

Sorbonne Université
Master 2 Automatique, Robotique
Parcours Systèmes Avancés et Robotique

Rapport Mini-Projet
Commande Non Linéaire

Stabilisation globale du rotor excentrique oscillant

Auteurs :

Viviane Bao-3800857

Hao Yuan-21117163

Années Universitaires 2023-2024
27 janvier 2024

Table des matières

I.	Introduction	-----p2
II.	Développement d'un simulateur Simulink du système TORA	-----p3-p5
III.	Etude de l'article-explication du principe des approches proposées	-----p5-p9
IV.	Simulation des solutions proposées dans l'article	-----p9-p12
V.	Conclusion	-----p12-p13

I. Introduction

Ce devoir se concentre sur l'analyse de l'article "Global stabilization of the oscillating eccentric rotor", une étude portant sur le contrôle des vaisseaux spatiaux à double rotation. L'article utilise le rotor excentrique oscillant, un modèle parallèle et éducatif, pour explorer et atténuer la nutation - un phénomène essentiel qui se produit pendant la montée en rotation des vaisseaux spatiaux. Le rotor excentrique oscillant, reproduisant l'interaction entre rotation et nutation, sert de modèle simplifié pour naviguer dans ce défi technique complexe.

Dans cet article, des lois de contrôle en rétroaction sont développées pour stabiliser le système de manière globale, en employant des techniques avancées comme la linéarisation en rétroaction partielle et le backstepping avec intégrateur pour les systèmes en cascade. Ces progrès théoriques sont cruciaux pour le contrôle des vaisseaux spatiaux et d'autres applications connexes.

L'objectif de ce devoir est de creuser plus profondément dans l'article "Global stabilization of the oscillating eccentric rotor", qui traite du contrôle du système TORA, déjà examiné lors d'un précédent écrit. Le devoir est structuré en trois parties principales : le développement d'un simulateur Simulink pour le système TORA, la création d'une synthèse pédagogique de l'article pour clarifier le principe des approches de contrôle suggérées, et enfin, la simulation des solutions de commande proposées dans l'article, en les comparant, si possible, à des méthodes de commande conventionnelles. Ce travail marie la pratique de la modélisation et de la simulation à une analyse théorique détaillée, offrant ainsi une vision globale des enjeux et des solutions dans le domaine du contrôle de systèmes dynamiques complexes.

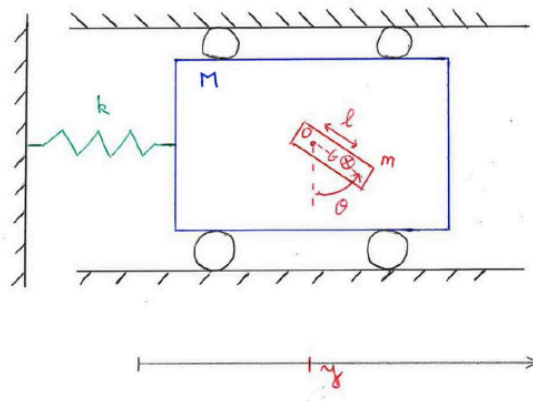


Figure 1- Système TORA

II. Développement d'un simulateur simulink du système TORA

Dans cette section, on va revisiter le simulateur du pendule inverse qui nous a été fourni lors du TP1. Notre objectif est de personnaliser ce simulateur pour l'adapter à notre projet. Pour ce faire, on va reprendre les équations fournies dans l'article qui décrivent le mouvement du système:

$$(M+m)\ddot{x}_c + me(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + kx_c = F$$

$$(I+me^2)\ddot{\theta} + m\dot{x}_c\epsilon\cos\theta = N$$

En introduisant les variables adimensionnelles:

$$x_d = \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} x_c, \quad \epsilon = \frac{me}{\sqrt{(I+me^2)(M+m)}}, \quad u = \frac{(M+m)}{k(I+me^2)} N, \quad F_d = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} F$$

Pour plus de réalisme, il faut prendre en compte la gravité: $u = \frac{(M+m)}{k(I+me^2)} (T - mge\sin(\theta))$

