

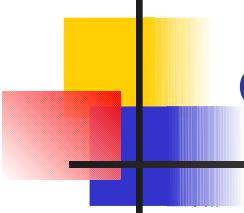
UE Robotique Mobile

Navigation et Planification

X. Clady – xavier.clady@sorbonne-universite.fr
A. Sahbani – anis.sahbani@sorbonne-universite.fr

Mailing-Lists en Robotique &

al



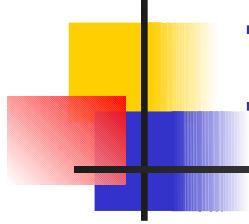
GDR Robotique : <http://www.gdr-robotique.org/>

GDR Isis : <http://gdr-isis.fr/>

Robotics worldwide :

<http://duerer.usc.edu/mailman/listinfo.cgi/robotics-worldwide>

les Echos du Risc : <http://www.risc.cnrs.fr/abonnements.php>



Introduction

■ Généralités :

■ Un robot est la combinaison de composants matériels (mécanique, hardware) et immatériels (logiciels)

■ types essentiels de robot :

- Les robots manipulateurs
- Les robots mobiles
- Les humanoïdes

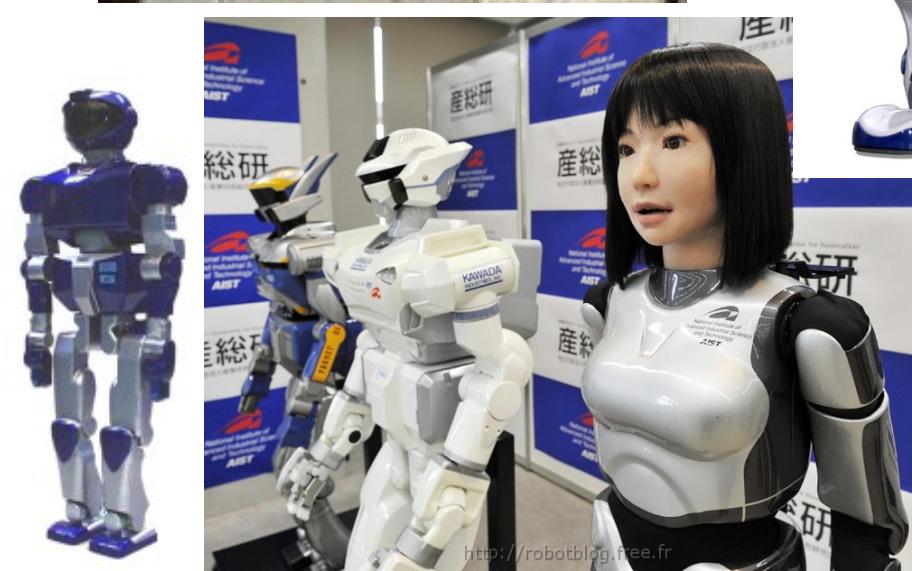
Introduction

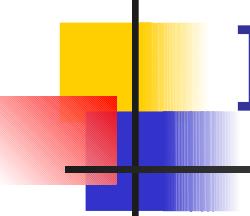


ABB IRB 7600 KUKA KR1000 TITAN F FANUC M-2000iA/1200 Yaskawa MH400 II



