Contrôle de drones de type VTOL
Stratégies de commande linéaires

Pascal Morin

ISIR

Cours de Robotique Mobile

Drones à décollage vertical (VTOL)

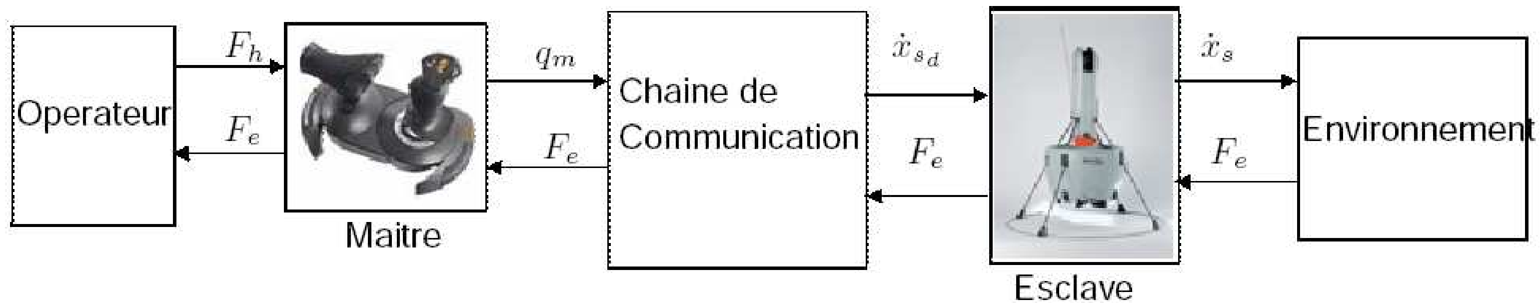
  

- Objectif: synthétiser des commandes par retour d'état pour stabiliser ces systèmes
- Partie 1: commandes linéaires
- Partie 2: commandes non-linéaires, pour étendre le domaine de vol
- Pourquoi faire de la commande par retour d'état?
  - Systèmes instables en boucle ouverte: ex HoverEye
  - Très difficile à modéliser précisément
  - Soumis à des perturbations inconnues à l'avance (vent)

Drones à décollage vertical (VTOL)

Différents modes de commande:

- Mode téléopéré:



Exemples d'objectif:

- Consignes de direction de poussée (ex. mesures IMU)
- Consignes de vitesse linéaire (ex. mesures GPS)
- Consignes de vitesse linéaire + altitude

- Mode complètement autonome:

Trajectoire par "points de passage" ("way-points") (ex. mesures GPS)

- Altitude de référence (mesures baromètre)
- Hauteur de référence par rapport au sol (mesures télémètre)
- etc

Equations de la dynamique/repère fixe

$$\begin{cases} \dot{p} &= v \\ m\dot{v} &= -{\color{red}T}Re_3 + F_e \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= -S(\omega)J\omega + {\color{red}\Gamma} + \Gamma_e \end{cases}$$

avec

- p: coordonnées du CM, G, par rapport à un repère inertiel $\mathcal{R}_0$
- v: vitesse de G par rapport à $\mathcal{R}_0$, exprimée dans $\mathcal{R}_0$
- m : masse
- T: poussée
- $e_3 = (0, 0, 1)'$
- F_e: Somme des "forces externes", exprimées dans $\mathcal{R}_0$
- R: matrice de rotation entre le repère inertiel et le repère corps
- ω: vitesse angulaire exprimées dans le repère corps
- J: matrice d'inertie exprimée dans le repère corps (diagonale!)
- Γ: couples de commande
- Γ_e: couples externes associés aux "forces externes"

Equilibres des Eq. de la dynamique/repère fixe

Stabiliser (asymptotiquement) n'a de sens que pour un équilibre!!!

