Exercice 1 : Cinématique – Descriptions lagrangienne et eulérienne

Exercice 1

On considère le mouvement plan d'un milieu continu défini par la représentation du champ des vitesses en description eulérienne :

$$v(x,t) = \alpha(x_1\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2)$$

exprimé dans la base cartésienne $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, α étant un scalaire constant supposé positif. On désigne par $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les composantes à l'instant t courant du vecteur position de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ à l'instant $t = 0$. Le milieu occupe à l'instant t le domaine $\Omega(t)$ défini par $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, x_3 quelconque.

1. Déterminer les lignes de courant de l'écoulement. Calculer de deux façons différentes le champ des accélérations $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne.

Les lignes de courant à l'instant $t = t^*$ fixé sont solutions du système différentiel suivant

$$\underline{v}(\underline{x}, t^*) \wedge \underline{\mathrm{d}x} = \underline{0}.$$

soit

$$\begin{cases} v_2\,\mathrm{d}x_3 - v_3\,\mathrm{d}x_2 = 0, \\ v_3\,\mathrm{d}x_1 - v_1\,\mathrm{d}x_3 = 0, \\ v_1\,\mathrm{d}x_2 - v_2\,\mathrm{d}x_1 = 0, \end{cases}$$

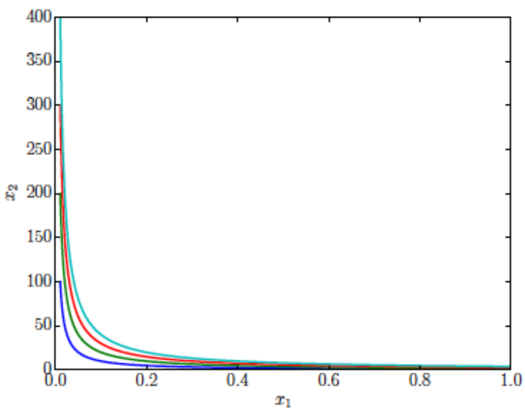
Puisque v_3 est nul et v_1 et v_2 ne le sont pas, on a

$$\begin{cases} v_1\,\mathrm{d}x_2 - v_2\,\mathrm{d}x_1 = 0, \\ \mathrm{d}x_3 = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$0 = -\alpha\,(x_2\,\mathrm{d}x_1 + x_1\,\mathrm{d}x_2) = -\alpha\,\mathrm{d}(x_1x_2).$$

On en déduit donc que $x_3 = \mathrm{Cte}$ et $x_1x_2 = \mathrm{Cte}$. Les lignes de courant constituent une famille d'hyperboles équilatères (d'asymptotes $y = 0$ et $x = 0$) planes, dans les plans $x_3 =$ constante. (figure). Reste à préciser le sens de parcours. On examine pour cela le signe des composantes du vecteur vitesse. Pour $\alpha > 0$, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, on a $v_1 > 0$ et $v_2 < 0$. De sorte que les courbes sont parcourues en partant de l'axe $x_1 = 0$ et en allant dans le sens des x_1 croissants.



Le champ d'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne est par définition donné par

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t),$$

d'où

$$\begin{cases} \gamma_1(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}(\alpha x_1)}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = \alpha\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = \alpha v_1(\underline{x}, t) = \alpha^2 x_1, \\ \gamma_2(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = -\dfrac{\mathrm{d}(\alpha x_2)}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = -\alpha v_2(\underline{x}, t) = \alpha^2 x_2, \\ \gamma_3(\underline{x}, t) = 0. \end{cases}$$

Le champ d'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne peut également être calculé à partir de la "dérivée convective" ou également dite "dérivée particulaire"

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_j}(\underline{x}, t) v_j(\underline{x}, t).$$

