

Exercice 1 : Tenue d'une gouttière

Un massif constitué d'un matériau élastique occupe la région $\Omega : (x_1 \geq 0, -h \leq x_3 \leq h)$ de l'espace et est entaillé d'une gouttière semi-cylindrique de frontière $\partial\Omega_G$, dont la section droite dans le plan $(x_3 = 0)$ est le demi-cercle BCD de centre O et de rayon R (Figure). L'intérieur de la gouttière est remplie par un fluide parfait pesant. On suppose que le massif est en équilibre et que le tenseur des contraintes est donné en chacun de ses points dans le repère des coordonnées cylindriques $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_3)$ par :

$$\sigma_{rr}(r, \theta, z) = K \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z) = \nu \sigma_{rr},$$

les autres composantes étant nulles et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, K et ν étant des constantes données, avec $K < 0$ et $0 < \nu < 0.5$.

1. Montrer que le tenseur des contraintes est donné dans la base des coordonnées cartésiennes par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = K \frac{x_1^3}{r^4} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + K \frac{x_1 x_2^2}{r^4} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + K \frac{x_1^2 x_2}{r^4} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + K \nu \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3.$$

Pour effectuer simplement le changement de base sur le tenseur des contraintes, il est intéressant d'exploiter l'écriture avec le produit tensoriel de deux vecteurs :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z) = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z.$$

Compte tenu des expressions suivantes des vecteurs de base \underline{e}_r et \underline{e}_z du système de coordonnées cylindriques en fonction des vecteurs de base du système de coordonnées cartésiennes

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2, \quad \underline{e}_z = \underline{e}_3$$

le tenseur des contraintes peut être alors mis sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{rr} \cos \theta \sin \theta (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{rr} \sin^2 \theta \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{rr} \nu \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

ce qui conduit à l'expression suivante du tenseur des contraintes dans la base cartésienne

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} K \frac{x_1^3}{r^4} & K \frac{x_1^2 x_2}{r^4} & 0 \\ K \frac{x_1^2 x_2}{r^4} & K \frac{x_1 x_2^2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & \nu K \frac{x_1}{r^2} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

soit encore

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} K \frac{x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & K \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ K \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & K \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \nu K \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

2. Quelle est la densité d'efforts volumiques dans le massif ?

La pièce étant supposée à l'équilibre, on a en tout point de la pièce

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = \underline{0},$$

ρ désignant la masse volumique au point \underline{x} .

Soit encore en notation indicielle, pour tout $i = 1, 2, 3$ et en tout point de la pièce

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

avec sommation sur l'indice j répété. On a donc, comme $\sigma_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\rho f_1 &= -\sigma_{11,1} - \sigma_{12,2} \\ &= -K \frac{3x_1^2(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2) - (4x_1^3 + 4x_1x_2^2)x_1^3}{(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)^2} - K \frac{x_1^2(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2) - x_1^2x_2(4x_2^3 + 4x_1^2x_2)}{(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)^2} \\ &= -K \frac{3x_1^6 + 3x_1^2x_2^4 + 6x_1^4x_2^2 - 4x_1^6 - 4x_2^2x_1^4 + x_1^6 + x_1^2x_2^4 + 2x_1^4x_2^2 - 4x_1^2x_2^4 - 4x_1^4x_2^2}{(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)^2} \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho f_2 &= -\sigma_{21,1} - \sigma_{22,2} \\ &= -K \frac{2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2x_2(4x_1^3 + 4x_1x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^4} - K \frac{2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1x_2^2(4x_2x_1^2 + 4x_2^3)}{(x_1^2 + x_2^2)^4} \\ &= -\frac{K}{(x_1^2 + x_2^2)^4} [2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2x_2(4x_1^3 + 4x_1x_2^2) + 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1x_2^2(4x_2x_1^2 + 4x_2^3)] \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\rho f_3 = -\sigma_{33,3} = 0.$$

De sorte que les efforts volumiques sont ici négligés.

