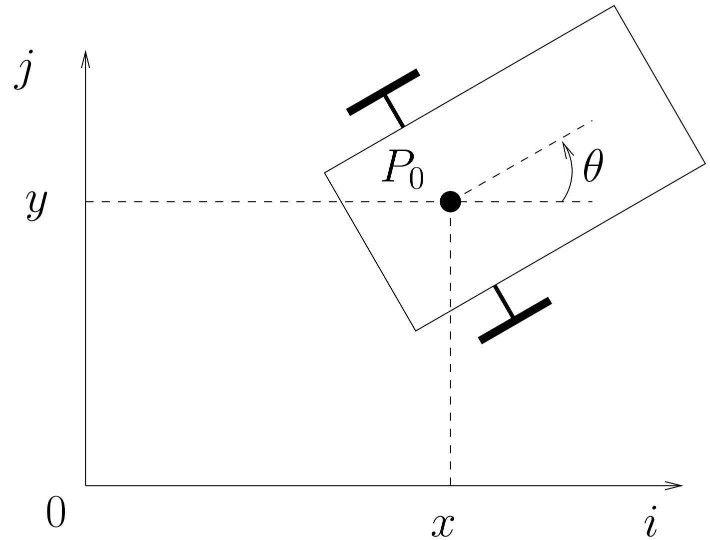
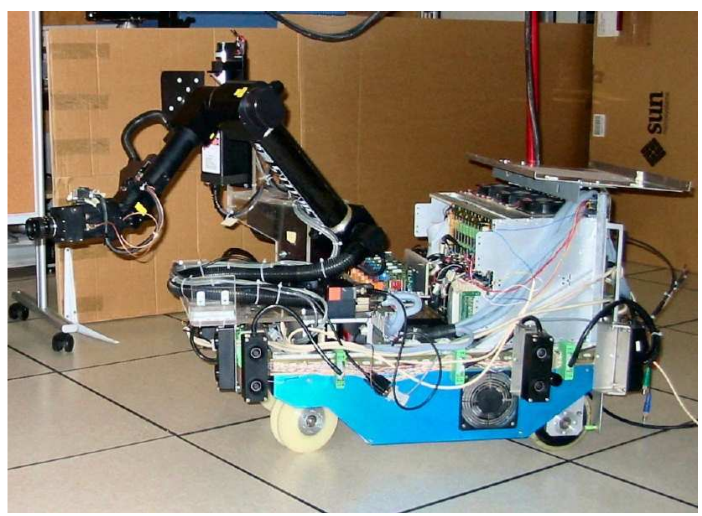
Modélisation et commande
de robots mobiles non-holomomes

P. MORIN
ISIR
Sorbonne Université

Introduction

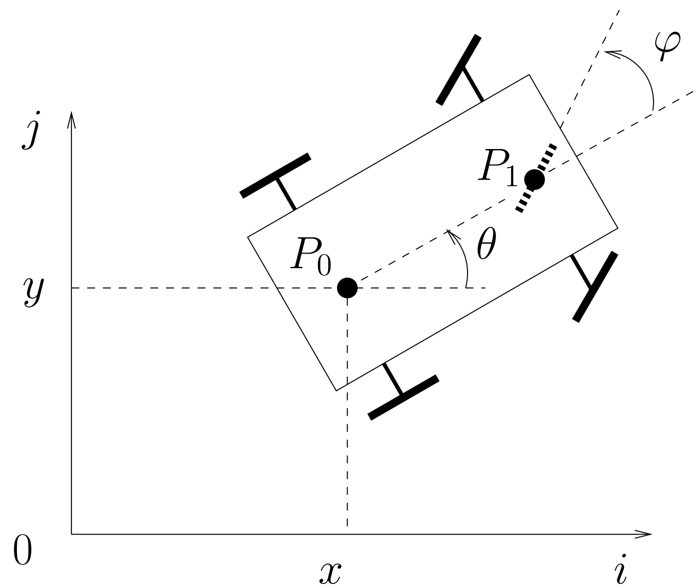
Robot de type unicycle:





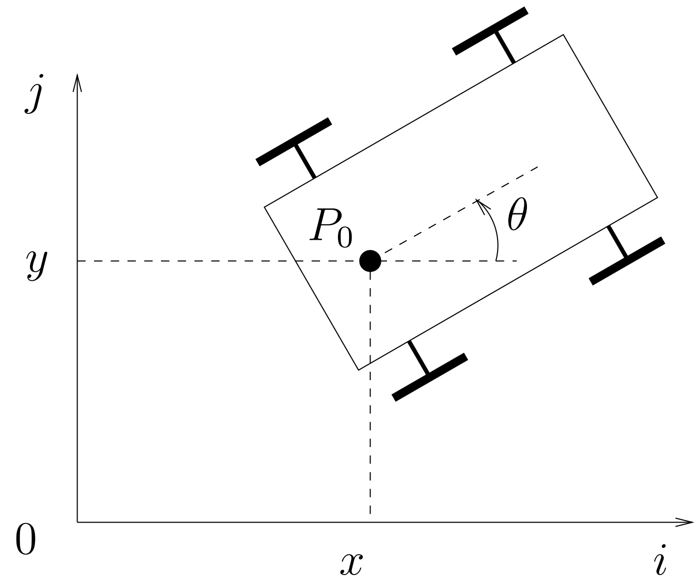
Introduction

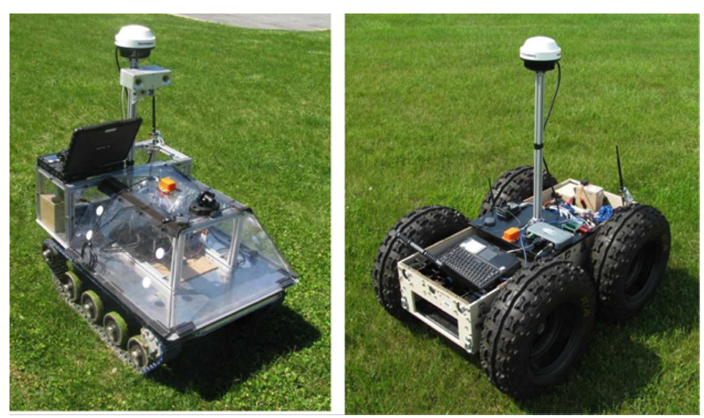
Robot de type voiture:



Introduction

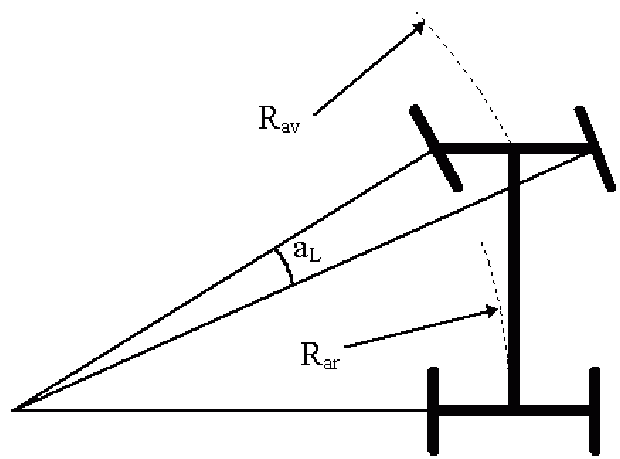
Robot de type "Skid-steering":





Introduction

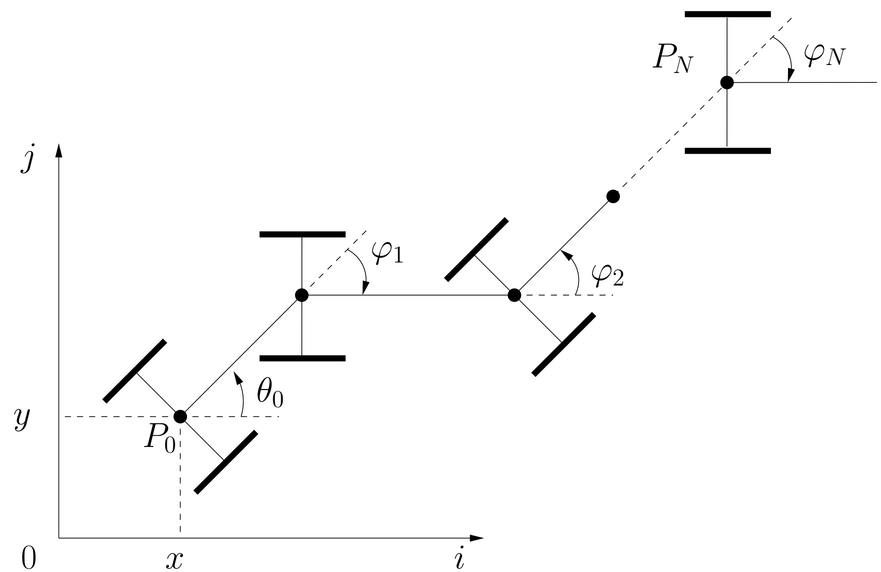
Principe fondamental: CIR (Centre Instantanné de Rotation): Dans tout corps rigide en mouvement plan, il existe à chaque instant au plus un point ayant une vitesse nulle



Conséquence: Le roulement sans glissement n'est possible que sous certaines conditions géométriques sur la disposition des roues

