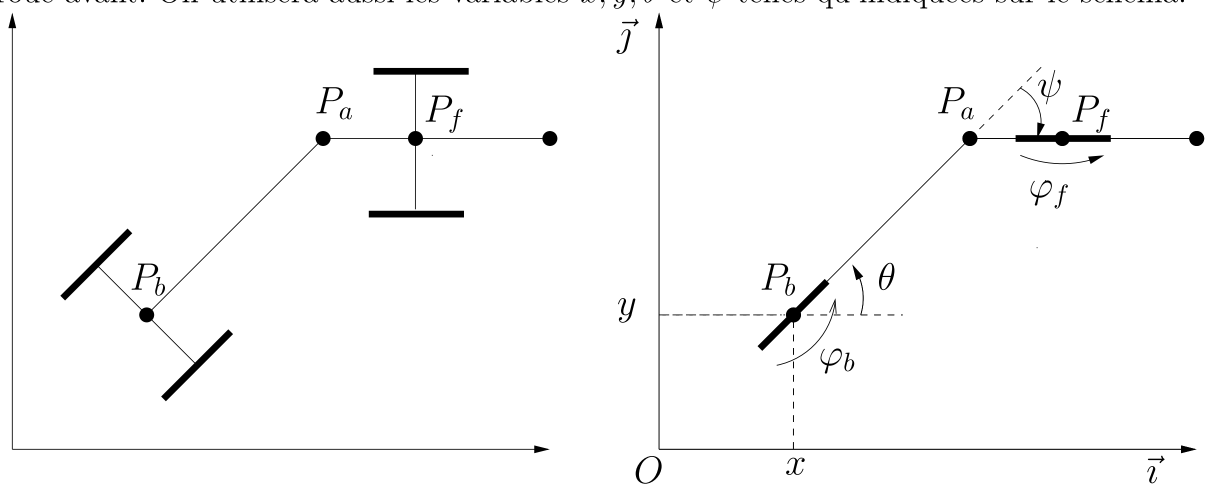
TD Robotique Mobile
Master SAR - M2

Modélisation d'un véhicule à remorque

La figure ci-dessous représente un véhicule à remorque. Le véhicule de tête est de type unicycle. Les deux roues arrières de ce véhicule sont actionnées de façon à pouvoir imposer les vitesses de rotation $\dot{\varphi}_g$ et $\dot{\varphi}_d$ des roues gauche et droite respectivement. Une remorque, également de type unicycle, est accrochée au véhicule de tête au point P_a via une liaison pivot. Notons que le point d'attache est déporté par rapport au centre de l'essieu du véhicule de tête. Les deux roues arrières de cette remorque ne sont pas actionnées. Le centre P_b des roues arrières de la remorque est situé à une distance L_1 du point d'attache P_a, et ce dernier est situé à une distance L_2 du centre P_f des roues du véhicule de tête. Dans tout l'énoncé, on travaillera avec le schéma simplifié équivalent de la partie droite de la figure, où chaque essieu à été réduit à une roue unique équivalente. Les roues de ce schéma équivalent sont supposées de même rayon r, et leur angle de rotation interne est noté φ_b pour la roue arrière et φ_f pour la roue avant. On utilisera aussi les variables x, y, θ et ψ telles qu'indiquées sur le schéma.



1. Ecrire les contraintes cinématiques de roulement sans glissement sur la roue arrière.
2. Ecrire les contraintes cinématiques de roulement sans glissement sur la roue avant, et montrer qu'elles peuvent se ré-exprimer sous la forme suivante :

$$R(\theta+\psi)\begin{pmatrix} r\dot{\varphi}_f \\ -L_2(\dot{\theta}+\dot{\psi}) \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} r\dot{\varphi}_b \\ L_1\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

où, pour tout angle ξ, $R(\xi)$ désigne la matrice de rotation du plan d'angle ξ, i.e.,

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}$$

3. Rappeler la relation qu'il y a entre $(\dot{\varphi}_g, \dot{\varphi}_d)$ d'une part, et $r\dot{\varphi}_f$ et $\dot{\theta}+\dot{\psi}$ d'autre part, puis vérifier que si $|\psi| < \frac{\pi}{2}$, alors il existe une relation bijective entre $(r\dot{\varphi}_f, \dot{\theta}+\dot{\psi})$ d'une part et $(r\dot{\varphi}_b, \dot{\theta}+\dot{\psi})$ d'autre part. En déduire que l'on peut considérer ces dernières variables comme des variables de commande.
4. Déduire des questions précédentes que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & u_1 \frac{\tan\psi}{L_1} - u_2 \frac{L_2}{L_1 \cos\psi} \\ \dot{\psi} & = & \left(1 + \frac{L_2}{L_1\cos\psi}\right) u_2 - u_1 \frac{\tan\psi}{L_1} \end{array}\right. \tag{1}$$

   où $u_1 = r\dot{\varphi}_b$ et $u_2 = \dot{\theta} + \dot{\psi}$.
5. Que devient ce modèle lorsque $L_2 = 0$?
6. Vérifier que ce modèle de commande est commandable (i.e., que les contraintes cinématiques associées ne contiennent pas de contrainte intégrable).