On peut reformuler les deux équations précédentes de cette façon :

$$\ddot{x}_d + x_d = \epsilon(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta) + F_d$$

$$\ddot{\theta} = u - \epsilon\ddot{x}_d\cos\theta$$

Soit: $\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x)F_d$ avec $x = \begin{bmatrix} x_d \\ \dot{x}_d \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

On a également:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-x_1 + \epsilon x_4^2 \sin x_3}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{\epsilon \cos x_3 (x_1 - \epsilon x_4^2 \sin x_3)}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \cos x_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d(x) = \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\epsilon \cos x_3 \end{bmatrix}$$

Le modèle Simulink est configuré de la manière suivante :

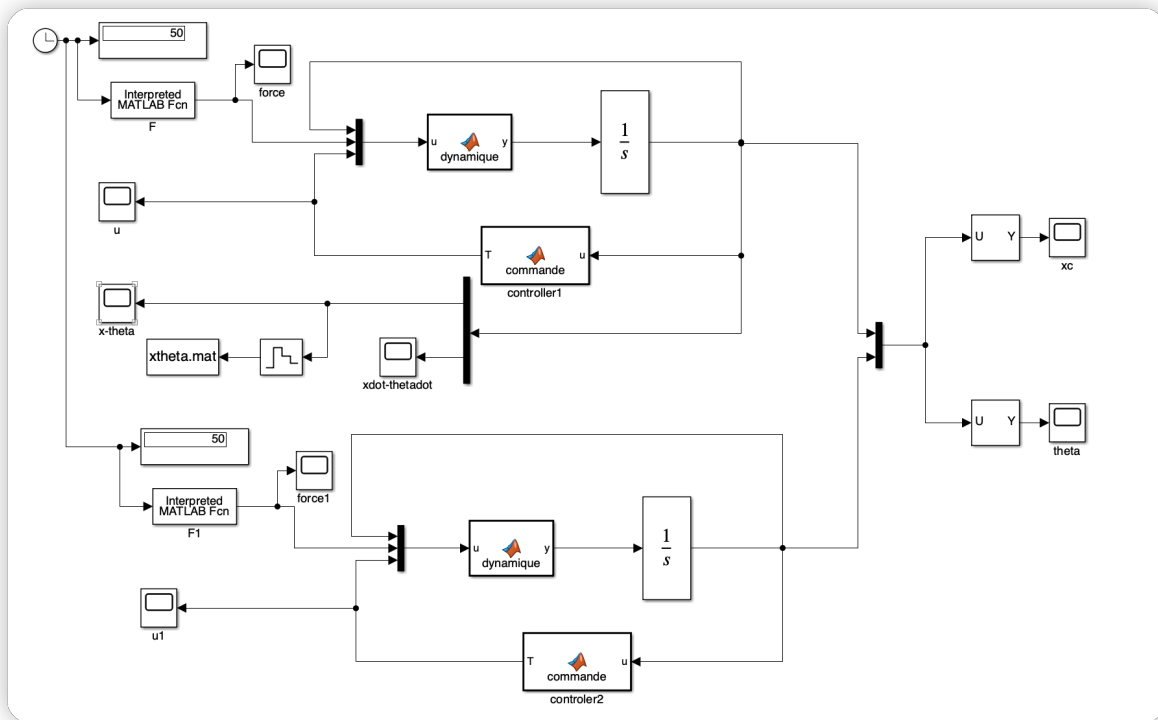


Figure 2- Modèle Simulink

Dans le bloc 'dynamique', on modélise la dynamique d'un système composé d'un pendule inversé monté sur un chariot. On prend en entrée un vecteur 'u' qui contient les variables d'état (position et vitesse du chariot, angle et vitesse angulaire du pendule) et les variables de commande (force appliquée et force de contrôle sur le chariot).

Les paramètres du système, tels que la masse de la barre, la masse totale, la longueur de la barre, et d'autres constantes physiques, sont définis dans la fonction. La dynamique du système est caractérisée par des équations différentielles intégrant les paramètres établis ainsi que les forces externes, comme détaillé précédemment à la page 3.