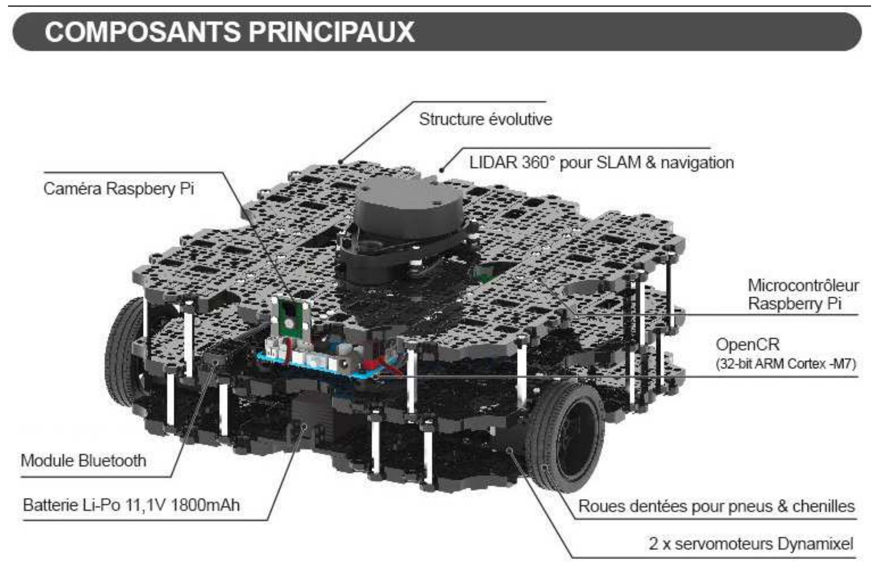
Introduction

Système avec remorques:



Constitution d'un robot mobile

Exemple: TurtleBot3 Waffle Pi

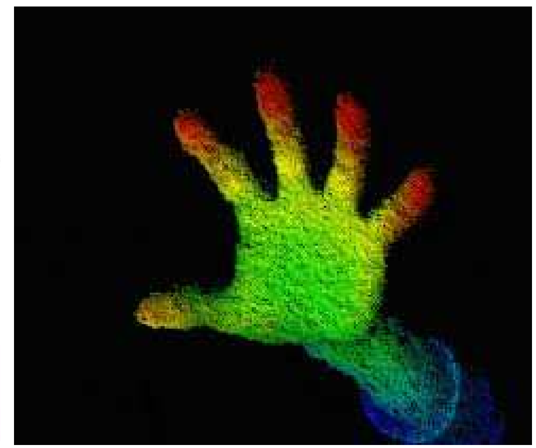


Specs:

- Vitesse translationnelle maximale : 0,26 m/s
- Vitesse rotationnelle maximale : 1,82 rad/s (104,27Â°/s)
- Dimensions: 281 x 306 x 141 mm
- Charge maximale: 30 kg
- Poids (incluant batterie): 1.8 kg
- Autonomie: $\approx 2h$

Constitution d’un robot mobile

Composants complémentaires:



- Codeurs optiques
- Capteurs
  - Ultrasons
  - Lasers, Cameras, etc

Introduction

A quoi va t-on s'intéresser?

- Modélisation
- Synthèse de lois de commande

Modélisation

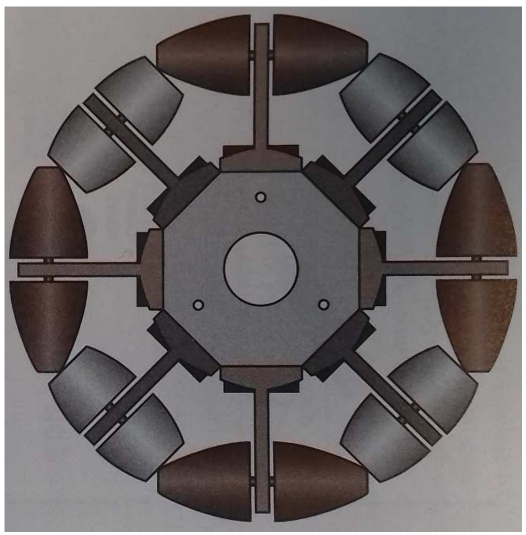
Principaux types de roues: On distingue deux grandes classes de roues:

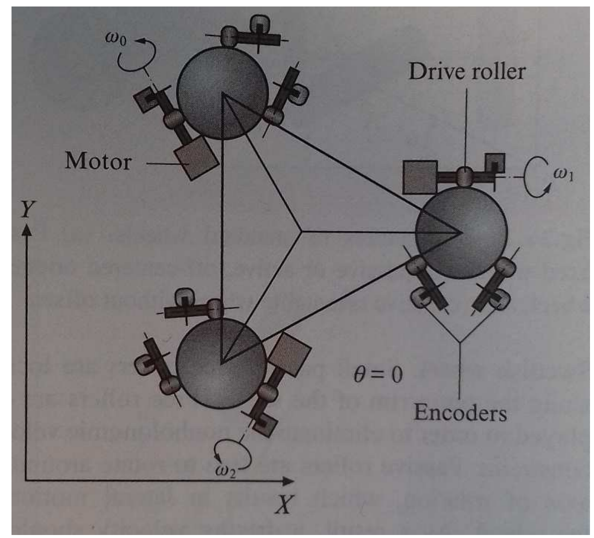
- Roues conventionnelles:
  - Deux degrés de liberté instantannés dans le plan: translation dans le plan de la roue + rotation autour d'un axe verical passant par le centre de la roue
  - Simples de conception, et donc très utilisées
  - Mais conduisent à une contrainte cinématique
- Roues omnidirectionnelles: (Images issues de "Handbook of robotics", Spinger Verlag, 2016)
  - Deux familles proncipales: Roues Suédoises, Roues sphériques
  - Pas de contrainte cinématique
  - Mais conception plus complexe, et moindre robustesse

