$  du système.
6. Définir la position d'équilibre statique de la masse.
7. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
8. Dédire l'équation du mouvement.

## Exercice 2 : Le salaire de la peur

Dans le film "le salaire de la peur" (H.G. Clouzot, 1953), des camions doivent transporter un chargement de nitroglycérine destiné à souffler un puits de pétrole en feu. Le parcours de plusieurs centaines de kilomètres emprunte une piste cabossée qui oblige le convoi à rouler lentement pour éviter les soubresauts qui pourraient provoquer l'explosion du chargement. Le camion est modélisé comme un système à 1 DDL. L'objectif du problème est de dimensionner la suspension (raideur  $k$ , amortissement  $c$ ) pour assurer la sécurité du convoi. La masse  $M$  de la partie suspendue (Moteur + Cabine + Remorque + Chargement) est évaluée à 15 tonnes. Les roues sont supposées rigides et transmettent intégralement les variations de hauteur de la route.



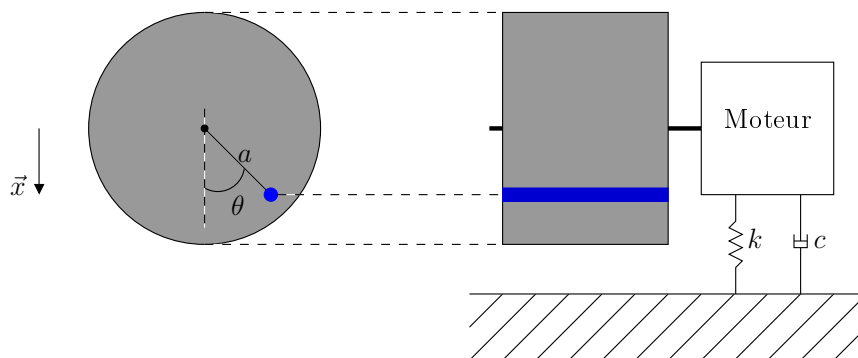
On note  $x$  la variable qui décrit la trajectoire horizontale du convoi. Celle-ci est parcourue à la vitesse  $v$ . La hauteur variable de la piste est notée  $h(x)$ . Le déplacement vertical de l'ensemble suspendu du camion, mesuré par rapport à la position statique est noté  $z(t)$ .

1. Établir l'équation du mouvement de la masse  $M$  sous l'effet de l'excitation de la route à partir du principe fondamental de la dynamique.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse  $M$  par l'équation de Lagrange.
3. Mettre l'équation du mouvement sous la forme faisant intervenir les paramètres pulsation propre  $\omega_0$  et amortissement  $\xi$ , dont on donnera les expressions en fonction des paramètres mécaniques
4. Évaluer la raideur  $k$  de la suspension qui procure au système une fréquence propre  $f_0 = 12$  Hz.
5. On souhaite que le système soit sous-amorti à 10% ( $\xi = 0.1$ ). Quel coefficient d'amortissement  $c$  doit avoir la suspension hydraulique ?

6. Un moment fort du film survient lorsque le convoi doit franchir une portion de quelques kilomètres de piste constituée de vaguelettes de terre qui exciteront inévitablement la structure.  
On peut modéliser ce passage de route, appelé "tôle ondulée", par une sinusoïde d'amplitude  $A = 10$  cm et de longueur d'onde  $L = 25$  cm (voir schéma). Préciser la relation entre la fréquence de l'excitation du système et la vitesse  $V$  du camion.
7. Déterminer la forme du mouvement vibratoire vertical  $z(t)$  du camion en fonction du temps et préciser l'amplitude du déplacement.
8. Tracer l'évolution de l'amplitude du déplacement en fonction de la fréquence  $f = \Omega/2\pi$ , puis de la vitesse du véhicule.
9. Quelle allure est la mieux adaptée au franchissement de cette zone de "tôle ondulée" ? Justifier le meilleur choix.
10. À quelle vitesse minimale le camion doit-il rouler pour que l'amplitude vibratoire du camion soit inférieure à 1 cm ?

### Exercice 3 : Machine à laver

On s'intéresse aux vibrations générées par une machine à laver le linge. Lorsque la machine tourne à vide, aucune vibration n'est engendrée, mais lorsque du linge est présent dans le tambour, des vibrations intenses du tambour apparaissent, dues à une distribution inhomogène du linge.



La machine à laver, composée du moteur et du tambour, constitue une structure de masse  $M$ . Cette structure est liée à son support par une suspension de raideur  $k$  et de coefficient d'amortissement  $c$ . Le linge est assimilé à une masse ponctuelle  $m$  située à une distance  $a$  de l'axe de rotation du tambour. Le problème est supposé plan et les mouvements horizontaux de la structure sont négligés. La force d'inertie verticale induite par la rotation du linge est notée  $F$ . On note également :

- $x(t)$  la position verticale de l'axe du moteur,
- $x_m(t)$  la position verticale du linge,
- $\theta$  l'angle entre le rayon passant par le linge et la verticale,
- $\Omega = \dot{\theta}$  la vitesse de rotation du moteur,
- $\alpha = \ddot{\theta}$  l'accélération de rotation du moteur.

