Examen Commande non-linéaire
Master 2 SAR

Année 2023-2024 - 2h

Exercice 1 : Le système mécanique ci-dessous est appelé système TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator). C'est un cas d'étude qui a été beaucoup utilisé pour illustrer des développements de nouveaux outils d'automatique non-linéaire. Il s'agit d'un chariot (en bleu sur la figure) qui roule sur un rail, à l'intérieur duquel se trouve un pendule (en rouge sur la figure), actionné en couple au niveau du point pivot O. Le chariot est en outre relié à un bati fixe via un ressort (en vert sur la figure). Il s'agit donc d'un système particulièrement oscillant, et l'objectif de la commande va être de limiter de la façon la plus efficace possible ces oscillations.

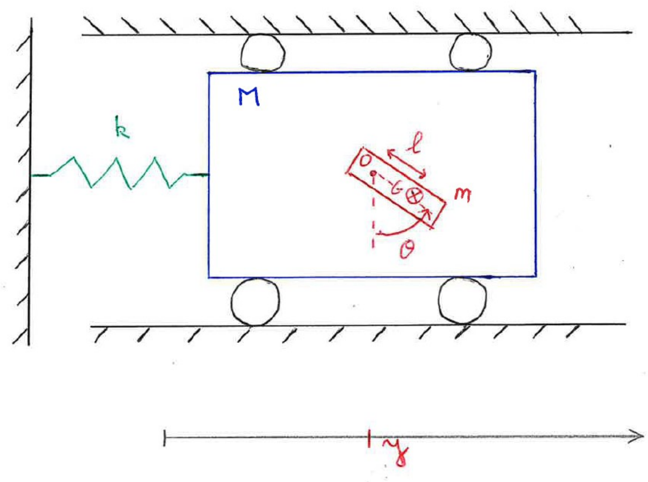

Figure 1 – Système TORA

Les paramètres mécaniques de ce système sont les suivants :

- constante de raideur du ressort : k
- masse du ressort : supposée négligeable (mais on pourrait évidemment facilement l'intégrer au modèle)
- masse du chariot (sans le pendule) : M
- masse du pendule : m
- moment d'inertie du pendule : I
- distance entre le point pivot O et le centre de masse G du pendule : ℓ

La configuration du système est définie par les deux variables y et θ qui représentent respectivement la position du chariot (selon l'axe horizontal) et l'angle de rotation du pendule. L'application des équations de Lagrange permet d'obtenir les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{M}\ddot{y} + (m\ell\cos\theta)\ddot{\theta} & = & (m\ell\sin\theta)(\dot{\theta})^2 - ky \\ (m\ell\cos\theta)\ddot{y} + \bar{I}\ddot{\theta} & = & -mg\ell\sin\theta + \tau \end{array} \right. \quad (1)$$

avec $\overline{M} = M + m$, $\bar{I} = I + m\ell^2$, g la constante de gravité, et τ le couple de commande au niveau de la liaison chariot/pendule.

1. Mettre le système sous la forme de modèle de commande $\dot{x} = f(x, \tau)$, où τ représente la variable de commande.
2. Déterminer les points d'équilibre du système.
3. La suite de l'énoncé a pour but de stabiliser l'état du système à l'état d'équilibre pour lequel $y = \theta = 0$. Par la suite, cet état d'équilibre sera noté x_0. Dans cette question, on se propose de résoudre ce problème via le linéarisé tangent.
   (a) Calculer le linéarisé tangent associé à cet équilibre.
   (b) En déduire que x_0 peut être stabilisé asymptotiquement localement avec un retour d'état linéaire, et rappeler (sans détailler les calculs) comment les gains de ce retour d'état peuvent être déterminés (on rappellera à la fois comment on peut le faire analytiquement, et comment on peut le faire avec les outils Matlab).
4. On s'intéresse à une deuxième méthode pour stabiliser x_0. Pour ce faire, on définit la variable suivante :
$$\bar{y} = y + \frac{ml}{\overline{M}} \sin\theta$$
   (a) Montrer que
$$\ddot{\bar{y}} = -\frac{k}{\overline{M}} y = -\frac{k}{\overline{M}} (\bar{y} - \frac{ml}{\overline{M}} \sin\theta)$$
   (b) En utilisant les techniques de linéarisation exacte, déduire une nouvelle loi de commande permettant de stabiliser le point d'équilibre x_0 et spécifier le domaine de définition de la loi de commande. Quelles sont les limites d'utilisation de cette loi de commande en terme de domaine d'attraction ? (i.e., ensemble des valeurs initiales pour lesquelles la solution converge vers x_0)
5. L'énergie mécanique totale du système est donnée par l'expression suivante :
$$V(x) = \frac{1}{2} k y^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\overline{M}(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}\bar{I}(\dot{\theta})^2 + m\ell(\cos\theta)\dot{y}\dot{\theta} \tag{2}$$
   (a) Cette fonction d'énergie est-elle une fonction de Lyapounov candidate pour le système (1) et l'équilibre x_0 ?
   (b) On considère une commande de type $\tau = -k_0\dot{\theta}$ avec $k_0 > 0$. Pour le système en boucle fermée, V est-elle une fonction de Lyapounov ? (Conseil : utiliser l'écriture (1) pour le calcul de $\dot{V}$)
   (c) Etudier les propriétés de stabilité asymptotique de x_0 avec cette commande (on attend ici une étude détaillée de stabilité/convergence, y compris en terme de domaine d'attraction).
6. Proposer un observateur de l'état du système en supposant que y, θ, et $\dot{\theta}$ sont mesurés.