Modélisation

Roues omnidirectionnelles:

- Roues Suédoises: similaire è roue classique, avec des pièces mobiles sur la circonférence de la roue tournant librement (passivement) pour permettre un mouvement transverse.
- Roues sphériques: un roulement actif et deux roulement passifs assurent stabilité et actionnement de la roue.



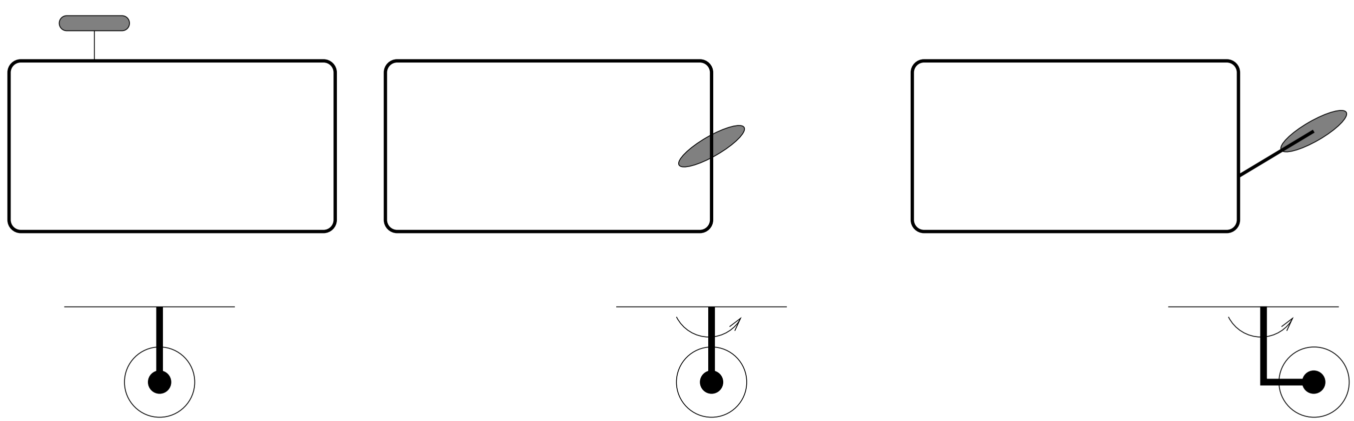


(Images issues de "Handbook of robotics", Spinger Verlag, 2016)

Modélisation

Roues conventionnelles: On peut distinguer trois principaux types de liaisons:

- L'axe de rotation interne de la roue est fixe par rapport au chassis (ex: roues arrières d'une voiture). On parle alors de roue fixe.
- L'axe de rotation interne de la roue est mobile par rapport au chassis, mais le centre de la roue est fixe par rapport au chassis (ex: roues avant d'une voiture). On parle alors de roue orientable.
- L'axe de rotation interne de la roue est mobile par rapport au chassis, et le centre de la roue est mobile par rapport au chassis (ex: roue folle d'un chariot). On parle alors de roue orientable décentrée.



Roue fixe   Roue orientable   Roue orientable decentree

Modélisation

Roues conventionnelles:

- Actionnement:
  - Roue fixe: au maximum un seul degré d’actionnement: angle de rotation interne
  - Roue orientable: deux degrés d’actionnement possibles pour le contrôle de l’orientation de la roue et de la rotation interne. Le premier est obligatoire, le second facultatif
  - Roue orientable décentrée: deux degrés d’actionnement possibles pour le contrôle de l’orientation de la roue et de la rotation interne. Les deux sont facultatifs (comme illustré par la roue folle).

Modélisation

Exemples de robots à trois roues:

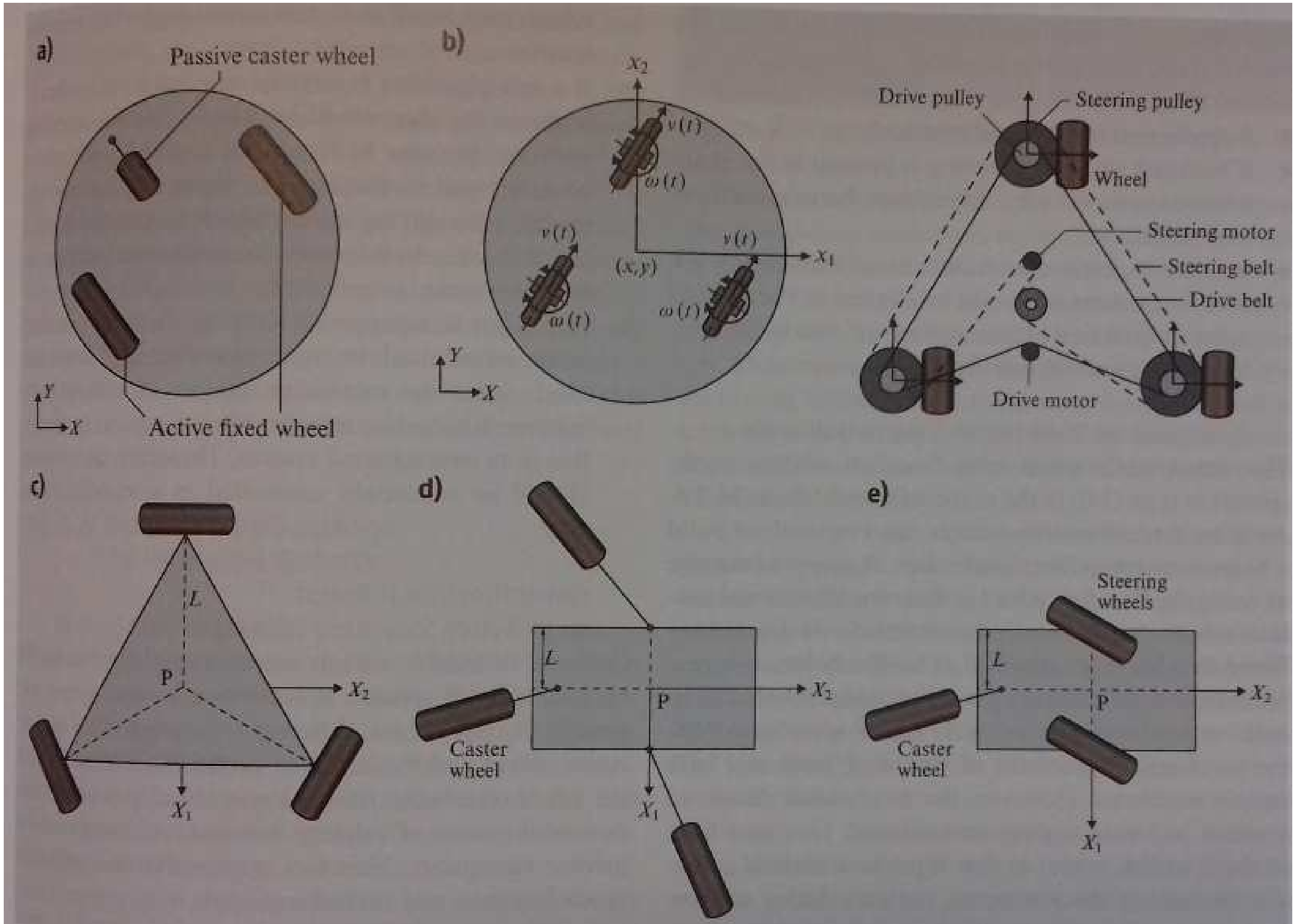


Fig. 24.7 (a) Two-wheel differential drive, (b) synchronous drive, (c) omnimobile robot with Swedish wheels, (d) omnimobile robot with active caster wheels, and (e) omnidirectional robot with active steerable wheels

(Images issues de "Handbook of robotics", Spinger Verlag, 2016)

Modélisation

Exemples de robots à trois roues:

- a) Robot unicycle classique:
  - Deux roues fixes à l'arrière contrôlés indépendemment;
  - Une roue orientable décentré passive à l'avant (roue folle);
  - Simple, mais ne peut se déplacer instantanément dans toutes les directions, et la roue folle à l'avant est source d'instabilité.
- b) Robot à entrainement synchrone:
  - Trois roues orientables (centrées ou pas);
  - L'orientation des roues et leur vitesse de rotation interne sont synchronisées, généralement par un système de courroies;
  - Permet des mouvement de la base en position dans toutes les directions, mais pas en orientation, et architecture d'actionnement complexe.

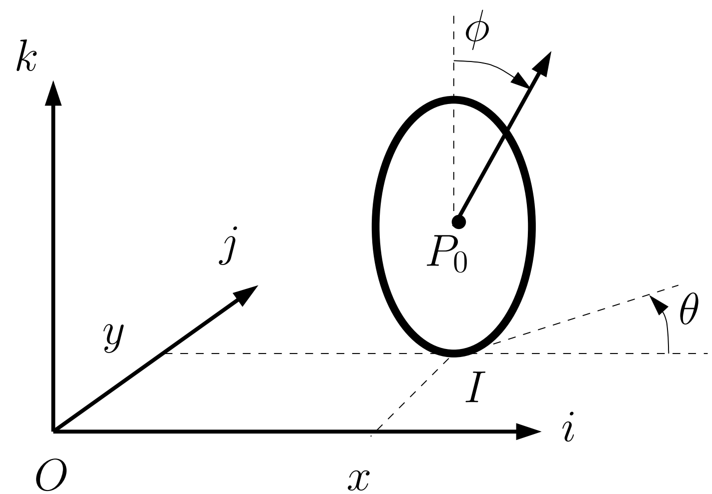
Modélisation

Exemples de robots à trois roues:

- c) Robot omnidirectionnel à roues suédoises:
  - Troies roues suédoises contrôlées indépendemment;
  - Permet des mouvement de la base dans toutes les directions en position, et aussi en orientation, mais les roues suédoises sont moins robustes que des roues conventionnelles.
- d) Robot omnidirectionnel avec roues orientables décentrées
  - Trois roues orientables décentrées, dont deux au moins sont actives;
  - Permet des mouvements de la base dans toutes les directions en position, et aussi en orientation, mais peut conduire à des mouvements brusques des roues, et nécessite un système de transmission entre le moteur et l'axe des roues actionnées.
- e) Robot omnidirectionnel avec roues orientables centrées
  - Au moins deux roues orientables centrées et actives;
  - Permet des mouvements de la base dans toutes les directions en position, et aussi en orientation, mais reste soumis à des contraintes cinématiques;
  - Mêmes limitations que pour le cas précédent.

Modélisation cinématique

L'hypothèse de roulement sans glissement:



$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r\dot{\phi}\cos\theta \\ \dot{y} = r\dot{\phi}\sin\theta \end{cases}$$

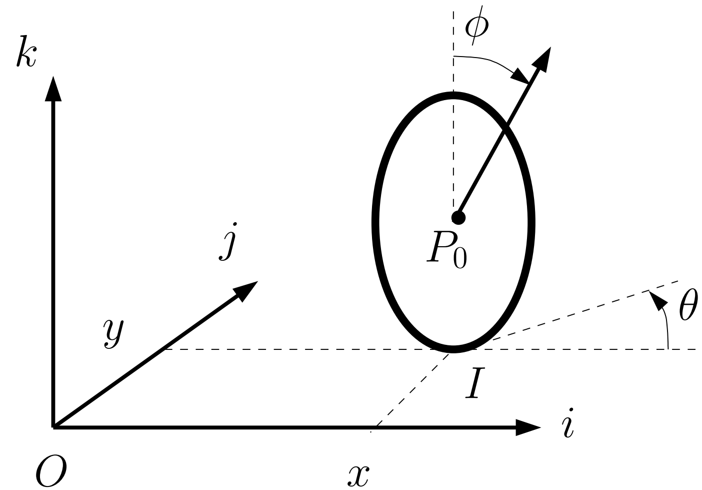
Ces deux équations peuvent aussi être écrites:

$$\begin{cases} \dot{x}\ \cos\theta + \dot{y}\ \sin\theta = r\dot{\phi} \\ -\dot{x}\ \sin\theta + \dot{y}\ \cos\theta = 0 \end{cases}$$

La première des deux équations ci-dessus est parfois appelée condition de roulement pur, et la seconde condition de non-glissement.

Modélisation cinématique

L'hypothèse de roulement sans glissement:



$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r\dot{\phi}\cos\theta \\ \dot{y} = r\dot{\phi}\sin\theta \end{cases}$$

Enfin, les équations précédentes peuvent aussi être écrites sous la forme d'un système de commande:

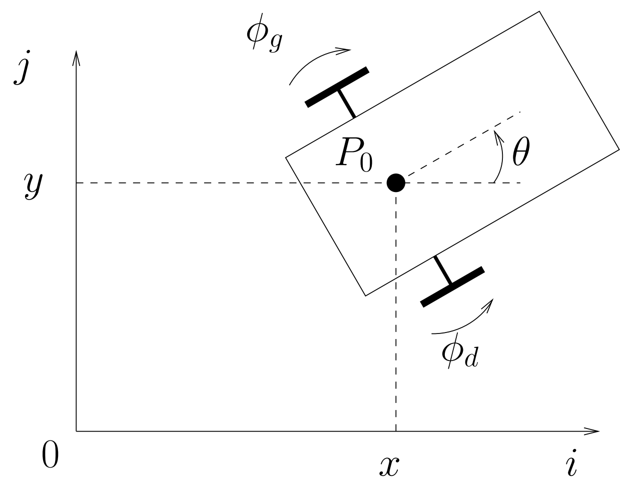
$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & u_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q)$$

avec $u_1 = r\dot{\phi}$, $u_2 = \dot{\theta}$, $q = (x, y, \theta)'$. Ceci est le modèle cinématique, et X_1, X_2 sont les champs de vecteurs de commande.

Modélisation cinématique

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & u_2 \end{array}\right.$$

Ce modèle est aussi le modèle cinématique du robot de type Unicycle:



avec

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2R} & \frac{r}{2R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_g \\ \dot{\phi}_d \end{pmatrix}$$

et r: le rayon des roues, $2R$ la distance entre ces roues.