La sortie de la fonction est un vecteur représentant la nouvelle dynamique du système, incluant les accélérations linéaire et angulaire du chariot et du pendule, en réponse aux forces appliquées. Ce modèle est essentiel pour stabiliser le pendule dans une position verticale.

Dans le bloc 'commande', on calcule la commande T pour un système de pendule inversé sur un chariot. Il prend en entrée les variables d'état du système (position et vitesse du chariot, angle et vitesse angulaire du pendule) et définit les paramètres physiques du système comme les masses, la longueur de la barre, l'inertie, la gravité et la raideur du ressort.

Après un changement de variables visant à simplifier le contrôle, la fonction utilise des paramètres de contrôleur prédéfinis ($p_0, p_1, p_2, c_0, c_1, c_2$) pour calculer la loi de commande.

Cette loi est basée sur les états transformés (z_1, z_2, y_1, y_2) et vise à stabiliser le système. La valeur finale de T est obtenue en tenant compte de la force appliquée, de la gravité et des paramètres dynamiques du système.

De plus, la fonction 'Force' a été définie de la manière suivante :

```
1 function F = Force(tps)
2   F=0;
3   %F=1*sin(tps);
4   end
```

III. Etude de l'article-explication du principe des approches proposées

On va élaborer une loi de commande pour stabiliser globalement et asymptotiquement le rotor excentrique oscillant vers un état d'équilibre, même dans le cas où $F_d = 0$. Cette stabilisation est atteinte par la linéarisation partielle en retour d'état, transformant le système en une forme en cascade, suivie de l'application itérative de principes de contrôle avancés. Alors que les méthodes linéaires ne fonctionnent que près de l'origine, cette approche non linéaire vise une stabilisation robuste pour toute condition initiale.

Transformation via la linéarisation partielle:

Pour assurer que la commande proposée induit une stabilisation asymptotique globale, on examine en premier lieu la capacité à linéariser le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ (1) via un retour d'état.

L'analyse, s'appuyant sur les crochets de Lie de la géométrie différentielle, révèle que le système ne remplit pas toutes les conditions requises pour une linéarisation totale, étant donné l'absence d'involutivité de $\Delta_2(x)$.

Face à cette contrainte, on adopte une stratégie de linéarisation partielle qui ne s'applique qu'aux segments linéarisables du système, ceux-ci étant de dimension deux. Le théorème de Frobenius guide ensuite le traitement des équations différentielles partielles émergeant de ce processus, en définissant les conditions d'involutivité pour certaines distributions, ce qui simplifie leur résolution.

La transformation du système non linéaire affine initial (1) en une forme simplifiée en cascade est réalisée grâce à la linéarisation partielle par retour d'état. Cette méthode nécessite l'introduction de nouvelles variables d'état, conçues en fonction de l'état original x et de l'entrée u , afin que la nouvelle dynamique dépende exclusivement de ces variables et d'une entrée modifiée v , sans dépendance directe vis-à-vis de x ou u . Ainsi, on isole les non-linéarités, facilitant la commande d'une portion linéarisée du système. Cette isolation s'appuie sur l'analyse de la dynamique du système via les dérivées de Lie, permettant des modifications stratégiques qui séparent les composantes linéarisables, sur lesquelles des techniques de commande linéaire peuvent être appliquées, des non-linéarités qui sont gérées indépendamment.

L'article présente une série de solutions à ces équations sous la forme suivante :

$$z_1(x) = x_1 + \varepsilon \sin x_3, \quad z_2(x) = x_2 + \varepsilon x_4 \cos x_3$$

Par ailleurs, on considère: $y_1(z) = x_3$ et $y_2(x) = L_f y_1(x) = x_4$

On peut réécrire l'équation (1) en fonction des nouvelles variables (z_1, z_2, y_1, y_2) comme suit:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (2)$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon \sin y_1 \quad (3)$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (4)$$

$$\dot{y}_2 = v \quad (5)$$

$$\text{avec : } v = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} (\varepsilon x_1 \cos x_3 - \varepsilon^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3) + \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} u$$

Résoudre pour u en fonction de v donne : $u = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3)v - \varepsilon x_1 \cos x_3 + \varepsilon^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3$.