$$\dot{x} = f(x,u)\,, \qquad (x_0,u_0) : f(x_0,u_0) = 0$$

Pour ces drones:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{p} & = & v & = 0 \\ m\dot{v} & = & -TRe_3 + F_e & = 0 \\ \dot{R} & = & RS(\omega) & = 0 \\ J\dot{\omega} & = & -S(\omega)J\omega + \Gamma + \Gamma_e & = 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$p \text{ arbitraire}\,,\ v = 0\,,\ \omega = 0$$

et

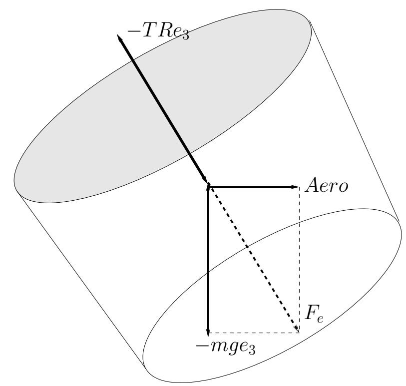
$$TRe_3 = F_e\,, \quad \Gamma = -\Gamma_e$$

Equilibres des Eq. de la dynamique/repère fixe

Conséquences importantes des équations d'équilibre:

$$TRe_3 = F_e\,, \quad \Gamma = -\Gamma_e$$

- Si $F_e \neq 0$,
  - la poussée T et la direction de poussée Re_3 sont imposées à l'équilibre.
  - Il reste un degré de liberté sur la rotation R



- Si $F_e = 0$,
  - $T = 0$ mais R quelconque
  - Ce cas n'arrive presque jamais. Pourquoi?
  - Heureusement, car le linéarisé n'est pas commandable dans ce cas

Equilibres des Eq. de la dynamique/repère fixe

Conséquences importantes des équations d'équilibre:

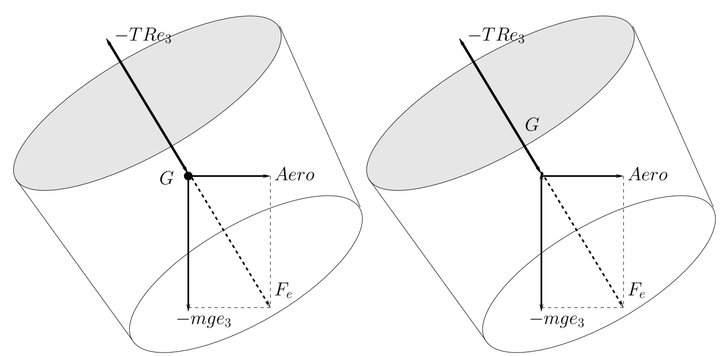
$$TRe_3 = F_e\,, \quad \Gamma = -\Gamma_e$$

- Dans tous les cas, $\Gamma = -\Gamma_e$
- En pratique, les forces et couples de commande sont bornés:

$$0 \leq T \leq T_{\max}\,, \quad \|\Gamma\| \leq \Gamma_{\max}$$

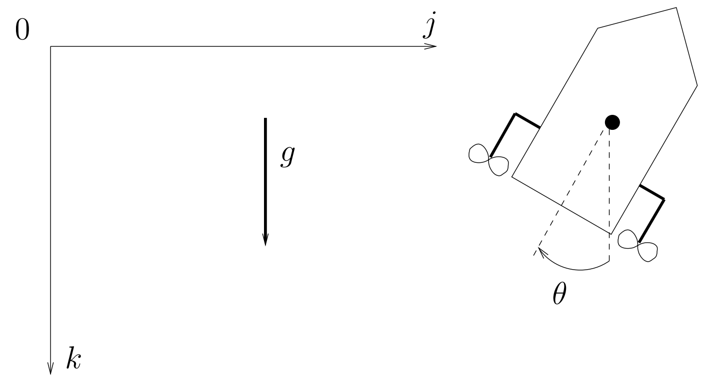
Donc,

- On ne peut contrer une force F_e dont l'intensité est $\geq T_{\max}$
- On ne peut pas contrer un couple dont l'intensité est $\geq \Gamma_{\max} \Longrightarrow$ importance de la position du CM/position du centre aéro!!!



