Automatique Avancée – Commande non-linéaire

P3: Techniques de type Liapounov

Pascal Morin

pascal.morin@sorbonne-universite.fr

Sorbonne Université

Plan

- Introduction
- Notions de stabilité au sens de Liapounov
- Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov
- Cas particulier des systèmes linéaires
- Applications à la synthèse de lois de commande

Introduction

- Principe des techniques de type Liapounov:
  - Etudier la stabilité d'un système indirectement via des fonctions "de type énergie";
  - S'applique à la fois à l'analyse de la stabilité, et à la synthèse de lois de commande.
- Motivations:
  - Les techniques vues précédemment (linéarisé tangent, linéarisation exacte), se ramènent in fine à un système linéaire;
  - Comment peut-on étudier la stabilité d'un système non-linéaire?
  - Comment faire si le linéarisé tangent n'est pas stabilisable?
  - Comment faire si le système ne peut pas être linéarisé exactement?

Introduction

- Principe des techniques de type Liapounov:
  - Avantages:
  - Les techniques de type Liapounov fournissent un nouvel outil pour répondre à ces questions, potentiellement applicable à tout système
  - Et permettent aussi souvent de traiter des questions de robustesse
- Inconvénient:
  - Approche heuristique de la recherche de "fonctions de Liapounov".

Retour sur un exemple: Le système masse-ressort-ammortisseur

- Equations dynamiques:

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - \mu\dot{z}$$

- Système linéaire (sans commande) avec un équilibre en $(z, \dot{z}) = (z_0, 0)$.
- Sa stabilité peut être étudiée via le critère des valeurs propres de la matrice d'état associée:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}$$

- Autre méthode: Soit l'énergie mécanique du système

$$V(z, \dot{z}) = V_c(\dot{z}) + V_p(z)$$
$$V_c(\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad V_p(z) = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2$$

Retour sur un exemple: Le système masse-ressort-ammortisseur

- On dérive cette énergie le long des solutions du système:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) := \tfrac{d}{dt}V(z(t),\dot{z}(t)) &= m\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + k(z(t)-z_0)\dot{z}(t)\\ &= -m\mu(\dot{z}(t))^2\\ &\leq 0 \quad \forall t\end{aligned}$$

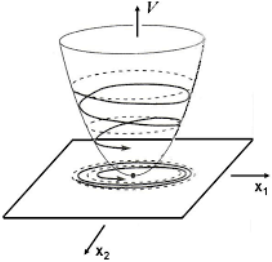
- Cette fonction d'énergie, toujours positive, décroît.
- Elle va donc tendre, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, vers une valeur limite et on peut penser que $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\dot{V}(t) = 0$.
- Or,

$$\dot{V}(t) \equiv 0 \Longrightarrow \dot{z}(t) \equiv 0 \Longrightarrow \ddot{z}(t) \equiv 0 \Longrightarrow z(t) \equiv z_0$$

Introduction

Retour sur un exemple: Le système masse-ressort-ammortisseur

- Or
$$\dot{V}(t) \equiv 0 \Longrightarrow \dot{z}(t) \equiv 0 \Longrightarrow \ddot{z}(t) \equiv 0 \Longrightarrow z(t) \equiv z_0$$
- On en déduit donc la convergence de $(z, \dot{z})$ vers l'équilibre $(z_0, 0)$.
- Interprétation géométrique:



Introduction

Les techniques de type Liapounov se basent sur ce principe:

- Déterminer une fonction "de type énergie" qui décroit le long des solutions du système.
- Pour en déduire des propriétés de convergence/stabilité.
- Pour un système avec commande, on cherchera une expression de commande faisant décroître cette fonction d'énergie.

Notions de stabilité au sens de Liapounov

Dans toute cette partie, on considère une équation différentielle

$$(ED) \qquad \dot{x} = f(x)$$

avec f un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ (afin d'assurer l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle). On suppose de plus que f admet un équilibre en x_0 (i.e., $f(x_0) = 0$).

Definition

On dit que le point d'équilibre x_0 est:

- stable si pour tout voisinage $\mathcal{U}(x_0)$ il existe un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ tel que $x(0) \in \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow x(t) \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall t \geq 0$.
- localement attractif s'il existe un voisinage $\mathcal{W}(x_0)$ tel que $x(0) \in \mathcal{W}(x_0) \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.
- globalement attractif si $\forall x(0)$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Notions de stabilité au sens de Liapounov

Definition

On dit que le point d'équilibre x_0 est:

- localement asymptotiquement stable (LAS) s'il est stable et localement attractif.
- globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.
- instable s'il n'est pas stable.

