Automatique Avancée – Commande non-linéaire

P1: Pré-requis et Objectifs

Pascal Morin
pascal.morin@sorbonne-universite.fr

Sorbonne Université

Plan

- Les pré-requis
- Objectifs du cours et modalités

Les pré-requis

Automatique linéaire en représentation d'état: Le système linéaire est défini de façon générale par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx + Du \end{cases} \tag{1}$$

avec

- $x \in \mathbb{R}^n$: l'état du système, aussi appelée "variable d'état";
- $u \in \mathbb{R}^m$: l'entrée du système, aussi appelée "variable de commande";
- $y \in \mathbb{R}^p$: la sortie du système, qui peut correspondre à:
  - une variable d'intérêt que l'on souhaite contrôler plus spécifiquement (e.g. la configuration de l'organe terminal d'un robot manipulateur);
  - une variable mesurée grâce à des capteurs;
  - les deux à la fois

Les pré-requis

<u>système linéaire:</u>

Le système linéaire (1) peut:

- correspondre à la dynamique exacte d'un système physique;
- correspondre à la dynamique linéarisée (et donc approchée), autour d'un point d'équilibre, d'un système décrit par des équations non-linéaires.

Développons ce deuxième point:

Un système non-linéaire ("autonome", on dit aussi "temps invariant") est défini par les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ y & = & g(x,u) \end{array} \right. \quad (2)$$

Les pré-requis

Point d'équilibre et linéarisé tangent:

Definition

On appelle point d'équilibre du système (2) un couple (x_0, u_0) tel que $f(x_0, u_0) = 0$. La valeur x_0 est alors appelée état d'équilibre et u_0 est appelée commande à l'équilibre.

Etant donné un point d'équilibre (x_0, u_0) pour le système (2), on peut définir le système linéarisé tangent associé:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}} & = & A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} & = & C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{array} \right.$$

avec

$$\tilde{x} := x - x_0 \,, \quad \tilde{u} := u - u_0 \,, \quad \tilde{y} := y - g(x_0, u_0)$$
$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \,, \; B := \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$
$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, u_0) \,, \; D := \frac{\partial g}{\partial u}(x_0, u_0)$$

Les pré-requis

Système linéarisé tangent:

Le système linéarisé tangent ci-dessus est une approximation de la dynamique non-linéaire (2) au sens où, pour ce dernier,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}} & = & A\tilde{x} + B\tilde{u} + O^2(\tilde{x}, \tilde{u}) \\ \tilde{y} & = & C\tilde{x} + D\tilde{u} + +O^2(\tilde{x}, \tilde{u}) \end{array} \right.$$

Remarques:

- Formellement, ce système est identique à (1).
- **Attention cependant!** $\tilde{x}, \tilde{u}$, et $\tilde{y}$ changent avec le point d'équilibre.
- Pour le système linéaire (1), $(x_0, u_0) = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

Les pré-requis

Stabilité: Revenons maintenant au système linéaire (1)... Considérons le point d'équilibre "canonique" $(x_0, u_0) = (0, 0)$ (attention, il peut y en avoir d'autres). Posons $u(t) = u_0 = 0 \; \forall t$. On a donc

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

et $x_0 = 0$ est un équilibre de ce système.

Definition

On dit que le système (3) est asymptotiquement stable si:

$$\forall x(0), \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0 = 0$$

Autrement dit, toutes les solutions du système tendent vers le point d'équilibre $x_0 = 0$.

Les pré-requis

Stabilité: Suite...

Un système linéaire asymptotiquement stable ne peut posséder qu'un seul point d'équilibre (trivial).

Corollaire: Si un système linéaire admet plusieurs points d'équilibre, il ne peut être asymptotiquement stable.

Theorem

Le système (3) est asymptotiquement stable ssi les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative. On dit alors que la matrice A est Hurwitz-stable. Dans ce cas, toutes les solutions du système convergent exponentiellement vers zéro, i.e., $\exists \lambda, K > 0$ tels que, pour toute condition initiale $x(0)$,

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| \leq K\|x(0)\| \exp(-\lambda t)$$

On dit que le système est exponentiellement stable.

Les pré-requis

Stabilité: Suite...

La preuve du théorème précédent est facile si toutes les valeurs propres de A sont d'ordre de multiplicité un (exercice), mais plus difficile s'il y a des valeurs propres multiples.

