Pré-requis incontournables (à travailler en autonomie)

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.
- Avoir travaillé et rédigé sur feuille le sujet de TD 3 Transformation homogène de la semaine dernière.
- Avoir cherché la présente feuille en travaillant en amont les pré-requis.

- Exercice d'auto-évaluation :

Soit la transformation $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) = X_1\,\underline{e}_1 + (X_2 + a\,X_3)\,\underline{e}_2 + (X_3 + a\,X_2)\,\underline{e}_3$ *où* a *est une constante donnée,* $\underline{X}$ *la position d'un point dans sa configuration initiale et* $\underline{x}$ *sa position après transformation.*

a. Calculer les composantes du tenseur gradient de transformation $\underline{\underline{F}}$ *et son déterminant.*
b. Rappeler la condition pour qu'une transformation soit définie. En déduire la condition que la constante a *doit satisfaire pour que la transformation* $\underline{\Phi}$ *soit définie ? La transformation est-elle homogène ?*
c. Soient les points A_0 *et* B_0 *de coordonnées avant transformation* $A_0 : (0, 1, 0)$ *et* $B_0 : (0, 1, 1)$*. Calculer les coordonnées de ces deux points après transformation. Que devient le segment droit* $[\,A_0\,B_0\,]$ *après transformation ?*
d. Donner le volume du domaine Ω_0 *après transformation.*
e. Calculer les composantes du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ *et du tenseur de Green-Lagrange* $\underline{\underline{E}}$*.*
f. Donner les dilatations subies par des segments matériels initialement portés par chacune des trois directions $\underline{e}_1$*,* $\underline{e}_2$ *et* $\underline{e}_3$*.*
g. Donner les variations angulaires subies par deux segments matériels initialement portés par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$*, puis* $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$*.*
h. Calculer le vecteur déplacement $\underline{\xi}$*. A quelle condition sur* a *la transformation peut-elle être considérée petite ?*
i. Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$*. Comparer avec l'expression du tenseur de Green-Lagrange.*
j. Calculer les allongements relatifs subis par des segments matériels initialement portés par chacune des trois directions $\underline{e}_i$*.*
h. Donner les angles entre deux segments matériels initialement portés par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$*, puis* $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$*. Commenter.*

Transformation non homogène

On étudie la transformation d'un milieu continu qui transporte tout point $M_0(X, Y, Z)$ du milieu dans sa configuration de référence en $M(x, y, z)$ dans la configuration actuelle, définie par :

$$x = X + \alpha Y^2, \;\; y = Y + \beta X^2 \;\; z = Z$$

OÙ α et β sont des constantes réelles strictement positives. Les coordonnées sont rapportées à un repère orthonormé direct $(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

1. Etude générale de cette transformation : domaine de validité

1.1 Déterminer le tableau des composantes du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$.

1.2 La transformation est-elle homogène? Déterminer l'ensemble des points invariants.

1.3 Déterminer le domaine des points $M_0(X, Y, Z)$ pour lequel la transformation est définie.
Dans le plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$, les axes $O\underline{i}$ et $O\underline{j}$, et le carré $OACB$, avec $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(1, 1)$, sont-ils toujours inclus dans ce domaine?

1.4 Déterminer dans la base orthonormée donnée, le tableau des composantes du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$, puis celui du tenseur des déformations de Green - Lagrange $\underline{\underline{E}}$.

2. Etude de la transformation dans le plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$

2.1 On restreint à partir de maintenant l'étude au plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$. Le milieu continu considéré est le carré $OACB$. Déterminer les points O', A', B' et C', transformés respectifs des points O, A, B et C.

2.2 Etablir les équations des courbes transformées des côtés OA, OB, BC et AC du carré.
Tracer le transformé $OA'B'C'$ du carré $OACB$. On prendra $\alpha = 1/4$ et $\beta = 3/4$.

3. Etude des déformations au point $C(1, 1, 0)$

3.1 Donner au point C les dilatations, λ_x, λ_y et λ_z dans les directions des axes.

3.2 $\gamma(\underline{i}, \underline{j})$ désigne le glissement de l'angle droit formé par les axes $C\underline{i}$ et $C\underline{j}$.
Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\gamma(\underline{i}, \underline{j})$.
Mettre en évidence graphiquement cet angle.