Cas des systèmes linéaires $\dot{x} = A(x - x_0)$: Dans ce cas,

$$\text{localement attractif} \iff \text{LAS} \iff \text{GAS}$$

C'est pour cela qu'on ne fait pas de différence entre attractivité et stabilité asymptotique, et qu'on ne fait pas de différence entre LAS et GAS. Par ailleurs, si le système est asymp. stable, il ne peut y avoir qu'un équilibre, et donc on peut dire que "le système est asymptotiquement stable" (abus de langage).

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Definition

Soit $V : \mathcal{U}_v(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que

- V est une fonction de Liapounov candidate (CLF) autour de x_0 si: $\forall x \in \mathcal{U}_v(x_0)\,,\ V(x) \geq 0$, et $V(x) = 0 \iff x = x_0$.
- V est une fonction de Liapounov au sens large pour (ED) et l'équilibre x_0 si: V est une CLF, et $\forall x \in \mathcal{U}_v(x_0)\,,\ L_f V(x) \leq 0$.
- V est une fonction de Liapounov au sens stricte pour (ED) et l'équilibre x_0 si: V est une CLF, et $\forall x \in \mathcal{U}_v(x_0) \setminus \{x_0\}\,,\ L_f V(x) < 0$.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Interprétation de ces définitions:

- Rappelons (Voir partie P2) que $L_f V$ est la dérivée de Lie de la fonction V le long du champ de vecteur f, définie par $L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x)$.
- Notons que pour toute fonction V, $L_f V(x_0) = 0$ car x_0 est un point d'équilibre.
- Considérons une solution $x(.)$ de (ED) et la fonction $t \longmapsto V(x(t))$. On a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) := \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)).\dot{x}(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)).f(x(t)) \\ &= L_f V(x(t)) \end{aligned}$$

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Interprétation de ces définitions:

- Par conséquent, la définition d'une fonction de Liapounov au sens large (resp. au sens stricte) implique, et est même équivalente au fait que $V(x(t))$ décroit (resp.strictement) le long de toute trajectoire $x(.)$ tout pendant que $x(t) \neq x_0$.
- De plus, par définition, $V(x)$ admet son minimum au point d'équilibre x_0. Nous allons voir ce que l'on peut en déduire en terme de stabilité de cet équilibre.
- On vérifiera que la fonction d'énergie considérée pour le système masse-ressort-ammortisseur est une fonction de Liapounov au sens large.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Théorèmes de Liapounov: Les principaux théorèmes de Liapounov sont synthétisés dans la proposition suivante.

Theorem

Considérons (ED) et son point d'équilibre x_0. Alors,

1. *S'il existe une fonction de Liapounov au sens large pour (ED) et l'équilibre x_0, alors cet équilibre est stable.*
2. *S'il existe une fonction de Liapounov au sens stricte pour (ED) et l'équilibre x_0, alors cet équilibre est LAS.*
3. *S'il existe une fonction de Liapounov au sens stricte pour (ED) et l'équilibre x_0, telle que $\mathcal{U}_v(x_0) = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$, alors cet équilibre est GAS.*

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Remarques:

- Le résultat du Point 3 est connu sous le non de "Théorème de Barbashin-Krasovskii". Contrairement aux deux autres, il n'est pas attribué à Liapounov.
- Rappelons que si (ED) admet plusieurs points d'équilibre, alors aucun de ces équilibres ne peut être GAS, et donc la situation du point 3 ne peut pas se produire.
- Pour le système masse-ressort-ammortisseur, le théorème ci-dessus ne permet de garantir que la stabilité du point d'équilibre (et pas sa stabilité asymptotique). Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Exemple 1: On considère le système linéaire sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 & = & A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \\ \dot{x}^2 & = & A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \end{cases}$$

On suppose que:

1. A_{11} et A_{22} sont des matrices définies négatives.
2. $\exists k > 0$ tel que $A_{21} = -kA_{12}^T$

Considèrons la CLF

$$V(x_1, x_2) = k\|x^1\|^2 + \|x^2\|^2$$

On a

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= 2k(x^1)^T(A_{11}x^1 + A_{12}x^2) + 2(x^2)^T(A_{21}x^1 + A_{22}x^2) \\ &= 2k(x^1)^T A_{11}x^1 + 2k(x^2)^T A_{12}^T x^1 + 2(x^2)^T A_{21}x^1 + 2(x^2)^T A_{22}x^2 \\ &= 2k(x^1)^T A_{11}x^1 + 2(x^2)^T A_{22}x^2 \end{aligned}$$

