

Sorbonne Université  
Master 2 Automatique, Robotique  
Parcours Systèmes Avancés et Robotique

Rapport Mini projet-  
Commande non linéaire

---

**Stabilisation de trajectoires pour un véhicule de type voiture**

---

**Auteurs : Viviane Bao-3800857  
Hao Yuan-21117163**

Année Universitaire 2023-2024  
09 novembre 2023

## Table des matières

I.	Introduction	p2
II.	Réponses aux questions	p3-p13
III.	Validations numériques	p13-p24
IV.	Conclusion	p24

## I. Introduction

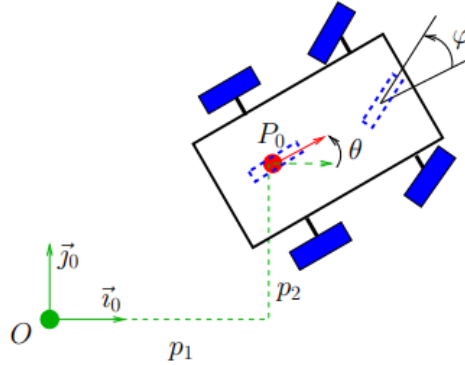


Figure 1- Véhicule de type voiture

D'un point de vue cinématique, on représente généralement un robot de type voiture comme un système configuré avec deux roues : une roue arrière fixe par rapport au corps du véhicule, et une roue avant orientable. Le modèle cinématique de ce système est donné par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{p} = u_1 R(\theta) e_1 \\ \dot{\theta} = u_1 \frac{\tan \varphi}{L} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases}$$

L'objectif de la commande examinée vise à maintenir la trajectoire du robot en alignement avec une trajectoire de référence. On suppose que cette trajectoire de référence est un déplacement à vitesse et courbure constantes (limitées). Ainsi, ce mouvement de référence est considéré comme une solution particulière  $x_r = (p_{r,1}, p_{r,2}, \theta_r, \varphi_r)^T$  du système telle que :

$$\begin{cases} \dot{p}_r = u_{r,1} R(\theta_r) e_1 \\ \dot{\theta}_r = u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \dot{\varphi}_r = u_{r,2} = 0 \end{cases}$$

Pour débiter, nous allons nous concentrer sur la partie théorique où nous élaborerons des lois de commande que nous testerons par la suite sur le simulateur à l'aide de Matlab. En outre, nous examinerons les performances de ces lois de commande en fonction du choix des gains de commande.

## II. Réponses aux questions

### Question 1:

On définit ici le vecteur d'erreur :  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{p} = R(-\theta_r)(p - p_r)$ ,  $\tilde{\theta} = \theta - \theta_r$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_r$

Dans un premier temps, nous devons vérifier que  $\|\tilde{x}\| = \|x - x_r\|$

$$\|\tilde{x}\| = \sqrt{\tilde{p}^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{\varphi}^2}$$

$$\tilde{p}^2 = [R(-\theta_r)(p - p_r)]^T R(-\theta_r)(p - p_r)$$

Sachant que  $(AB)^T = B^T A^T$ , on a donc :

$$\tilde{p}^2 = (p - p_r)^T R(-\theta_r)^T R(-\theta_r)(p - p_r)$$

Or  $R(-\theta_r)^T = R(\theta_r)$ , ainsi :  $R(-\theta_r)^T R(-\theta_r) = I$

$$\text{Au final: } \tilde{p}^2 = (p - p_r)^T (p - p_r)$$

$$\tilde{\theta}^2 = (\theta - \theta_r)^T (\theta - \theta_r)$$

$$\tilde{\varphi}^2 = (\varphi - \varphi_r)^T (\varphi - \varphi_r)$$

$$\|\tilde{x}\| = \sqrt{(p - p_r)^T (p - p_r) + (\theta - \theta_r)^T (\theta - \theta_r) + (\varphi - \varphi_r)^T (\varphi - \varphi_r)}$$

$$\|x - x_r\| = \sqrt{(x - x_r)^T (x - x_r)}$$

Sachant que  $x = \begin{pmatrix} p \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$  et  $x_r = \begin{pmatrix} p_r \\ \theta_r \\ \varphi_r \end{pmatrix}$ , on a donc :

$$\|x - x_r\| = \sqrt{(p - p_r)^T (p - p_r) + (\theta - \theta_r)^T (\theta - \theta_r) + (\varphi - \varphi_r)^T (\varphi - \varphi_r)}$$

On a donc vérifié :  $\|\tilde{x}\| = \|x - x_r\|$

La stabilisation asymptotique de  $x$  en direction de  $x_r$  signifie que notre objectif est de stabiliser la trajectoire du véhicule pour qu'elle converge vers la trajectoire de référence  $x_r$ .

En d'autres termes, l'objectif est de réduire progressivement l'erreur, qui représente la différence entre la trajectoire du véhicule et la trajectoire de référence, jusqu'à ce qu'elle tende vers zéro.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r\| = 0 ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = 0$$

**Question 2:**

Nous devons vérifier les relations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = u_1 R(\tilde{\theta}) e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \tilde{p} \\ \dot{\tilde{\theta}} = u_1 \frac{\tan \varphi}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \dot{\tilde{\varphi}} = u_2 \end{cases} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \tilde{p} = R(-\theta_r)(p - p_r) \\ \tilde{\theta} = \theta - \theta_r \\ \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= R(-\theta_r)(\dot{p} - \dot{p}_r) + R(-\dot{\theta}_r)(p - p_r) \\ &= R(-\theta_r)(u_1 R(\theta) e_1 - u_{r,1} R(\theta_r) e_1) + R(-\dot{\theta}_r)(p - p_r) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } R(-\theta_r)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}, R(-\theta_r)R(\theta_r) = I, R(-\dot{\theta}_r) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_r & \cos \theta_r \\ -\cos \theta_r & -\sin \theta_r \end{pmatrix} \dot{\theta}_r$$

$$(p - p_r) = \tilde{p} R(-\theta_r)^{-1} = \tilde{p} \begin{pmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix}, \text{ on a donc :}$$

$$R(-\dot{\theta}_r)(p - p_r) = \dot{\theta}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} = -\dot{\theta}_r S \tilde{p}$$

$$\text{A u f i n a l : } \dot{\tilde{p}} = u_1 R(\tilde{\theta}) e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \tilde{p}$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_r$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = u_1 \frac{\tan \varphi}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_r$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_r = u_2$$

Les relations mentionnées ci-dessus ont donc été vérifiées.

**Question 3:**

D'après la question précédente, nous devons montrer que la dynamique du système d'erreur peut se mettre sous cette forme :  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}, u_{r,1}, \varphi_r)$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}, \text{ ainsi :}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} u_1 R(\tilde{x}_2) e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \tilde{x}_1 \\ u_1 \frac{\tan(\tilde{x}_3 + \varphi_r)}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\tilde{u}_1 + u_{r,1}] R(\tilde{x}_2) e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \tilde{x}_1 \\ [\tilde{u}_1 + u_{r,1}] \frac{\tan(\tilde{x}_3 + \varphi_r)}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ u_2 = \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_{r,1} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 R(\tilde{x}_2) e_1 + u_{r,1} [R(\tilde{x}_2) - 1] e_1 - \dot{\theta}_r S \tilde{x}_1 \\ \tilde{u}_1 \frac{\tan(\tilde{x}_3 + \varphi_r)}{L} + u_{r,1} \left[ \frac{\tan(\tilde{x}_3 + \varphi_r)}{L} - \frac{\tan \varphi_r}{L} \right] \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

On a donc bien montré que  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}, u_{r,1}, \varphi_r)$

**Question 4:**

Dans cette question, nous devons établir une loi de commande linéaire  $\tilde{u}$  qui permet de stabiliser  $\tilde{x}$  à zéro au moins localement. On stabilise le système non linéaire en utilisant l'approche de la linéarisation tangente (approximation d'un système non linéaire par un modèle linéaire au voisinage d'un point d'équilibre). Le calcul du linéarisé tangent à l'état d'équilibre ( $\tilde{x}=0, \tilde{u}=0$ ) nous donne:

$$A = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r S & u_{r,1} R(\tilde{x}_2) S e_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L \cos(\varphi_r)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} R(\tilde{x}_2) e_1 & 0 \\ \frac{\tan(\varphi_r)}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire :  $R(\tilde{x}_2) = I_2$  à l'état d'équilibre

Nous souhaitons rendre la dynamique longitudinale indépendante de celle des autres variables (c'est-à-dire la dynamique latérale). Ceci revient donc à séparer la dynamique en deux sous-systèmes: un premier ordre et un troisième ordre. Cette approche permet de mieux contrôler et comprendre un système complexe en le divisant en sous-systèmes plus simples, tout en garantissant que la dynamique longitudinale n'a pas d'influence indésirable sur la dynamique latérale et vice versa.

