Commande de robots mobiles non-holomomes

Partie I: Suivi de chemin

P. MORIN

ISIR

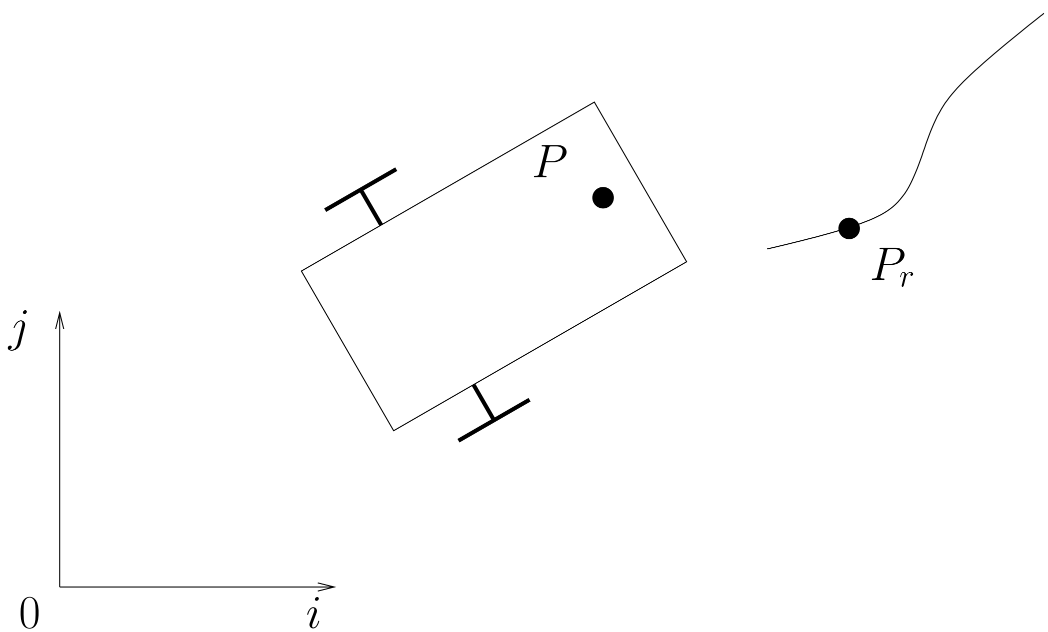
Sorbonne Université

Plan

- Les principaux problèmes de commande de robots mobiles
- Le problème de suivi de chemin

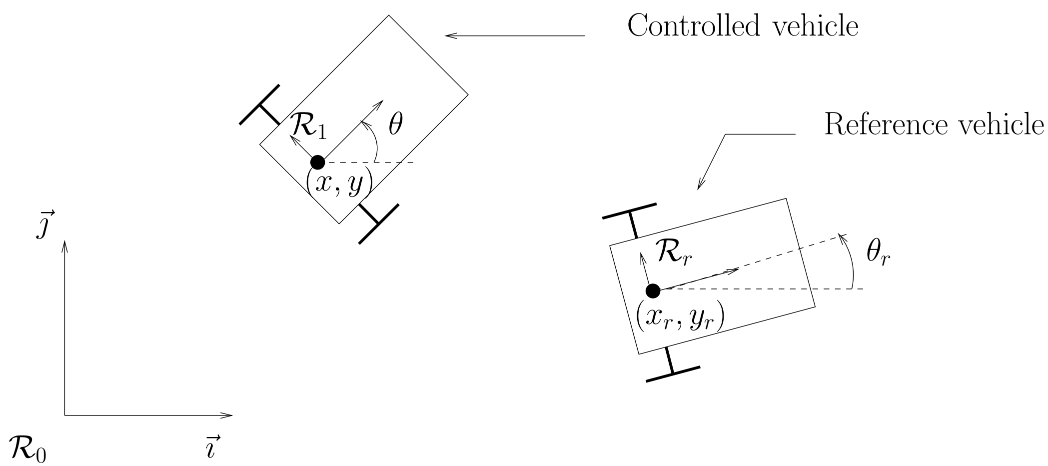
Stabilisation de la position

- On se donne une trajectoire de référence en position $(x_r(t), y_r(t))$ asociée à un point de référence P_r
- On se donne un point de contrôle sur le véhicule
- On souhaite stabiliser asymptotiquement le point de contrôle vers la trajectoire de référence



