Exercice 1 : Mesures des déformations

On cherche à mesurer l'état de déformations en un point d'une structure. Les transformations dans la pièce sont supposées petites. L'état de déformation est supposé par ailleurs plan, parallèlement au plan $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$, $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ étant des vecteurs unitaires orthonormés donnés. Sous ces hypothèses, les déformations sont caractérisées au point M_0 par le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(X_1,X_2,X_3)$ dont les composantes dans le repère $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ sont telles que $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ij}=\underline{\underline{\varepsilon}}_{ij}(X_1,X_2)$ et $i3=0$, pour $(i,j)=1,2,3$, le vecteur $\underline{e}_3$ étant le vecteur unitaire orthogonal au plan $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$.

1. Calculer l'allongement relatif ε_θ au point M_0 de coordonnées $\underline{X}$ dans la direction unitaire $\underline{n}_0$ faisant l'angle θ avec l'axe $(M_0,\underline{e}_1)$ dans le plan $(M_0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$.

L'allongement relatif ε_θ au point M_0 de coordonnées $\underline{X}$ dans la direction unitaire $\underline{n}_0$ est donné par

$$\frac{\mathrm{d}\ell-\mathrm{d}\ell_0}{\mathrm{d}\ell_0}=\underline{n}_0\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})\cdot\underline{n}_0.$$

Avec le vecteur $\underline{n}_0$ considéré ici

$$\underline{n}_0=\underline{e}_1\cos\theta+\underline{e}_2\sin\theta.$$

On obtient l'expression suivante de l'allongement ε_θ

$$\varepsilon_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=\varepsilon_{11}\cos^2\theta+2\varepsilon_{12}\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{22}\sin^2\theta.$$

2. Expliquer comment déterminer expérimentalement le tenseur des déformations linéarisées au point M_0.

Pour un angle θ fixé, ε_θ est une combinaison linéaire des trois composantes ε_{11}, ε_{12} et ε_{22}. Ainsi, en mesurant trois allongements relatifs $(\varepsilon_{\theta_I},\varepsilon_{\theta_{II}},\varepsilon_{\theta_{III}})$ à proximité du point M_0 dans trois directions différentes associées à trois angles différents $(\theta_I,\theta_{II},\theta_{III})$, on peut obtenir les trois composantes du tenseur de déformations linarisées ε_{11}, ε_{12} et ε_{22} au point M_0 en résolvant le système suivant à trois équations pour trois inconnues ε_{11}, ε_{12} et ε_{22} :

$$\varepsilon_{11}\cos^2\theta_I+2\,\varepsilon_{12}\sin\theta_I\cos\theta_I+\varepsilon_{22}\sin^2\theta_I\;=\;\varepsilon_{\theta_I},$$

$$\varepsilon_{11}\cos^2\theta_{II}+2\,\varepsilon_{12}\sin\theta_{II}\cos\theta_{II}+\varepsilon_{22}\sin^2\theta_{II}\;=\;\varepsilon_{\theta_{II}},$$

$$\varepsilon_{11}\cos^2\theta_{III}+2\,\varepsilon_{12}\sin\theta_{III}\cos\theta_{III}+\varepsilon_{22}\sin^2\theta_{III}\;=\;\varepsilon_{\theta_{III}}.$$

3. Quelles sont les directions pour lesquelles l'allongement ε_θ présente un extrêmum ?

L'allongement présente un extremum au point M_0 lorsque sa dérivée par rapport à θ s'annule, soit

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}\theta}=-2\,\varepsilon_{11}\cos\theta\sin\theta+2\,\varepsilon_{12}\cos^2\theta-2\varepsilon_{12}\;sin^2\theta+2\,\varepsilon_{22}\sin\theta\;cos\theta=(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\sin(2\theta)+2\,\varepsilon_{12}\cos(2\theta)=0.$$

d'où lorsque $\varepsilon_{22}\neq\varepsilon_{11}$ au point M_0

$$\tan(2\,\theta)=\frac{2\,\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}.$$

L'allongement unitaire est donc maximal dans ce cas pour les angles θ tels que

$$2\,\theta=\arctan\left(\frac{2\,\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}\right)+k\,\pi$$

ou encore

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\,\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}\right)+k\frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas où $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{11}$ au point M_0 et $\varepsilon_{12}\neq 0$, on a : $\cos(2\,\theta)=0$ et donc $2\theta=\pi/2+k\pi$, $\theta=\pi/4+k\pi/2$.