Exemple 1: (Suite)

Puisque A_{11} et A_{22} sont des matrices définies négatives, on en déduit qu'il exsite des constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} L_f V(x) &\leq -2\alpha_1 k\|x^1\|^2 - 2\alpha_2\|x^2\|^2 \\ &\leq -\min(2\alpha_1 k, 2\alpha_2)\|x\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $L_f V(x) < 0\,,\ \forall x \neq 0$, i.e., V est une fonction de Liapounov au sens stricte. Comme en plus $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, on en déduit que $x_0 = 0$ est GAS.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Exemple 2: Le pendule On considère un pendule simple, dont la masse est concentrée à son extrêmité, qui pivote autour d'un point fixe. On rappelle les équations dynamiques de ce système:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - \mu\ell\dot{\theta}$$

avec ℓ la longueur du pendule, m sa masse, g la constante de gravité, et $\mu > 0$ un coefficient de frottement. Ce système admet évidemment deux équilibres: $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0)$ et $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (\pi, 0)$. On "sait" intuitivement que le premier est stable (et même LAS) mais on souhaite le démontrer.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Exemple 2: Le pendule On considère l'énergie mécanique du système:

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

On vérifie facilement que cette fonction est une fonction de Lyapunov candidate en l'équilibre $(\theta_0,\dot{\theta}_0) = (0,0)$, et que:

$$\dot{V}(t) := \frac{d}{dt}V(\theta(t),\dot{\theta}(t)) = -\mu\dot{\theta}(t)^2 \leq 0$$

On en déduit donc que $(\theta_0,\dot{\theta}_0) = (0,0)$ est un équilibre stable, mais pas encore que c'est un équilibre LAS...

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Le théorème de LaSalle

- Comme illustré par les exemples du pendule ou du système masse-ressort-ammortisseur, les théorèmes de Liapounov ne permettre parfois de montrer que la stabilité, alors que le système est LAS ou GAS.
- Nous allons voir un résultat complémentaire qui apporte une solution à ce problème.

Definition

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit positivement invariant pour (ED) si $x(0) \in E \Longrightarrow x(t) \in E \ \forall t \geq 0$.

Exemple: Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

Exemple: (Suite)

Notons $C_\delta := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \delta\}$. Alors, pour tout $\delta \geq 0$, C_δ est positivement invariant. On effet, soit $V(x) = \|x\|^2$. Alors, le long de toute solution du système,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) = 0$$

Par conséquent, $\|x(t)\| = \|x(0)\|$, $\forall t \geq 0$, et donc

$$x(0) \in C_\delta \Longrightarrow x(0) \in C_\delta \, , \; \forall t \geq 0$$

Théorème de LaSalle

Theorem

Soit V soit une fonction de Liapounov au sens large pour (ED) en l'équilibre x_0. Alors,

1. *S'il existe $c > 0$ tel que $V_c := \{x \in \mathcal{U}_v(x_0) : V(x) \leq c\}$ soit borné, alors, pour toute condition initiale $x(0) \in V_c$, $x(t)$ tend vers le plus grand ensemble positivement invariant E pour (ED) contenu dans $I := \{x \in V_c : L_f V(x) = 0\}$.*
2. *Si $\mathcal{U}_v(x_0) = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$, alors, pour toute condition initiale $x(0)$, $x(t)$ tend vers le plus grand ensemble positivement invariant E pour (ED) contenu dans $I = \{x : L_f V(x) = 0\}$.*

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Théorème de LaSalle

Remarques

- Le point 1 peut être vu comme une version "locale" et le point 2 comme une version "globale" du théorème de LaSalle.
- Afin de montrer la propriété LAS ou GAS, le principe d'utilisation de ce résultat sera de montrer que E est réduit au singleton $\{x_0\}$.