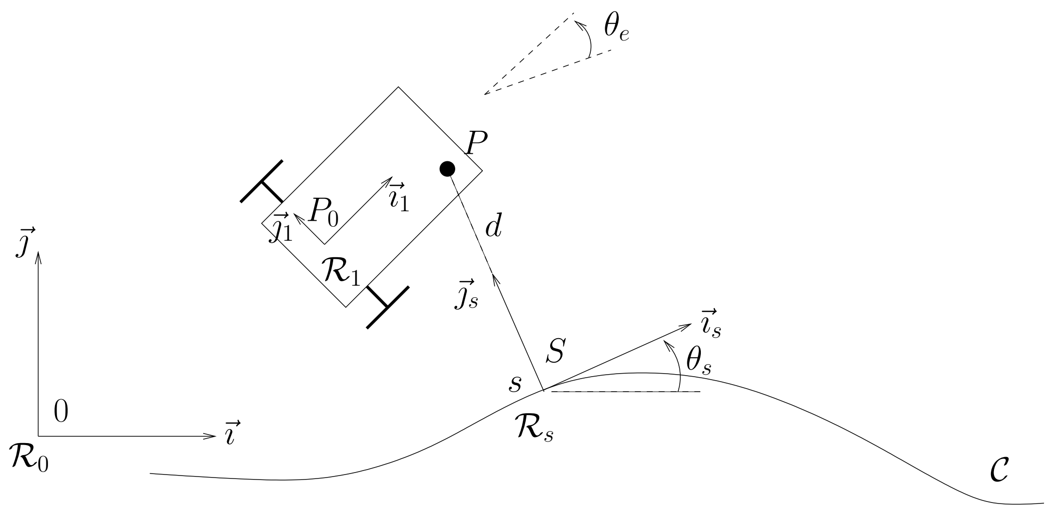
Stabilisation de la position et de l'orientation

- On se donne une trajectoire de référence en position/orientation $(x_r(t), y_r(t), \theta_r)$ asociée à un véhicule de référence
- On se donne un repère de contrôle sur le véhicule
- On souhaite stabiliser asymptotiquement le repère de contrôle vers la trajectoire de référence



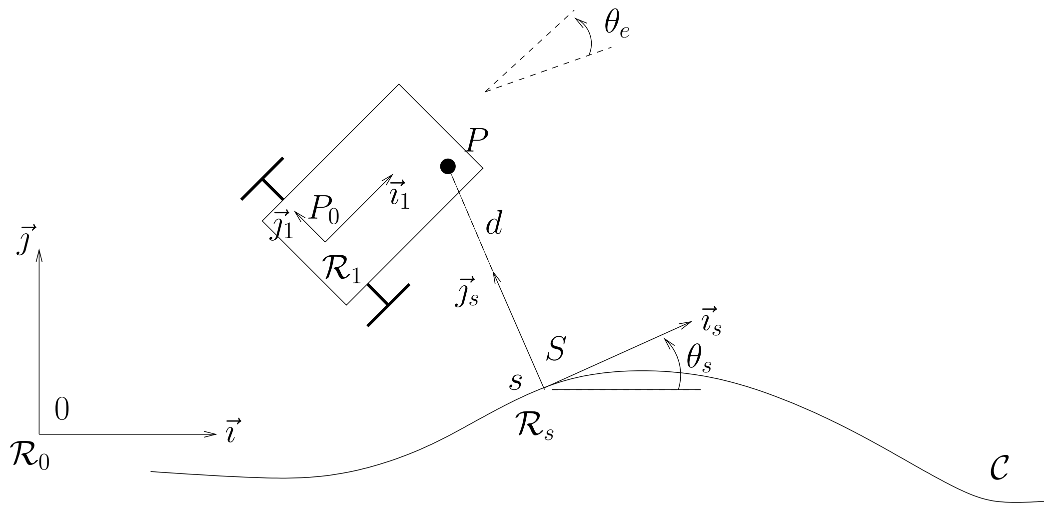
Suivi de chemin

- On se donne une courbe $\mathcal{C}$ du plan
- On se donne une vitesse du véhicule, et un point de contrôle P sur le véhicule
- On souhaite faire converger le point P vers la courbe



Suivi de chemin

- On utilise un repère de Frénet attaché à $\mathcal{C}$



- On obtient, avec $\overrightarrow{P_0P} = \ell_1 \overrightarrow{\imath_1} + \ell_2 \overrightarrow{\jmath_1}$,

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \dot{s} & = & \dfrac{1}{1 - dc(s)} [(u_1 - l_2\dot{\theta}) \cos\theta_e - l_1\dot{\theta} \sin\theta_e] \\ \dot{d} & = & (u_1 - l_2\dot{\theta}) \sin\theta_e + l_1\dot{\theta} \cos\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & \dot{\theta} - \dot{s}c(s) \end{array} \right.$$