Sachant que :  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ , on a donc:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r S_{u_{r,1}} I_2 e_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L \cos \varphi_r^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 e_1 & 0 \\ \frac{\tan \varphi_r}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$
  

$$\text{Ainsi: } \begin{pmatrix} \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\varphi}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_r & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_r & 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L \cos \varphi_r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } A \text{ augmentée}} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\tan \varphi_r}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } B \text{ augmentée}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons:  $\dot{\tilde{p}}_1 = \dot{\theta}_r \tilde{p}_2 + \tilde{u}_1$ . Par ailleurs,  $\dot{\tilde{p}}_1 = -k_1 \tilde{p}_1$  est un système de premier ordre.  $\dot{\theta}_r \tilde{p}_2 + \tilde{u}_1 = -k_1 \tilde{p}_1$ , nous avons donc :  $\tilde{u}_1 = -k_1 \tilde{p}_1 - \dot{\theta}_r \tilde{p}_2$ . Nous avons donc trouvé la loi de commande pour  $\tilde{u}_1$  (le choix du gain de commande  $k_1$  sera expliqué dans la partie III)

Nous allons développer la suite des calculs pour trouver la loi de commande  $\tilde{u}_2$ .

On a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ 0 \\ \tilde{u}_1 \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 \tilde{p}_1 - \dot{\theta}_r \tilde{p}_2 \\ 0 \\ \left[ -k_1 \tilde{p}_1 - \dot{\theta}_r \tilde{p}_2 \right] \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_r & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_r & 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L \cos \varphi_r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \tilde{p}_1 - \dot{\theta}_r \tilde{p}_2 \\ 0 \\ \left[ -k_1 \tilde{p}_1 - \dot{\theta}_r \tilde{p}_2 \right] \frac{\tan \varphi_r}{L} \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

Etant donné que le réglage de gains est effectué pour la valeur particulière  $\varphi_r = 0$ ,

on a donc :  $\dot{\theta}_r = 0$ . Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \tilde{p}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}_2$$



La matrice obtenue après (1) réduction est :

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & u_{r,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_{r,1}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue après réduction de (2) est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{u}_2$  est un système de troisième ordre, nous pouvons le définir comme suit:

$\tilde{u}_2 = -k_2 \tilde{p}_2 - k_3 \tilde{\theta} - k_4 \tilde{\varphi}$ . Pour trouver les gains de commande  $k_2, k_3, k_4$ , nous devons appliquer la méthode du placement des pôles (développée directement sur Matlab + utilisation des matrices (1) et (2)). Le choix des pôles désirés sera expliqué dans la partie III.

### Question 5:

A présent, nous souhaitons synthétiser une loi de commande permettant de garantir un "grand domaine de convergence". Nous devons commencer par faire un changement de variables d'état et de commande:

$$\tilde{x} \mapsto \xi, u \mapsto w$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tan \tilde{\theta} \\ \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos \tilde{\theta}^3} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u_1 \cos \tilde{\theta} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- a. Il faut exprimer la dynamique du système en fonction de ces nouvelles variables d'état et de commande c'est-à-dire sous la forme :  $\dot{\xi} = \bar{f}(\xi, w)$

$$\xi = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tan \tilde{\theta} \\ \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos \tilde{\theta}^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \text{ car } \tilde{p} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u_1 \cos \tilde{\theta} \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = u_1 \cos(\tilde{\theta}) \frac{R(\tilde{\theta})}{\cos(\tilde{\theta})} e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$= w_1 \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 \\ \xi_3 & 1 \end{pmatrix} e_1 - u_{r,1} e_1 - \dot{\theta}_r S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{\dot{\tilde{\theta}}}{\cos \tilde{\theta}^2} = \frac{1}{\cos \tilde{\theta}^2} \left( u_1 \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \right)$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{u_1 \tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos \tilde{\theta}^2} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L \cos \tilde{\theta}^2}$$

$$= u_1 \cos \tilde{\theta} \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos \tilde{\theta}^3} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L \frac{1}{\xi_3^2 + 1}}$$

$$= w_1 \xi_4 - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r (\xi_3^2 + 1)}{L} \text{ cas où nous considérons } \varphi_r \neq 0$$

$$\text{Si } \varphi_r = 0, \dot{\xi}_3 = w_1 \xi_4$$

$$\dot{\xi}_4 = \frac{1}{L} \frac{\frac{\dot{\tilde{\varphi}}}{\cos(\tilde{\varphi} + \varphi_r)^2} \cos \tilde{\theta}^3 + 3 \dot{\tilde{\theta}} \tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r) \cos \tilde{\theta}^2 \sin \tilde{\theta}}{\cos \tilde{\theta}^6}$$

$$= \frac{w_2 \tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)}{L \cos \tilde{\theta}^3 \cos(\tilde{\varphi} + \varphi_r)^2 \tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r)} + 3 \frac{\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_r) \tan \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}}{L \cos \tilde{\theta}^3}$$

$$= \frac{w_2 \xi_4}{\cos(\tilde{\varphi} + \varphi_r) \sin(\tilde{\varphi} + \varphi_r)} + 3 \xi_4 \xi_3 \left( \frac{w_1 \xi_4}{1 + \xi_3^2} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \right)$$

$$\text{or } \cos(\tilde{\varphi} + \varphi_r) \sin(\tilde{\varphi} + \varphi_r) = \frac{L\xi_4 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}}{1 + L^2 \xi_4^2 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^3}} = \frac{L\xi_4 (1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\xi_3^2)^3 + L^2 \xi_4^2}$$

$$\text{Nous avons: } \tilde{\varphi} + \varphi_r = \arctan\left(L\xi_4 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\cos(\tilde{\varphi} + \varphi_r) = \cos\left(\arctan\left(L\xi_4 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + L^2 \xi_4^2 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^3}}}$$

$$\sin(\tilde{\varphi} + \varphi_r) = \sin\left(\arctan\left(L\xi_4 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = \frac{L\xi_4 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{1 + L^2 \xi_4^2 \frac{1}{(1+\xi_3^2)^3}}}$$

$$\text{Au final: } \dot{\xi}_4 = \frac{w_2 \left[ (1+\xi_3^2)^3 + L^2 \xi_4^2 \right]}{L (1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\xi_4 \xi_3 \left( \frac{w_1 \xi_4}{1+\xi_3^2} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \right)$$

$$\text{Nous avons donc: } \dot{\tilde{\xi}} = \begin{pmatrix} w_1 - u_{r,1} + \dot{\theta}_r \xi_2 \\ w_1 \xi_3 - \dot{\theta}_r \xi_1 \\ w_1 \xi_4 - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r (1+\xi_3^2)}{L} \\ \frac{w_2 \left[ (1+\xi_3^2)^3 + L^2 \xi_4^2 \right]}{L (1+\xi_3^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\xi_4 \xi_3 \left( \frac{w_1 \xi_4}{1+\xi_3^2} - u_{r,1} \frac{\tan \varphi_r}{L} \right) \end{pmatrix}$$

Nous avons donc bien :  $\dot{\xi} = \bar{f}(\xi, w)$

- b. A présent, nous devons linéariser exactement la dynamique de  $\xi_1 = \tilde{p}_1$ , et ensuite synthétiser une commande  $w_1$  qui stabilise exponentiellement  $\xi_1$  à zéro. D'après la

question précédente, nous avons trouvé:  $\dot{\xi}_1 = w_1 - u_{r,1} + \dot{\theta}_r \xi_2$

Or  $\dot{\xi}_1 = -k\xi_1$ , donc :  $w_1 - u_{r,1} + \dot{\theta}_r \xi_2 = -k\xi_1$ . Ainsi:

$$w_1 = -k\xi_1 + u_{r,1} - \dot{\theta}_r \xi_2$$

- c. En considérant que  $\xi_1$  et  $\frac{d\xi_1}{dt}$  sont négligeables (considérés comme des constants),

nous souhaitons montrer que le degré relatif de  $y = \xi_2 = \tilde{p}_2$  est égal à 3. Et enfin

déduire une loi de commande qui stabilise  $\tilde{p}_2$  et  $\tilde{\theta}$  à zéro.

$$y = \xi_2$$

$$\dot{y} = \dot{\xi}_2 = w_1 \xi_3 - \dot{\theta}_r \xi_1$$

$$\ddot{y} = \ddot{\xi}_2 = w_1 \dot{\xi}_3 \left( \text{nous avons négligé } \xi_1 \right)$$

$$= w_1^2 \xi_4 - \frac{w_1 u_{r,1} (1 + \xi_3^2) \tan \varphi_r}{L}$$

$$\ddot{\ddot{y}} = \ddot{\ddot{\xi}}_2 = w_1^2 \dot{\xi}_4 - \frac{2\xi_3 \dot{\xi}_3 w_1 u_{r,1} \tan \varphi_r}{L}$$

$$= w_1^2 \left[ \frac{w_2 \left[ (1 + \xi_3^2)^3 + L^2 \xi_4^2 \right]}{L (1 + \xi_3^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\xi_4 \xi_3 \left( \frac{w_1 \xi_4}{1 + \xi_3^2} - \frac{u_{r,1} \tan \varphi_r}{L} \right) \right] - \frac{2\xi_3 w_1 u_{r,1} \tan \varphi_r}{L} \left( w_1 \xi_4 - u_{r,1} (1 + \xi_3^2) \frac{\tan \varphi_r}{L} \right)$$

Nous avons donc montré que le degré relatif de  $y = \xi_2 = \tilde{p}_2$  est bien égal à 3.