3. Quels sont les efforts extérieurs surfaciques agissant sur le contour cylindrique $ABCDE$ et sur les faces $x_3 = \pm h$?

Les surfaces $x_3 = -h$ et $x_3 = h$ ont pour normales extérieures unitaires respectivement $-\underline{e}_3$ et \underline{e}_3 .

Les densités surfaciques d'efforts exercées par l'extérieur sur ces surfaces sont données par le vecteur contrainte et ont donc pour expressions

$$\begin{cases} \underline{F}_{-h} = \underline{\sigma}(-\underline{e}_3) = -\nu K \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_3, \\ \underline{F}_h = \underline{\sigma} \underline{e}_3 = \nu K \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_3. \end{cases} \quad (1)$$

Il s'agit donc d'effort normaux à ces surfaces (le vecteur contrainte tangentiel est nul).

Les surfaces définies par $x_1 = 0$, $|x_2| > R$ et $|x_3| < h$ ont pour normale unitaire extérieure $\underline{n} = -\underline{e}_1$, d'où

$$\underline{F} = \underline{\sigma}(-\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} -K \frac{x_1^3}{r^4} \\ -K \frac{x_1^2x_2}{r^4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

car les points de ces surfaces vérifient $x_1 = 0$. Ces surfaces sont donc libres d'efforts.

Enfin, la surface de la gouttière BCD a pour normale unitaire extérieure (sortante du domaine) $\underline{n} = -\underline{e}_r$, d'où

$$\underline{F}_g = \underline{\sigma}(-\underline{e}_r) = -K \frac{\cos \theta}{R} \underline{e}_r. \quad (3)$$

Cette surface est donc soumise à un effort normal (porté par \underline{e}_r) et constant.

Il s'agit d'un effort de pression : $\underline{F}_g = -p \underline{n}$ avec $p = K \frac{\cos \theta}{R}$ qui est négatif car K est négatif, $R > 0$ et comme $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ $\cos \theta > 0$.

4. Interpréter physiquement la constante K .

Les efforts exercés sur la partie BCD de la gouttière sont, d'après la question précédente, des efforts de pression.

De tels efforts peuvent être induits par la présence d'un fluide pesant au repos à l'intérieur de la gouttière jusqu'à la surface $x_1 = 0$.

Le tenseur des contraintes dans le fluide est sphérique et a pour expression $\underline{\sigma} = -p_f \underline{I}$, où p_f est la pression dans le fluide. En écrivant l'équation d'équilibre local (au repos) dans le fluide pesant, on obtient :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho_f g \underline{e}_1 = \underline{0},$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide supposé homogène.

Après projection sur les trois axes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on montre que la pression p_f dépend uniquement de la variable x_1 , soit $p_f(x_1)$ et vaut $p_f(x_1) = \rho_f g x_1 + C$, où C est une constante d'intégration. Si l'on exprime que cette pression est nulle en $x_1 = 0$ (surface libre, pression atmosphérique négligée), on obtient $p_f(x_1) = \rho_f g x_1$.

La densité surfacique d'effort $\underline{F}_{g/l}$ exercée par la gouttière sur le fluide a alors pour expression

$$\underline{F}_{g/l} = \underline{\sigma} \underline{n} = -p_f \underline{n}$$

avec \underline{n} la normale extérieure unitaire au fluide, soit $\underline{n} = \underline{e}_r$. De sorte que

$$\underline{F}_{g/l} = -\rho_f g x_1 \left(\frac{x_1}{R} \underline{e}_1 + \frac{x_2}{R} \underline{e}_2 \right) = -\rho_f g x_1 \underline{e}_r.$$

La densité surfacique d'effort exercée par le fluide sur la gouttière $\underline{F}_{l/g}$ a alors pour expression

$$\underline{F}_{l/g} = -\underline{F}_{g/l} = \rho_f g R \cos \theta \underline{e}_r$$

En rapprochant cette expression de celle notée précédemment \underline{F}_g (densité surfacique d'effort exercée sur la gouttière), on en déduit

$$\underline{F}_g = \underline{F}_{l/g} = -K \frac{\cos \theta}{R} \underline{e}_r = \rho_f g R \cos \theta \underline{e}_r,$$

d'où

$$K = -\rho_f g R^2.$$

On retrouve bien une grandeur négative pour la constante K et on peut vérifier l'homogénéité du résultat : $[K] = N/m$.