- Unicycle: $\dot{\theta} = u_2$
- Voiture: $\dot{\theta} = \frac{u_1}{L} \tan\varphi$ et $\dot{\varphi} = u_2$

Suivi de chemin avec contrôle en position seulement

Unicycle:

$$\dot{d} = u_1 \sin\theta_e + u_2(-\ell_2 \sin\theta_e + \ell_1 \cos\theta_e)$$

- On pose $\ell_2 = 0, \ell_1 u_1 \geq 0$ et

$$u_2 = -\frac{u_1 \tan\theta_e}{\ell_1} - k u_1 d \quad (k > 0)$$

- Alors

$$\dot{d} = -k(\ell_1 u_1 \cos\theta_e) d$$

- Convergence: $d \longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$ si

$$\int_0^t \ell_1 u_1(s)\, ds \longrightarrow +\infty \quad \text{as} \quad t \longrightarrow +\infty$$

et

$$\theta_e(0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\ell_1 \max c(s)}{1 - |d(0)| \max c(s)} < 1$$

Suivi de chemin avec contrôle en position seulement

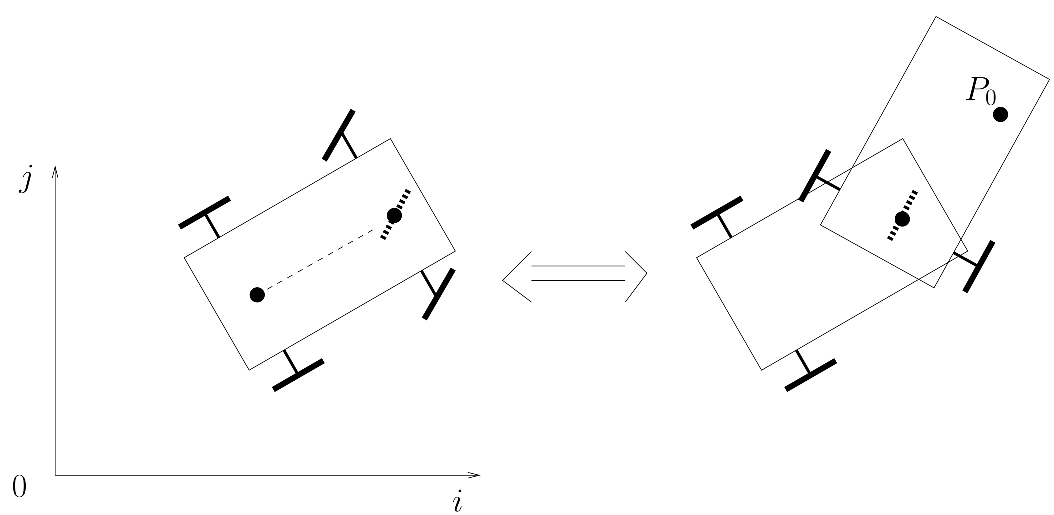
- Autres lois de commande:
  - Une loi très simple, mais avec une cv. locale et une hypothèse de courbure petites $c(s)$, qui assure seulement que d est ultimement petit (pas de garantie de cv. vers 0)

$$u_2 = -k u_1 d \quad (k > 0)$$

  - Extension: PI:

$$u_2 = -k_1 u_1 d - k_0 u_1 I_d \quad (k_1, k_0 > 0) \quad \text{with} \quad \dot{I}_d = \ell_1 u_1 d$$

- Voiture? La même approche fonctionne pour u_1 Positive seulement



Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

Unicycle: On pose $P = P_0$, i.e. $\ell_1 = \ell_2 = 0$

- Alors,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{d} & = & u_1 \sin \theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_2 - \frac{u_1 c(s)}{1 - d c(s)} \cos \theta_e \end{array} \right.$$

- Posons

$$u_2 = \frac{u_1 c(s)}{1 - d c(s)} \cos \theta_e - k_1 u_1 d \cos^3 \theta_e - k_2 |u_1| \sin \theta_e \quad (k_1, k_2 > 0)$$

- La fonction $V = \frac{1}{2}(k_1 d^2 + \tan^2 \theta_e)$ satisfait

$$\dot{V} = -k_2 |u_1| \frac{\sin^2 \theta_e}{\cos^3 \theta_e}$$

- Convergence: d & $\theta_e \longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$ si
  - $u_1, \dot{u}_1$, et $c(s)$ sont bornés, et $u_1 \not\longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$
  - $\theta_e(0) \in (-\pi/2, \pi/2)$
  - $\sqrt{2V(0)/k_1} < 1/\max c(s)$ de sorte que $|d(t)c(s(t))| < 1$ pour tout t

Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

- Autres lois de commande:
  - Une loi très simple, mais avec une cv. locale et une hypothèse de courbure petites $c(s)$, qui assure seulement que d est ultimement petit (pas de garantie de cv. vers 0)

$$u_2 = -k_1 u_1 d - k_2 |u_1| \theta_e \quad (k_1, k_2 > 0)$$

  - Extension: PID:

$$u_2 = -k_1 u_1 d - k_2 |u_1| \theta_e - k_0 |u_1| I_d \quad \text{with} \quad \dot{I}_d = u_1 d$$

Attention! système du 3ème ordre $\Longrightarrow k_i > 0$ n'est pas une condition suffisente de stabilité

Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

Problématiques d'estimation

- Très souvent, on ne mesure pas toutes les variables nécessaires à l'implémentation de la commande
- Il faut alors les estimer
- Exemple: On ne mesure que d, comment estimer θ_e???

Une solution simple basée sur le linéarisé:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{d} & = & u_1\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_2 - u_1 c(s) \end{array}\right.$$

Solution 1: hypothèse de courbure nulle

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{d}} & = & u_1\hat{\theta}_e - k_1|u_1|(\hat{d} - d) \\ \dot{\hat{\theta}}_e & = & u_2 - k_2 u_1(\hat{d} - d) \end{array}\right.$$

Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

Problématiques d'estimation

- Solution 1: hypothèse de courbure nulle

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{\hat{d}} & = & u_1\hat{\theta}_e - k_1|u_1|(\hat{d}-d)\\ \dot{\hat{\theta}}_e & = & u_2 - k_2u_1(\hat{d}-d)\end{array}\right.$$

Analyse de stabilité:

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{d}}\\ \dot{\tilde{\theta}}_e\end{pmatrix} = |u_1|\begin{pmatrix}-k_1 & 1\\ -k_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}\\ \theta_e\end{pmatrix}$$

ou fonction de Lyapounov: $V(\tilde{d},\tilde{\theta}_e) = k_2\tilde{d}^2 + \tilde{\theta}_e^2$.

- Solution 2: hypothèse de courbure constante

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{d} & = & u_1\theta_e\\ \dot{\theta}_e & = & u_2 - u_1c(s)\\ \dot{c}(s) & = & 0\end{array}\right.$$

Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

Voiture: On pose aussi $P = P_0$, i.e. $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{d} & = & u_1 \sin\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_1 \frac{\tan\varphi}{L} - \frac{u_1 c(s)}{1-dc(s)} \cos\theta_e \\ \dot{\varphi} & = & u_2 \end{array}\right.$$

- **Etape 1:** Soit $\xi := \frac{\tan\varphi}{L} - \frac{c(s)}{1-dc(s)} \cos\theta_e$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{d} & = & u_1 \sin\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_1 \xi \\ \dot{\xi} & = & \bar{u}_2 \end{array}\right.$$

  avec $(u_1, u_2) \longmapsto (u_1, \bar{u}_2)$ un changement de variables de commande pour $|\varphi_1| < \pi/2$.

- **Etape 2:** Soit $\tilde{\xi} := \xi + k_1 d \cos^3\theta_e$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{d} & = & u_1 \sin\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & -u_1 k_1 d \cos^3\theta_e + u_1 \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} & = & \bar{v}_2 \end{array}\right.$$

  avec $(u_1, \bar{u}_2) \longmapsto (u_1, v_2)$ un autre chgmt. de variables de commande

Suivi de chemin avec contrôle en position/orientation

- **Etape 3:** Soit

$$v_2 = -k_2 u_1 \frac{\sin\theta_e}{\cos^3\theta_e} - k_3|u_1|\tilde{\xi}$$

- La fonction $V = \frac{1}{2}(k_1 k_2 d^2 + k_2 \tan^2\theta_e + \tilde{\xi}^2)$ satisfait

$$\dot{V} = -k_3|u_1|\tilde{\xi}^2$$

- Convergence: d & $\theta_e \longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$ si
  - $k_1, k_2, k_3 > 0$
  - $u_1, \dot{u}_1$, et $c(s)$ sont bornés, et $u_1 \not\longrightarrow 0$ qd. $t \longrightarrow +\infty$
  - $\theta_e(0) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi(0) \in (-\pi/2, \pi/2)$
  - $\sqrt{2V(0)/(k_1k_2)} < 1/\max c(s)$ de sorte que $|d(t)c(s(t))| < 1$ pour tout t
- Attention! Ne pas oublier de ré-exprimer la commande dans les variables de départ. (i.e. $v_2 \longmapsto u_2$)