Introduction

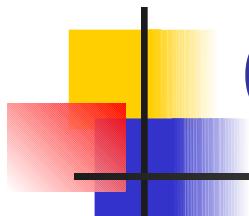




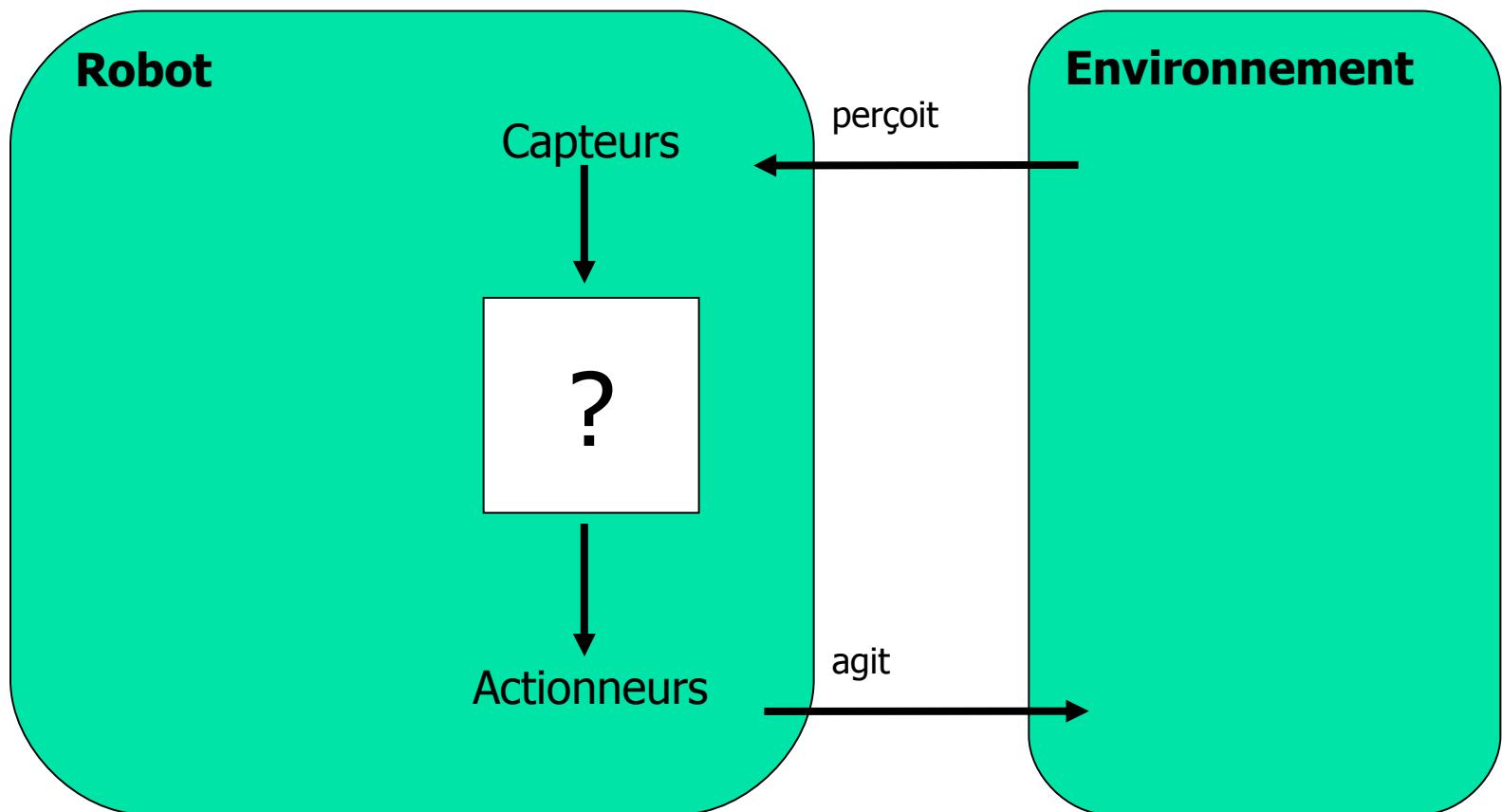
Introduction

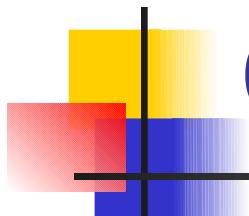
■ Classification d'après la source d'informations :

Noms	Définitions
Manipulateur manuel	L'homme commande
Robot à séquence fixe	Exécute les manœuvres étape par étape selon la séquence, la position et la condition programmées. Il est difficile de modifier les paramètres de ces manœuvres.
Robot à séquence variable	Exécute les manœuvres étape par étape selon la séquence, la position et la condition programmées, et dont la modification des paramètres est prévue.
Robot du type « play-back »	Exécute les manœuvres en se rappelant les paramètres nécessaires par apprentissage
Robot intelligent	Peut décider les manœuvres nécessaires d'après ses fonctions de perception et de reconnaissance.