Si la matrice A n'est pas Hurwitz-stable, il y a deux possibilités:

1. Il existe une valeur propre de A à partie réelle strictement positive. Dans ce cas, la plupart des solutions du système divergent vers l'infini lorsque $t \longrightarrow +\infty$. On dit que le système est instable.
2. Les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle négative ou nulle mais certaines sont à partie réelle nulle. Dans ce cas, le système peut soit être instable, soit marginalement stable, i.e., toutes les solutions du système sont bornées mais toutes ne convergent pas vers zéro lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

Les pré-requis

Stabilité EBSB:

L'intérêt des systèmes asymptotiquement stable est fortement lié au concept suivant:

Definition

Soit un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ avec un point d'équilibre en x_0, i.e., $f(x_0) = 0$. Ce système est dit EBSB-Stable s'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour toute entrée $\varepsilon(.)$ telle que $\sup_t \|\varepsilon(t)\| \leq \bar{\varepsilon}$ et toute condition initiale $x(0)$ telle que $\|x(0) - x_0\| \leq \eta$, alors la solution $x_\varepsilon(.)$ du système "perturbé"

$$\dot{x}_\varepsilon = f(x_\varepsilon) + \varepsilon$$

satisfait la propriété $\sup_t \|x_\varepsilon(t)\| < +\infty$.

Si de plus on peut choisir $\bar{\varepsilon}$ et η arbitrairement grands, alors on dit que le système est globalement EBSB-Stable.

Les pré-requis

Stabilité EBSB:

Le sens de cette notion de stabilité EBSB est que si le système initial est soumis à une perturbation $\varepsilon(.)$ bornée, alors cette perturbation ne va pas faire diverger l'état du système. Ce dernier va rester borné. C'est une **propriété essentielle** d'un système contrôlé/asservi.

Theorem

Si le système (3) est asymptotiquement stable alors il est globalement EBSB-Stable.

Les pré-requis

Asservissement de systèmes linéaires:

Revenons à la dynamique du système linéaire (1): $\dot{x} = Ax + Bu$. On suppose que l'état d'équilibre $x_0 = 0$ est le point de fonctionnement désiré, i.e., on souhaite que l'état du système soit le plus proche possible de x_0. Pour cela, on doit imposer:

- La stabilité asymptotique du système (ce qui entrainera la stabilité EBSB, et donc une garantie de "robustesse" vis-à-vis de perturbations);
- Des propriétés de vitesse de convergence et d'ammortissement satisfaisantes (ce qui entrainera de bonnes performances, marges de stabilité, etc)

Les pré-requis

Asservissement de systèmes linéaires:

Il y a deux possibilités:

1. La matrice A possède déjà les propriétés requises. On peut alors poser simplement $u = 0$.
2. La matrice A ne possède pas les propriétés requises. On va devoir synthétiser un correcteur $u = Kx$ de sorte que la matrice d'état $A + BK$ associée au système asservi possède les propriétés requises.

Remarque: Pour un système linéaire, le contrôleur linéaire de type $u = Kx$ est utilisé la plupart du temps, mais parfois on est amené à utiliser des commandes un peu différentes, notamment pour prendre en compte les limites d'actionnement. Un exemple concerne les solutions de type "anti-windup" pour des contrôleurs de type PID.

Les pré-requis

Synthèse de correcteur:

On rappelle la propriété importante suivante:

Theorem

On suppose que le système (1) est commandable, ce qui peut être vérifié par le critère du rang de Kalman (de commandabilité):

$$Rang\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

alors, pour tout ensemble $E = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ de valeurs propres désirées tel que $\lambda \in E \Longrightarrow \bar{\lambda} \in E$, il existe une matrice K telle que l'ensemble des valeurs propres de $A + BK$ soit égal à E.

Les pré-requis

Synthèse de correcteur:

Il existe de nombreuses techniques de synthèse de correcteurs linéaires (dont certaines sont présentées dans le module "Commande Robuste"). Rappelons notamment:

- La technique de synthèse par placement de pôles;
- La technique de synthèse LQR.

Pour des systèmes de second ordre, on va notamment prendre en compte les notions de pulsation naturelle et d'ammortissement. Rappelons que le coefficient d'ammortissement ξ est typiquement choisi dans l'intervalle $[0.6, 1]$. La valeur rationnelle $\xi = \frac{3}{4}$ est un bon choix, pratique pour certains calculs.