L'écoulement est stationnaire et on a $\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x},t) = \underline{0}$. On en déduit rapidement les composantes du champ des accélérations $\underline{\gamma}(\underline{x},t)$:

$$\begin{cases} \gamma_1(\underline{x},t) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_j}(\underline{x},t)v_j(\underline{x},t) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(\underline{x},t)v_1(\underline{x},t) + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}(\underline{x},t)v_2(\underline{x},t) + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}(\underline{x},t)v_3(\underline{x},t) = \alpha^2 x_1, \\ \gamma_2(\underline{x},t) = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_j}(\underline{x},t)v_j(\underline{x},t) = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}(\underline{x},t)v_1(\underline{x},t) + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}(\underline{x},t)v_2(\underline{x},t) + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}(\underline{x},t)v_3(\underline{x},t) = \alpha^2 x_2, \\ \gamma_3(\underline{x},t) = \dfrac{\partial v_3}{\partial x_j}(\underline{x},t)v_j(\underline{x},t) = 0. \end{cases}$$

On retrouve naturellement de cette manière les mêmes expressions des composantes du champ d'accélération en description eulérienne.

2. Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement. On désignera par $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ la position à l'instant t = 0 de la particule considérée. Expliciter les expressions de la vitesse $\underline{V}(\underline{X},t)$ et de l'accélération lagrangienne $\underline{\Gamma}(\underline{X},t)$.

Pour obtenir la description lagrangienne du mouvement connaissant la vitesse eulérienne, il nous faut intégrer le système différentiel suivant afin d'obtenir l'expression du vecteur $\underline{x}$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = \underline{v}(\underline{x},t) \\ \underline{x}(t=0) = \underline{X}, \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_1(\underline{x},t) = \alpha x_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v_2(\underline{x},t) = -\alpha x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = v_3(\underline{x},t) = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \alpha\,\mathrm{d}t, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{x_2} = -\alpha\,\mathrm{d}t, \\ x_3 = \mathrm{Cte}. \end{cases}$$

Après intégration, on obtient

$$\begin{cases} \log(x_1) = \alpha t + \mathrm{Cte}, \\ \log(x_2) = -\alpha t + \mathrm{Cte}, \\ x_3 = \mathrm{Cte}. \end{cases}$$

d'où en exploitant les conditions initiales

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{\alpha t}, \\ x_2 = X_2 e^{-\alpha t}, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

On a ainsi obtenu l'expression de l'application $\underline{\Phi}(\underline{X},t) = \underline{x}$ pour tout $\underline{X}$ et tout instant t et donc caractérisé la représentation lagrangienne du mouvement.
On peut ensuite en déduire directement l'expression de la vitesse $\underline{V}(\underline{X},t)$ en représentation lagrangienne à partir de l'expression de la vitesse eulérienne en injectant la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$

$$\begin{cases} V_1(\underline{X},t) = v_1(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t),t) = \alpha x_1 = \alpha X_1 e^{\alpha t}, \\ V_2(\underline{X},t) = v_2(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t),t) = -\alpha x_2 = -\alpha X_2 e^{-\alpha t}, \\ V_2(\underline{X},t) = v_2(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t),t) = 0, \end{cases}$$

d'où l'expression des composantes de la vitesse en représentation lagrangienne

$$\begin{cases} V_1(\underline{X},t) = \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha X_1 e^{\alpha t}, \\ V_2(\underline{X},t) = \dfrac{dx_2}{dt} = -\alpha X_2 e^{-\alpha t}, \\ V_3(\underline{X},t) = \dfrac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

De la même manière, on déduit directement l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ en représentation lagrangienne à partir de l'expression de l'accélération eulérienne en injectant la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$

$$\begin{cases} \Gamma_1(\underline{X}, t) = \gamma_1(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t), t), t) = \alpha^2 x_1 = \alpha^2 X_1 e^{\alpha t}, \\ \Gamma_2(\underline{X}, t) = \gamma_2(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t), t), t) = \alpha^2 x_2 = \alpha^2 X_2 e^{-\alpha t}, \\ \Gamma_3(\underline{X}, t) = \gamma_3(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t), t), t) = 0, \end{cases}$$

d'où l'expression des composantes de l'accélération en représentation lagrangienne

$$\begin{cases} \Gamma_1(\underline{X}, t) = \dfrac{dV_1}{dt} = \alpha^2 X_1 e^{\alpha t}, \\ \Gamma_2(\underline{X}, t) = \dfrac{dV_2}{dt} = \alpha^2 X_2 e^{-\alpha t}, \\ \Gamma_3(\underline{X}, t) = \dfrac{dV_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

3. En déduire l'équation de la trajectoire de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (1, 1, 0)$ à l'instant $t = 0$.