Nous posons: 
$$\alpha(\xi) = w_1^2 \frac{(1 + \xi_3^2)^3 + L^2 \xi_4^2}{L(1 + \xi_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\gamma(\xi) = 3w_1^2 \xi_4 \xi_3 \left( \frac{w_1 \xi_4}{1 + \xi_3^2} - \frac{u_{r,1} \tan \varphi_r}{L} \right) - \frac{2\xi_3 w_1 u_{r,1} \tan \varphi_r}{L} \left( w_1 \xi_4 - u_{r,1} (1 + \xi_3^2) \frac{\tan \varphi_r}{L} \right)$$

Nous avons: 
$$\ddot{y} = \ddot{\xi}_2 = -k_2 \xi_2 - k_3 \dot{\xi}_2 - k_4 \ddot{\xi}_2$$

Ainsi, 
$$\alpha(\xi) w_2 + \gamma(\xi) = -k_2 \xi_2 - k_3 \dot{\xi}_2 - k_4 \ddot{\xi}_2$$

Donc: 
$$w_2 = \frac{1}{\alpha(\xi)} \left[ -k_2 \xi_2 - k_3 \dot{\xi}_2 - k_4 \ddot{\xi}_2 - \gamma(\xi) \right]$$

Par ailleurs, la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont utilisées pour appliquer la

méthode du placement des pôles pour trouver les 3 gains de commande de  $w_2$ .

- d. Nous cherchons ici la condition sous laquelle la loi de commande (que nous avons déterminée dans les questions précédentes) est bien définie (compte tenu de l'erreur initiale).

L'erreur initiale entre l'orientation du robot et la direction de la trajectoire de référence peut être interprétée géométriquement comme un écart angulaire initial entre la direction dans laquelle le robot est orientée et la direction souhaitée. Donc, plus cet écart est faible, plus la correction pour ramener le robot sur la trajectoire de référence sera simple.

$$\tilde{\theta}(0) \in [-\pi, \pi].$$
 Cependant, lorsque  $\tilde{\theta}(0) = \pm \frac{\pi}{2}$

(points de singularités  $\rightarrow$  instabilité du système à ces points).

$w_1$  n'est pas définie correctement ( $w_1 \mapsto 0$ )  $\rightarrow$  À ses points de singularité,

la loi de commande perd sa capacité à maintenir le contrôle sur le véhicule.

$$\tilde{\theta}(0) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[U] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[U] \frac{\pi}{2}, \pi]$$

e. Lorsque 
$$\begin{cases} \tilde{\theta} \mapsto 0 \text{ le système est stable} \\ \tilde{\theta} \mapsto \pm \frac{\pi}{2} \text{ le système est instable} \end{cases}$$

### III. Validations numériques

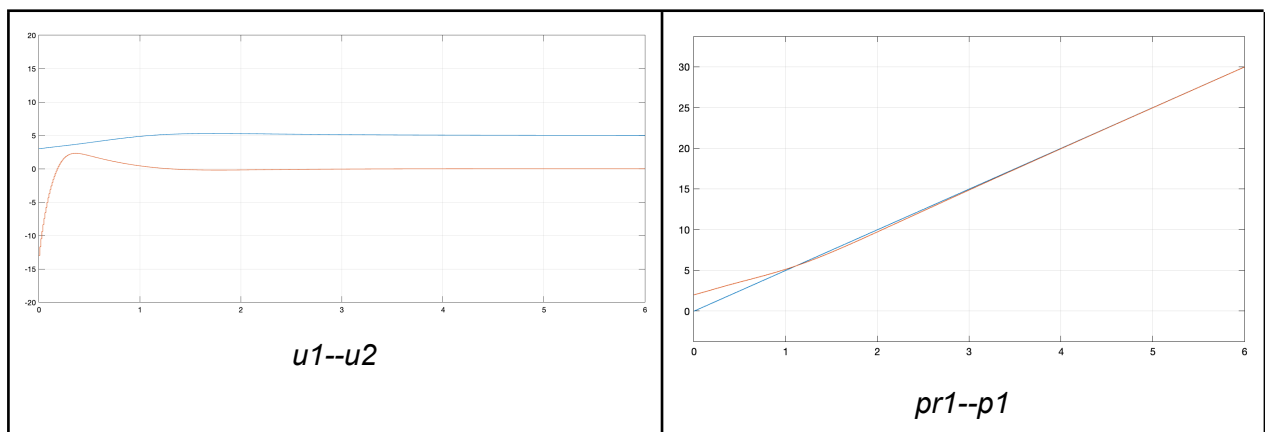
Dans cette partie, nous cherchons à valider les lois de commande développées dans la partie précédente en les testant sur le simulateur.

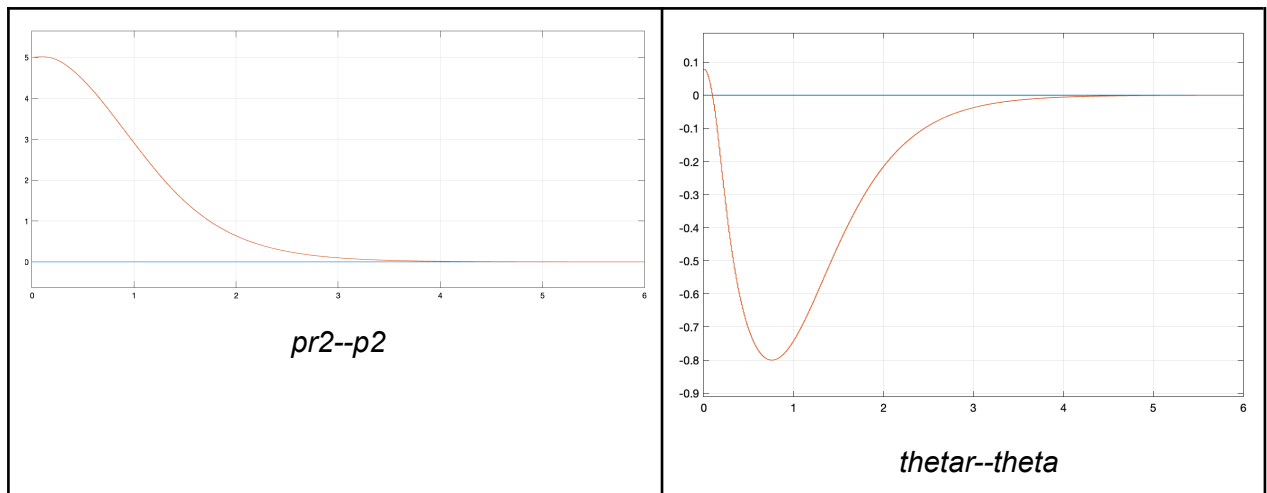
Pour évaluer la commande décrite dans la question 4, nous avons commencé par choisir une trajectoire de référence en ligne droite. Pour ce faire, nous avons modifié la ligne de code suivante dans le fichier ur.m pour fixer  $v_r$  et  $w_r$  en tant que constantes dans  $output[v_r; w_r]$ .

Nous avons expérimenté notre loi de commande en utilisant diverses valeurs pour  $k_1$ .  $k_2, k_3, k_4$ , ont été calculés en utilisant la méthode de placement des pôles (différentes valeurs pour les pôles désirés ont également été testées).

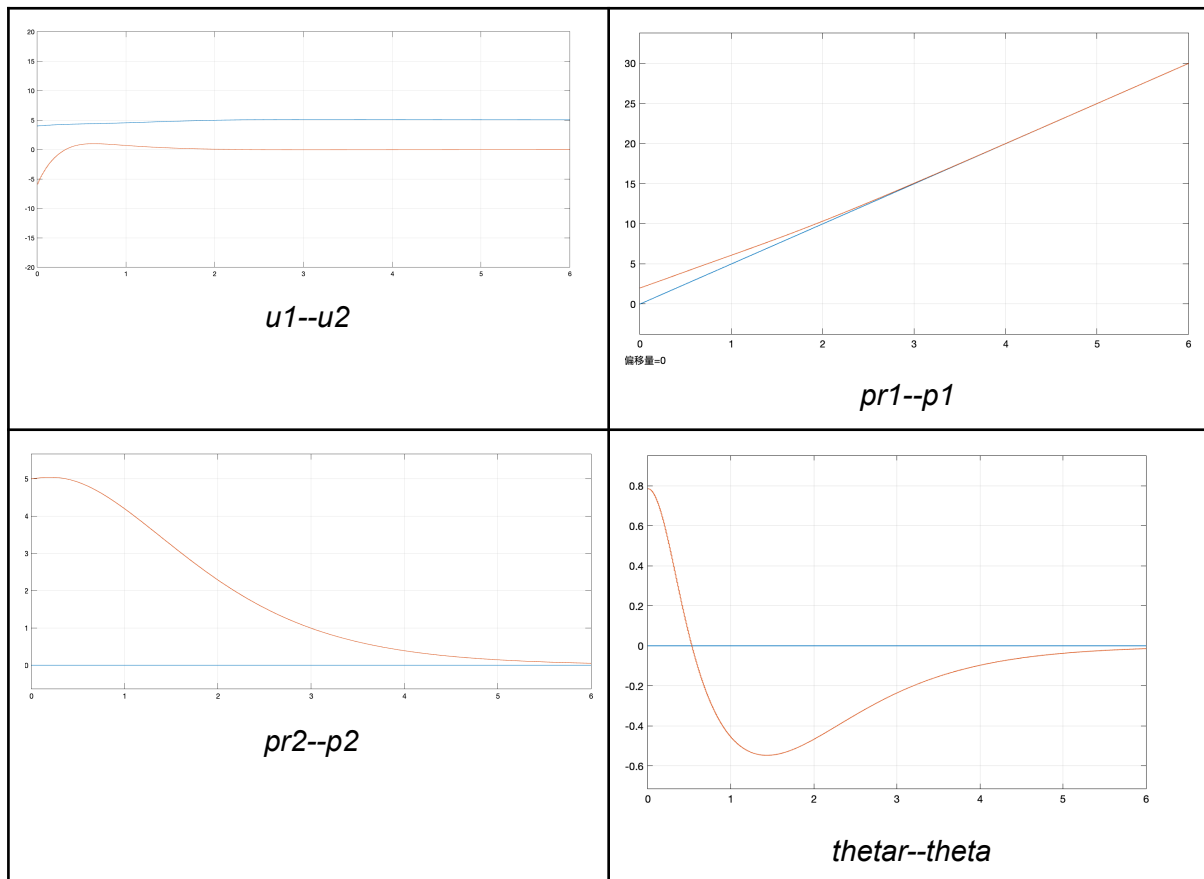
❖ Cas 1:  $v_r = 5$ ,  $w_r = 0$ ,  $k_1=1$ , pôles souhaités: [-2, -3, -5]