Exemple: Nous avons maintenant les outils pour montrer que l'équilibre $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ du pendule est LAS. On a déjà une fonction de Liapounov au sens large, pour rappel:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Exemple: (Suite)

Montrons que $\forall c > 0$, $V_c := \{x \in \mathcal{U}_v(x_0) : V(x) \leq c\}$ est borné. D'abord, θ est borné si on l'assimile à un angle, et $\dot{\theta}$ est borné également car

$$V(\theta, \dot{\theta}) \leq c \Longrightarrow |\dot{\theta}| \leq \sqrt{\frac{2c}{m\ell^2}}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} I &= \{(\theta, \dot{\theta}) \in V_c : L_f V(\theta, \dot{\theta}) = 0\} \\ &= \{(\theta, \dot{\theta}) \in V_c : \dot{\theta} = 0\} \end{aligned}$$

Soit E le plus grand ensemble invariant contenu dans I. Soit $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) \in E$. Puisque E est invariant, $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \in E\ \forall t$, et puisque $E \subset I$, $\dot{\theta}(t) = 0\ \forall t$.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Exemple: (Suite) Par conséquent, $\ddot{\theta}(t) = 0 \; \forall t$. Or d'après l'équation de la dynamique du pendule

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t) = 0 \Longrightarrow \theta(t) \in \{0, \pi\}$$

Ainsi, $\dot{\theta}(t)$ tend vers zéro, et $\theta(t)$ tend vers 0 ou π. C'est à dire que le pendule tend vers un de ses deux équilibres. On montre que

$$V(\theta(0), \dot{\theta}(0)) < 2mg\ell \Longrightarrow \theta(t) \longrightarrow 0$$

Supposons au contraire que $\theta(t) \not\longrightarrow 0$. Alors $\theta(t) \longrightarrow \pi$. Par continuité de V et puisque $\dot{\theta}(t) \longrightarrow 0$

$$V(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \longrightarrow V(\pi, 0) = 2mg\ell$$

C'est impossible si $V(\theta(0), \dot{\theta}(0)) < 2mg\ell$ car V décroit le long des solutions du système.

Exemple: (Suite) En conclusion, nous avons montré que:

- L'équilibre $(0, 0)$ est LAS.
- Le domaine d'attraction de cet équilibre contient

$$\{(\theta(0), \dot{\theta}(0)) : V(\theta(0), \dot{\theta}(0)) < 2mg\ell\}$$

- Notamment, si initialement le pendule est à l'arrêt (i.e., $\dot{\theta}(0) = 0$) et que $\theta(0) \neq \pi$, alors la solution associée à cette condition intiale tend vers l'équilibre $(0, 0)$.

Résultats généraux sur les fonctions de Liapounov

Nous terminons cette partie sur quelques résulats dits de Liapounov inverse montrant la généricité des fonctions de Liapounov.

Theorem

1. *Si l'équilibre x_0 de (ED) est LAS, alors il existe une fonction de Liapounov pour (ED) en cet équilibre.*
2. *Si l'équilibre x_0 de (ED) est GAS, alors il existe une fonction de Liapounov pour (ED) en cet équilibre, définie sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$.*

La principale difficulté des techniques de Liapounov réside en la nécessité de trouver une fonction de Liapounov pour le système considéré.

Cas particulier des systèmes linéaires

On s'intéresse dans toute cette partie à une équation différentielle linéaire

$$(ED_L) \qquad \dot{x} = Ax$$

- Pour ces systèmes linéaires des propriété supplémentaires peuvent être spécifiées.
- Elles permettent d'analyser et garantir des propriétés de robustesse.
- Elles sont également utiles pour la synthèse de lois de commande.
- On peut considérer dans ce cas des fonctions de Liapounov quadratique par rapport à x.
- Ce qui permet de se ramener à des problèmes algébriques.

Cas particulier des systèmes linéaires

Rappel:

Definition

Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite:

1. symétrique définie positive (SDP) si $M = M^T$ et $x^T M x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n_*$;
2. symétrique positive (SP) si $M = M^T$ et $x^T M x \geq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definition

On appelle Equation de Liapounov l'équation matricielle linéaire en P:

$$PA + A^T P + Q = 0$$

Cas particulier des systèmes linéaires

On peut maintenant énoncer le Théorème de Liapounov pour les systèmes linéaires.

Theorem

La matrice A est Hurwitz-stable si et seulement si, pour toute matrice Q SDP il existe une matrice P SDP solution de l'équation de Liapounov. De plus, pour Q donnée, P est unique modulo une matrice anti-symétrique.