Modélisation cinématique

Méthode générale:

- On définit le vecteur de configuration du robot $\bar{q} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$
- On écrit les contraintes cinématiques:

$$\bar{a}_i(\bar{q})^T \dot{\bar{q}} = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, p$$

  qui peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle

$$\bar{A}(q)^T \dot{\bar{q}} = 0$$

  avec

$$\bar{A}(\bar{q}) = (\bar{a}_1(\bar{q}) \ \bar{a}_2(\bar{q}) \ \cdots \bar{a}_p(\bar{q}))$$

- On écrit le système de contraintes sous la forme d'un modèle cinématique

$$\dot{\bar{q}} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} u_i \bar{X}_i(\bar{q})$$

  i.e. les vecteurs $\bar{X}_i(\bar{q})$ engendrent le noyau de la matrice $\bar{A}(q)^T$.

Modélisation cinématique

Méthode générale:

- On supprime, s'il en existe, les variables intégrables, i.e., des constantes du mouvement (voir prochain slide):

$$a_i(q)^T \dot{q} = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, p \qquad \dot{q} = \sum_{i=1}^{\bar{n}-p} u_i X_i(q) \ , \quad q \in \mathbb{R}^n \ , n \leq \bar{n}$$

Comment vérifier s'il existe des variables intégrables?

- Crochet de Lie entre deux champs de vecteurs $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$:

$$[\bar{Y}_1, \bar{Y}_2](\bar{q}) = \frac{\partial \bar{Y}_2}{\partial \bar{q}}(q)\bar{Y}_1(\bar{q}) - \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial \bar{q}}(q)\bar{Y}_2(\bar{q})$$

- Algèbre de Lie engendrée par $\bar{X}_1, \cdots \bar{X}_m(\bar{q})$:

$$\mathcal{L} = \{\bar{X}_i, [\bar{X}_i, \bar{X}_j], [\bar{X}_i, [\bar{X}_j, \bar{X}_k]], \cdots\}$$

- Si autour de $\bar{q}_0$, $\dim \mathcal{L}(\bar{q})$ est constante, alors le nombre de contraintes intégrables autour de q_0 est égal à $\bar{n} - \dim \mathcal{L}(\bar{q}_0)$.
- Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Frobenius

Modélisation cinématique

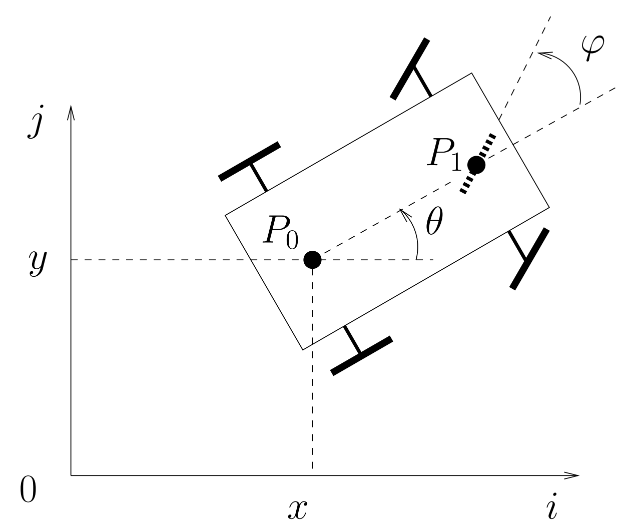
Application: Pour le véhicule de type unicycle,

1. Proposer un vecteur de configuration $\bar{q}$,
2. Ecrire les contraintes cinématiques de roulement sans glissement pour chaque roue,
3. Vérifier que sur ces 4 contraintes, 3 seulement sont indépendantes et en déduire une expression des champs X_1, X_2 de commande,
4. Appliquer le théorême de Frobenius pour en déduire qu'il existe une contrainte intégrable,
5. Vérifier à partir du modèle obtenu la relation de la Page 20 exprimant u_1, u_2 en fonction des vitesses de rotation interne des roues.

Modélisation cinématique

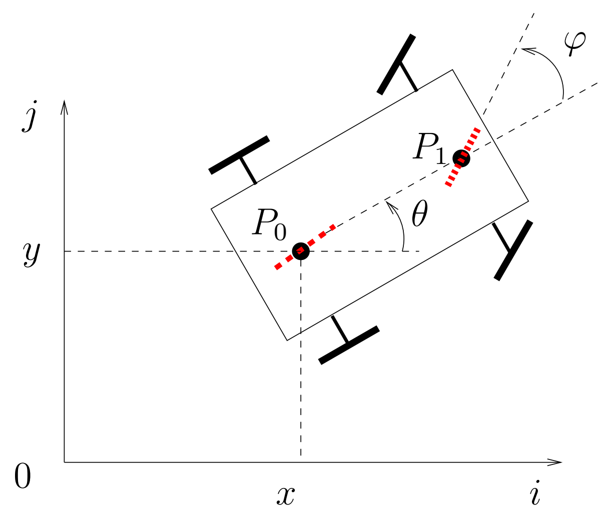
Méthode simplifiée sous hypothèse de compatibilité des contraintes:

- Pour des véhicules à roues conventionnelles, constitués de trains actifs (i.e., actionnés) ou passifs, à deux roues, fixes ou orientables,
- On peut souvent obtenir le modèle cinématique de façon plus simple, à partir du concept de roue équivalente,
- Cela suppose que le véhicule soit conçu de façon à ce que le CIR soit bien défini.
- **Exemple: application au véhicule de type voiture**



Modélisation cinématique

On réduit chaque train à une roue équivalente (en rouge sur le dessin), et on applique les contraintes de roulement sans glissement à ces roues équivalentes



<u>Roue arrière:</u>

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = r\dot{\varphi}_b \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

avec r le rayon de la roue et φ_b l'angle de rotation interne de la roue.

Modélisation cinématique

<u>Roue avant:</u>

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \end{pmatrix} = r\dot{\varphi}_f \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

avec (x_f, y_f) les coordonnées du centre de la roue et φ_f l'angle de rotation interne de la roue. On a

$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

et donc les contraintes cinématiques s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + L\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = r\dot{\varphi}_f \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

En multipliant cette relation par $R(-\theta)$ ou $R(\xi)$ désigne la matrice de rotation dans le plan d'angle ξ, on obtient:

$$r\dot{\varphi}_b = r\dot{\varphi}_f \cos\varphi\,, \quad L\dot{\theta} = r\dot{\varphi}_f \sin\varphi$$

Modélisation cinématique

En rassemblant les différentes équation, on obtient les modèles suivants
Modèle propulsion arrière: Commandes $u_1 = r\dot{\varphi}_b, u_2 = \dot{\varphi}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \frac{u_1}{L}\tan\varphi \\ \dot{\varphi} & = & u_2 \end{array}\right.$$

Modèle traction avant: Commandes $u_1 = r\dot{\varphi}_f, u_2 = \dot{\varphi}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & u_1 \cos\theta\cos\varphi \\ \dot{y} & = & u_1 \sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\theta} & = & \frac{u_1}{L}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} & = & u_2 \end{array}\right.$$

Modélisation dynamique

En plus du modèle cinématique

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(q) = X(q)u$$

on peut obtenir, à partir des équations de Lagrange, le modèle dynamique

$$J(q)\dot{u} + N(q,u) + X(q)^T G(q) = F_{act} + F_{ext}$$

avec

- J : Matrice d'inertie,
- N : Forces de Coriolis,
- G : Termes de gravité,
- F_{act} : Forces d'actionnement,
- F_{ext} : Autres forces externes (frottement, etc)

On suppose ici que les forces d'actionnement et externes sont compatibles aves les contraintes cinématiques

Modélisation dynamique

Dérivation des équations dynamiques:

- On part des équations de Lagrange classiques:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + \sum_i \lambda_i a_i(q) = \Gamma + A(q)\lambda$$

- On remplace $\dot{q}$ par son expression $\dot{q} = X(q)u$ et $\ddot{q} = \dot{X}(q)u + X(q)\dot{u}$:

$$M(q)X(q)\dot{u} + M(q)\dot{X}(q)u + C(q, X(q)u)X(q)u + G(q) = \Gamma + A(q)\lambda$$

- On multiplie la relation de la dynamique par $X(q)^T$ pour faire disparaitre les forces de contact (inconnues)

$$\begin{aligned} X(q)^T M(q)X(q)\dot{u} + X(q)^T M(q)\dot{X}(q)u + \ldots \\ X(q)^T C(q, X(q)u)X(q)u + X(q)^T G(q) = X(q)^T \Gamma \quad (1) \end{aligned}$$

Modélisation dynamique

Modélisation des efforts d'interaction

La modélisation des efforts roues/sol peut être importante pour:

- Dimensionner les actionneurs
- Simuler le comportement du robot de façon réaliste
- Evaluer des lois de commande de façon réaliste

Cette modélisation est difficile, notamment lorsque le robot évolue sur des terrains naturels. On peut distinguer plusieurs modèles:

- Roues rigides sur terrain rigide
- Roues rigides sur terrain déformable
- Roues (pneus) déformables sur terrain déformable
- Roues (pneus) déformables sur terrain rigide

Modélisation dynamique

Simplifications pratiques:
Dans certains cas on est amené à approcher la dynamique par un modèle trés simple:

$$\dot{u} = -k(u - u^c) \quad (k >> 0)$$

avec u^c une consigne de vitesse envoyée aux actionneurs. Ceci est légitime si

- Les frottements sont négligeables ,
- Il y a un actionneur par degré de liberté,
- On ne peut envoyer au controleur des moteurs que des consignes de vitesse,
- Les actionneurs sont suffisamment puissants pour dominer les froces de Coriolis, de gravité, et autres forces externes (k peut être choisi grand)

Sinon, un modèle dynamique complet (y compris des actionneurs) doit être considéré.