Les courbes ci-dessous représentent les résultats obtenus à partir du simulateur :



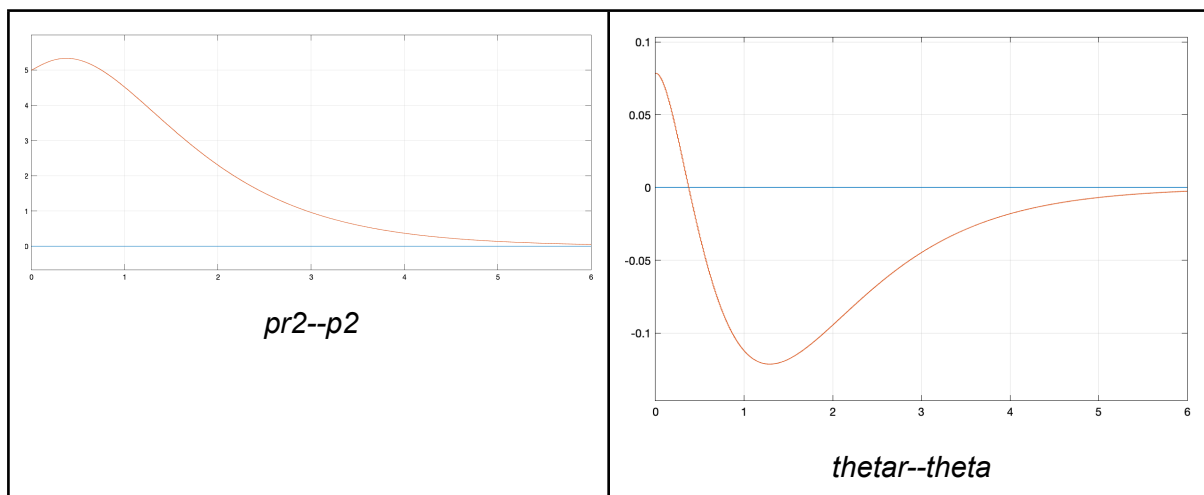
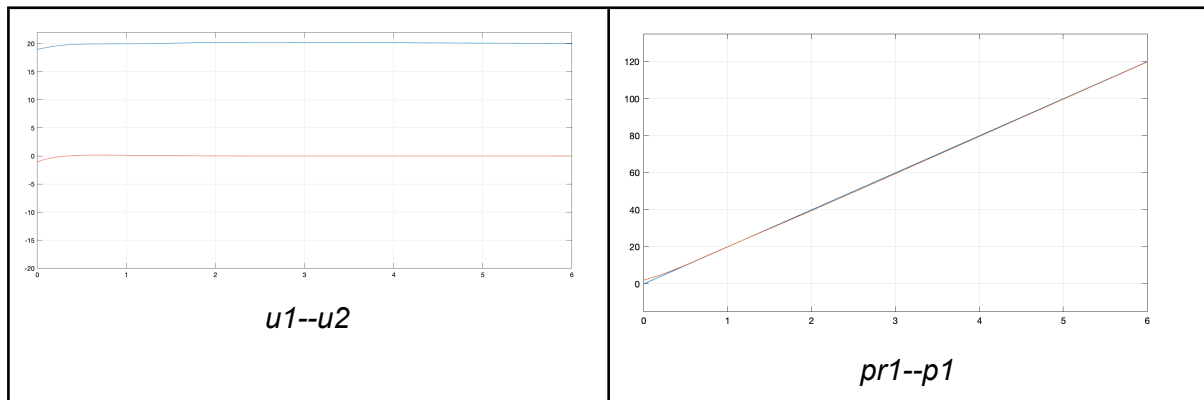


❖ Cas 2:  $v_r = 5, w_r = 0, k_1=0.5$ , pôles souhaités:  $[-1,-2,-3]$



En réduisant les gains de commande, nous constatons que la plage de variation entre  $u_1$  et  $u_2$  se rétrécit, la vitesse de convergence du système ralentit, l'overshoot diminue significativement, ce qui renforce la stabilité du système par rapport au premier cas.

- ❖ Cas 3 :  $v_r = 20$  (nous avons augmenté de la valeur de  $v_r$  pour tester le degré de robustesse de la loi de commande),  $w_r = 0$ ,  $k_1 = 0.5$ , pôles souhaités:  $[-1, -2, -3]$



Nous pouvons observer que la voiture suit bien la trajectoire de référence, ce qui démontre que le contrôleur fait preuve d'une bonne robustesse dans le suivi du chemin en ligne droite.

Ensuite, nous avons étudié la capacité du contrôleur à suivre des trajectoires plus complexes. Nous considérons le cas où  $\varphi_r$  est nul afin de réaliser la séparation de la dynamique en deux sous-systèmes, comme décrit dans la question 4. Ainsi, les expressions des matrices A et B (voir page 7) demeurent inchangées. Cependant, nous allons introduire un terme d'estimation pour dans  $\varphi_r$  dans  $\tilde{\varphi}$  pour évaluer la loi de commande pour une trajectoire plus complexe.

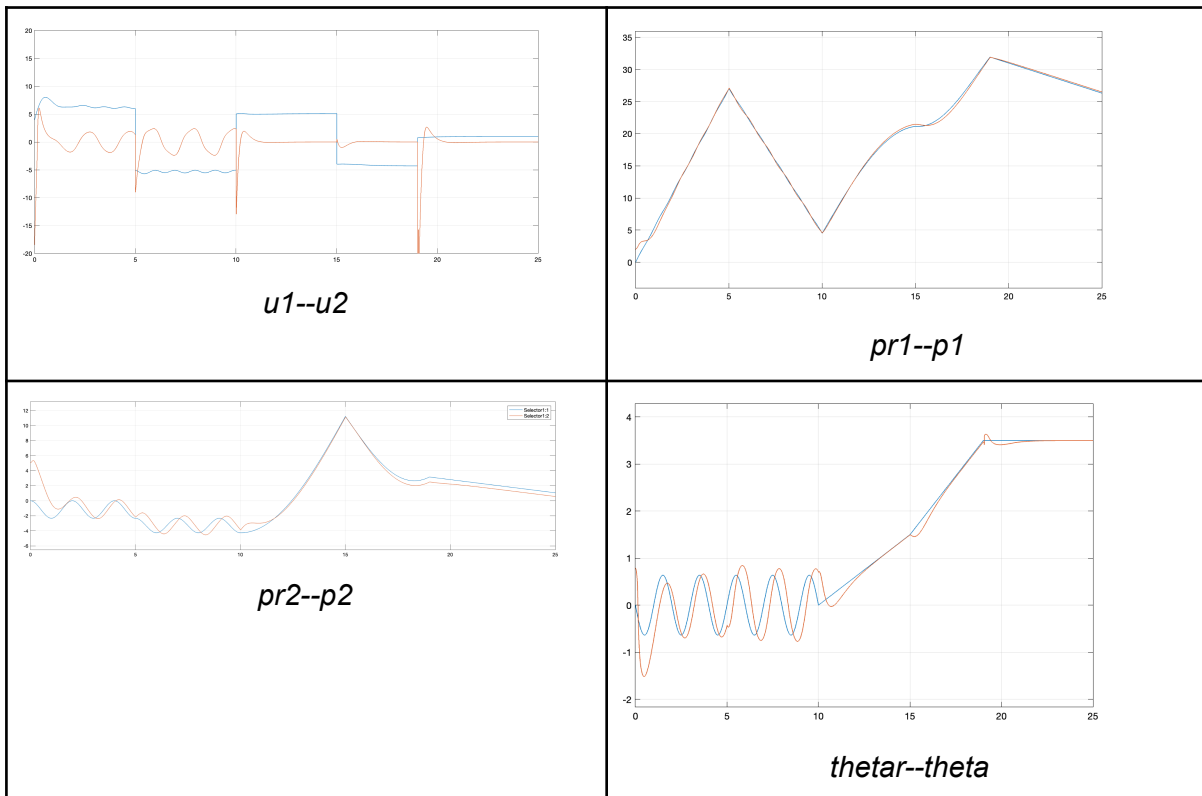
Si le terme d'estimation pour  $\varphi_r$  n'est pas introduit dans le calcul de la loi de commande:



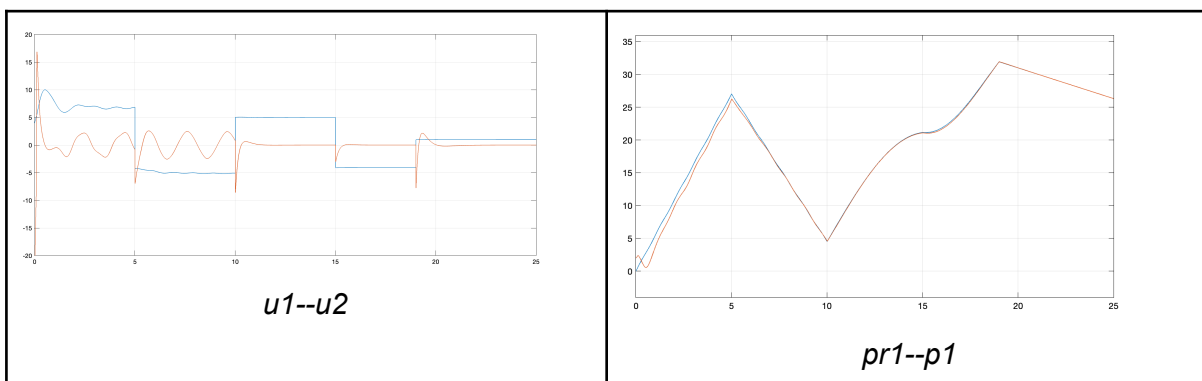
```

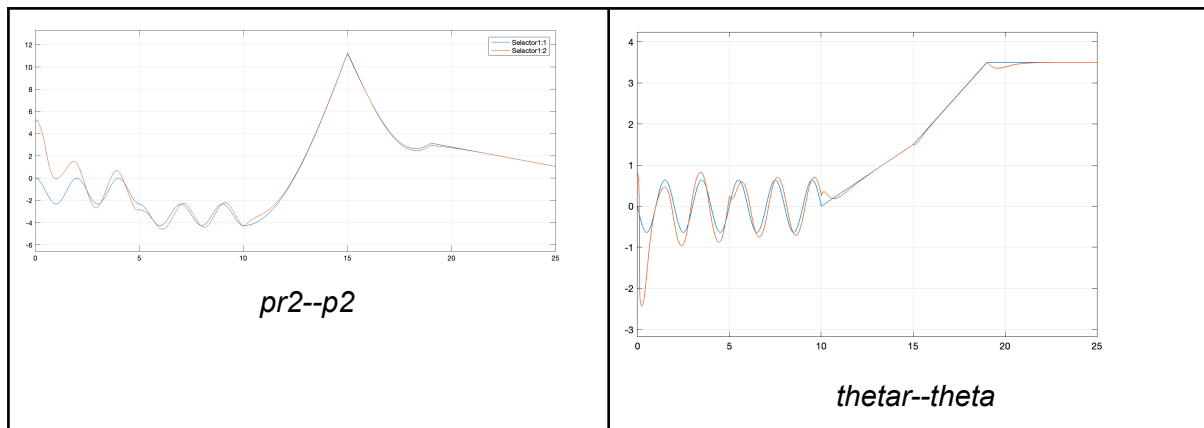
if tps <= 5
    freq= 1/2;
    vr= 6;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 10
    freq= 1/2;
    vr= -5;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 15
    vr= 5;
    wr=0.3;
elseif tps <= 19
    vr= -4;
    wr=0.5;
else
    vr= 1;
    wr= 0;

```



Si le terme d'estimation pour  $\varphi_r$  est introduit dans le calcul de la loi de commande (avec  $\varepsilon = 0.3$ ):

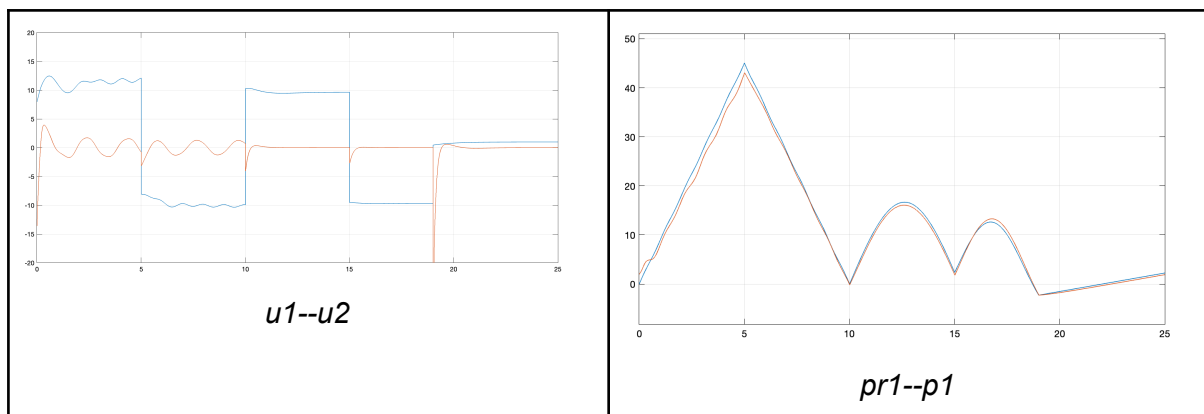


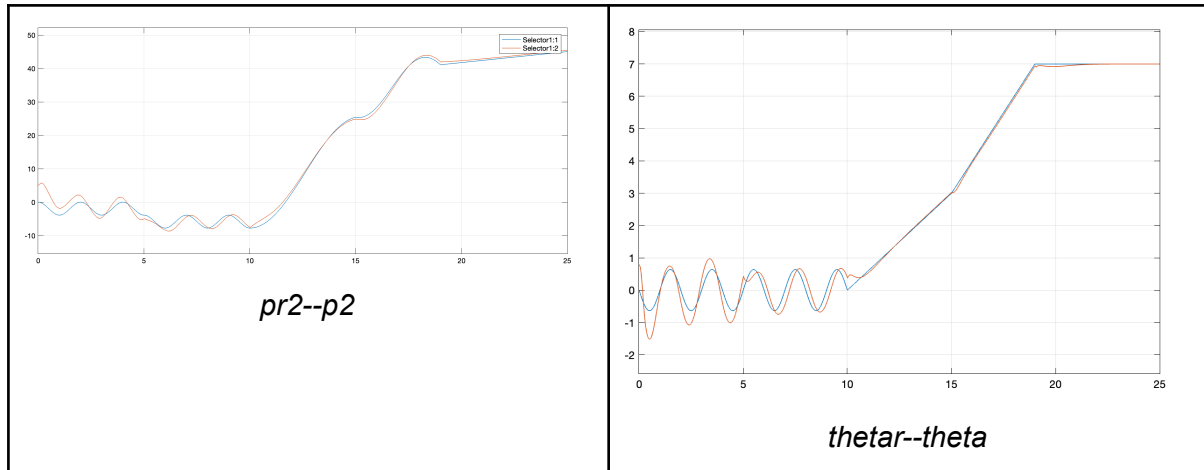


Lorsque nous ajoutons une estimation de  $\varphi_r$ , nous observons que la voiture suit la trajectoire de référence de manière plus précise que le cas précédent.

Afin d'évaluer la robustesse du système, nous avons modifié la trajectoire pour vérifier si la voiture peut bien suivre des trajectoires différentes. Voici la nouvelle trajectoire de référence:

```
if tps <= 5
    freq= 1/2;
    vr= 10;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 10
    freq= 1/2;
    vr= -10;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 15
    vr= 10;
    wr=0.6;
elseif tps <= 19
    vr= -9;
    wr=1;
else
    vr= 1;
    wr= 0;
end;
```