4. Application 1 : à la mesure des déformations à l'aide de jauges disposées en rosette.
Trois jauges de déformations (I, II, III) disposées en rosette autour d'un point O de la surface plane d'une éprouvette mesurent les trois allongements unitaires suivant trois directions : $\alpha = 0°$, $\beta = 120°$ et $\gamma = 240°$, (cf Figure). Les mesures obtenues sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_I = 0,5.10^{-4}, \\ \varepsilon_{II} = 2.10^{-4}, \\ \varepsilon_{III} = 2.10^{-4}. \end{cases}$$

Déterminer les composantes du tenseur des déformations au point O. Déterminer la direction du plan pour laquelle l'allongement unitaire est maximum et donner sa valeur.

On a

$$\begin{cases} \underline{n}_I = \underline{e}_1, \\ \underline{n}_{II} = \cos\dfrac{2\pi}{3}\underline{e}_1 + \sin\dfrac{2\pi}{3}\underline{e}_2 = -\dfrac{1}{2}\underline{e}_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2, \\ \underline{n}_{III} = \cos\dfrac{4\pi}{3}\underline{e}_1 + \sin\dfrac{4\pi}{3}\underline{e}_2 = -\dfrac{1}{2}\underline{e}_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2. \end{cases}$$

La première jauge donne directement $\varepsilon_I = \varepsilon_{11}$. Pour les deux autres jauges, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_{II} = \dfrac{\varepsilon_I}{4} - \dfrac{\sqrt{3}\,\varepsilon_{12}}{2} + \dfrac{3\,\varepsilon_{22}}{4}, \\ \\ \varepsilon_{III} = \dfrac{\varepsilon_I}{4} + \dfrac{\sqrt{3}\,\varepsilon_{12}}{2} + \dfrac{3\,\varepsilon_{22}}{4}. \end{cases}$$

On en déduit rapidement

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_{III} - \varepsilon_{II)} = 0, \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{3}\left(2\,\varepsilon_{II} + 2\,\varepsilon_{III} - \varepsilon_I\right) = 2,5.10^{-4}. \end{cases}$$

L'allongement unitaire extrémal est obtenu par la relation

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}\right) + k\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit alors ici comme $\varepsilon_{12} = 0$ que les deux directions pour lesquelles l'allongement unitaire est extrémal sont les directions 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta(\theta = 0) = \varepsilon_{11} = 0,5.10^{-4}, \\ \varepsilon_\theta\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_{22} = 2,5.10^{-4}. \end{cases}$$

De sorte que l'allongement unitaire est maximal pour un angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $(\varepsilon_{22} > \varepsilon_{11})$.
On peut remarquer que les directions $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ sont des directions principales du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ au point M_0. $(\varepsilon_{12} = 0)$

5. Application 2 : Reprendre la question avec cette fois les trois jauges de déformations (I, II, III) disposées selon les directions $\alpha = 0°$, $\beta = 45°$ et $\gamma = 45°$ en conservant les mêmes valeurs des mesures. .

On a

$$\begin{cases} \underline{n}_I = \underline{e}_1, \\ \underline{n}_{II} = \cos\dfrac{\pi}{4}\underline{e}_1 + \sin\dfrac{\pi}{4}\underline{e}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_2, \\ \underline{n}_{III} = \cos\dfrac{\pi}{2}\underline{e}_1 + \sin\dfrac{\pi}{2}\underline{e}_2 = \underline{e}_2. \end{cases}$$

La première jauge donne directement comme précédemment $\varepsilon_I = \varepsilon_{11}$. La troisiìne jauge donne ici aussi directement $\varepsilon_{III} = \varepsilon_{22}$.
Pour la seconde jauge, on a :

$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_I}{2} + \frac{\varepsilon_{III}}{2} + \varepsilon_{12},$$

et donc

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{II} - \left(\frac{\varepsilon_{III} + \varepsilon_I}{2}\right)$$

D'où avec les valeurs des mesures :

$$\varepsilon_{11} = 0,5.10^{-4}, \quad \varepsilon_{12} = 0,7510^{-4} \quad \varepsilon_{22} = 2.10^{-4}$$

L'allongement unitaire extrémal est obtenu pour

$$\tan(2\,\theta) = \frac{2\,\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} = -1.$$

soit $\theta = 3\pi/8$ et $\theta = 7\pi/8$. La valeur de cet allongement extrémal s'obtient alors en utilisant la formule

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{11}\cos^2\theta + 2\varepsilon_{12}\sin\theta\cos\theta + \varepsilon_{22}\sin^2\theta$$

Cette fois les directions $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ ne sont pas des directions principales du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ au point M_0.