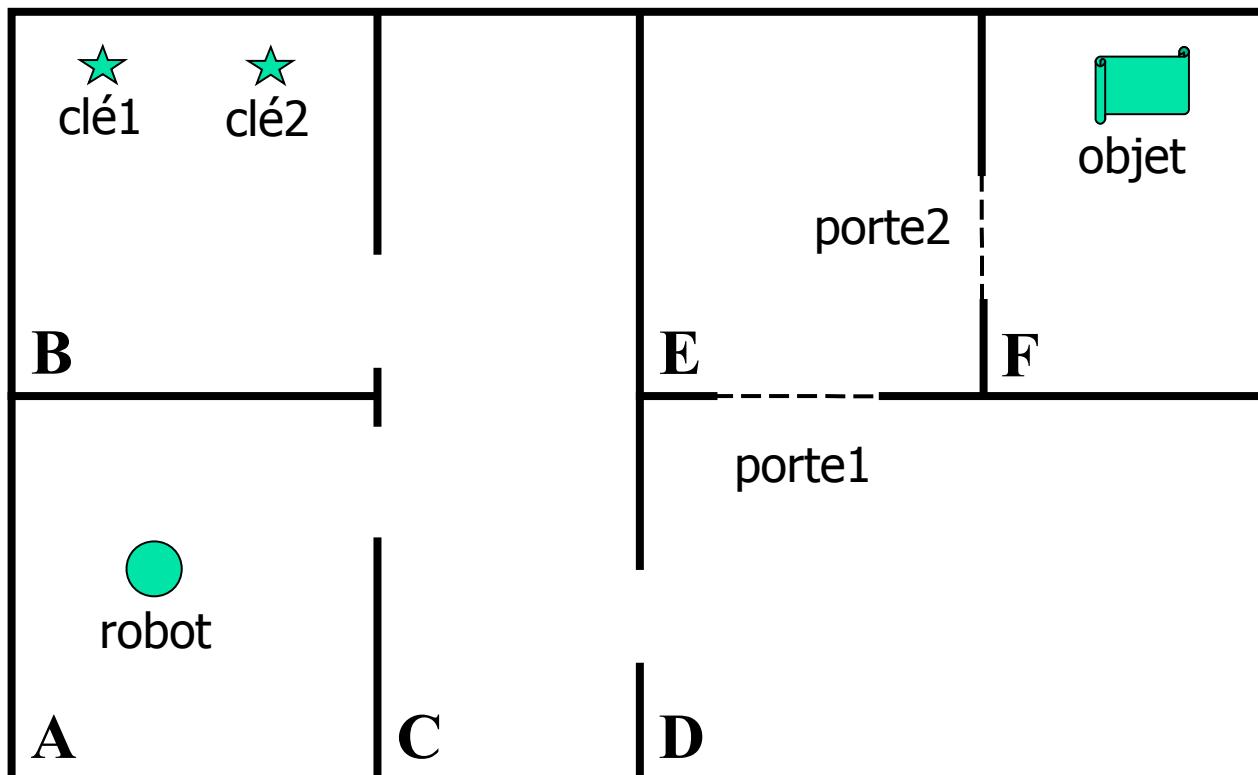


Contenu du cours



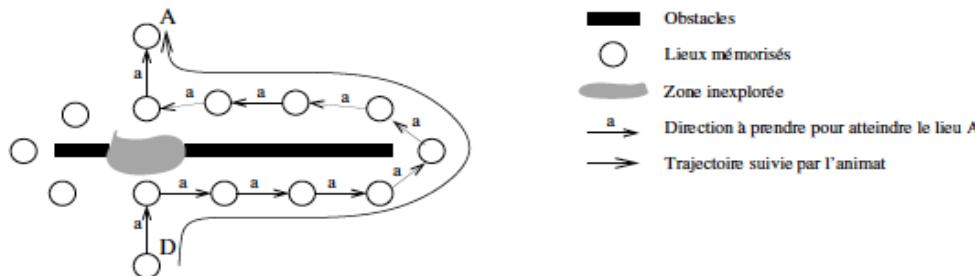


Contenu du cours



Stratégies de navigation

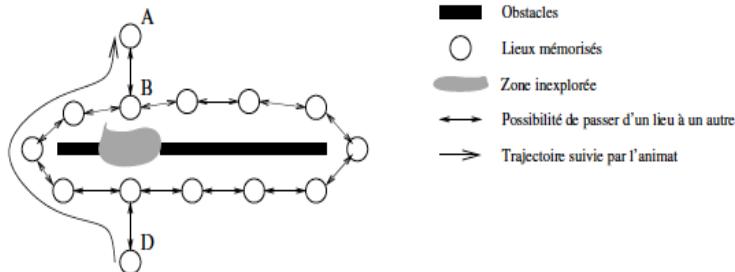
- Approche d'un objet
- Guidage (atteindre un point de l'espace caractérisé par une configuration remarquable par rapport à un ensemble d'objets qui l'entourent, *amers* : centre d'une pièce, milieu de la porte,...)
- Action associée à un lieu



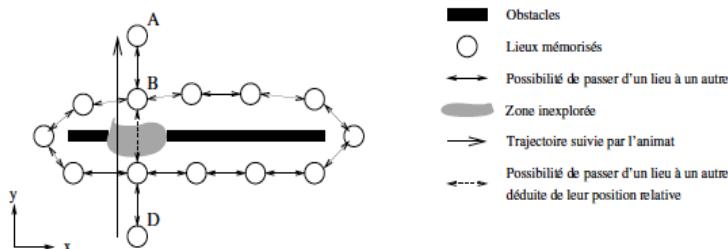
=> Navigation réactive
(comportements réflexes)

- **Action associée à un lieu.** En chaque lieu, représenté par un cercle, l'action à accomplir pour rejoindre le but A est représentée par une flèche indiquant la direction à suivre à partir de ce lieu. Cette stratégie permet de rejoindre un but distant dans l'environnement mais repose sur des chemins figés. Dans cet exemple, le chemin joignant le lieu D au lieu A et passant par la droite de l'obstacle a été appris. Rejoindre le lieu A depuis le lieu D ne pourra alors être réalisé que par ce chemin. Le raccourci empruntant le chemin de gauche, par exemple, est inutilisable.