$\Gamma_e = 0$ $\Gamma_e \neq 0$

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL



$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & -TRe_3 + F_e \\ \dot{R} & = & RS(\omega) \\ J\dot{\omega} & = & -S(\omega)J\omega + \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & -T(-\sin\theta, \cos\theta)' + F_e \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right.$$

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & -T(-\sin\theta, \cos\theta)' + F_e \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right.$$

Stabilisation de la direction de poussée:

- Objectif: stabiliser θ à une valeur de référence θ_r
- Equations d'erreur, avec $\tilde{\theta} = \theta - \theta_r, \tilde{\omega} = \omega - \dot{\theta}_r$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\theta}} & = & \tilde{\omega} \\ J\dot{\tilde{\omega}} & = & \Gamma + \Gamma_e - J\ddot{\theta}_r \end{array}\right.$$

- Contrôleurs Proportionnel/Dérivé:

$$\Gamma = J(-k_1\tilde{\theta} - k_2\tilde{\omega}) - \Gamma_e + J\ddot{\theta}_r\,, \qquad k_1, k_2 > 0$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\theta}} & = & \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} & = & -k_1\tilde{\theta} - k_2\tilde{\omega} \end{array}\right.$$

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

- Contrôleurs Proportionnel/Dérivé: (suite)
  - Stabilité asymptotique de $(\tilde{\theta}, \tilde{\omega}) = (0, 0)$.
  - En pratique on ne connait pas nécessairement Γ_e, d'où ...
- Contrôleur Proportionnel/Integral/Dérivé (PID): avec Γ_e inconnu

$$\Gamma = J\left(-k_0 \int \tilde{\theta} - k_1 \tilde{\theta} - k_2 \tilde{\omega}\right) + J\ddot{\theta}_r \,, \qquad k_0, k_1, k_2 > 0, k_0 < k_1 k_2$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\theta}} & = & \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} & = & -k_0 \int \tilde{\theta} - k_1 \tilde{\theta} - k_2 \tilde{\omega} + \Gamma_e \end{array} \right.$$

  - Stabilité asymptotique si Γ_e est constant.
  - Attention: il ne faut jamais implémenter un intégrateur tel quel!!!
  - Meilleure solution en pratique: intégrateur borné!

$$\Gamma = J\left(-k_0 I_{\tilde{\theta}} - k_1 \tilde{\theta} - k_2 \tilde{\omega}\right) \,, \quad k_0, k_1, k_2 > 0, k_0 < k_1 k_2$$

$$\dot{I}_{\tilde{\theta}} = -k(I_{\tilde{\theta}} - \mathrm{sat}_c(I_{\tilde{\theta}})) + \mathrm{sat}_d(\tilde{\theta}) \,, \quad c, d > 0$$

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

$$\begin{cases} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & -T(-\sin\theta, \cos\theta)' + F_e \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{cases}$$

Stabilisation de la vitesse: avec $F_e = cste \neq 0$.

- Objectif: stabiliser v à une valeur de référence v_r. On suppose v_r constante.
- Valeur de T et θ à l'équilibre

$$T_r = \|F_e\|\,, \quad \theta_r = \text{arctn2}(-F_{e,1}, F_{e,2})$$

- Solution lorsque $F_e = (0, mg)'$ (i.e. champ de gravité) $\Longrightarrow T_r = mg,\ \theta_r = 0$
- Linéarisé au point d'équilibre $(v, \theta, \omega) = (v_r, \theta_r, 0)$, $(T, \Gamma) = (T_r, -\Gamma_e)$

$$\begin{cases} m\dot{\tilde{v}} & = & (mg\tilde{\theta}, -\tilde{T})' \\ \dot{\tilde{\theta}} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{cases}$$

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

Stabilisation de la vitesse: (suite)

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\dot{\tilde{v}} & = & (mg\tilde{\theta}, -\tilde{T})' \\ \dot{\tilde{\theta}} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} m\dot{\tilde{v}}_3 = -\tilde{T} \\ \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{v}}_2 & = & g\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right. \end{array}$$

- Contrôle de type Proportionnel/Dérivé

$$\tilde{T} = mk_1'\tilde{v}_3\,, \quad \Gamma = -\Gamma_e + J(-k_1\tilde{v}_2 - k_2\tilde{\theta} - k_3\tilde{\omega})$$

- Contrôle de type Proportionnel/Intégral/Dérivé avec Γ_e inconnu

$$\tilde{T} = -mk_0'\int \tilde{v}_3 - mk_1'\tilde{v}_3\,, \quad \Gamma = J\left(-k_0'\int \tilde{v}_2 - k_1\tilde{v}_2 - k_2\tilde{\theta} - k_3\tilde{\omega}\right)$$

- Exercises:
  - Déterminer les conditions sur les gains pour assurer la stabilité asymptotique.
  - Etendre la solution au cas $F_e \neq 0$ constant mais différent de mg.