1. Calculer la composante verticale de l'accélération  $\ddot{x}_m(t)$  du linge et en déduire la force d'inertie verticale  $F(t)$  subie par la structure.
2. Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit finalement :

$$(M + m)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ma [\Omega^2 \cos(\Omega t) + \alpha \sin(\Omega t)].$$

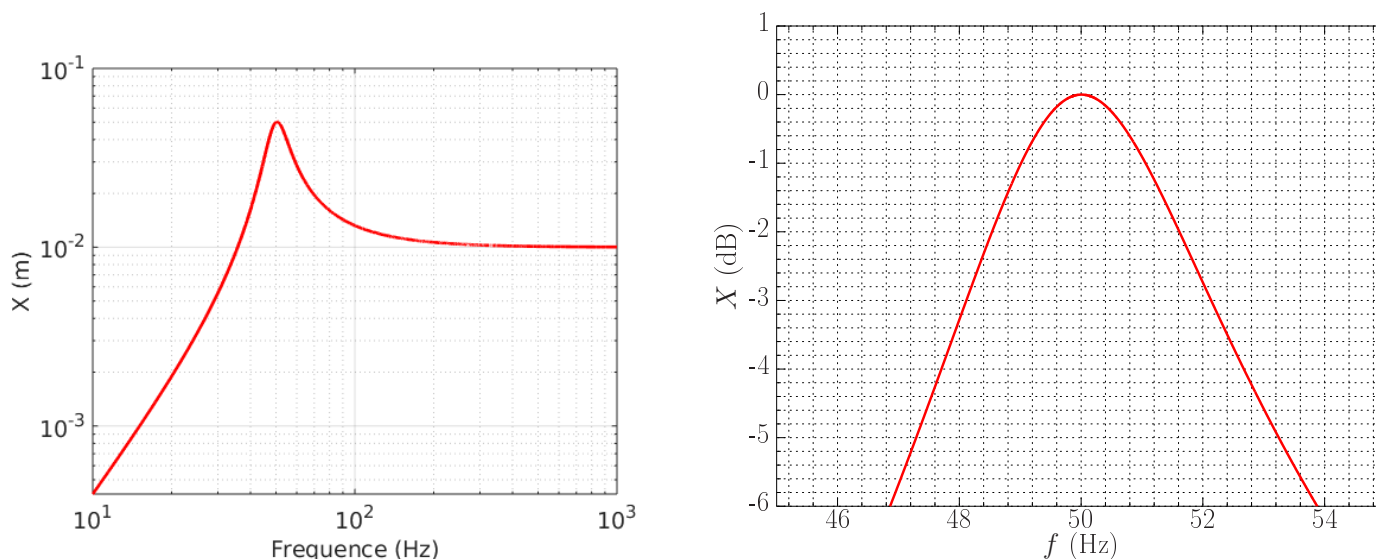
3. Quelle est la pulsation propre  $\omega_0$  de la structure ?
4. Dans la suite, on considère le régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le moteur a atteint une vitesse de rotation  $\Omega$  constante. Simplifier l'équation du mouvement et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = A_0\Omega^2 \cos(\Omega t).$$

Identifier  $\xi$  et  $A_0$ .

5. Calculer l'expression de l'amplitude  $X$  du déplacement de la structure en fonction de  $\Omega$ .

6. Les courbes représentent l'évolution de  $X$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Pour ces résultats, le linge a une masse  $m = 3 \text{ kg}$  et est positionné à une distance  $a = 25 \text{ cm}$ .

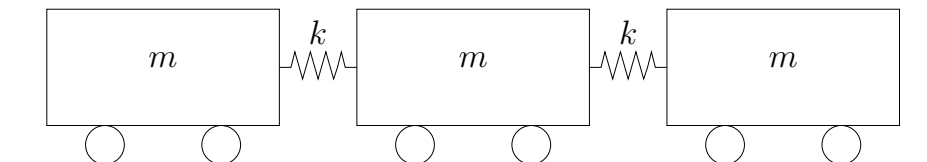


Vers quelle valeur tend l'amplitude du déplacement  $X$  lorsque  $\Omega \gg \omega_0$ ? En déduire la masse de la structure.

7. Mesurer une valeur approchée de  $\omega_0$  et en déduire celle de la raideur  $k$ .  
 8. Mesurer l'amortissement  $\xi$  et en déduire la valeur du coefficient d'amortissement  $c$ .

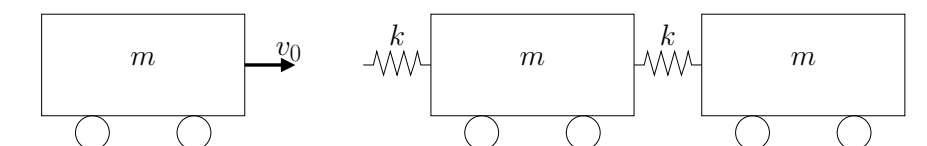
## Exercice 4 : Vibrations d'un train à trois wagons

On étudie le modèle conservatif décrit par la figure suivante. Dans ce problème, les déplacements sont seulement horizontaux et la pesanteur n'est pas prise en compte. On note  $x_1, x_2, x_3$  les positions respectives des 3 mobiles par rapport à leur position d'équilibre statique.