Preuve de $\Longrightarrow$: Soit la matrice

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T s} Q e^{As} \, ds$$

Etant donnée que la matrice A est Hurwitz-stable les solutions de (ED_L) convergent exponentiellement vers zéro. Par conséquent, il existe deux constantes $c_0, \alpha > 0$ telles que

$$\|e^{As}\| \leq c_0 e^{-\alpha s}, \quad \forall s \geq 0$$

Cas particulier des systèmes linéaires

Cela implique que l'intégrale ci-dessus est convergente, et donc que P est bien définie. Il est évident que le terme sous le signe intégral est SDP. Par conséquent, P est SDP.
A partir de la définition de P on a:

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^{+\infty} e^{A^T s} Q e^{As} A\, ds + \int_0^{+\infty} A^T e^{A^T s} Q e^{As}\, ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{A^T s} Q e^{As} A + A^T e^{A^T s} Q e^{As}\, ds \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} \left(e^{A^T s} Q e^{As} \right) ds \\ &= \left[e^{A^T s} Q e^{As} \right]_0^{+\infty} \\ &= -Q \end{aligned}$$

Ceci montre que P satisfait bien l'équation de Liapounov.

Cas particulier des systèmes linéaires

Preuve de $\Longleftarrow$: Soit $V(x) = x^T P x$ où P est solution SDP de l'équation de Liapounov pour une matrice Q SDP. Puisque P est SDP, V est une fonction de Liapounov candidate autour de $x_0 = 0$. Calculons $L_f V(x)$:

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= x^T P A x + x^T P^T A x \\ &= x^T P A x + x^T A^T P x \\ &= x^T (PA + A^T P) x \\ &= -x^T Q x \end{aligned}$$

Puisque Q est SDP, on en déduit que V est une fonction de Liapounov au sens strict pour (ED_L) autour de $x_0 = 0$. Par conséquent, A est Hurwitz-stable.

Cas particulier des systèmes linéaires

Preuve de l'unicité modulo une matrice anti-symmétrique:

Laissée en exercice. Grandes lignes: on procède par contradiction.

- Considérer deux solutions P_1, P_2 dont les parties symétriques ne sont pas égales;
- Montrer que si une matrice satisfait l'équation de Liapounov sa partie symétrique la satisfait également;
- En déduire qu'une certaine fonction non nulle et non constante est constante le long des solutions de (ED_L);
- Aboutir à une contradiction du fait que les solutions de (ED_L) convergent vers zéro.

Cas particulier des systèmes linéaires

Principe de stabilisation par le linéarisé tangent:
Les théorèmes de Liapunov vont nous permettre de justifier l'approche de stabilisation par le linéarisé tangent.

Theorem

Soit un système $\dot{x} = f(x, u)$ avec un équilibre en (x_0, u_0). Soit les matrices A, B du linéarisé tangent en ce point d'équilibre. Si K est une matrice telle que $A + BK$ soit Hurwitz-stable, alors la loi de commande

$$u(x) = u_0 + K(x - x_0)$$

rend l'état d'équilibre x_0 LAS.

Cas particulier des systèmes linéaires

Preuve: Puisque $A+BK$ est Hurwitz-stable, l'équation de Liapounov

$$P(A+BK)+(A+BK)^T P+Q=0$$

admet une solution P SDP pour tout Q SDP. Posons $Q=I_n$ (on pourrait prendre n'importe quel Q SDP). Soit

$$V(x)=(x-x_0)^T P(x-x_0)$$

C'est une CLF autour de x_0. Nous allons montrer que c'est une fonction de Liapounov au sens stricte pour le système et l'équilibre x_0. Notons d'abord que pour tout u,

$$\begin{aligned} f(x,u) &= f(x,u)-f(x_0,u_0) \\ &= A(x-x_0)+B(u-u_0)+O^2(x-x_0,u-u_0) \end{aligned}$$

avec $O^k(\xi)$ une notation pour toute fonction de ξ telle que, dans un voisinage de $\xi=0$, $\|O^k(\xi)\| \leq c\|\xi\|^k$ pour une certaine constante c.

Cas particulier des systèmes linéaires

Si on injecte l'expression de la commande $u(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x, u(x)) &= f(x, u) - f(x_0, u_0) \\ &= (A + BK)(x - x_0) + O^2(x - x_0) \end{aligned}$$

On calcule maintenant $L_f V(x)$. Posons $\tilde{x} = x - x_0$. On a:

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \tilde{x}^T (P + P^T) \left[(A + BK)\tilde{x} + O^2(\tilde{x}) \right] \\ &= \tilde{x}^T (P + P^T)(A + BK)\tilde{x} + O^3(\tilde{x}) \\ &= \tilde{x}^T \left[P(A + BK) + P^T (A + BK) \right] \tilde{x} + O^3(\tilde{x}) \\ &= \tilde{x}^T \left[P(A + BK) + (A + BK)^T P \right] \tilde{x} + O^3(\tilde{x}) \\ &= -\|\tilde{x}\|^2 + O^3(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Il est alors évident que V est une fonction de Liapounov au sens stricte pour le système et l'équilibre x_0.