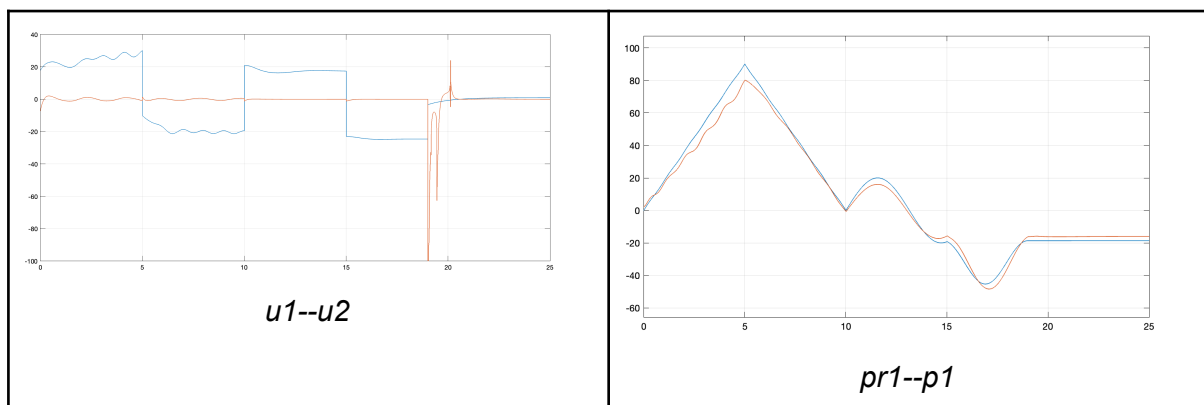


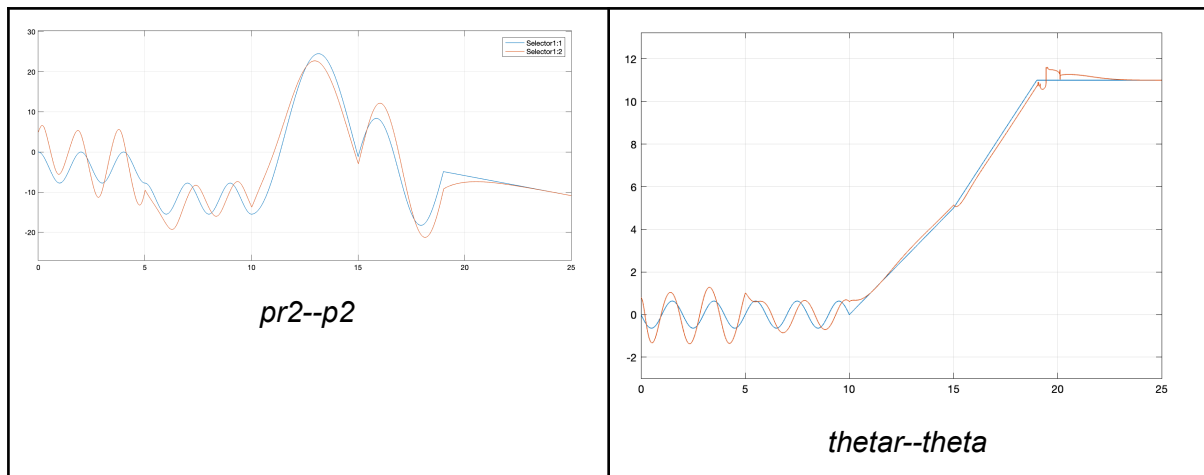
Nous allons augmenter les valeurs de  $v_r$  et  $w_r$  pour observer les conséquences :

```

if tps <= 5
    freq= 1/2;
    vr= 20;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 10
    freq= 1/2;
    vr= -20;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 15
    vr= 20;
    wr=1;
elseif tps <= 19
    vr= -20;
    wr=1.5;
else
    vr= 1;
    wr= 0;
end;

```



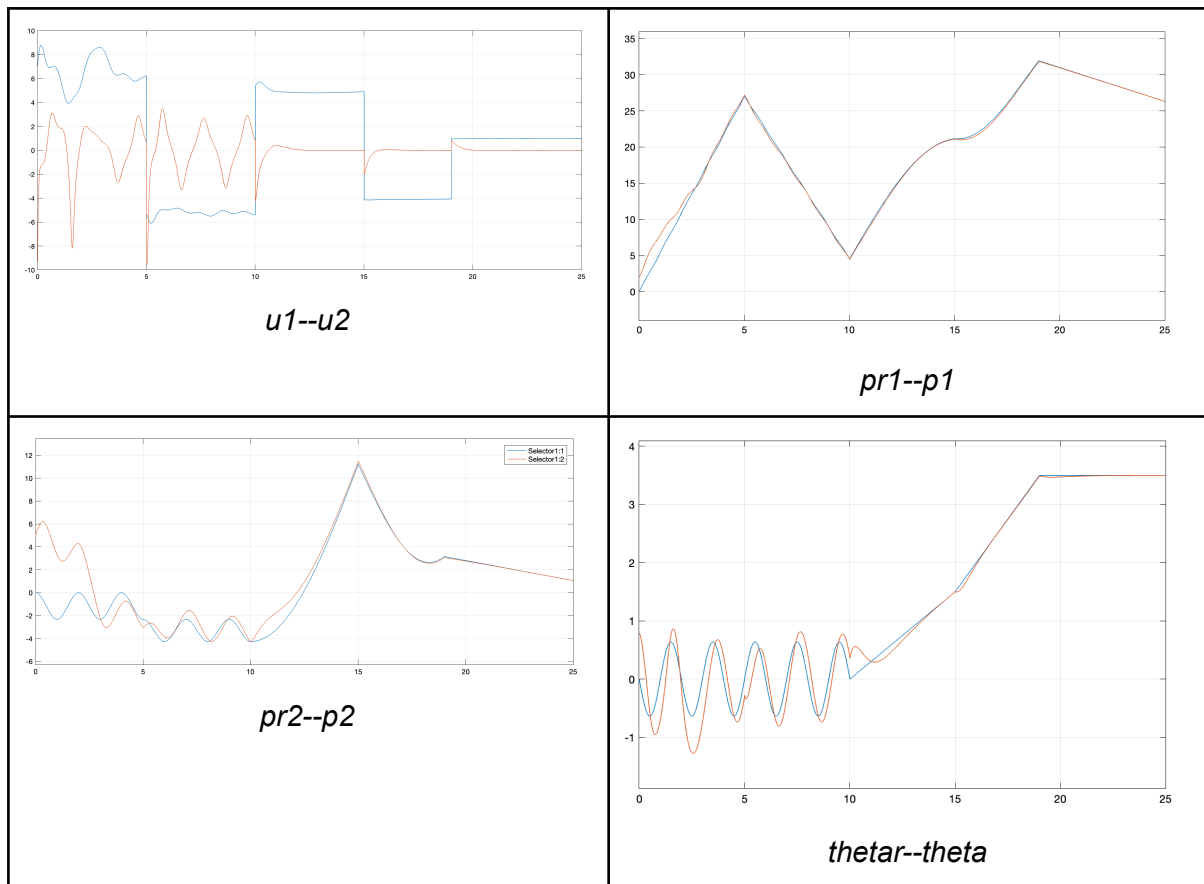


Si nous voulons appliquer cette loi de commande sur une trajectoire complexe, la capacité de robustesse est limitée. Au fur et à mesure de l'augmentation de  $v_r$  et  $w_r$ , nous observons que les performances du contrôleur se dégradent davantage.

A présent, nous allons évaluer la commande décrite dans la question 5. De la même manière que précédemment, nous avons effectué des essais sur plusieurs scénarios.

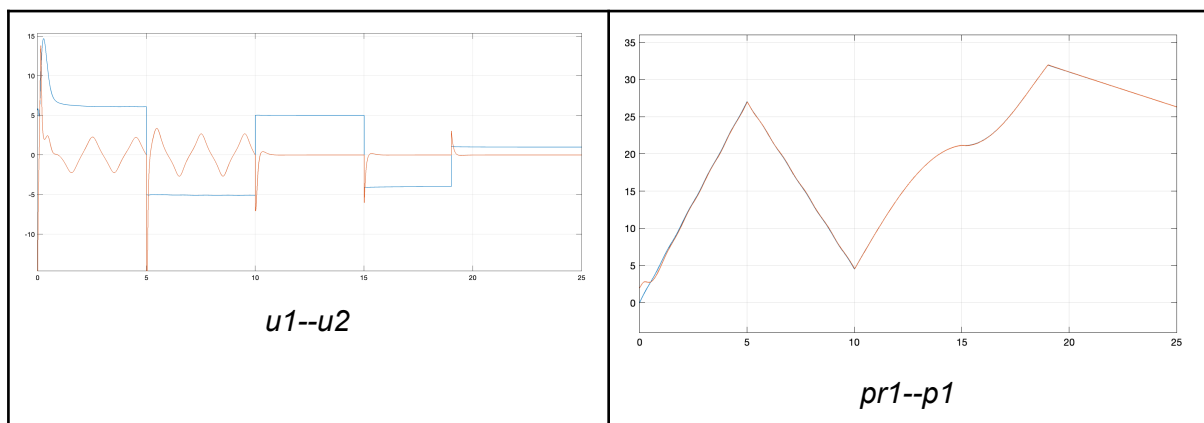
❖ Cas 1:  $\varepsilon=0.1$ ,  $k_1=0.5$ , pôles souhaités:  $[-1,-2,-3]$ ,  $\tilde{\theta}(0) = \frac{\pi}{4}$

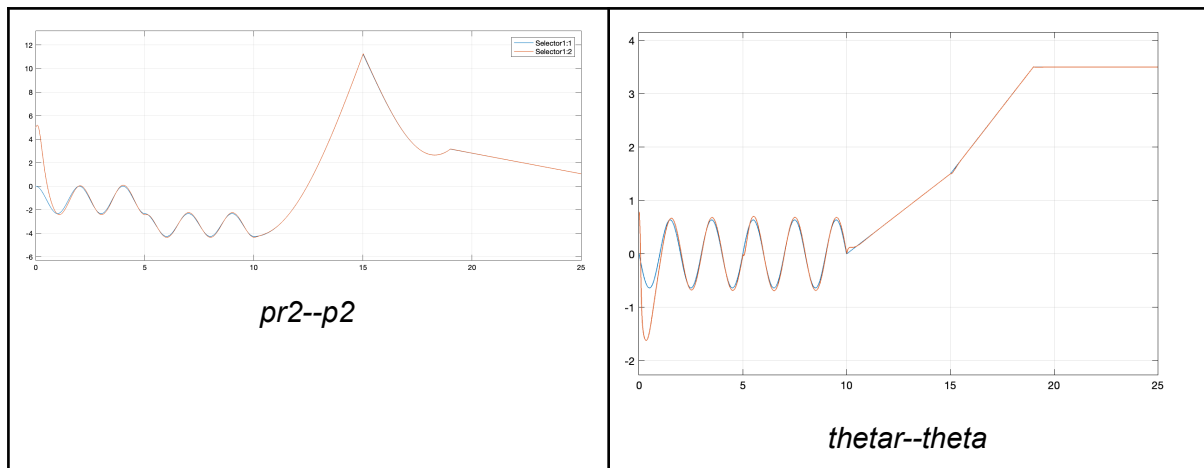
```
if tps <= 5
    freq= 1/2;
    vr= 6;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2)
elseif tps <= 10
    freq= 1/2;
    vr= -5;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2)
elseif tps <= 15
    vr= 5;
    wr=0.3;
elseif tps <= 19
    vr= -4;
    wr=0.5;
else
    vr= 1;
    wr= 0;
end;
```



Nous pouvons voir que le contrôleur permet à la voiture de suivre correctement la trajectoire de référence. Cependant, nous devons augmenter les gains pour obtenir une meilleure précision.