### 1 Régime d'oscillations libres

1. Écrire les énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$ .
2. Identifier les matrices de raideur  $\mathbf{K}$  et d'inertie  $\mathbf{M}$ .
3. Déterminer les pulsations propres du système.
4. Calculer les vecteurs propres  $\mathbf{X}_i$ . Représenter et discuter leur forme.
5. Déterminer la matrice modale  $\mathbf{X}$ .
6. En passant par la base modale, déterminer la forme générale des mouvements libres des 3 wagons
7. La voiture ① est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $v_0 = 1 \text{ m/s}$  et roule vers les autres voitures immobiles. À l'instant  $t = 0$ , le contact se produit et les trois voitures restent accouplées.



Donner les 6 équations qui permettent d'obtenir les valeurs numériques des amplitudes des modes.

## 2 Régime d'oscillations forcées

8. Le train est désormais en roulement à la vitesse constante  $v$ . L'un des essieux de la voiture deux est grippé de telle sorte qu'il en résulte une force harmonique longitudinale d'amplitude  $F_2$  et de pulsation  $\Omega$  telle que  $\Omega = v/R$ , où  $R$  est le rayon des roues. Écrire le système matriciel qui détermine les amplitudes  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  des mouvements des 3 voitures.
9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $H_2 = X_2/F_2$  en fonction du paramètre sans dimension  $\beta = \Omega/\omega_0$ . En déduire deux vitesses de roulement caractéristiques du mouvement de ②.

## Exercice 5 : Modèle discret d'un pétrolier soumis à la houle

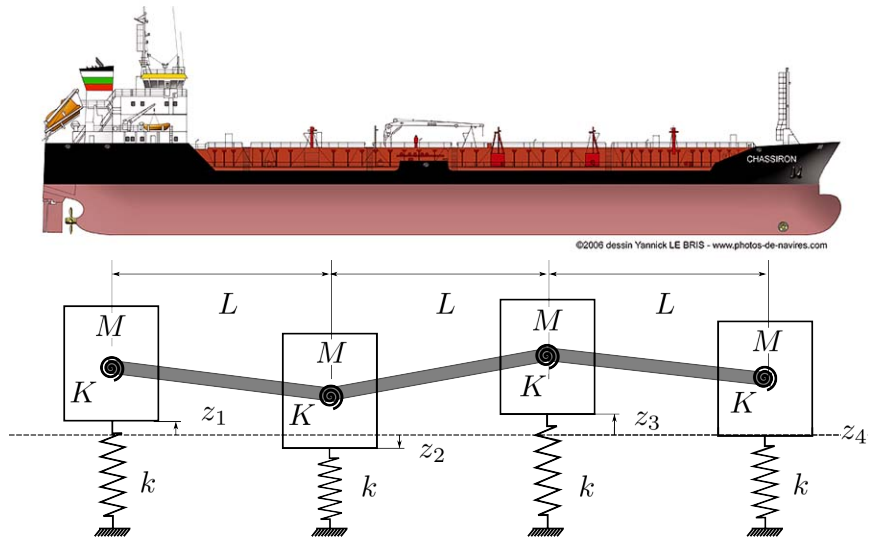


Figure 1 – Modèle du pétrolier à 4 degrés de liberté

L'objectif du problème est de modéliser simplement les déformations dynamiques d'un pétrolier sous l'action des vagues. Le pétrolier est constitué d'une partie arrière hébergeant le château surmontant la salle des machines et d'une partie avant contenant les réservoirs à pétrole.

### 1 Modélisation

#### Inerties

Pour le modèle, le navire est décomposé en quatre compartiments : le compartiment arrière (machines et château) et trois réservoirs à pétrole. Lorsqu'elles ne sont pas chargées de pétrole, les cales sont généralement remplies d'eau de mer et un réservoir plein a une masse identique à celle du compartiment arrière. Ainsi, pour simplifier, les quatre compartiments sont supposés avoir la même masse  $M$ . Comme indiqué par le dessin ci-dessus, les quatre éléments du modèle ont des dimensions identiques et leur centres sont séparés d'une distance  $L$ . On suppose que **leur déplacement est seulement vertical** et on note les déplacements mesurés par rapport à la position d'équilibre statique  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et  $z_4$ . Le vecteur des coordonnées généralisées est noté  $\mathbf{z}$ .

1. Calculer l'énergie cinétique  $T$  du pétrolier.
2. En déduire la matrice d'inertie  $\mathbf{M}$  du système.

#### Raideurs

Les mécanismes qui rappellent le pétrolier à sa position d'équilibre sont de deux natures : la flottabilité et la raideur de la structure.