5. Calculer les éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs agissant respectivement sur la frontière $\partial\Omega_G$ de la gouttière et sur les régions des faces $x_3 = \pm h$ définies par $R < r < \alpha R$, avec $\alpha > 1$.

La résultante des efforts exercés sur la surface BCD de la gouttière, on a

$$\underline{R} = \iint_S \underline{F}_g \, dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-h}^h -K \frac{\cos \theta}{R} \underline{e}_r R \, d\theta \, dx_3.$$

Le vecteur \underline{e}_r étant défini par la relation

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2,$$

on obtient

$$\underline{R} = -2Kh \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \underline{e}_1 \, d\theta - 2Kh \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \underline{e}_2 \, d\theta = -K h \pi \underline{e}_1.$$

Le moment au point O des efforts exercés sur la surface BCD de la gouttière est donné par la relation

$$\underline{M}(O) = \iint_S \underline{OM} \wedge \underline{F}_g \, dS,$$

le point M étant un point quelconque sur la surface de la gouttière défini par les coordonnées cylindriques (R, θ, z) .

On a donc

$$\underline{M}(O) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-h}^h (R \underline{e}_r + z \underline{e}_z) \wedge \left(-K \frac{\cos \theta}{R} \underline{e}_r \right) R \, d\theta \, dz = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-h}^h \cos \theta \underline{e}_\theta z \, d\theta \, dz = \underline{0}.$$

L'effort exercé sur la surface BCD est donc un glisseur d'axe \underline{e}_1 et d'intensité $-K h \pi$.

Les résultantes des efforts exercés sur les surfaces en $x_3 = \pm h$ délimitées par $R < r < \alpha R$, avec $\alpha > 1$ ont pour expressions

$$\begin{cases} \underline{R}_{-h} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_R^{\alpha R} -\nu K \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_z r \, dr \, d\theta = -\nu K \underline{e}_z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_R^{\alpha R} \cos \theta \, dr \, d\theta = -2\nu K R(\alpha - 1) \underline{e}_3, \\ \underline{R}_h = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_R^{\alpha R} \nu K \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_z r \, dr \, d\theta = 2\nu K R(\alpha - 1) \underline{e}_z. \end{cases}$$

Le moment en O de la densité surfacique \underline{F}_{-h} en O a pour expression

$$M_{-h}(O) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_R^{\alpha R} (r \underline{e}_r - h \underline{e}_3) \wedge \left(-\nu K \frac{x_1}{r^2} \underline{e}_3 \right) r dr d\theta = \nu K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_R^{\alpha R} \underline{e}_\theta \cos \theta r dr d\theta. \quad (4)$$

Le vecteur \underline{e}_θ étant donné par la relation

$$\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2, \quad (5)$$

on obtient

$$M_{-h}(O) = -\frac{1}{2} \nu K R^2 (\alpha^2 - 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \underline{e}_1 \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} \nu K R^2 (\alpha^2 - 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underline{e}_2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \pi \nu K R^2 (\alpha^2 - 1) \underline{e}_2 \quad (6)$$

$$\text{et } M_h(O) = -\frac{1}{4} \pi \nu K R^2 (\alpha^2 - 1) \underline{e}_2.$$

6. Tracer les cercles de Mohr en un point du massif. En quels points la contrainte tangentielle atteint-elle son maximum et quelles sont les directions normales correspondantes ?

Dans le repère de coordonnées cylindriques, le tenseur des contraintes est déjà diagonal. Les contraintes principales et les directions associées sont donc données directement par les relations suivantes (en les classant selon les notations du cours $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$ compte tenu de $K < 0$ et $0 < \nu < 1/2$.)