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & -T(-\sin\theta, \cos\theta)' + F_e \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right.$$

Stabilisation de la position:

- Objectif: stabiliser p à une valeur de référence p_r. On suppose $v_r = \dot{p}_r$ constant. Pour simplifier, on va aussi supposer que $F_e = (0, mg)'$.
- Valeur de T et θ à l'équilibre

$$T_r = \|F_e\|\,, \quad \theta_r = \text{arctn2}(-F_{e,1}, F_{e,2})$$

- Et oui, ce sont les mêmes que précédemment puisque par hypothèse v_r est constant!!!

Synthèse de lois de commande pour le PVTOL

Stabilisation de la position: (suite)

Linéarisé au point d'équilibre $(p, v, \theta, \omega) = (p_r, v_r, \theta_r, 0)$, $(T, \Gamma) = (T_r, -\Gamma_e)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}} & = & \tilde{v} \\ m\dot{\tilde{v}} & = & (mg\tilde{\theta}, -\tilde{T})' \\ \dot{\tilde{\theta}} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right.$$

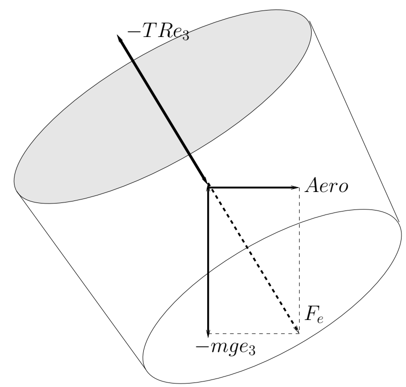
- Ce sont les mêmes que pour la stabilisation de la vitesse avec en plus l'équation $\dot{\tilde{p}} = \tilde{v}$.
- D'où une décomposition similaire en deux sous-systèmes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}}_3 & = & \tilde{v}_3 \\ m\dot{\tilde{v}}_3 & = & -\tilde{T} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}}_2 & = & \tilde{v}_2 \\ \dot{\tilde{v}}_2 & = & g\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} & = & \omega \\ J\dot{\omega} & = & \Gamma + \Gamma_e \end{array}\right.$$

- La suite, vous la connnaissez maintenant...

Synthèse de lois de commande pour les VTOLs

- On s'intéresse maintenant au cas général 3D



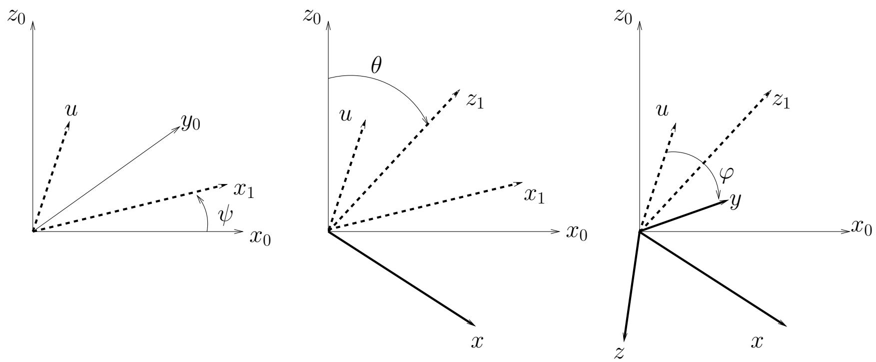
- La bonne nouvelle du jour!
  - Tout marche pareil,
  - Avec juste des dimensions plus élevées,
  - Donc si vous avez bien compris le cas 2D, vous saurez faire le cas 3D
- Avant cela, on va faire un rappel sur les paramétrisations des matrices de rotation.