On cherche maintenant une loi de commande v qui stabilise ces équations (2)-(5) vers l'origine $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, ce qui correspond à $x = 0$ dans l'équation (1).

Définition des lois de commande pour la forme en cascade:

Une fois le système transformé, on cherche des lois de commande pour stabiliser la nouvelle forme en cascade, où ζ agit comme la nouvelle entrée de commande pour le système. L'idée est de concevoir un contrôleur pour cette forme en cascade qui soit capable de stabiliser le système lorsque ζ est l'entrée.

Backstepping avec Intégrateur:

On applique ensuite une technique connue sous le nom de backstepping intégrateur pour stabiliser le système en cascade. Elle consiste à concevoir un contrôle qui compense progressivement les effets des non-linéarités. On commence par stabiliser le sous-système le plus interne, puis on "recule" étape par étape, en ajustant la commande à chaque niveau pour prendre en compte les interactions avec les sous-systèmes précédemment stabilisés. Dans cette méthode, on avance de la sortie du système (dans ce cas, ζ) vers l'entrée (dans ce cas, u), en ajustant la commande à chaque niveau. À chaque étape, le backstepping prend en compte à la fois la dynamique actuelle du sous-système et l'effet des ajustements précédents, permettant ainsi de construire une commande globale qui stabilise l'ensemble du système.

Cette approche est particulièrement efficace pour traiter les systèmes non linéaires complexes, car elle permet de décomposer un problème de commande difficile en

sous-problèmes plus gérables, tout en assurant que les solutions à ces sous-problèmes s'intègrent harmonieusement pour stabiliser le système entier.

Dans cette section, on crée une loi de commande v pour les équations (2) à (5), en utilisant de manière répétée le Théorème 3.1 de l'article. D'abord, on stabilise les équations (2) et (3) avec une commande y_1 . Ensuite, on stabilise (2) à (4) avec une commande y_4 , et finalement, on stabilise tout le système (2) à (5) avec la commande v .

On définit: $y_1 = k_1(z) \triangleq -c_0 \tan^{-1} z_2$, avec $0 < c_0 < 2$

Un candidat de Lyapunov est utilisé pour démontrer la stabilité d'un système, où la dérivée de la fonction de Lyapunov est non positive. Il est prouvé que l'ensemble où cette dérivée est nulle correspond à un état où $z_2 = 0$, et par conséquent, l'état du système converge vers l'origine, stabilisant ainsi les équations (2) et (3). Ensuite, en se basant sur le Théorème 3.1 de l'article, une loi de commande feedback est formulée pour y_2 , ce qui rend l'ensemble des équations (2) à (4) globalement asymptotiquement stables.

On applique à nouveau le Théorème 3.1 pour obtenir la loi de commande stabilisatrice pour (2)-(5) où $y = (y_1, y_2)^T$, $c_{1,2} > 0$:

$$v(z, y) = -c_2(\dot{y}_2 - k_2(z, y_1)) + K_1(z_2)z_2 + K_2(z, y_1)(-z_1 + \varepsilon \sin y_1) \\ + K_3(z, y_1)y_2 - \frac{p_1}{p_2} (y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2),$$

avec: $k_2(z, y_1) \triangleq -c_1(y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2) + c_0 \frac{z_1 - \varepsilon \sin y_1}{1 + z_2^2}$

$$- \frac{\varepsilon p_0 z_2}{p_1(y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2)} [\sin y_1 + \sin(c_0 \tan^{-1} z_2)],$$

$$K_1(z_2) \triangleq \frac{c_0}{1 + z_2^2},$$

$$K_2(z, y_1) \triangleq -\frac{\varepsilon p_0}{p_1(y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2)} \left[\sin y_1 + \sin(c_0 \tan^{-1} z_2) + c_0 z_2 \frac{\cos(c_0 \tan^{-1} z_2)}{1 + z_2^2} \right] \\ - \frac{c_0 c_1}{1 + z_2^2} - 2c_0 z_2 \frac{z_1 - \varepsilon \sin y_1}{(1 + z_2^2)^2} + \frac{\varepsilon p_0 c_0}{p_1} \frac{z_2 [\sin y_1 + \sin(c_0 \tan^{-1} z_2)]}{(1 + z_2^2)(y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2)^2},$$