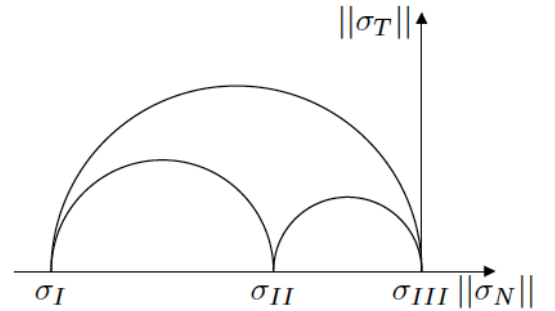
$$\begin{cases} \sigma_I = K \frac{\cos \theta}{r}, \\ \sigma_{II} = \nu K \frac{\cos \theta}{r}, \\ \sigma_{III} = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{e}_I = \underline{e}_r, \\ \underline{e}_{II} = \underline{e}_z, \\ \underline{e}_{III} = \underline{e}_\theta. \end{cases}$$

La représentation de Mohr est présentée à la figure ci-contre dans le plan $(\sigma_N, \|\sigma_T\|)$ (attention lire sur la figure σ_N et non $\|\sigma_N\|$). La contrainte tangentielle maximale a pour expression en un point quelconque de la pièce

$$\|\sigma_T\| = \frac{1}{2} (\sigma_{III} - \sigma_I) = -K \frac{\cos \theta}{2r}.$$

La contrainte tangentielle est maximale aux points correspondants à $\theta = 0$ et en $r = R$ (r minimal), d'où

$$\|\sigma_T\|_{max} = -\frac{K}{2R}.$$



Il s'agit donc des points situés sur la ligne de fond de la gouttière passant par le point C et pour tout $-h < z < h$.

Les directions \underline{n} normales aux plans de cisaillement maximaux correspondent aux bissectrices des vecteurs propres associés aux valeurs propres extrêmes (\underline{e}_I et \underline{e}_{III}), soit donc

$$\underline{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_I + \underline{e}_{III}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_r + \underline{e}_\theta) \quad \text{et} \quad \underline{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_I - \underline{e}_{III}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_r - \underline{e}_\theta)$$

De sorte qu'aux points $\theta = 0$ et $r = R$ correspondants au cisaillement maximal, ces directions \underline{n} deviennent

$$\underline{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \quad \text{et} \quad \underline{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$$

car pour $\theta = 0$, $\underline{e}_r = \underline{e}_1$ et $\underline{e}_\theta = \underline{e}_2$.

7. Sachant que le matériau reste élastique tant que le critère de Tresca est satisfait, c'est à dire tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point, où σ_S désigne la limite en traction simple du matériau, quelle est la valeur limite de K supportable par le matériau ? Interpréter physiquement le sens de ce critère.

Le matériau reste élastique tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point de la pièce et donc comme le maximum de la contrainte tangentielle maximale est atteint en $\cos \theta = 1$ et $r = R$ tant que :

$$\|\sigma_T\|_{max} = -\frac{K}{2R} \leq \frac{1}{2}\sigma_S.$$

Soit donc

$$-K < \sigma_S R$$

et donc compte tenu de l'interprétation faite de la constante K

$$-K = \rho_f g R^2 < \sigma_S R \text{ ou encore } \rho_f < \rho_f^* = \frac{\sigma_S}{Rg}$$

La masse volumique du fluide pesant dans la gouttière ne doit pas dépasser la valeur ρ_f^* (masse volumique limite du fluide pesant supportable par la pièce).

Ou encore le rayon R de la gouttière ne doit pas dépasser la valeur R^* , rayon maximal de la gouttière susceptible de tenir la pression d'un fluide de masse volumique ρ_f

$$R < R^* = \frac{\sigma_S}{\rho_f g}.$$

La fragilité de la pièce s'initie donc le long de la ligne de fond de la gouttière dès que ρ_f atteint la valeur limite ρ_f^* et les plans de cisaillement maximum (qui correspondent aux plans d'initiation de la fragilité) sont les plans bissecteurs des vecteurs \underline{e}_1 et \underline{e}_2 .