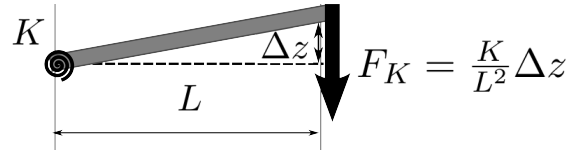
La flottabilité est liée à la combinaison de la poussée d'Archimède et du poids du navire pour ramener indépendamment les quatre compartiments à leur position d'équilibre ( $z_i = 0$ ). Pour modéliser cet effort de rappel, on affecte à chaque compartiment une raideur notée  $k$ . La force de rappel s'écrit pour un compartiment :  $F = (\rho_0 V - M)g$  avec :

- $V = S(z + z_0)$  = volume immergé du compartiment ( $z_0$  = Position statique)
  - $S$  = section horizontale du compartiment.
  - $\rho_0$  = masse volumique de l'eau de mer.
3. Quelle est l'expression de  $k$  ?
  4. Écrire l'énergie potentielle de flottabilité des quatre compartiments en fonction de  $k$ .
  5. Quelle est la matrice de raideur de flottabilité  $\mathbf{K}_f$  ?

### Structure

Les caractéristiques élastiques de la structure du navire tendent à ramener l'ensemble dans un état non déformé ( $z_i - z_{i+1} = 0$ ). Pour modéliser cet effort de rappel, on considère un ressort de torsion de raideur  $K$  (Nm/rad).

6. Montrer que la force de rappel induite par un ressort de torsion pour une petite déformation  $\Delta z$  est de la forme indiquée sur la figure ci contre :



7. Écrire l'énergie potentielle de structure associée aux ressorts  $K$ .
8. Quelle est la matrice de raideur de structure  $\mathbf{K}_s$  ?
9. En l'absence d'amortissement, quelle équation matricielle décrit le mouvement libre du système ?

## 2 Mouvement libre : Modes et fréquences propres

10. Comment procède-t-on pour identifier les fréquences propres  $f_j$  ?

11. Comment procède-t-on pour identifier les modes propres associés  $\mathbf{Z}_j$  ?

Si on considère un pétrolier de 200 000 tonnes, large de 60m et long de 300m, et qu'on donne à la structure une raideur de flexion  $K = 10^{11}$  Nm/rad, une résolution numérique du système précédent donne les résultats suivants :

Mode	1	2	3	4
Fréquence propre (Hz)	0.12	0.21	0.34	0.43
Matrice modale $\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_1$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_4$
Modes propres	1	1	1	-0.4
Déformées normalisées	1	0.4	-1	1
	1	-0.4	-1	-1
	1	-1	1	0.4

12. Représenter les 4 modes propres.
13. Commenter ces modes en fonction de la fréquence associée et des risques vis à vis de la sécurité du navire.
14. Quelle propriété mathématique vérifient les vecteurs propres ?
15. Mettre en évidence cette propriété pour les vecteurs  $\mathbf{Z}_1$  et  $\mathbf{Z}_2$ .

## 3 Mouvement forcé : Réponse au passage d'un train de houle

La houle est une onde de déplacement engendrée par le vent et se propageant à la surface de la mer sur des très grandes distances. Au passage d'un train de houle, les 4 compartiments subissent chacun un effort vertical  $F_i$ .

16. Calculer la puissance des efforts extérieurs.
17. En déduire le vecteur des efforts généralisés  $\mathbf{Q}$  en fonction des  $F_i$ .
18. Écrire l'équation matricielle du mouvement forcé.
19. Montrer comment on peut découpler le système dans la base des coordonnées modales notées  $\mathbf{p}$ .

L'action de la houle est due aux variations locales de la poussée d'Archimède. C'est un phénomène harmonique d'amplitude et de longueur d'onde métriques. Pour une houle de longueur d'onde  $\lambda_H$ , de vitesse relative  $v_r$  par rapport au navire, les forces verticales sur chaque compartiment ont une pulsation  $\Omega = 2\pi v_r / \lambda_H$  et elles diffèrent seulement par un déphasage  $\varphi_i$ . Pour le compartiment  $i$ , situé à la position  $\ell_i$  de l'extrémité du navire, la force due à la houle s'écrit :

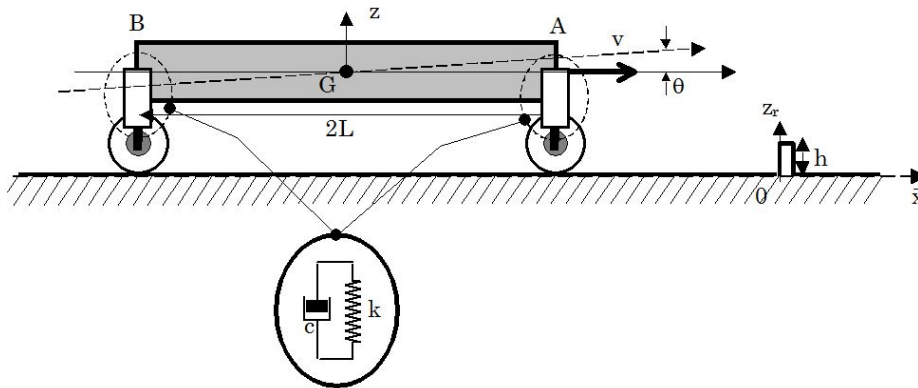
$$F_i(t) = F_H e^{2j\pi \frac{\ell_i}{\lambda_H}} e^{j\Omega t} = F_H e^{j(\Omega t + \varphi_i)}. \quad (17)$$

Cette expression est donnée pour information ; le seul élément à prendre en compte est que la houle est harmonique de pulsation  $\Omega$ .

