## Elasticité

### Exercice d'entrainement

On considère un milieu qui occupe dans sa configuration non déformée le domaine parallélépipèdique $0 \leq X_1 \leq L_1$, $0 \leq X_2 \leq L_2$, $0 \leq X_3 \leq L_3$ rapporté au repère orthonomé $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé $\lambda$ et $\mu$. Le milieu est soumis à la transformation suivante : $x_1 = X_1 + \alpha X_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ où $\alpha$ est une constante donnée positive.

- Calculer le vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{X})$ et les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.
- Sous quelle condition sur $\alpha$ l'hypothèse des petites transformations est-elle valable ?
- Sous cette condition, que l'on adoptera dans toute la suite de l'exercice, calculer les composantes du tenseur de déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.
- Déterminer la variation de volume subie par le milieu. Interpréter mécaniquement les déformations subies par le milieu.
- Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.
- On suppose le milieu en équilibre. Déterminer les efforts volumiques auquel il est soumis, ainsi que les densités surfaciques d'efforts appliquées sur chacune des faces du parallélépipède.
- Interpréter le chargement et le représenter.
- En déduire une interprétation physique du coefficient de Lamé $\mu$.
- Tracer les cercles de Mohr en un point quelconque du milieu.
- Donner les expressions de la contrainte tangentielle maximale et de la contrainte normale maximale.

---

## Tenue d'un réservoir cylindrique en pression

On considère un tube cylindrique de génératrices parallèles à l'axe $\underline{e}_3$, de longueur $L$, de rayon intérieur $r_i$ et de rayon extérieur $r_e$, avec $r_i < r_e$.

Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope. On désigne par $(\lambda,\, \mu)$ les coefficients de Lamé et $(E,\, \nu)$ les modules de Young et coefficient de Poisson.

On cherche à étudier la tenue du tube en équilibre sous les sollicitations suivantes :

- la paroi intérieure $r = r_i$ est soumise à un effort surfacique de pression $p_i$,
- la paroi latérale extérieure $r = r_e$ est libre d'effort,
- les sections droites terminales $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ sont également libres d'efforts,
- les efforts volumiques sont négligeables.
- le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est justifié.

*1.* Ecrire les équations et conditions aux limites du problème.

*2.* Déterminer les éléments de réduction au point $O$ des torseurs associés aux efforts extérieurs appliqués. Commenter.

*3.* En utilisant l'égalité suivante : $\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}\,\underline{\xi}) = \underline{\text{grad}}\,(\text{div}\ \underline{\xi}) - \underline{\Delta}\,\underline{\xi}$, où $\underline{\text{rot}}$ , div , $\underline{\text{grad}}$ et $\underline{\Delta}$ désignent respectivement les opérateurs rotationnel, divergence, gradient et laplacien d'un vecteur, montrer que le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ doit nécessairement vérifier l'équation suivante en tout point du tube :

$$(\lambda + 2\mu)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\ \underline{\xi}) - \mu\,\underline{\text{rot}}\,(\underline{\text{rot}}\,\underline{\xi}) \;=\; \underline{0}.$$

*4.* Les symétries géométriques et mécaniques (matériau et chargement) du problème incitent à rechercher le champ de déplacements dans le tube sous la forme :

$$\underline{\xi}(r,z) \;=\; r\,f(r)\,\underline{e}_r \;+\; g(z)\underline{e}_z$$

dans le système des coordonnées cylindriques $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Montrer que sous cette hypothèse le champ de déplacement vérifie nécessairement en tout point du tube :

$$\text{div}\ \underline{\xi}(r,\theta,z) \;=\; \text{constante}.$$

En déduire les formes de $f(r)$ et $g(z)$.

*5.* Déterminer les composantes du tenseur des déformations et des contraintes dans la base des coordonnées cylindriques. On s'assurera que le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}, \qquad \sigma_{zz} = C,$$

où $A, B, C$ sont des constantes, les autres composantes étant nulles.

*6.* Traduire les conditions aux limites et achever la résolution du problème.

On explicitera les champ de déplacement, de déformations et de contraintes solutions.

*7.* Quelles sont les valeurs des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en un point quelconque du tube?

On suppose que le tube reste élastique tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point, où $\sigma_S$ désigne la limite d'élasticité du matériau

En quels points, le critère est-il atteint en premier lieu ?

En déduire la valeur limite de la pression à partir de laquelle le tube sort du domaine élastique.

Tracer l'évolution de cette pression limite en fonction du rapport $r_e/r_i$.

Mettre en évidence sur ce tracé que le fait d'accroître l'épaisseur du tube permet d'augmenter la pression supportable par le tube. Montrer également l'existence d'une pression limite au delà de laquelle aucun tube, si épais soit-il, ne peut rester élastique.

*8.* On suppose maintenant le tube mince, c'est à dire :

$$e = r_e - r_i \ll R = \frac{(r_e + r_i)}{2},$$

montrer que la contrainte circonférentielle est donnée par la formule suivante, appelée formule des tonneliers :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R}{e} p_i.$$

---

**Formulaire en coordonnées cylindriques**

*Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire* $f(r,\theta,z)$ :

$$\underline{grad} f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z \qquad \Delta f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

*Divergence, rotationnel et Laplacien d'un vecteur* $\underline{v} = v_r\,\underline{e}_r + v_\theta\,\underline{e}_\theta + v_z\,\underline{e}_z$ :

$$\mathrm{div}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\underline{rot}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_z,$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\underline{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z.$$

*Tenseur gradient d'un vecteur* $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z)$ :

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)}.$$

*Divergence d'un tenseur* $\underline{\underline{\tau}}(r,\theta,z)$ *symétrique :*

$$\underline{div}\,\underline{\underline{\tau}} = \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\,\tau_{r\theta}}{r}\right)\underline{e}_\theta$$

$$+\left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r}\right)\underline{e}_z.$$