Cas particulier des systèmes linéaires

Robustesse de la propriété de stabilité asymptotique:
L'existence de fonction de Liapounov permet facilement de montrer et quantifier la robustesse de la propriété GAS.

Theorem

On suppose que la matrice A de (ED_L) est Hurwitz-stable. Soit Q une matrice SDP et P la solution correspondante de l'équation de Liapounov. Alors $x_0 = 0$ est un équilibre GAS de tout système

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon(x)$$

dès lors que

$$\sup_x \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x\|} < \frac{\min_i \lambda_i(Q)}{2\|P\|}$$

où les $\lambda_i(Q)$ désignent les valeurs propres de Q.

Cas particulier des systèmes linéaires

Remarques:

- Le résultat précédent ne nécessite pas que $\varepsilon(x)$ soit linéaire par rapport à x.
- Lorsque $\varepsilon(x) = Ex$ est linéaire par rapport à x, la relation du théorème ci-dessus devient

$$\|E\| < \frac{\min_i \lambda_i(Q)}{2\|P\|}$$

En choisissant, par exemple, $Q = I_n$, cela devient:

$$\|E\| < \frac{1}{2\|P\|}$$

où P est la solution de l'équation de Liapounov associée à $Q = I_n$.

Cas particulier des systèmes linéaires

Preuve du théorème:

On montre que $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Liapounov au sens stricte en $x_0 = 0$. Calculons $L_f V(x)$.

$$\begin{aligned}
L_f V(x) &= x^T(P + P^T)(Ax + \varepsilon(x)) \\
&= x^T(PA + A^T P)x + x^T P\varepsilon(x) + \varepsilon(x)^T Px \\
&= -x^T Qx + x^T P\varepsilon(x) + \varepsilon(x)^T Px \\
&\leq -\min_i \lambda_i(Q)\|x\|^2 + 2\|\varepsilon(x)\|\|P\|\|x\| \\
&\leq -\min_i \lambda_i(Q)\|x\|^2 + 2\frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x\|}\|P\|\|x\|^2 \\
&\leq -\left[\min_i \lambda_i(Q) - 2\sup_x \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x\|}\|P\|\right]\|x\|^2
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que V est une fonction de Liapounov au sens stricte en $x_0 = 0$.

Applications à la synthèse de lois de commande

- Les approches de type Liapounov sont les plus générales pour synthétiser des lois de commande car elles s'appliquent potentiellement à tout système (voir théorèmes de Liapounov inverse).
- Il n'existe pas de méthode systématique de synthèse: la synthèse de contrôleur par Liapounov relève de l'expertise.
- Cependant, il existe des façons d'aborder le problème de synthèse qui permettent, très souvent, d'aboutir à une solution.
- La difficulté est qu'il faut simultanément trouver une loi de commande et une fonction de Liapounov associée.

Applications à la synthèse de lois de commande

Principales approches de synthèse:

1. Approche globale:
   - On cherche une fonction de Liapounov au sens large sur le système complet en boucle ouverte (pour $u = u_0$);
   - On ajuste chaque composante de la commande de façon à faire décroître cette fonction de Liapounov le long de chaque champ de vecteur de commande.
2. Approche incrémentale (très adaptée aux systèmes rencontrés en ingénierie), aussi appelée approche de type "backstepping":
   - On décompose le système en sous-systèmes en cascade;
   - On résout incrémentalement le problème de commande en partant du système le plus en aval pour remonter ("backstepping") la cascade vers l'entrée de commande.

Approche globale: Principe de l'approche

Soit le système affine en la commande

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$$

avec $X_0(x_0) = 0$ de sorte que $(x_0, 0)$ est un équilibre du système. On souhaite trouver une commande par retout d'état qui rend cet équilibre LAS, voir GAS. On suppose qu'il existe une CLF en x_0 telle que

$$L_{X_0} V(x) \leq 0$$

pour tout x dans un voisinage de x_0. On pose

$$\forall i = 1, \ldots, m\,, \quad u_i(x) = -k_i L_{X_i} V(x)\,, \quad k_i > 0$$

On étudie ensuite la stabilité du système bouclé.