20. Pour ce cas particulier d'excitation, écrire sous forme matricielle, le système découplé qui donne les coordonnées modales  $\mathbf{p}$  en fonction du vecteur des efforts généralisés  $\mathbf{Q}$ .
21. Quelle opération matricielle écrit-on pour obtenir les mouvements réels  $\mathbf{z}$  du navire en fonction de la pulsation  $\Omega$  ?
22. Si on introduit de l'amortissement dans le système, à quelle condition la base modale  $\mathbf{Z}$  permet-elle toujours une résolution simple du système ?
23. Pour ce type d'amortissement et pour les excitations harmoniques, écrire l'expression matricielle qui donne les coordonnées modales  $\mathbf{p}$  en fonction du vecteur des efforts généralisés  $\mathbf{Q}$ .

## Exercice 6 : Vibrations du châssis d'une voiture

L'objectif du problème est de modéliser simplement la réponse d'une automobile après le franchissement d'un ralentisseur. Cette réponse est étudiée du point de vue du passager, c'est à dire dans un repère lié au véhicule. L'automobile est modélisée par une poutre homogène de masse  $M$  et de longueur  $2L$ , supportée à ses deux extrémités par des suspensions identiques caractérisées par une raideur  $k$  et un amortissement  $c$ . Les roues et les pneumatiques sont supposés indéformables et de masse négligeable impliquant que les variations de la route sont intégralement transmises aux suspensions. Ce modèle induit deux degrés de liberté et on choisit comme coordonnées généralisées les déplacements verticaux  $z_A$  et  $z_B$  des extrémités  $A$  et  $B$  de la poutre, comptés à partir de la position d'équilibre statique.



### 1 Régime d'oscillations libres

Dans un souci de simplification, on considère dans un premier temps une route plane. Déterminer les matrices d'inertie  $\mathbf{M}$ , de raideur  $\mathbf{K}$  et de dissipation  $\mathbf{C}$  du système.

2. En déduire les pulsations propres du système.
3. Déterminer et représenter les modes propres associés.
4. En déduire l'expression de la matrice modale.
5. Reprendre les questions 1 à 4 en considérant maintenant comme coordonnées généralisées le déplacement vertical  $z$  du centre d'inertie  $G$  de la poutre et l'angle de rotation  $\theta$  de la poutre autour de  $G$ , comptés à partir de la position d'équilibre statique. Conclure

### 2 Régime d'oscillations forcées

On considère maintenant que les variations de la hauteur  $z_r(t)$  de la route se traduisent par les efforts  $F_A(t)$  et  $F_B(t)$  transmis au châssis par l'intermédiaire des suspensions respectivement en  $A$  et  $B$ . On suppose que les efforts  $F_A(t)$  et  $F_B(t)$  sont directement proportionnels à la hauteur  $z_r(t)$  de la route, c'est à dire qu'on pose :  $F(t) = \gamma z_r(t)$ . Le ralentisseur de hauteur  $h$  franchi par l'automobile est modélisé par une distribution de Dirac de hauteur  $h$  :  $z_r(x) = h\delta(x)$ . On prend comme origine des temps l'instant où la première roue rencontre le ralentisseur. On note  $t_0 = 2L/v$ .

6. Déterminer les efforts généralisés et calculer leur transformée de Laplace.
7. Donner l'expression de l'équation du mouvement dans l'espace de Laplace. On suppose toutes les conditions initiales nulles.
8. Déterminer les composantes non nulles des matrices modales d'inertie, de raideur et de dissipation.
9. Donner l'expression du vecteur de coordonnées modales dans l'espace de Laplace. En déduire son expression dans l'espace réel.
10. Déduire de la question précédente le vecteur de coordonnées généralisées dans l'espace réel.

## Modèles continus

### Exercice 7 : Vibrations longitudinales dans une poutre de section variable

1. Ecrire dans ce cas l'équilibre dynamique d'une section d'une poutre dans un mouvement longitudinal.
2. En déduire les équations des ondes de vibration longitudinales d'une poutre de longueur  $L$ , de section droite d'aire  $S$ , faite dans un matériau homogène et isotrope de masse volumique  $\rho$  et de module d'Young  $E$ .
3. Que devient cette équation si la section est du type  $S(x) = S_0 x^2$ , avec  $0 < a < x < b$ .
4. Établir la solution de l'équation précédente dans le cas d'oscillations libres.
5. Dans le cas où la poutre est encastree à ses deux extrémités  $x = a$  et  $x = b$ , montrer que le déplacement a pour expression

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t) \chi_m(x) \quad \text{avec} \quad \chi_m(x) = N_m \frac{\sin[\gamma_m(x-a)]}{x}.$$

6. Les fonctions propres  $\chi_m(x)$  vérifient la relation d'orthogonalité

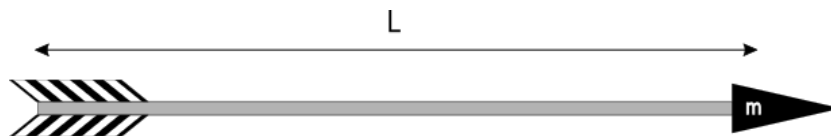
$$\int_a^b x^2 \chi_m(x) \chi_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

En déduire l'expression du coefficient de normalisation  $N_m$ .