Exercice 2 : Vitesse de déformations

Dans un référentiel matérialisé par un repère orthonormé direct $(O;\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)$ de coordonnées (x,y,z), on étudie le mouvement d'un fluide visqueux entre deux cylindres $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, d'axe $(0,\underline{e}_z)$ de rayons respectifs a et b avec $0 < a < b$ et de longueurs grandes devant les rayons. On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z) associées et les bases locales physiques $(O;\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)$. Soit ω une constante donnée positive, le champ de vitesse $\underline{v}(r,\theta,z)$ de l'écoulement est donné par :

$$\underline{v}(r,\theta,z) = K\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b^2}\right)\underline{e}_\theta, \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{\omega(ab)^2}{b^2 - a^2}.$$

Étude de l'écoulement entre les deux cylindres

1. Étudier les trajectoires et lignes de courant de ce mouvement loin des extrémités des cylindres.

Les lignes de courant sont par définition à un instant t^* fixé solutions du système différentiel suivant

$$\underline{v}(\underline{x},t^*) \wedge \underline{\mathrm{d}x} = \underline{0}.$$

soit ici en travaillant dans le repère cylindrique

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

et donc

$$\begin{cases} v_\theta\,\mathrm{d}z = 0, \\ v_\theta\,\mathrm{d}r = 0, \end{cases}$$

v_θ n'étant pas nul, on a $\mathrm{d}r = 0$ et $\mathrm{d}z = 0$. Les lignes de courant sont telles que $r = \text{Cte}$ et $z = \text{Cte}$. Il s'agit de familles de cercles dans les plans $z = \text{Cte}$.
La constante K est strictement positive $(b > a)$ et comme $r < b$, on a $v_\theta > 0$ de sorte que les cercles sont décrits dans le sens trignométrique.
L'écoulement étant stationnaire $(\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x},t) = \underline{0})$ les trajectoires sont de même nature géométrique que les lignes de courant.

2. Tracer le profil des vitesses sur un rayon r situé entre a et b. Donner une interprétation physique.

En $r = a$, on a $v_\theta = \omega a$ et en $r = b$, on a $v_\theta = 0$. De plus, la dérivée de la vitesse orthoradiale est négative pour r compris entre a et b (vitesse décroissante avec les r croissants).
Ce champ de vitesse est représentatif d'un écoulement de fluide visqueux entre deux cylindres, le cylindre en $r = b$ étant fixe et le cylindre en $r = a$ étant animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{e}_z$ d'intensité ωa. Le fluide visqueux adhère aux parois des deux cylindres.

3. Calculer le tableau des composantes physiques des tenseurs suivants : $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}$ tenseur gradient de vitesse, $\underline{\underline{D}}$ tenseur des taux de déformation, $\underline{\underline{\Omega}}$ tenseur des taux de rotation.

Le tenseur gradient de vitesse a pour expression en coordonnées cylindriques

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & r\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de l'expression du vecteur vitesse, on en déduit

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{v_\theta}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{b^2} & 0 \\ -\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les tenseurs des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ et des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ ont donc finalement pour expressions respectives

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}\right) = -K \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ \dfrac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} - {}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}\right) = K \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{b^2} & 0 \\ -\dfrac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés du tenseur des vitesses de déformations.

Les vitesses et les directions de déformations principales du mouvement correspondent respectivement aux valeurs propres et aux vecteurs propres du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$. Les valeurs propres sont alors les racines du polynôme caractéristique $P(d)$ défini par la relation

$$P(d) = \det(\underline{\underline{d}} - d\underline{\underline{I}}) = \begin{pmatrix} -d & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ \dfrac{1}{r^2} & -d & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix} = -d\left(d^2 - \frac{1}{r^4}\right) = -d\left(d - \frac{1}{r^2}\right)\left(d + \frac{1}{r^2}\right).$$

Les trois valeurs propres du tenseur $\underline{\underline{d}}$ en un point sont donc données par

$$\begin{cases} d_1 = -\dfrac{1}{r^2}, \\ d_2 = 0, \\ d_3 = \dfrac{1}{r^2}. \end{cases}$$