$$K_3(z, y_1) \triangleq -c_1 - \frac{\varepsilon c_0 \cos y_1}{1 + z_2^2} - \frac{\varepsilon p_0}{p_1} \frac{z_2 \cos y_1}{y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2} \\ + \frac{\varepsilon p_0}{p_1} \frac{z_2 [\sin y_1 + \sin(c_0 \tan^{-1} z_2)]}{(y_1 + c_0 \tan^{-1} z_2)^2},$$

Application au Système Original:

Après avoir élaboré un contrôleur efficace pour un système simplifié en cascade, la prochaine étape consiste à réintégrer ces commandes dans le système non linéaire original via une transformation inverse. Cette transformation consiste à convertir les commandes conçues pour des variables intermédiaires dans le système en cascade (ζ et v) en une commande unique $u(x)$ qui interagit avec les états originaux x du système.

La transformation inverse est cruciale pour maintenir les propriétés de stabilité obtenues dans le modèle simplifié lorsqu'on les réapplique au système initial plus complexe. Ainsi, les avancées en contrôle réalisées dans le cadre théorique sont préservées et efficaces dans le système non linéaire réel, assurant une gestion précise et robuste des dynamiques complexes.

En cours, on a exploré les techniques de linéarisation exacte par retour d'état pour stabiliser des systèmes dynamiques autour de points d'équilibre. Ce processus implique un changement de variables d'état et de commande qui transforme le système non linéaire en un système linéaire dans les nouvelles coordonnées. La condition de linéarisation est que les dérivées de Lie de la fonction de Lyapunov le long du champ de vecteurs soient nulles au point d'équilibre, garantissant la stabilité au sens de Lyapunov. Lorsqu'une telle fonction de Lyapunov existe et que son minimum est atteint au point d'équilibre, on peut alors conclure à la stabilité de l'équilibre.

Le concept de stabilité globale asymptotique (GAS) a également été abordé, caractérisé par la stabilité de l'équilibre et son attractivité sur l'ensemble de l'espace d'état. Les théorèmes de Lyapunov nous fournissent les outils pour déduire la stabilité, la stabilité asymptotique locale (LAS), et la stabilité globale asymptotique (GAS) à partir de propriétés de ces fonctions de Lyapunov.

L'approche incrémentale, ou la décomposition en cascade, a été présentée comme une méthode pour gérer des systèmes complexes en les divisant en sous-systèmes plus simples, ce qui permet d'appliquer des lois de commande stabilisantes de manière séquentielle. Cette approche est particulièrement utile pour les systèmes non linéaires complexes car elle permet de traiter chaque sous-système individuellement tout en assurant une intégration harmonieuse de chaque commande pour stabiliser le système global.

L'article analysé met en lumière l'utilisation de ces techniques pour stabiliser un rotor excentrique oscillant, illustrant la conversion d'un système complexe en une structure linéaire via la linéarisation partielle. Cette approche est intimement liée au concept de GAS, assurant la stabilisation du point d'équilibre sur tout l'espace d'état.

La méthode de décomposition en cascade, explorée en cours, est appliquée dans l'article pour aborder les non-linéarités du système, traitant chaque composante de manière indépendante.

Enfin, la pertinence des théorèmes de Lyapunov est démontrée dans l'article par la conception d'une loi de commande qui garantit la stabilité globale, validant ainsi l'applicabilité des concepts théoriques aux défis pratiques en ingénierie. Cet article est donc un exemple parfait de l'application des théories apprises en cours aux problèmes de stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires, confirmant que les concepts théoriques sont non seulement pertinents mais également cruciaux pour la conception de solutions pratiques aux défis d'ingénierie.