L'équation paramétrique de la trajectoire est directement fournie par l'expression de la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$. Pour en reconnaître la nature, il suffit d'éliminer le paramètre temps. Ceci peut se faire rapidement en formant le produit $x_1 x_2$ on obtient

$$x_1 x_2 = X_1 e^{\alpha t} X_2 e^{-\alpha t} = X_1 X_2 = 1.$$

On en déduit que la trajectoire est une hyperbole équilatère située dans le plan $x_3 = 0$. Elle est de même nature géométrique que les lignes de courant et correspond une ligne de courant particulière au sein de la famille de lignes de courant. Ce résultat est attendu car l'écoulement est stationnaire.

Exercice 2

Le mouvement d'un milieu continu est défini par les relations suivantes

$$\begin{cases} x_1(X, t) = X_1 \cos[\omega(R)t] - X_2 \sin[\omega(R)t], \\ x_2(X, t) = X_1 \sin[\omega(R)t] + X_2 \cos[\omega(R)t], \\ x_3(X, t) = X_3, \end{cases}$$

où $\underline{x}$ et $\underline{X}$ désignent respectivement les positions d'une même particule du milieu continu à des instants t et $t = 0$ et où $\omega(R)$ est une fonction de la variable $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

4. Calculer la vitesse lagrangienne du mouvement $\underline{V}(\underline{X}, t)$. Donner l'expression de l'accélération lagrangienne du mouvement $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$.

Les composantes de la vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ ont pour expressions

$$\begin{cases} V_1(\underline{X}, t) = \frac{dx_1}{dt} = -\omega(R) \left\{X_1 \sin[\omega(R)t] + X_2 \cos[\omega(R)t]\right\}, \\ V_2(\underline{X}, t) = \frac{dx_2}{dt} = \omega(R) \left\{X_1 \cos[\omega(R)t] - X_2 \sin[\omega(R)t]\right\}, \\ V_3(\underline{X}, t) = \frac{dx_3}{dt} = 0, \end{cases}$$

et celles de l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ sont données par les relations

$$\begin{cases} \Gamma_1(\underline{X}, t) = \frac{dV_1}{dt} = -[\omega(R)]^2 \left\{X_1 \cos[\omega(R)t] - X_2 \sin[\omega(R)t]\right\}, \\ \Gamma_2(\underline{X}, t) = \frac{dV_2}{dt} = -[\omega(R)]^2 \left\{X_1 \sin[\omega(R)t] + X_2 \cos[\omega(R)t]\right\}, \\ \Gamma_3(\underline{X}, t) = \frac{dV_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

5. Expliciter la description eulérienne de la vitesse du mouvement $\underline{v}(\underline{x}, t)$. Calculer l'accélération eulérienne du mouvement $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ de plusieurs façons différentes.

Compte tenu de l'expression de la vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$, on en déduit la vitesse eulérienne en injectant l'expression de la transformation inverse $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$ de la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$. Ici on peut reconnaî tre des expressions astucieusement de sorte qu'il n'est pas utile d'expliciter la transformation inverse $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$

$$\begin{cases} v_1(\underline{x}, t) = V_1(\underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t), t) = -\omega(R)\left\{X_1 \sin[\omega(R)t] + X_2 \cos[\omega(R)t]\right\} = -\omega(R)x_2, \\ v_2(\underline{x}, t) = V_2(\underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t), t) = \omega(R)\left\{X_1 \cos[\omega(R)t] - X_2 \sin[\omega(R)t]\right\} = \omega(R)x_1, \\ v_3(\underline{x}, t) = V_3(\underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t), t) = 0. \end{cases}$$

A ce stade, nous n'avons pas encore obtenu l'expression de la vitesse en description eulérienne car le terme R dépend directement du vecteur $\underline{X}$. Toutefois, on remarque assez vite la relation