On retrouve la valeur propre 0 évidente.
Le vecteur propre $\underline{\nu}_i$ associé à la valeur propre d_i s'obtient ensuite en résolvant le système

$$(\underline{\underline{d}} - d_i\underline{\underline{I}})\underline{\nu}_i = \underline{0}.$$

On trouve alors

$$\underline{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\nu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \underline{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

En normalisant ces vecteurs (pour les rendre unitaires), on obtient

$$\underline{\nu}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad \underline{\nu}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \underline{\nu}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On a ainsi dans la base orthonormée $(\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2, \underline{\nu}_3)$ l'expression du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{r^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix}.$$

5. Déterminer de deux façons différentes le vecteur taux de rotation $\underline{\Omega}$.

Le vecteur taux de rotation est défini à partir du tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ de la façon suivante $\underline{\underline{\Omega}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{y} = \underline{\Omega}(\underline{x},t) \wedge \underline{y}$ pour tout vecteur $\underline{y}$, soit :

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_1 &= -\Omega_{23} = \Omega_{32}\\ \Omega_2 &= \Omega_{13} = -\Omega_{31}\\ \Omega_3 &= -\Omega_{12} = \Omega_{21}\end{pmatrix}.$$

Soit ici en travaillant dans la base cylindrique

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_r &= 0\\ \Omega_\theta &= 0\\ \Omega_z &= -\frac{K}{b^2}\end{pmatrix}.$$

Le vecteur taux de rotation est aussi donné par la relation

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}.$$

En coordonnées cylindriques, le rotationel ayant pour expression

$$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_z,$$

on retrouve bien l'expression obtenue précédemment

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\underline{e}_z = -\frac{K}{b^2}\underline{e}_z.$$

6. Le mouvement est-il isochore ? Existe-t-il un potentiel de vitesse ?

On rappelle que le taux de dilatation est donné par $\dfrac{d|\Omega|}{dt} \,/\, |\Omega| = \mathrm{div}\,\underline{v}$. De sorte que le mouvement est isochore si $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$.
La divergence en coordonnées cylindriques ayant pour expression

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

on a ici $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$, donc le mouvement étudié est isochore.
Si un potentiel de vitesse $\phi(r,\theta,z)$ existe, alors la vitesse s'écrit sous la forme :

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi.$$

Un potentiel de vitesse existe si et seulement si $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} = \underline{0}$, (la preuve est basée sur la propriété $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\phi = \underline{0}$ établi en TD1).
Dans le cas étudié ici, $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} = 2\underline{\Omega} \neq \underline{0}$, donc il n'existe pas de potentiel des vitesses sauf dans le cas particulier où b tend vers l'infini, dans ce cas $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} = \underline{0}$.

Cas limite d'un cylindre extérieur de rayon très grand ($b \to \infty$)

1. Vérifier qu'il existe un potentiel de vitesse, et le calculer.

Si b tend vers l'infini, alors la vitesse orthoradiale a pour expression

$$v_\theta = \frac{\omega a^2}{r}.$$

Dans ce cas, le vecteur taux de rotation $\underline{\Omega} = \underline{0}$ et donc il existe un potentiel ϕ tel que $\underline{v} = \underline{\mathrm{grad}}\,\phi$, soit en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} v_r = \phi_{,r} \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\phi_{,\theta} \\ v_z = \phi_{,z}. \end{cases}$$

On en déduit l'expression du potentiel

$$\phi(r,\theta,z) = r\,\theta v_\theta + \mathrm{Cte} = \omega\, a^2\theta + \mathrm{Cte}.$$

2. Calculer la circulation Γ du champ de vitesse le long d'un cercle dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et de rayon $R > a$.

La circulation le long d'un contour $\mathcal{C}_R$ est définie par l'intégrale curviligne

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_R} \underline{v}\,.\,\underline{\tau}\,\mathrm{d}s,$$

$\underline{\tau}$ étant le vecteur unitaire tangent au contour $\mathcal{C}_R$ et s l'abscisse curviligne.
On a donc ici, pour le champ de vitesse considéré et le contour circulaire :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_R} v_\theta\,\underline{e}_\theta\,.\,\underline{e}_\theta\,R\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \omega\,a^2\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\omega a^2.$$

On retrouve la relation des mouvements irrotationnels

$$\underline{v} = \frac{\Gamma}{2\pi\,r}\,\vec{e}_\theta.$$