IV. Simulation des solutions proposées dans l'article

Les paramètres du système ont les mêmes valeurs que ceux du pendule utilisé dans le TP1, avec une valeur choisie pour k égale à 180. Deux jeux de paramètres de contrôle ont été sélectionnés pour la loi de commande, spécifiquement, pour le contrôleur 1 : $p_0 = p_1 = p_2 = c_0 = c_1 = c_2 = 1$.

Pour le contrôleur 2 : $p_0 = 10, p_1 = 0.1, c_0 = 1.9, p_2 = c_1 = c_2 = 1$. Voici les résultats obtenus:

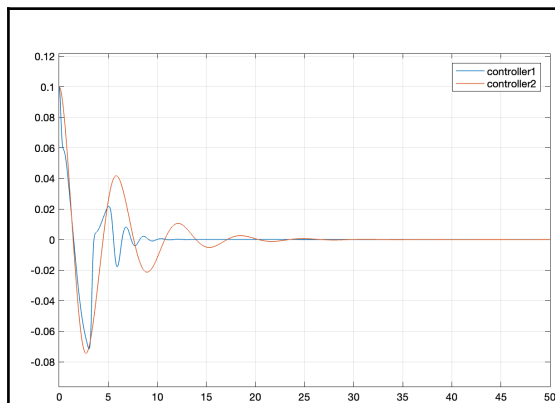


Figure 3- Comportement de x_c sous des conditions initiales spécifiques : $(0.1; 0; 0; 0)^T$

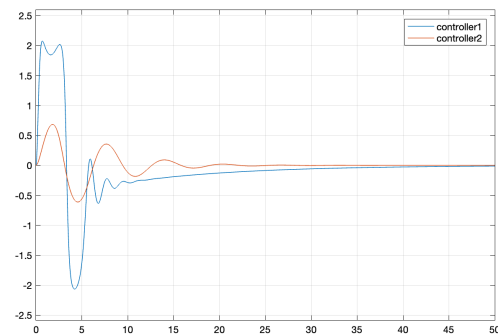


Figure 4- Comportement de θ sous des conditions initiales spécifiques : $(0.1; 0; 0; 0)^T$

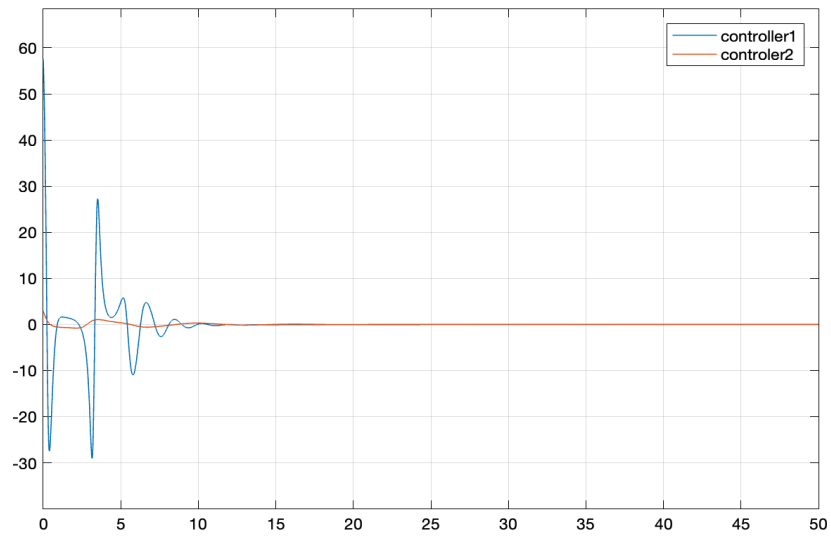


Figure 5-Comportement de T sous des conditions initiales spécifiques : $(0.1; 0; 0; 0)^T$

