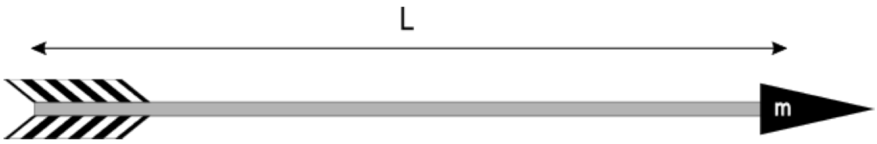
Exercice 8 : Vibrations d'une flèche



On modélise une flèche par une poutre de longueur L, de section circulaire constante Set constituée d'un matériau homogène et isotrope de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ. Son élancement permet de se placer dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

La flèche est dotée d'une pointe de masse m liée rigidement à l'extrémité $x = L$, et d'un empennage de masse négligeable à l'extrémité $x = 0$.

L'objet du problème est de modéliser les vibrations de la flèche dans les phases initiale et finale de sa trajectoire entre l'archer et la cible.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1 A l'arrivée sur la cible : Vibrations longitudinales

1. Quel mode de vibration est susceptible d'apparaître après que la flèche s'est fichée dans la cible ? Rappeler la forme générale de l'équation différentielle qui les décrit.

Solution: A l'arrivée sur la cible, la flèche est au repos dans son repère propre et la décélération brutale engendre une force d'inertie longitudinale $f(x,t)$ qui s'applique de façon uniforme sur toute la longueur et donne naissance à une onde longitudinale stationnaire régie par l'équation du mouvement forcé suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x,t) = g(x,t) \qquad C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

2. Quelles conditions aux limites peut-on considérer. Donner leur expression mathématique

Solution: La flèche est considérée encastrée à la pointe
et libre à l'empennage.

3. Établir les expressions des fréquences et des modes propres

Solution: Les fréquences propres et les modes propres s'écrivent respectivement :

$$\omega_n = \gamma_n C_L = (2n+1)\frac{\overset{\pi}{\cancel{pi}}}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad X_n(x) = \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$u(x,t) = \phi(t)\, X(x)$

4. Établir l'expression de masses et raideurs modales pour les ondes considérées

Solution:

$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2(x)dx \qquad \text{et} \qquad \underset{m}{kn} = -ES\int_0^L X_n(x)X_n''(x)dx$$

5. Modéliser les conditions initiales et les efforts extérieurs subis par la flèche.

Solution: Si on considère que la vitesse V_o de la flèche est constante sur la fin de la trajectoire, sa variation brutale s'exprime simplement :

$$\dot{u}_0 = V_o(1 - H(t)) = \begin{cases} V_o & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

et l'accélération : $\ddot{u}_0 = -V_0\delta(t)$

6. En partant de l'équation des ondes forcées, établir l'équation différentielle vérifiée par chaque mode et faisant intervenir m_n et k_n.

Solution: L'équation du mouvement forcé se développe de la façon suivante en faisant appel à la propriété d'orthogonalité des modes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_L^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S}\boxed{\overset{0}{\overset{\parallel}{f(x,t)}}}$$

$$u_{tot} = u + u_0(t)$$

$$\sum_n \ddot{\phi}_n(t)X_n(x) - C_L^2\phi_n(t)X_n''(x) = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n(t)X_n(x)X_m(x) - C_L^2\phi_n(t)X_n''(x)X_m(x) = X_m(x)\frac{V_o\delta(t)}{\rho S}$$

$\perp$té modes

$$\Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n(t)\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx - C_L^2\phi_n(t)\int_0^L X_n''(x)X_m(x)dx = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}\int_0^L X_m(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}_n(t)\int_0^L X_n^2(x)dx - C_L^2\phi_n(t)\int_0^L X_n''(x)X_n(x)dx = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}\int_0^L X_n(x)dx$$

$$C_L^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_n}{\rho S}\ddot{\phi}_n(t) + C_L^2\frac{k_n}{ES}\phi_n(t) = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}\int_0^L X_n(x)dx$$

avec $X_n(x) = \cos\left[(2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right]$

$$\frac{C_L^2}{ES}\times\rho S = \frac{E}{\rho}\times\frac{1}{ES}\times\rho S = 1$$

$$\Leftrightarrow m_n\ddot{\phi}_n(t) + k_n\phi_n(t) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi}V_o\delta(t)$$

Rq : $\int_0^L X_n(x) = \frac{2L}{(2n+1)\pi}\left[\sin(\ \ )\right]_0^L = \frac{2L}{(2n+1)\pi}\left\{\underbrace{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{(-1)^n} - \sin 0\right\}$

7. A l'aide de la transformée de Laplace, déterminer l'expression de la vibration longitudinale $u(x,t)$ de la flèche heurtant la cible.

Solution: On passe dans l'espace de Laplace en considérant que, dans le repère lié à la flèche, les conditions initiales au moment du choc sont nulles en déplacement et en vitesse :

$$\ddot{f}(t) \Leftrightarrow s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$(m_n s^2 + k_n)\tilde{\phi}(s) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi}V_o\cancel{\delta(t)}$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow m_n(s^2 + \omega_n^2)\tilde{\phi}(s) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi}V_o$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\phi}(s) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi m_n}\frac{V_o}{s^2+\omega_n^2}$$

$$\sin(\omega t)H(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Par transformation de Laplace inverse :

$$\phi_n(t) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi m_n}\frac{V_o}{\cancel{s^2+\omega_n^2}\ \omega_n}H(t)\sin(\omega_n t)$$

et finalement la vibration complète est la superposition des contributions de tous les modes.

$$u(x,t) = \sum_n \phi_n(t)X_n(x) = +\frac{2LV_o}{\pi}H(t)\sum_n\frac{(-1)^n}{(2n+1)m_n\omega_n}\underbrace{\cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)}_{X_n(x)}\sin(\omega_n t)$$

8. Commentez ce résultat

Solution: Au moment du contact avec la cible, la vibration est la superposition des modes libres, chacun intervenant avec une contribution inversement proportionnelle à la fréquence propre associée. Cette contribution décroit avec l'ordre du mode. Les modes d'ordre faible sont prépondérants.