Commande de robots mobiles non-holomomes

Partie II: Stabilisation de trajectoires

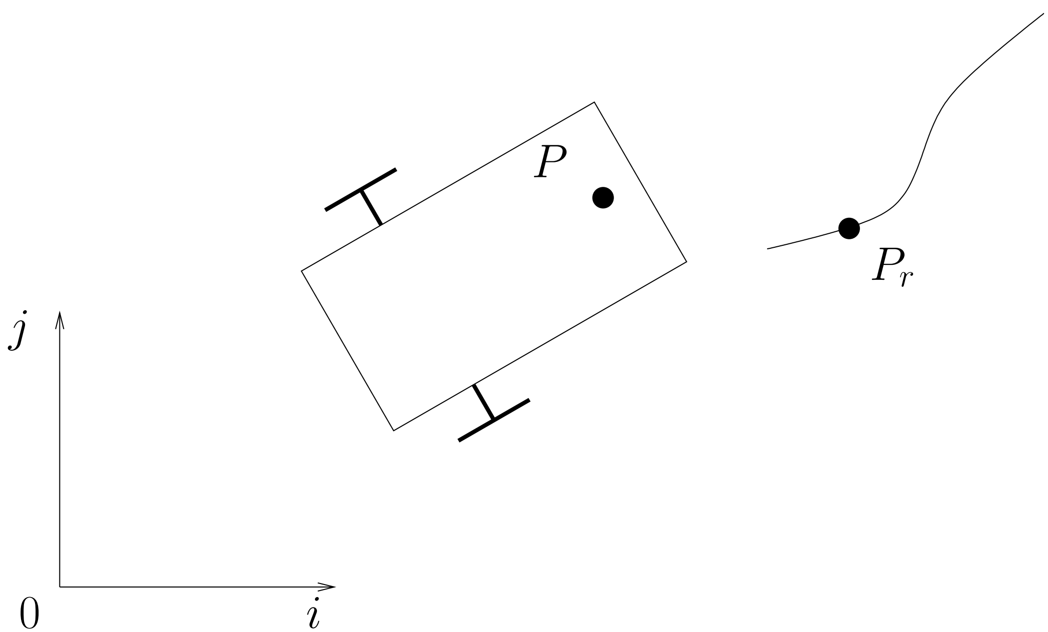
P. MORIN

ISIR

Sorbonne Université

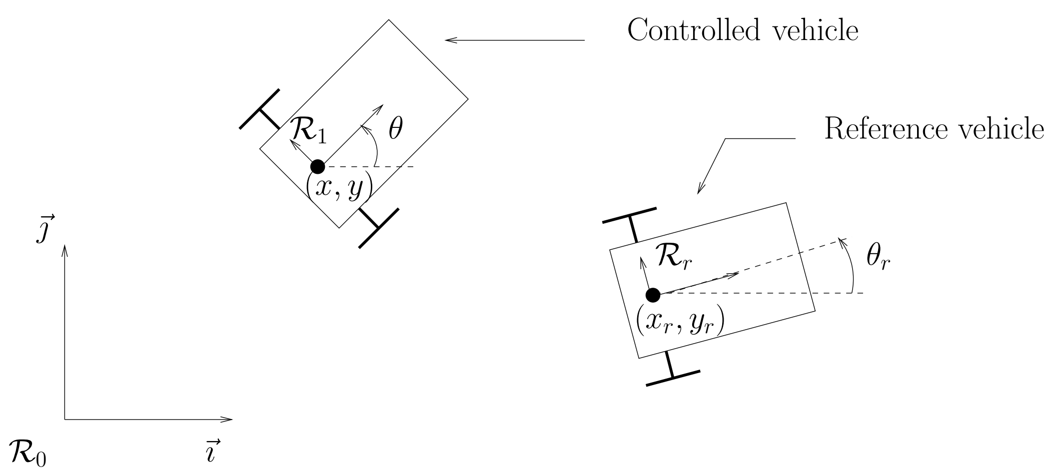
Rappel: Stabilisation de la position

- On se donne une trajectoire de référence en position $(x_r(t), y_r(t))$ asociée à un point de référence P_r
- On se donne un point de contrôle sur le véhicule
- On souhaite stabiliser asymptotiquement le point de contrôle vers la trajectoire de référence



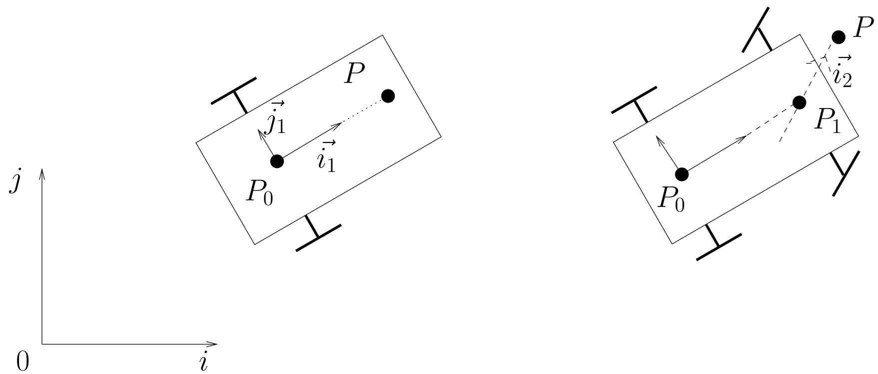
rappel: Stabilisation de la position et de l'orientation