7. Déterminer la réponse de la poutre à une vibration longitudinale sinusoïdale du support :

$$u_s(t) = u_0 \sin(\Omega t).$$

### Exercice 8 : Vibrations d'une flèche



On modélise une flèche par une poutre de longueur  $L$ , de section circulaire constante  $S$  et constituée d'un matériau homogène et isotrope de module d'Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de masse volumique  $\rho$ . Son élanement permet de se placer dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

La flèche est dotée d'une pointe de masse  $m$  liée rigidement à l'extrémité  $x = L$ , et d'un empennage de masse négligeable à l'extrémité  $x = 0$ .

L'objet du problème est de modéliser les vibrations de la flèche dans les phases initiale et finale de sa trajectoire entre l'archer et la cible.

*Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

## 1 A l'arrivée sur la cible : Vibrations longitudinales

1. Quel mode de vibration est susceptible d'apparaître après que la flèche s'est fichée dans la cible ? Rappeler la forme générale de l'équation différentielle qui les décrit.
2. Quelles conditions aux limites peut-on considérer. Donner leur expression mathématique
3. Établir les expressions des fréquences et des modes propres
4. Établir l'expression de masses et raideurs modales pour les ondes considérées
5. Modéliser les conditions initiales et les efforts extérieurs subis par la flèche.
6. En partant de l'équation des ondes forcées, établir l'équation différentielle vérifiée par chaque mode et faisant intervenir  $m_n$  et  $k_n$ .
7. A l'aide de la transformée de Laplace, déterminer l'expression de la vibration longitudinale  $u(x, t)$  de la flèche heurtant la cible.
8. Commentez ce résultat

## 2 Au départ, en quittant l'arc : vibrations libres en flexion

1. Dans un premier temps, on néglige la présence de la pointe.  
Après que la flèche quitte la corde, l'empennage entre en contact avec la poignée de l'arc. Ce contact impose une déformation initiale et engendre une vibration de flexion libre pendant la phase de vol.  
On rappelle l'équation générale des vibrations libres transverses dans une poutre droite, portant sur le déplacement transverse  $v(x, t)$ .

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} f(x, t) \quad \text{avec} \quad C_T = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

2. Sous quelle forme générale peut-on chercher la solution de cette équation ? Justifier ce choix.
3. Préciser ensuite les dépendances en temps  $\phi(t)$  et en position sur la poutre  $X(x)$  ainsi que la relation entre les paramètres caractéristiques  $\omega$  et  $\gamma$ .  
La forme générale des modes propres peut aussi s'écrire :

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

4. Dans le cas particulier de la flèche, quelles conditions aux limites faut-il considérer ?
5. Expliciter les quatre conditions aux limites physiques et leur traduction mathématique.  
Les racines de l'équation de dispersion précédente sont obtenues numériquement et notées  $\gamma_n L$ .
7. Expliquer comment on identifie les modes propres  $X_n(x)$  et donner les fréquences propres associées  $\omega_n$ .  
La résolution numérique du problème issu des conditions aux limites permet d'établir que les modes sont tels que

$$X_n(x) \approx \cos \gamma_n x + \cosh \gamma_n x + \sin \gamma_n x + \sinh \gamma_n x$$

Ce résultat est donné pour information, il ne sera pas utilisé dans la suite. Les modes seront représentés par  $X_n(x)$ .

8. Compte tenu des conditions aux limites cinématiques, tracer l'allure des 3 premiers modes propres.
9. En écrivant les énergies cinétique et potentielle, identifier les masses modales  $m_n$  et les raideurs modales  $k_n$  en fonction de  $X_n(x)$ .  
Au contact de l'empennage avec la poignée, la flèche se trouve déformée dans des conditions initiales notées :

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \dot{v}(x, 0) = 0$$

10. Montrer que la réponse libre  $v(x, t)$  de la flèche à ces conditions initiales s'écrit :

$$v(x, t) = \sum_n \frac{\rho S}{m_n} \cos(\omega_n t) X_n(x) \int_0^L X_n(x) v_0(x) dx$$

On prend finalement en compte la masse  $m$  de la pointe de la flèche.



11. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'ensemble en mouvement libre en fonction des raideurs modales  $k_n$ , des masses modales  $m_n$  et de la masse  $m$  de la pointe.
12. En déduire l'expression des nouvelles fréquences propres en les comparant à celles obtenues à la question 7

**Formulaire :**

$$f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(s)$$

$$\ddot{f}(t) \longleftrightarrow s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

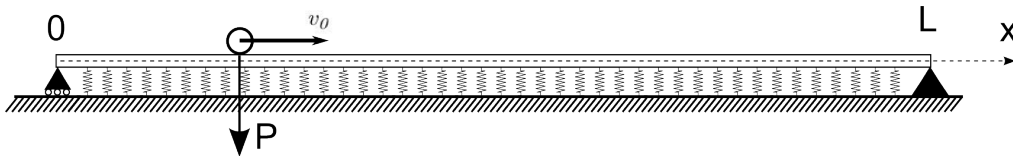
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\sin(\omega_0 t)H(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

## Exercice 9 : Modélisation des vibrations transverses d'un rail



L'objet du problème est de modéliser analytiquement les vibrations transverse induite dans un rail par le passage d'un train. On modélise le rail par une poutre droite de longueur  $L$ , de section rectangulaire  $S$ , de moment quadratique  $I$ . Elle est faite dans un matériau homogène de masse volumique  $\rho$  et de module d'Young  $E$ . Le rail repose sur deux appuis simples en  $x = 0$  et  $x = L$ . Le ballast et les traverses, jouant le rôle d'une fondation élastique, sont représentés par une raideur  $k$  par unité de longueur. L'ensemble est représenté sur la figure suivante.



**Figure 2** – Modèle de rail sur une suspension élastique

Pour une section droite de la poutre à l'abscisse  $x$ , on note  $v(x, t)$  le déplacement vertical ( $\parallel z$ ) du centre d'inertie et  $\theta(x, t)$  la rotation de cette section par rapport à l'axe transversal ( $\parallel y$ ). Les dimensions de la section droite étant faibles devant la longueur de la poutre, le modèle d'Euler-Bernoulli est suffisant pour en décrire correctement le comportement en flexion.

1. Faire le bilan dynamique d'une section droite de la poutre dans le mouvement de flexion, en incluant l'effort de la fondation élastique.

### Mouvement libre

2. En l'absence de force d'excitation, montrer que l'équation différentielle qui décrit les vibrations de flexion s'écrit sur  $v(x, t)$  :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = 0$$

3. On note  $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ . Dans le cas d'une onde stationnaire, quelle hypothèse peut-on faire sur la forme de la fonction  $v(x, t)$  ?
4. Isoler les équations différentielles sur la variation spatiale  $X(x)$  et la variation temporelle  $f(t)$ .

5. Rappeler la forme générale de la fonction  $f(t)$  et définir le paramètre associé  $\omega$ .
6. Rappeler la forme générale de la fonction  $X(x)$  et donner l'expression du paramètre associé  $\gamma$ .
7. Décrire les conditions mécaniques aux limites du rail et donner les relations mathématiques associées.
8. En déduire l'expression des modes propres du rail  $X_n(x)$ .
9. Rappeler la relation d'orthogonalité et en déduire le coefficient de normalisation des fonctions propres.
10. Représenter schématiquement la forme des 3 premiers modes.
11. Donner l'expression des fréquences propres  $\omega_n$  associées à ces fonctions propres. Comparer ces fréquences à celles du rail sans ballast. Commenter.
12. Écrire l'expression de la réponse libre  $v(x, t)$  du rail en fonction des  $X_n$  et  $\omega_n$ .
13. Indiquer comment les inconnues restantes peuvent être déterminées.

## Réponse au passage du train

On s'intéresse maintenant à la réponse du rail au passage du train. De manière très simplifiée, le train est modélisé par une charge mobile  $P(x, t)$  qui se déplace à la vitesse constante  $v_0$  (voir figure 2). On utilise la distribution de Dirac pour exprimer l'excitation résultante. L'équation différentielle du mouvement du rail sous l'effet de cette excitation s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = P_0 \delta(x - v_0 t)$$

On rappelle que les modes propres vérifient les relations suivantes :

$$\int_0^L X_n^2 dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^L X_n'''' X_n dx = \gamma_n^4$$

et que la distribution de Dirac a la propriété suivante pour une fonction  $F(x)$  quelconque :

$$\int_0^L F(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0).$$

La réponse forcée totale du rail s'exprime comme une combinaison linéaire de modes propres :

$$v(x, t) = \sum_n \psi_n(t) X_n(x).$$

14. On cherche à déterminer la contribution  $\psi_n(t)$  de chaque mode à la réponse totale du rail. En partant de l'équation du mouvement forcé, montrer que l'équation différentielle vérifiée par chaque mode s'écrit :

$$\ddot{\psi}_n(t) + \omega_n^2 \psi_n(t) = \frac{P_0}{\rho S} X_n(v_0 t).$$

15. Cette équation traduit l'excitation de chaque mode par une fonction harmonique dont la fréquence dépend de la vitesse  $v_0$  du train. Préciser la pulsation d'excitation  $\Omega_n$  propre à chaque mode.
16. En déduire l'expression des réponses modales  $\psi_n(t)$
17. Pour quelle vitesse  $v_{0_n}$  du train le mode d'ordre  $n$  entre-t-il en résonance ?
18. Montrer alors que la réponse totale forcée du rail s'écrit en fonction de la vitesse  $v_0$  du train :

$$v(x, t) = \frac{2P_0 L^2}{\pi^2 \rho S L} \sum_n \frac{1}{n^2 (v_{0_n}^2 - v_0^2)} \sin(\Omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

19. Lorsque la raideur du ballast est négligeable devant celle du rail, montrer que la vitesse critique du mode  $n$ ,  $v_{0_n}$ , devient :

$$v_{0_n} = n\pi \frac{c}{L}.$$

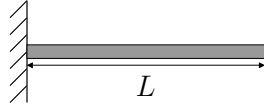
20. Tracer alors l'allure de l'amplitude la réponse du rail en fonction de la vitesse  $v_0$  du train. Commenter.

