Travail préparatoire - Exercice d'auto-évaluation sur le chapitre tenseur des contraintes

Soit un cylindre d'axe $\underline{e}_3$, de hauteur H selon cet axe et de section circulaire de rayon R dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Ce cylindre est en équilibre, soumis sur sa surface latérale à la densité surfacique d'effort $\underline{F}(\underline{x}) = F\, x_1 \,/\, R\, \underline{e}_1$, où F est une constante donnée non nulle. Il est libre d'efforts sur les faces terminales $x_3 = 0$ et $x_3 = H$.

On suppose que le tenseur des contraintes en tout point du cylindre est diagonal dans le repère cartésien orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de la forme suivante: $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ des constantes.

- Représenter l'allure du chargement imposé sur une section du cylindre.
- Déterminer les constantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en fonction de F et de R.
- Donner l'expression du tenseur des contraintes dans le repère cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.
- Tracer les cercles de Mohr en un point du cylindre. Donner les expressions de la contrainte tangentielle maximale et de la contrainte normale maximale. En quel(s) points de la pièce atteignent-elles leurs valeurs maximales ?
- Mettre en oeuvre le critère en contrainte tangentielle maximale et analyser la tenue du cylindre. On désignera par σ_e la limite d'élasticité du matériau supposée connue.

Tenue d'une gouttière

Un massif constitué d'un matériau élastique occupe la région $\Omega :(x_1 \geq 0,\ -h \leq x_3 \leq h)$ de l'espace et est entaillé d'une gouttière semi-cylindrique de frontière $\partial\, \Omega_G$, dont la section droite dans le plan $(x_3 = 0)$ est le demi-cercle BCD de centre O et de rayon R (Figure). L'intérieur de la gouttière est remplie par un fluide parfait pesant. On suppose que le massif est en équilibre et que le tenseur des contraintes est donné en chacun de ses points dans le repère des coordonnées cylindriques $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_3)$ par :

$$\sigma_{rr} = K\, \frac{\cos\theta}{r}, \qquad \sigma_{zz} = \nu\, \sigma_{rr},$$

les autres composantes étant nulles et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, K et ν étant des constantes données, avec $K < 0$ et $0 < \nu < 0.5$.

1. Montrer que le tenseur des contraintes est donné en tout point $\underline{x}$ dans la base des coordonnées cartésiennes par:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = K\, \frac{x_1^3}{r^4}\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + K\, \frac{x_1\, x_2^2}{r^4}\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + K\, \frac{x_1^2\, x_2}{r^4}\, (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + K\, \nu\, \frac{x_1}{r^2}\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

2. Quelle est la densité d'efforts volumiques dans le massif ?

3. Quels sont les efforts extérieurs surfaciques agissant sur le contour cylindrique $ABCDE$ et sur les faces $x_3 = \pm h$? Interpréter physiquement la constante K.

4. Calculer les éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs agissant respectivement sur la frontière $\partial\Omega_G$ de la gouttière et sur les régions des faces $x_3 = \pm h$ définies par $R < r < \alpha R$, avec $\alpha > 1$.

5. Tracer les cercles de Mohr en un point du massif. En quels points la contrainte tangentielle atteint-elle son maximum et quelles sont les directions normales correspondantes ?

6. Sachant que le matériau reste élastique tant que le critère de Tresca est satisfait, c'est à dire tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point, où σ_S désigne la limite en traction simple du matériau, quelle est la valeur limite de K supportable par le matériau ? Interpréter physiquement le sens de ce critère.