- On se donne une trajectoire de référence en position/orientation $(x_r(t), y_r(t), \theta_r)$ asociée à un véhicule de référence
- On se donne un repère de contrôle sur le véhicule
- On souhaite stabiliser asymptotiquement le repère de contrôle vers la trajectoire de référence



Stabilisation de la position

L'idée consiste à choisir un point de contrôle P "adéquat":



- Unicycle: $\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_0} + \ell_1 \overrightarrow{\imath_1} + \ell_2 \overrightarrow{\jmath_1}$
- On définit l'erreur $e = (x_P - x_r, y_P - y_r)'$

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\ell_1 \sin\theta \\ \sin\theta & \ell_1 \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\ell_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix}$$

- Si $\ell_1 \neq 0$, on peut choisir (u_1, u_2) telle que $\dot{e} = -Ke$ avec $K > 0$. Alors, $e \longrightarrow 0$ exponentiellement ($V = \|e\|^2$ est une fonction de Lyapunov).
- Voiture: Idem avec $\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + d\overrightarrow{\imath_2}$ ($d \neq 0$)

Stabilisation en position/orientation

Un peu de théorie: (ce qui suit est vrai pour les robots mobiles classiques: unicycle, voiture, avec remorques, etc)

- Le linéarisé du modèle cinématique en un point fixe n'est ni commandable, ni asymptotiquement stabilisable. Exemple: Unicycle, linearisé avec $\theta_0 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & u_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & u_1 \\ \dot{y} & = & 0 \\ \dot{\theta} & = & u_2 \end{array}\right.$$

- Le modèle cinématique est commandable par construction (i.e. pour obtenir ce modèle, on a supprimé les contraintes intégrables):

$$\dim\{X_i(q_0), [X_i, X_j](q_0), [X_i, [X_j, X_k]](q_0), \ldots\} = n$$

- Les points fixes ne peuvent pas être stabilisés asymptotiquement avec des retours d'état statiques continus $u(x, y, \theta)$ (conséquence du Th. de Brockett (1981).

Stabilisation en position/orientation

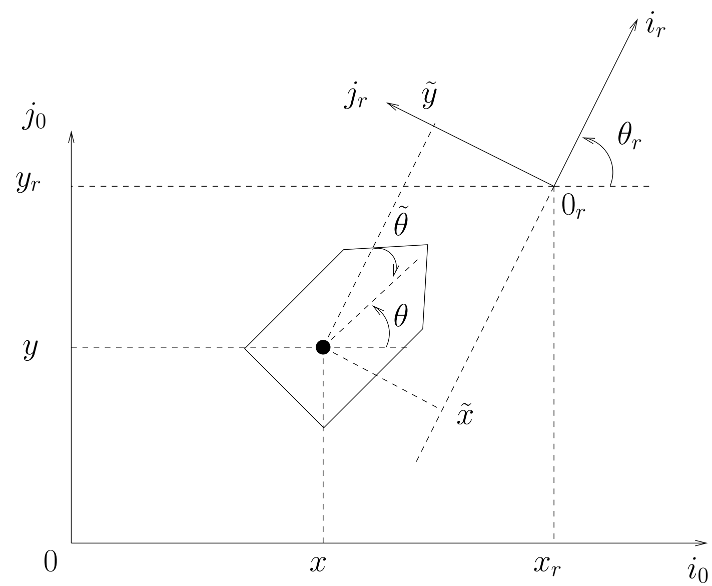
- Les points fixes peuvent être stabilisés asymptotiquement avec du retour d'état instationnaire continu $u(x, y, \theta, t)$.
- Le linéarisé du modèle cinématique le long de trajectoires non-constantes, est la plupart du temps commandable.
  Exemple: Unicycle, trajectoire de référence $q_r(t) = (t, 0, 0)$, solution de $\dot{q}_r = u_1^r X_1(q_r) + u_2^r X_2(q_r)$ avec $u_1^r = 1, u_2^r = 0$. Linéarisé:

$$\dot{q}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_e + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_e$$

- Conséquences:
  - Pour la stabilisation de trajectoire non-constantes, les outils classiques de l'automatique (commande linéaire, et autres techniques étudiées en MU5RBR30) suffisent.
  - Pour la stabilisation asymptotique de points fixes, on doit utiliser des techniques très non-linéaires. Ce problème n'est pas étudié ici.