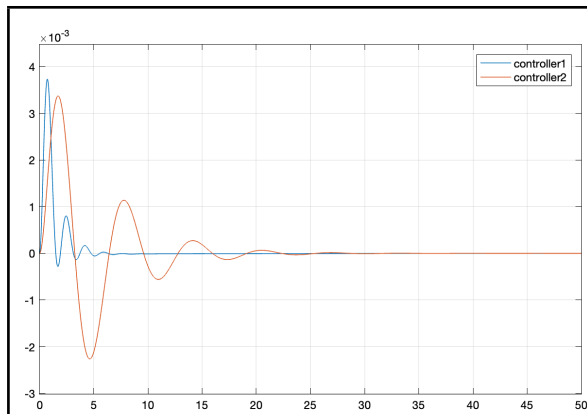


Figure 6- Comportement de x_c sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0; 0.1)^T$

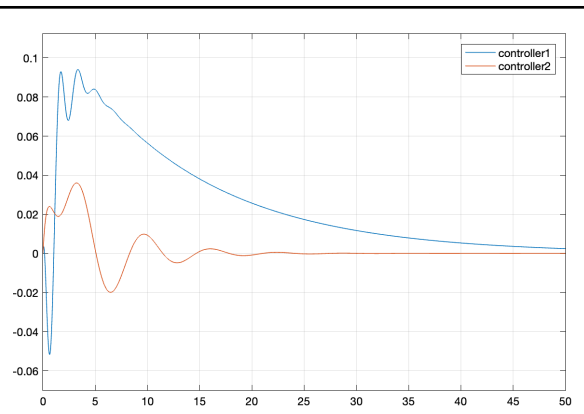


Figure 7- Comportement de θ sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0; 0.1)^T$

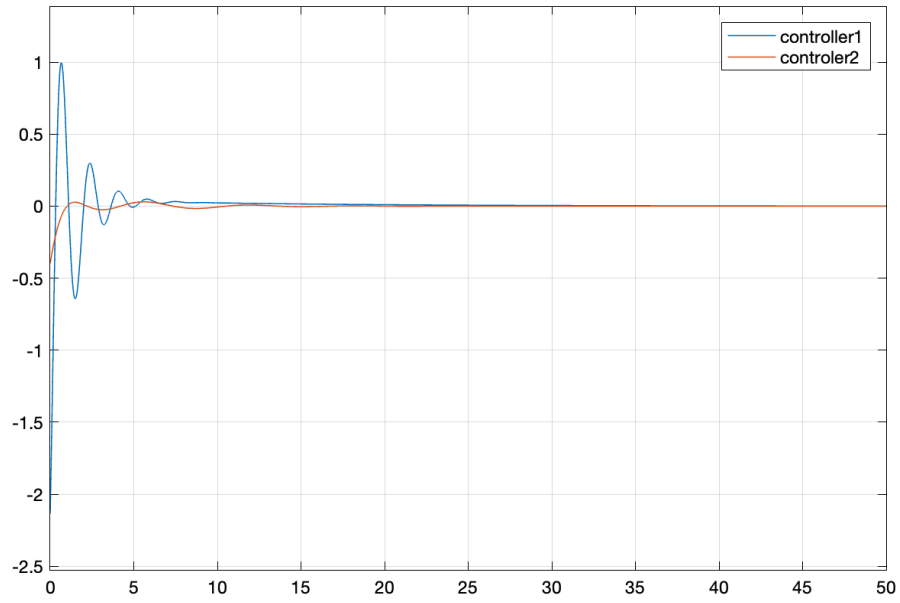


Figure 8- Comportement de T sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0; 0.1)^T$

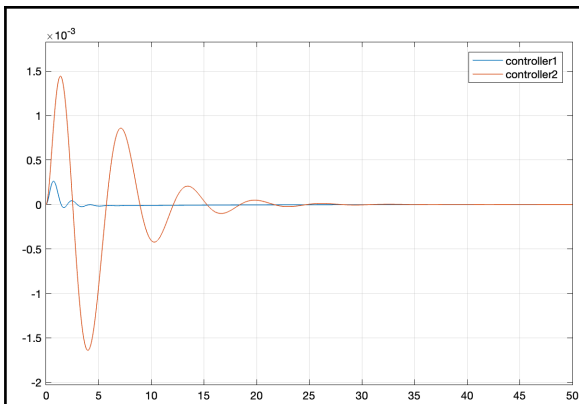


Figure 9- Comportement de x_c sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0.1; 0)^T$