❖ Cas 2:  $\varepsilon=0.1$ ,  $k_1=1$ , pôles souhaités:  $[-4,-6,-8]$ ,  $\tilde{\theta}(0) = \frac{\pi}{4}$

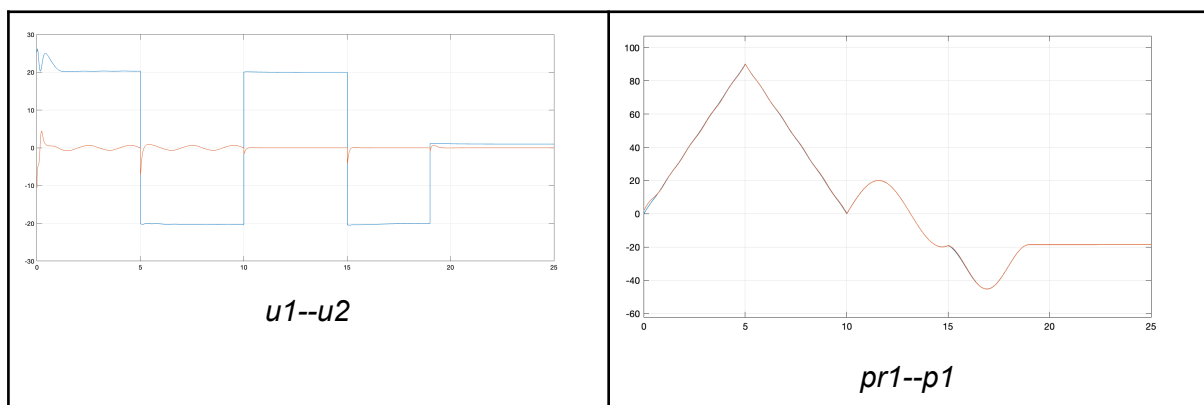


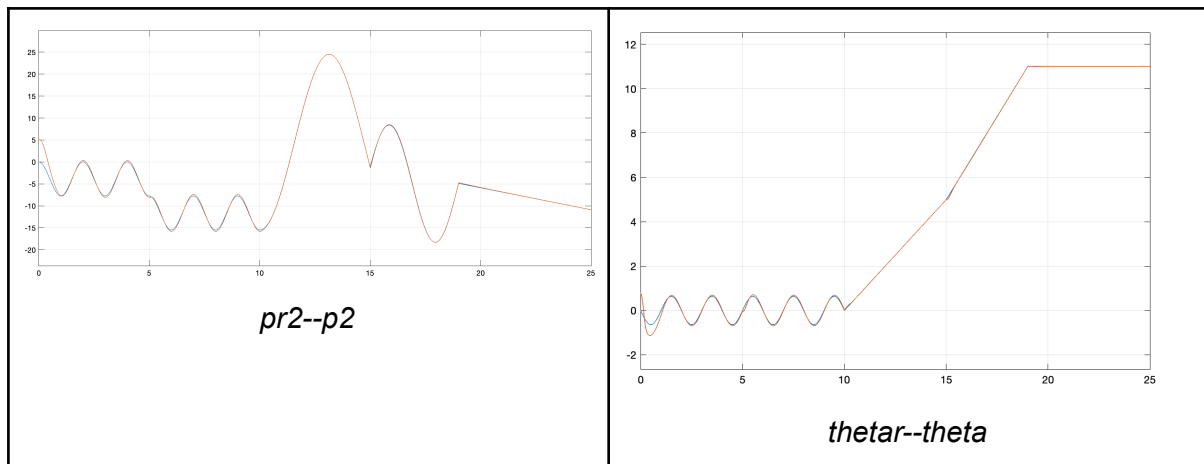


En augmentant les gains, nous constatons que le robot suit parfaitement la trajectoire avec une grande précision. Il y a cependant un léger problème, le dépassement pour l'angle  $\theta$  est un peu plus important au début mais cela ne pose pas de problème majeur.

Ensuite, nous allons modifier la trajectoire pour voir si le système fonctionne correctement.

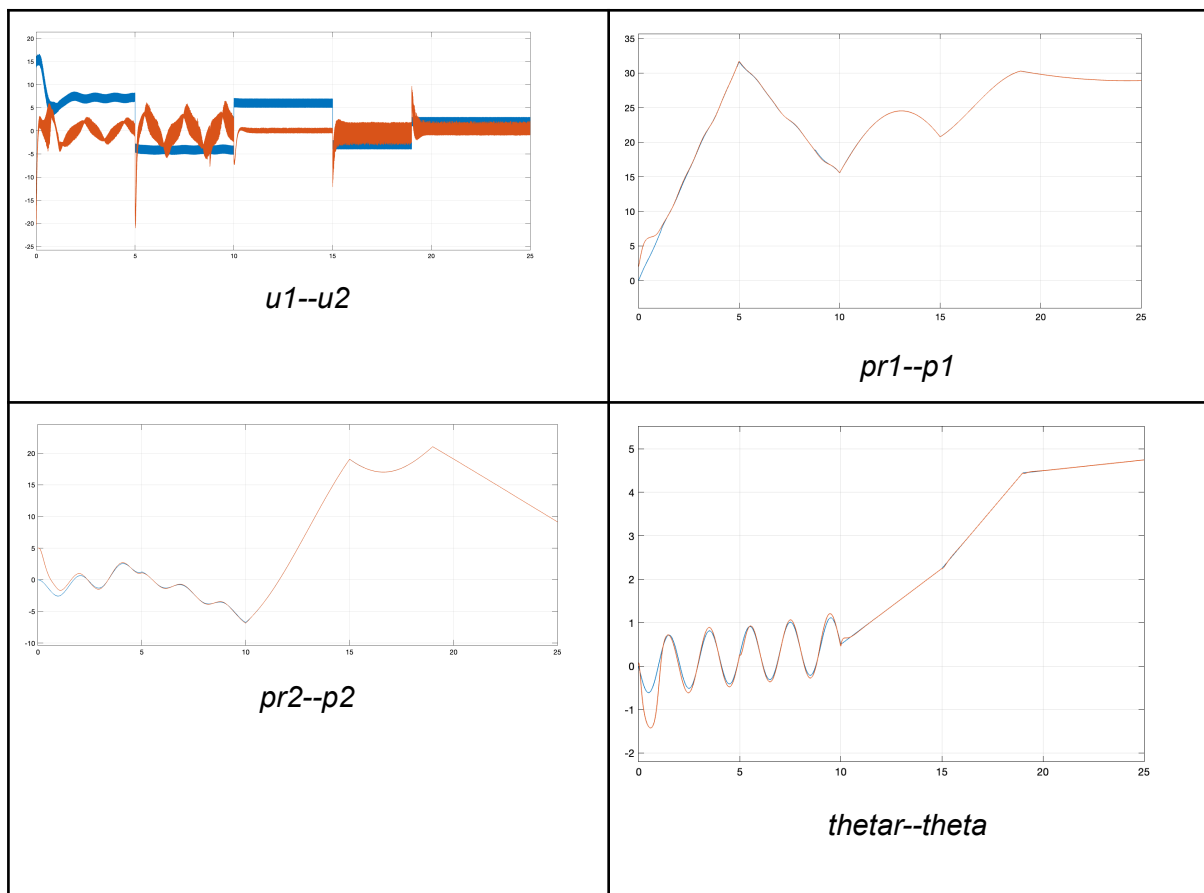
```
if tps <= 5
    freq= 1/2;
    vr= 20;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 10
    freq= 1/2;
    vr= -20;
    wr=2*sin(2*pi*freq*(tps-15)+pi/2);
elseif tps <= 15
    vr= 20;
    wr=1;
elseif tps <= 19
    vr= -20;
    wr=1.5;
else
    vr= 1;
    wr= 0;
end;
```





Nous constatons que la voiture suit parfaitement la trajectoire de référence que nous avons définie. Nous pouvons conclure que la loi de commande déterminée dans la question 5 démontre une grande capacité de robustesse.