Stabilisation en position/orientation: modèle d'erreur

- Le choix $\tilde{q} = q - q_r$ n'est pas le meilleur
- Cinématique par rapport au repère de référence



- On a:

$$\tilde{g} := \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-\theta_r) \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{pmatrix} \\ \theta - \theta_r \end{pmatrix}$$

- Sens géométrique: $\tilde{g} = g_r^{-1} g$ avec le produit et l'inverse au sens du groupe de Lie SE(2) des mouvements rigides du plan

Stabilisation en position/orientation

Unicycle: Avec $\tilde{g} = g_r^{-1} g$, la cinématique de l'erreur est:

- $$\dot{\tilde{g}} = u_1 \begin{pmatrix} \cos\tilde{\theta} \\ \sin\tilde{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - u_1^r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - u_2^r \begin{pmatrix} -\tilde{g}_2 \\ \tilde{g}_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On peut en déduire un contrôleur linéaire, avec $\tilde{\theta} \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{cases} u_1 = u_1^r - k_1 |u_1^r| \tilde{g}_1 \\ u_2 = u_2^r - k_2 u_1^r \tilde{g}_2 - k_3 |u_1^r| \tilde{\theta} \end{cases}$$

- Linearisé du système en boucle fermée:

$$\dot{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} -k_1|u_1^r| & u_2^r & 0 \\ -u_2^r & 0 & u_1^r \\ 0 & -k_2 u_1^r & -k_3|u_1^r| \end{pmatrix} \tilde{g}$$

- On en déduit la stabilité asymptotique locale si $k_i > 0$, $u_1^r, \dot{u}_1^r$ sont bornées, et $\exists T, \delta > 0 :\ \int_t^{t+T} |u_1^r|(s)\, ds \geq \delta$ pour tout t

Stabilisation en position/orientation

- Contrôleur non-linéaire:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^r - k_1|u_1^r|(\tilde{g}_1\cos\tilde{\theta} + \tilde{g}_2\sin\tilde{\theta}) \\ u_2 = u_2^r - k_2 u_1^r \cos^3\frac{\tilde{\theta}}{2}(-\tilde{g}_1\sin\frac{\tilde{\theta}}{2} + \tilde{g}_2\cos\frac{\tilde{\theta}}{2}) - k_3|u_1^r|\tilde{\theta} \end{cases}$$

- Soit $V := k_2(\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2) + 4\tan^2\frac{\tilde{\theta}}{2}$, alors

$$\dot{V} = -2k_1k_2|u_1^r|(\tilde{g}_1\cos\tilde{\theta} + \tilde{g}_2\sin\tilde{\theta})^2 - 4k_3|u_1^r|\tilde{\theta}\tan\frac{\tilde{\theta}}{2}(1+\tan^2\frac{\tilde{\theta}}{2})$$

- On en déduit la stabilité asymptotique quasi-globale ($\tilde{\theta}(0) \neq \pi$) si
  - u_1^r et $\dot{u}_1^r$ sont bornées
  - $u_1^r(t) \not\longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$

Stabilisation en position/orientation

Voiture: On modifie légèrement le modèle cinématique:

$$\left\{\begin{array}{ccl}\dot{x} & = & u_1\cos\theta\\ \dot{y} & = & u_1\sin\theta\\ \dot{\theta} & = & \frac{u_1}{L}\tan\varphi\\ \dot{\varphi} & = & u_2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccl}\dot{x} & = & v_1\cos\theta\\ \dot{y} & = & v_1\sin\theta\\ \dot{\theta} & = & v_1\zeta\\ \dot{\zeta} & = & v_2\end{array}\right.$$

- Avec $\tilde{q} := (\tilde{g}, \tilde{\zeta}) := (g_r^{-1}g, \zeta - \zeta_r)$, on a

$$\dot{\tilde{q}} = v_1\begin{pmatrix}\cos\tilde{\theta}\\ \sin\tilde{\theta}\\ \tilde{\zeta}+\zeta_r\\ 0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - v_1^r\begin{pmatrix}1-\tilde{g}_2\zeta_r\\ \tilde{g}_1\zeta_r\\ \zeta_r\\ 0\end{pmatrix} - v_2^r\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- Contrôleur linéaire:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = v_1^r - k_1|u_1^r|\tilde{g}_1 - \frac{k_1}{2k_2}\zeta_r|u_1^r|\tilde{\theta}\\ v_2 = v_2^r + 2k_2u_1^r\zeta_r\tilde{g}_1 - 2k_2k_4|u_1^r|\tilde{g}_2 - u_1^r(2k_2+\frac{k_3}{2})\tilde{\theta} - k_4|u_1^r|\tilde{\zeta}\end{array}\right.$$

Stabilisation en position/orientation

- Conditions de stabilité: comme pour l'unicycle
- Preuve de la stabilité: similaire (fonction de Lyapunov synthétisée pour le système linéarisé)
- Contrôleur non-linéaire: peut aussi être synthétisé pour obtenir une stabilité quasi-globale