Applications à la synthèse de lois de commande

Approche globale: Justification de l'approche

On calcule la dérivée de V le long des solutions du système en boucle fermée:

$$\begin{aligned} L_X V(x) &:= L_{X_0+\sum_i u_i X_i} V(x) \\ &= L_{X_0} V(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(x) L_{X_i} V(x) \\ &= L_{X_0} V(x) - \sum_{i=1}^{m} k_i \left(L_{X_i} V(x)\right)^2 \end{aligned}$$

On remarque que la commande a ajouté un terme négatif, contribuant à faire décroître V. Il faut ensuite essayer de conclure, ou par Liapounov, ou par LaSalle.

Applications à la synthèse de lois de commande

Approche globale: Exemple

Equations d'Euler sous-actionnées:

$$\mathbb{J}\dot{\omega} = -\omega \times \mathbb{J}\omega + \sum_{k=1}^{2} u_k b_k \tag{1}$$

avec b_1, b_2 deux vecteurs indépendants. On part de la CLF

$$V(\omega) = \frac{1}{2}\omega^T \mathbb{J}\omega$$

On a $L_{X_0} V(\omega) = 0$. On pose

$$u_i(\omega) = -k_i L_{X_i} V(\omega) = -k_i \omega^T \mathbb{J} b_i = -k_i b_i^T \mathbb{J}\omega$$

Autrement dit, $u(\omega)$ est un contrôleur linéaire.

Approche globale: Exemple

Pour le système en boucle fermé, on a

$$\dot{V}(\omega) = -k_1(b_1^T \mathbb{J}\omega)^2 - k_2(b_2^T \mathbb{J}\omega)^2 \leq 0$$

V n'est pas une fonction de Liapounov au sens stricte. On va utiliser LaSalle pour essayer de conclure. Ici,

$$I = \{\omega : b_1^T \mathbb{J}\omega = b_2^T \mathbb{J}\omega = 0\}$$

Soit $\omega(0) \in E$ et $\omega(t)$ la solution associée. Alors, pour tout t,

$$\forall i = 1, 2, \quad \langle b_i, \mathbb{J}\omega(t)\rangle \equiv \langle b_i, \omega(t) \times \mathbb{J}\omega(t)\rangle \equiv 0$$

Ceci implique que $\omega(t)$ et $\mathbb{J}\omega(t)$ sont parallèles car $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$, indépendants, ne peuvent pas être orthogonaux à deux vecteurs indépendants.

Applications à la synthèse de lois de commande

Par conséquent,

$$\forall i = 1, 2, \quad \langle b_i, \omega(t) \rangle \equiv 0$$

Puisque $\mathbb{J}$ est symétrique, en utilisant la dernière équation de la page précédente, on obtient:

$$\forall i = 1, 2, \quad \langle \mathbb{J} b_i, \omega(t) \rangle \equiv 0$$

Ainsi, $\omega(t)$ est orthogonal à quatre vecteurs: $b_1, b_2, \mathbb{J}b_1, \mathbb{J}b_2$. Puisque b_1 et b_2 sont indépendants, ceci n'est possible que si $\omega(t) = 0$ ou si $\{\mathbb{J}b_1, \mathbb{J}b_2\} \in \text{span}\{b_1, b_2\}$. En conclusion, si

$$\{\mathbb{J}b_1, \mathbb{J}b_2\} \notin \text{span}\{b_1, b_2\}$$

alors $E = \{0\}$ et $\omega_0 = 0$ est GAS.

Applications à la synthèse de lois de commande

Approche incrémentale: Principe de l'approche

Le principe est de décomposer le système en une cascade de sous-systèmes:

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma_Q} \xrightarrow{\xi_Q} \boxed{\Sigma_{Q-1}} \xrightarrow{\xi_{Q-1}} \cdots\cdots \xrightarrow{\xi_2} \boxed{\Sigma_1} \longrightarrow \xi_1$$

où

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_Q \end{pmatrix}$$

Puis d'essayer de résoudre le problème de commande en partant de Σ_1 avec ξ_2 comme variable de commande, puis en remontant incrémentalement la cascade pour finir par Σ_Q avec u comme variable de commande.

Notons que u peut être multi-dimensionnelle.

Applications à la synthèse de lois de commande

Approche incrémentale: Exemple

On considère le problème de stabilisation de l'attitude (i.e., orientation) d'un corps dans l'espace (satellite, drone, etc). Les équations dynamiques sont données par

$$\begin{cases} \dot{R} & = & RS(\omega) \\ \mathbb{J}\dot{\omega} & = & -\omega \times \mathbb{J}\omega + Bu \end{cases}$$

avec R la matrice de rotation du repère corps vers un repère inertiel de référence. On suppose que:

1. Le système est complètement actionné, i.e., $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est inversible;
2. L'objectif est de stabiliser R à $R_0 = I_3$. On peut toujours se ramener à ce cas en considérant $\tilde{R} = R_0^T R$.