Nous avons la possibilité d'évaluer la robustesse du contrôleur en introduisant du bruit de la manière suivante :  $output = [v_r + 2 * rand; w_r + 0.1 * rand]$



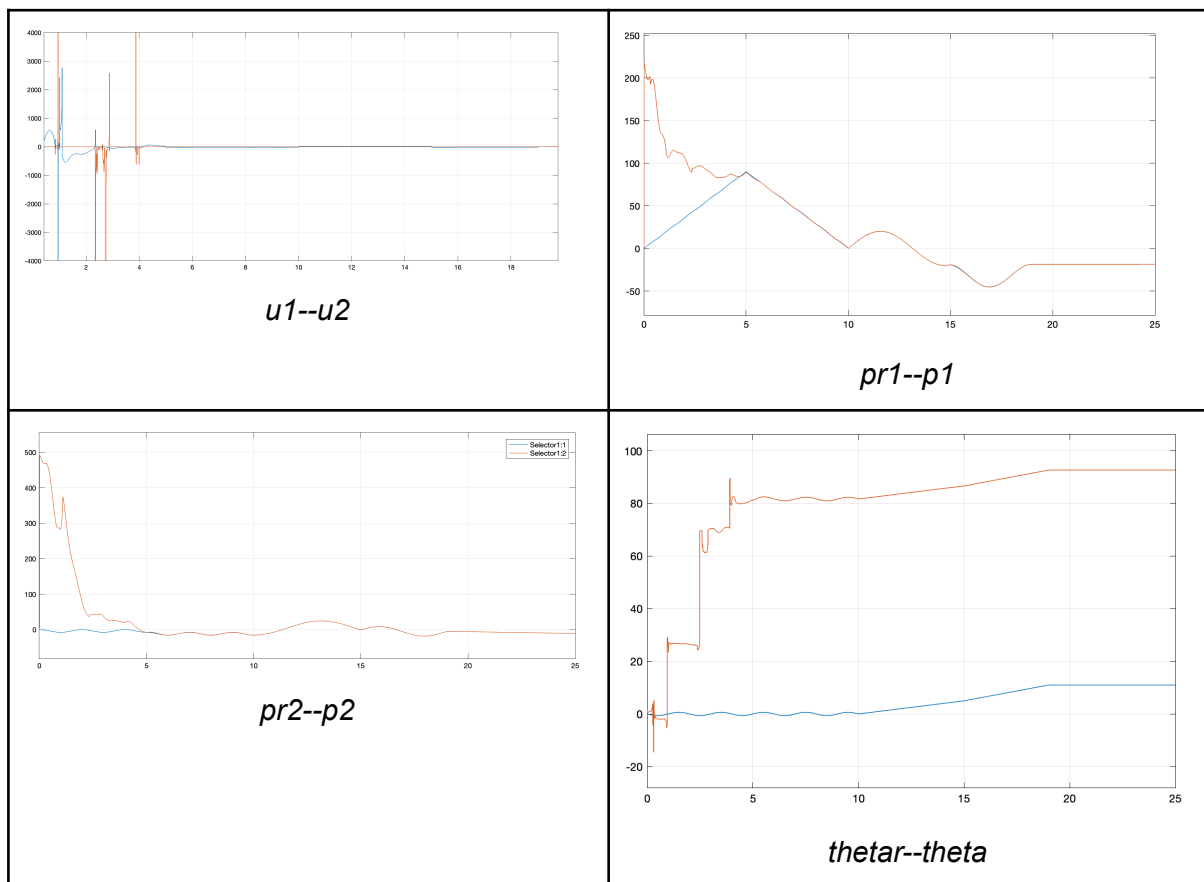
Compte tenu des courbes obtenues, nous pouvons donc dire que la loi de commande développée à la question 5 possède une grande capacité de robustesse.

Pour valider ce que nous avons dit à propos de la question 5.e, nous avons étudié le domaine de convergence du contrôleur. Pour rappel, nous avons établi précédemment que  $\tilde{\theta}(0) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[U] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[U]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Nous avons vu que lorsque  $\tilde{\theta}(0) = \frac{\pi}{4}$ , le contrôleur qui permet à la voiture de converger vers la trajectoire.

Que se passerait-il si  $\tilde{\theta}(0)$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  ?

❖  $\varepsilon=0.1$   $k_1=1$ , pôles souhaités:  $[-4,-6,-8]$ ,  $\tilde{\theta}(0) = 0.499 \cdot \pi$



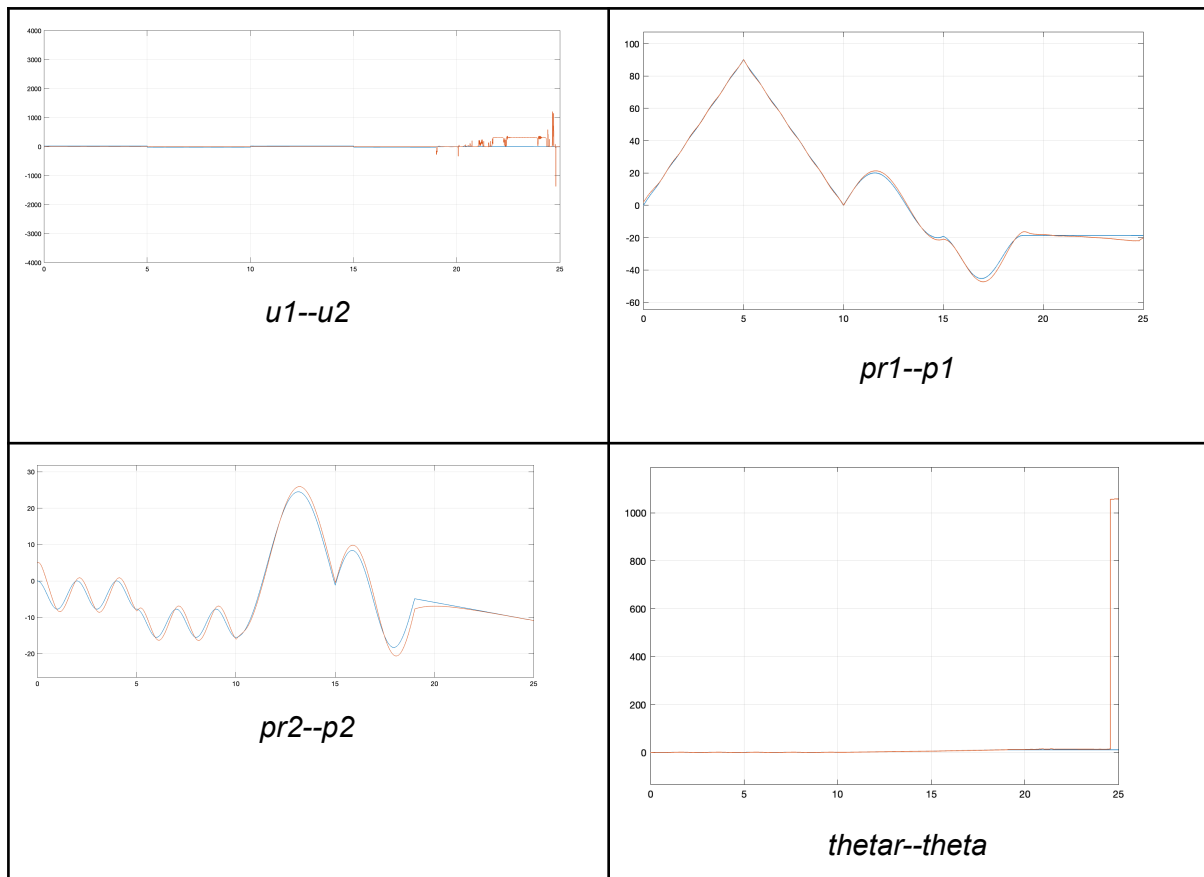
Le système devient instable et ne peut pas être correctement contrôlé lorsque  $\tilde{\theta}(0)$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , confirmant ainsi la validité du domaine de convergence.

Nous avons effectué les test précédents en utilisant  $\varepsilon > 0$ , tout en prenant une valeur très petite pour  $\varepsilon$ . En quoi est-ce une bonne approximation?

Pour répondre à cette question, nous allons prendre  $\varepsilon=1000$

( $k_1=1$ , pôles souhaités:  $[-4,-6,-8]$ ,  $\tilde{\theta}(0) = \frac{\pi}{4}$ )





Nous observons que l'amplitude de la commande augmente considérablement lorsque nous choisissons une valeur très élevée pour  $\varepsilon$ . Cette situation crée un problème car elle entraîne l'instabilité du système, ce qui signifie que la loi de commande précédemment établie, telle que décrite dans la question 5, n'est plus appropriée (elle n'est plus capable de maintenir la stabilité) . Nous pouvons donc confirmer que  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon$  petit est une bonne approximation.

## IV. Conclusion

En conclusion, l'établissement d'une loi de commande est d'une importance capitale pour assurer un contrôle efficace du mouvement du robot, c'est-à-dire le guider vers la trajectoire de référence. Par ailleurs, il est essentiel de prêter une attention particulière au domaine de convergence du contrôleur, car si celui-ci est mal défini, le système peut devenir instable. En comparant les deux lois de commande, on peut conclure que celle définie à la question 5 démontre une plus grande robustesse et garantit une meilleure stabilité du système.