Rappels sur les paramétrisations des rotations

Groupe $SO(3)$ des rotations:

$$R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : RR^T = I_3 \text{ et } \det(R) = 1$$

Paramétrisation par Angles d'Euler: $\Theta = (\varphi, \theta, \psi)$



$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Rappels sur les paramétrisations des rotations

Paramétrisation par Angles d'Euler: $\Theta = (\varphi, \theta, \psi)$

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{pmatrix}$$

Donc, localement autour de $\Theta = 0$,

$$\begin{aligned} R &\approx I_3 + S(\Theta) \\ \dot\Theta &\approx \omega \end{aligned}$$

Rappels sur les paramétrisations des rotations

Paramétrisation par Quaternions unitaires:
Formule de Rodrigues:

$$R = I + \sin\theta S(u) + 2\sin^2(\theta/2)S(u)^2$$

avec u unitaire tel que $Ru = u$, θ angle de la rotation.
On peut associer à R deux quaternions unitaires:

$$q = (q_s, q_v) = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}u), \quad q' = -q$$

Lorsque $\mathrm{Trace}(R) \neq -1$, q peut être défini directement à partir des éléments de R:

$$q_s = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{Trace}(R)}, \quad S(q_v) = \frac{R - R^T}{4q_s}$$

La formule de Rodrigues donne

$$R(q) = I + 2q_s S(q_v) + 2S(q_v)^2$$

Rappels sur les paramétrisations des rotations

Paramétrisation par Quaternions unitaires:

$$\dot{q} = L(q)\omega, \qquad L(q) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -q_v^T \\ q_s I + S(q_v) \end{pmatrix}$$

Donc, localement autour de $\Theta = 0$,

$$\dot{q}_v = \omega/2$$

En posant $\Theta = 2q_v$, on a aussi, localement

$$\begin{aligned} R &\approx I_3 + S(\Theta) \\ \dot{\Theta} &\approx \omega \end{aligned}$$

En résumé, localement, toutes les paramétrisations sont équivalentes!

Linéarisé par rapport à une trajectoire p_r

- Rappel de la dynamique

$$\begin{cases} \dot{p} &= v \\ m\dot{v} &= -{\color{red}T}Re_3 + F_e \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= -S(\omega)J\omega + {\color{red}\Gamma} + \Gamma_e \end{cases}$$

- On se donne une trajectoire en position p_r telle que $\dot{p}_r = v_r$ = constante.
- On suppose pour simplifier que $F_e = mge_3$.
- Valeurs d'équilibre $(p, v, R, \omega) = (p_r, v_r, R^*, \omega^*)$ avec R^* toute matrice telle que $R^*e_3 = e_3$, et $\dot{R}^* = R^*S(\omega^*)$. $T_r = mg$, $\Gamma = -\Gamma_e + S(\omega^*)J\omega^*$.
- On choisit $R^* = I$ (et donc $\omega^* = 0$).
- Equations linéarisées:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} &= \tilde{v} \\ m\dot{\tilde{v}} &= -\tilde{T}e_3 + T_rS(e_3)\tilde{\Theta} \\ \dot{\tilde{\Theta}} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}_e := J^{-1}\Gamma + J^{-1}\Gamma_e \end{cases}$$

Linéarisé par rapport à une trajectoire p_r

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}} & = & \tilde{v} \\ m\dot{\tilde{v}} & = & -\tilde{T}e_3 + T_r S(e_3)\tilde{\Theta} \\ \dot{\tilde{\Theta}} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & \bar{\Gamma} + \Gamma_e := J^{-1}\Gamma + J^{-1}\Gamma_e \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}}_3 & = & \tilde{v}_3 \\ m\dot{\tilde{v}}_3 & = & -\tilde{T} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\Theta}}_3 & = & \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 & = & \bar{\Gamma}_3 + \bar{\Gamma}_{e,3} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}}_1 & = & \tilde{v}_1 \\ \dot{\tilde{v}}_1 & = & -g\tilde{\Theta}_2 \\ \dot{\tilde{\Theta}}_2 & = & \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 & = & \bar{\Gamma}_2 + \bar{\Gamma}_{e,2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{p}}_2 & = & \tilde{v}_2 \\ \dot{\tilde{v}}_2 & = & g\tilde{\Theta}_1 \\ \dot{\tilde{\Theta}}_1 & = & \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 & = & \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_{e,1} \end{array}\right.$$