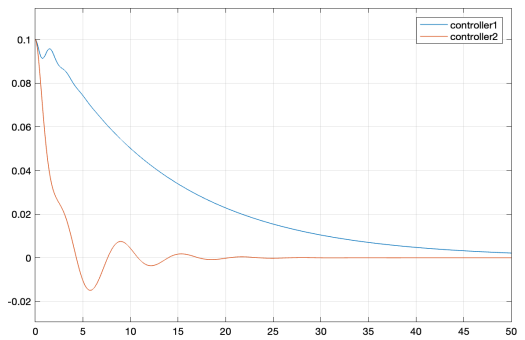


Figure 10- Comportement de θ sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0.1; 0)^T$

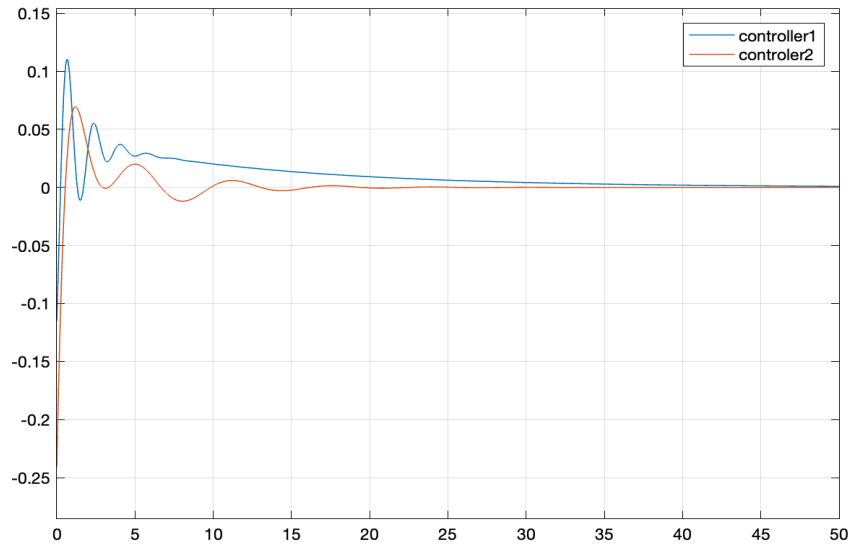


Figure 11- Comportement de T sous des conditions initiales spécifiques : $(0; 0; 0.1; 0)^T$

Il est évident à partir de l'analyse des graphiques que les deux contrôleurs testés ont réussi à stabiliser le système de pendule inversé monté sur un chariot au fil du temps. Les conclusions des graphiques sont les suivantes :

- Dans les figures 3,6,9 on observe que la position du chariot x_c converge vers zéro, ce qui indique que le chariot s'arrête à sa position initiale ou une position désirée.
- Pour les figures 4,7,10 l'angle θ tend également vers zéro, ce qui suggère que le pendule atteint une position verticale stable, conformément à l'objectif de stabilisation.
- Le contrôleur 2, en particulier, se distingue par une convergence plus rapide et régulière vers l'équilibre, aussi bien pour la position du chariot que pour l'angle du pendule. Cette performance supérieure est marquée par une réduction accélérée des oscillations, suggérant que le contrôleur 2 est mieux adapté pour gérer les perturbations et maintenir la stabilité dans ce contexte spécifique.

V. Conclusion

En conclusion, le choix du contrôleur dépendra toujours des exigences spécifiques du système et des objectifs de contrôle à atteindre. Cependant, à la lumière des résultats observés, il est clair que le contrôleur 2 a démontré une performance supérieure en termes de stabilisation de la position verticale du pendule sur le chariot pour le cas particulier étudié. Les graphiques montrent une convergence plus rapide et régulière, avec une réduction significative des oscillations, indiquant ainsi que le contrôleur 2 est mieux adapté pour

maintenir la stabilité dans cette configuration spécifique du système. Cette conclusion suggère que le contrôleur 2 serait un choix préférable pour ce type de système et d'objectifs de contrôle.