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r.$$

On a donc $\omega(R) = \omega(r)$ et on en déduit l'expression de la vitesse en description eulérienne

$$\begin{cases} v_1(\underline{x}, t) = -\omega(r)x_2, \\ v_2(\underline{x}, t) = \omega(r)x_1, \\ v_3(\underline{x}, t) = 0. \end{cases}$$

Le champ d'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne peut s'exprimé à partir de la relation

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t),$$

d'où en exploitant à nouveau $\omega(r) = \omega(R)$ et est donc indépendant du temps ($\dfrac{\mathrm{d}\omega(r)}{\mathrm{d}t} = 0$)

$$\begin{cases} \gamma_1(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = -\omega(R)\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -[\omega(R)]^2\left\{X_1 \cos[\omega(r)t] - X_2 \sin[\omega(r)t]\right\} = -[\omega(R)]^2 x_1 = -[\omega(r)]^2 x_1, \\ \gamma_2(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = \omega(R)\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -[\omega(R)]^2\left\{X_1 \sin[\omega(r)t] + X_2 \cos[\omega(r)t]\right\} = -[\omega(r)]^2 x_2, \\ \gamma_3(\underline{x}, t) = \dfrac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}(\underline{x}, t) = 0. \end{cases}$$

Le champ d'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne peut également être calculé à partir de la "dérivée convective" ou "particulaire"

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_j}(\underline{x}, t)v_j(\underline{x}, t).$$

L'écoulement étant stationnaire, on a $\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) = \underline{0}$. On en déduit rapidement les composantes du champ des accélérations $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en exploitant toujours le fait que $\omega(r) = \omega(R)$ et est donc constant en x et en t :

$$\begin{cases} \gamma_1(\underline{x}, t) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(\underline{x}, t)v_1(\underline{x}, t) + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}(\underline{x}, t)v_2(\underline{x}, t) = -[\omega(r)]^2 x_1, \\ \gamma_2(\underline{x}, t) = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}(\underline{x}, t)v_1(\underline{x}, t) + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}(\underline{x}, t)v_2(\underline{x}, t) = -[\omega(r)]^2 x_2, \\ \gamma_3(\underline{x}, t) = 0. \end{cases}$$

qui naturellement est identique à celle obtenue précédemment.

6. Établir l'équation des trajectoires, ainsi que celles des lignes de courant. Commenter.

Les lignes de courant sont solutions de l'équation

$$\underline{v} \wedge \underline{\mathrm{d}x} = \underline{0}.$$

soit

$$\begin{cases} v_2\,\mathrm{d}x_3 - v_3\,\mathrm{d}x_2 = 0, \\ v_3\,\mathrm{d}x_1 - v_1\,\mathrm{d}x_3 = 0, \\ v_1\,\mathrm{d}x_2 - v_2\,\mathrm{d}x_1 = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$0 = \omega(r)x_1 \, \mathrm{d}x_1 + \omega(r)x_2 \, \mathrm{d}x_2 = \omega(R)x_1 \, \mathrm{d}x_1 + \omega(R)x_2 \, \mathrm{d}x_2 = \frac{\omega(R)}{2} \, \mathrm{d}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad dx_3 = 0.$$

On en déduit donc que $x_3 = \mathrm{Cte}$ et $x_1^2 + x_2^2 = \mathrm{Cte}$.

Les lignes de courant sont donc des familles de cercles centrés en $(0, 0)$ dans les plans $x_3 = \mathrm{Cte}$. Le sens de parcours de ces lignes s'analyse à partir du signe du vecteur vitesse en description lagrangienne. Il dépend du signe de $\omega(R)$. Si $\omega(R) > 0$, alors $v_1 < 0$ pour $x_2 > 0$ et $v_2 > 0$ pour $x_1 > 0$. Les cercles sont donc dits dans le sens trigonométrique.
Le mouvement étant stationnaire, lignes de courant et trajectoire sont de même nature géométrique.
Plus directement, nous avions remarqué précédemment que

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r.$$

ce qui correspond équation de la trajectoire de la particule située en X_1, X_2 à l'instant $t = 0$. Il s'agit bien de l'équation d'un cercle dans le plan (x_1, x_2) centré en $(0, 0)$, de rayon R. Equation qu'il convient de compléter par $x_3 = X_3$.