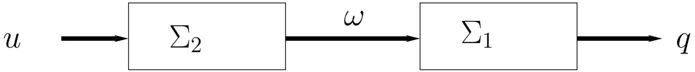
Afin de simplifier les calculs (mais on peut très bien conserver R), on va utiliser les quaternions unitaires pour modéliser la cinématique de rotation.

Applications à la synthèse de lois de commande

Modèle avec représentation d'attitude par quaternions unitaires:

$$\begin{cases} \dot{q}_s & = & -\frac{1}{2} q_v^T \omega \\ \dot{q}_v & = & \frac{1}{2}\left[q_s \omega + q_v \times \omega\right] \\ \mathbb{J}\dot{\omega} & = & -\omega \times \mathbb{J}\omega + Bu \end{cases}$$

L'objectif est de stabiliser (q_s, q_v, ω) à $(1, 0, 0)$.
Décomposition en cascade:



Etude de Σ_1: On considère la cinématique en supposant, momentanément que ω est une variable de commande.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{q}_s & = & -\frac{1}{2} q_v^T \omega \\ \dot{q}_v & = & \frac{1}{2} \left[q_s \omega + q_v \times \omega \right] \end{array} \right.$$

On cherche une commande ω qui stabilise q à $q_0 = (1, 0)$. Soit $V_1(q) = \|q_v\|^2$. C'est une CLF autour de q_0 sur $\mathcal{U}_V := \{q : q_0 \neq -1\}$ puisque sur cet ensemble, V est positive et ne s'annulle que si $(q_s, q_v) = (1, 0)$. On a

$$\dot{V}_1(q) = \frac{1}{2} q_s q_v^T \omega$$

Posons $\omega = -k q_v$. On obtient alors

$$\dot{V}_1(q) = -\frac{1}{2} q_s \|q_v\|^2$$

Applications à la synthèse de lois de commande

Etude de Σ_1: On en déduit que V est une fonction de Liapounov au sens stricte sur $\bar{\mathcal{U}}_V := \{q : q_s > 0\}$, avec la "commande idéale" $\omega(q) = -kq_v$. On notera par la suite $\omega^*(q) := -kq_v$.

Etude de Σ_2: Dans cette deuxième étape, l'objectif est de faire converger ω vers $\omega^*(q)$. On a

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{J}(\omega - \omega^*(q))) = -\omega \times \mathbb{J}\omega + Bu - \mathbb{J}\dot{\omega}^*(q)$$

Posons

$$Bu = \mathbb{J}\dot{\omega}^*(q) + \omega^* \times \mathbb{J}\omega - k(\omega - \omega^*(q))$$

Dans ce cas,

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{J}(\omega - \omega^*(q))) = -(\omega - \omega^*(q)) \times \mathbb{J}\omega - k(\omega - \omega^*(q))$$

Applications à la synthèse de lois de commande

Posons

$$V_2(q,\omega) = \frac{1}{2}(\omega - \omega^*(q))\mathbb{J}(\omega - \omega^*(q))$$

On vérifie alors que

$$\dot{V}_2 = -k\|\omega - \omega^*(q)\|$$

ce qui montre que $\omega(t)$ tend vers $\omega^*(q(t))$. Puisque la commande $\omega^*(q)$ assure la convergence de $q(t)$ vers $(1,0)$, il est légitime de penser que la commande u assure la stabilité asymptotique de l'équilibre désiré. Afin d'avoir une preuve complète, on doit ajouter une terme dans la définition de u:

$$Bu = \mathbb{J}\dot{\omega}^*(q) + \omega^* \times \mathbb{J}\omega - k(\omega - \omega^*(q)) - \begin{pmatrix} L_{X_1} V_1(q) \\ L_{X_2} V_1(q) \\ L_{X_3} V_1(q) \end{pmatrix}$$

avec X_i les champs de vecteurs qui définissent la dynamique de q, i.e., $\dot{q} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i X_i(q)$.

Exercice:

1. Vérifier qu'avec cette nouvelle expression de la commande, $V(q, \omega) = V_1(q) + V_2(q, \omega)$ est une fonction de Liapounov pour le système complet.
2. Le système est-il LAS ou GAS? Si le système est LAS, peut-on préciser le domaine de convergence?