Les pré-requis

Observabilité, synthèse d'observateur:

- L'observabilité concerne la possibilité de reconstruire l'état x du système à un instant T arbitraire, à partir de la connaissance de la sortie y et de la commande u sur un intervalle de temps $[T-\delta, T)$, où δ est une valeur strictement positive arbitraire.
- D'un point de vue pratique, l'observabilité est une propriété essentielle dès que les capteurs disponibles ne permettent pas une mesure de l'état complet du sytème.
- La notion d'observabilité, bien que souvent oubliée, est sous-jacente dans de nombreuses applications, notamment en robotique mobile (voiture autonome, drones, etc)

Les pré-requis

Observabilité, synthèse d'observateur:

Theorem

Le sytème (1) est observable si et seulement si il vérifie le critère du rang de Kalman (d'observabilité):

$$Rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

L'observabilité va impliquer la possibilité de "reconstruire" l'état du système grâce à un observateur d'état, parfois aussi appelé estimateur d'état, voir même filtre.

Les pré-requis

Observabilité, synthèse d'observateur:

- Plusieurs méthodes de reconstruction seront vues dans le Cours "Estimation et identification pour la robotique", notamment dans un cadre probabiliste (filtre de Kalman, de Kalman étendu, etc).
- Dans un cadre déterministe linéaire, la solution classique est l'observateur de Luenberger défini par l'équation suivante:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - (C\hat{x} + Du)) \tag{4}$$

où $\hat{x}(0)$ est choisi arbitrairement, et $\hat{x}$ représente "l'estimée" de x.

Les pré-requis

Observabilité, synthèse d'observateur:

Notons $\tilde{x} := \hat{x} - x$ "l'erreur d'estimation". On vérifie que

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

Theorem

On suppose que le système (1) est observable. Alors, pour tout ensemble $E = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ de valeurs propres désirées tel que $\lambda \in E \implies \bar{\lambda} \in E$, il existe une matrice L telle que l'ensemble des valeurs propres de $A - LC$ soit égal à E.

Corollaire: Si le système est observable, via un choix adéquat de la matrice L on peut garantir la convergence exponentielle de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$, et ceci quelque soit $\hat{x}(0)$.

Les pré-requis

Observabilité, synthèse d'observateur:

Remarque: En pratique, l'observateur est souvent mis en œuvre (voir Cours "Estimation et identification pour la robotique") via un schéma itératif en deux étapes:

- Prédiction: qui consiste à mettre L à zéro pour prédire l'état en fonction de la dynamique et de l'entrée u;
- Correction: qui consiste à corriger l'état prédit en fonction de la dernière mesure y fournie par le capteur.

Ce schéma permet notamment de prendre en compte des fréquences d'échantillonage différentes entre les capteurs et l'application de la commande.

Les pré-requis

Principe de séparation:

Theorem

On se donne deux matrices de gain K et L telles que les matrices $A + BK$ et $A - LC$ soient Hurwitz-stables. Alors, la loi de commande

$$u = K\hat{x}$$

avec $\hat{x}$ l'état de l'observateur de Luenberger, assure la convergence de x vers zéro, i.e.,

$$\forall \hat{x}(0), \forall x(0), \lim_{t \longrightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Les pré-requis

Principe de séparation: (suite)

Preuve: Laissée en exercice. Remarques:

- Le point important du résultat précédent est que la synthèse du contrôleur et celle de l'observateur peuvent être réalisées de façon indépendante l'une de l'autre.
- Attention: pour des systèmes non-linéaires (suite du cours), le principe de séparation n'est plus forcément valide: utiliser l'état estimé dans la loi de commande peut conduire à une divergence de l'état, même si la loi de commande assure la stabilité lorsqu'elle est appliquée avec l'état réel.

Objectifs et modalités du cours:

- De nombreux problèmes d'automatique peuvent être résolus avec les techniques d'autom linéaire:
  - Ou parce que le système est linéaire
  - Ou parce que les solutions basées sur le linéarisé tangent fonctionnent correctement
- D'autres problèmes nécessitent des techniques plus élaborées, qui vont permettre notamment:
  - D'obtenir des domaines de convergence plus importants;
  - D'étendre les solutions de commande à la stabilisation de trajectoires;
  - De résoudre des problèmes nécessitant à la fois de la génération de trajectoires et de la stabilisation.
- En outre, certains problèmes ne peuvent pas être résolus avec les techniques linéaires, même localement

Objectifs et modalités du cours:

L'objectif du cours est:

1. De présenter les principales méthodes d'automatique non-linéaire
2. De mettre en pratique, notamment en simulation, ces méthodes sur des cas d'études
3. De développer la capacité des étudiants à choisir les méthodes les mieux adaptées

Modalités:

- Cours
- Séances de "TDs sur papier"
- Séances de "TDs numériques" (Matlab/Simulink), dès que possible (inscription ENSAM)
- Evaluation: Examen écrit + deuxième note (TP ou projet)