## Méthodes approchées

### Exercice 10 : Méthodes approchées en vibrations longitudinales

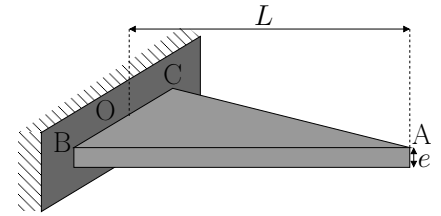
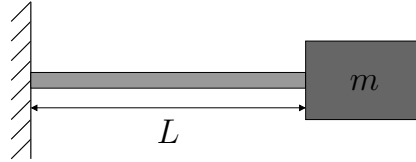
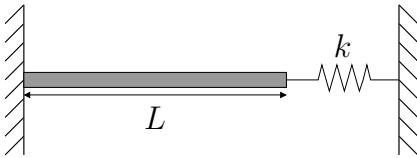
#### 1 Méthode de Rayleigh-Ritz

On souhaite déterminer les fréquences propres et les modes propres de vibrations longitudinales de poutres complexes par une méthode approchée : la méthode de Rayleigh-Ritz. Pour cela, il est nécessaire de définir les fonctions propres associées aux deux premiers modes de vibration d'une poutre bi-encastée :



$$\begin{cases} g_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \\ g_2(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right). \end{cases}$$

1. Dans un premier temps, on considère le cas où l'autre extrémité est solidaire d'un matériau élastique de raideur  $k$ . La poutre subit les vibrations harmoniques de ses supports, ce qui engendre l'apparition d'ondes de traction-compression. En utilisant comme fonctions propres de déplacement  $g_0(x)$  et  $g_1(x)$ , déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où  $k = ES/L$ .

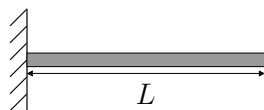


2. On suppose maintenant que l'extrémité libre supporte une charge de masse  $m$ . La poutre subissant la même excitation, en utilisant les mêmes fonctions de déplacement, déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où  $m = \rho SL/10$ .
3. La poutre ABC de longueur  $OA=L$ , telle que  $OB=OC=h$  de masse  $m(x)$  et de section rectangulaire  $S(x)$ , par unité de longueur, de faible épaisseur  $e$ , encastée à l'extrémité  $x=0$  et libre en  $x=L$ , subit les vibrations harmoniques de son support agissant en traction-compression. On pourra poser  $m_0 = \rho S_0 = \rho eh$ .
4. Donner l'expression de la section  $S(x)$  en fonction de  $S_0$  et  $L$ .
5. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de la poutre à partir des fonctions de déplacement choisies. En déduire les matrices d'inertie et de raideur.
6. Déterminer les pulsations propres et les modes correspondants.

### Exercice 11 : Vibrations transverses : Méthode de Rayleigh-Ritz

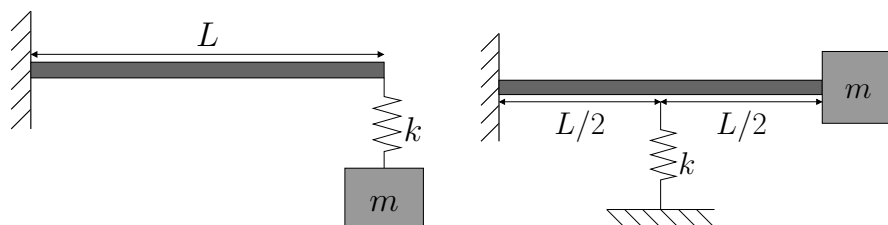
On souhaite maintenant déterminer les fréquences propres et les modes propres de vibrations transverses de poutres complexes par une méthode approchée : la méthode de Rayleigh-Ritz.

Pour une poutre encastée-libre, les fonctions de déplacement  $g_0(x)$  et  $g_1(x)$  ont pour expressions respectives :



$$\begin{cases} g_0(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2, \\ g_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3. \end{cases}$$

1. Déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants dans le cas de vibrations libres en flexion.
2. La poutre est maintenant encastée en  $x=0$  et l'autre extrémité est liée à un support de masse  $m$  et de raideur  $k$ . En utilisant les mêmes fonctions de déplacement que pour la poutre encastée-libre et en notant  $f_3(t)$  le déplacement de la masse, déterminer les trois premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où  $k = EI/L^3$  et  $m = \rho SL/7$ .



3. On considère la même poutre supportant à son extrémité libre une charge de masse  $M$  et supportée en son milieu par un matériau élastique de raideur  $k$ . Calculer la fréquence fondamentale des vibrations en flexion de ce système, en utilisant la fonction de déplacement  $v(x, t)$ .

$$v(x, t) = f(t) \left[ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right].$$