Stratégies de navigation



Navigation topologique. Cette stratégie permet de mémoriser un ensemble de lieux et les possibilités de passer de l'un à l'autre, indépendamment de tout but. Pour rejoindre un but, il faut alors une étape de planification qui permet de rechercher, parmi tous les chemins possibles, le chemin rejoignant le but. Dans notre exemple, le chemin le plus court entre D et A peut alors être calculé, mais uniquement parmi les lieux et les chemins déjà connus. Cette stratégie permet, par exemple, de contourner l'obstacle par la gauche mais ne permet pas de le traverser en ligne droite de D à A.

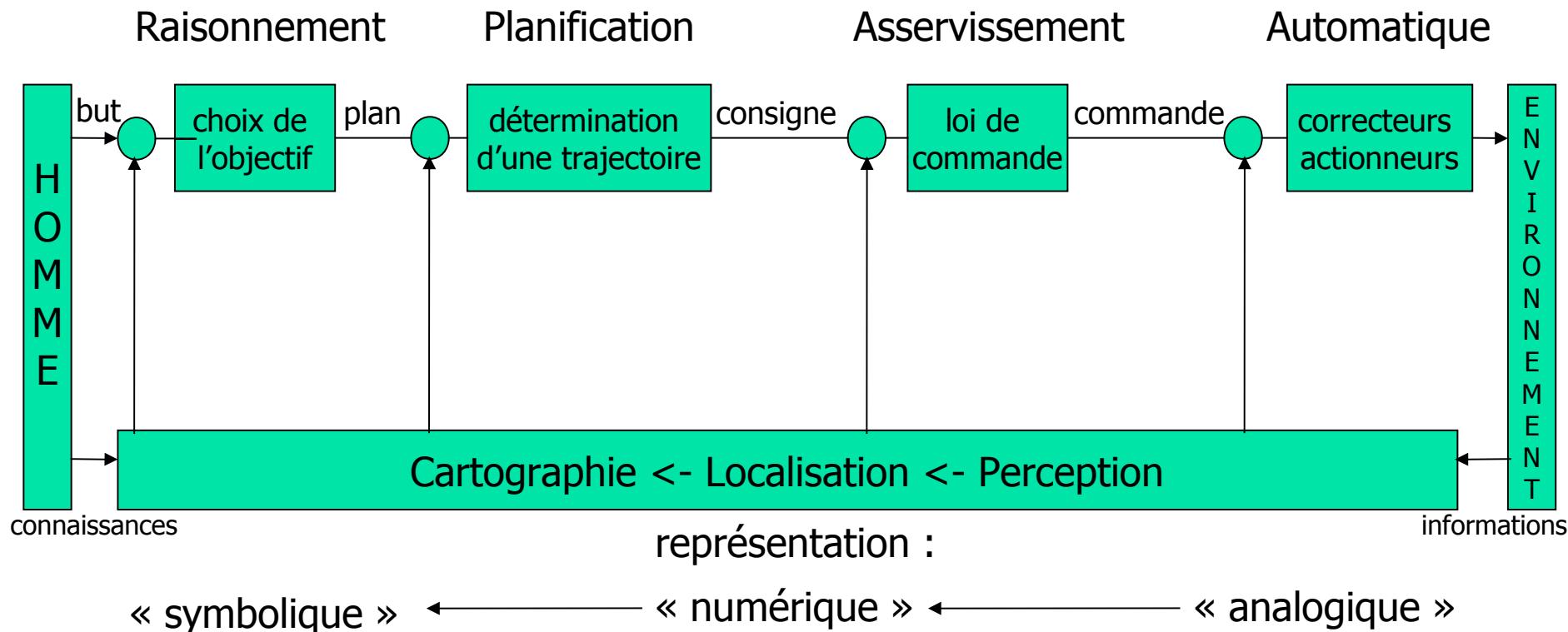


Navigation métrique. Cette stratégie permet de calculer le chemin le plus court entre deux lieux mémorisés, permettant même de planifier des raccourcis au sein de zones inexplorées de l'environnement. Pour cela, la carte mémorise la position métrique relative de chacun des lieux visités par le robot. Ainsi il est possible de prévoir un déplacement entre deux lieux, même si la possibilité de ce déplacement n'est pas enregistrée dans la carte. Dans cet exemple, cette stratégie permet de d'aller du lieu A au lieu D en traversant la zone inexplorée.

=> **Navigation globale**
(nécessite une représentation interne du monde : cartographie)

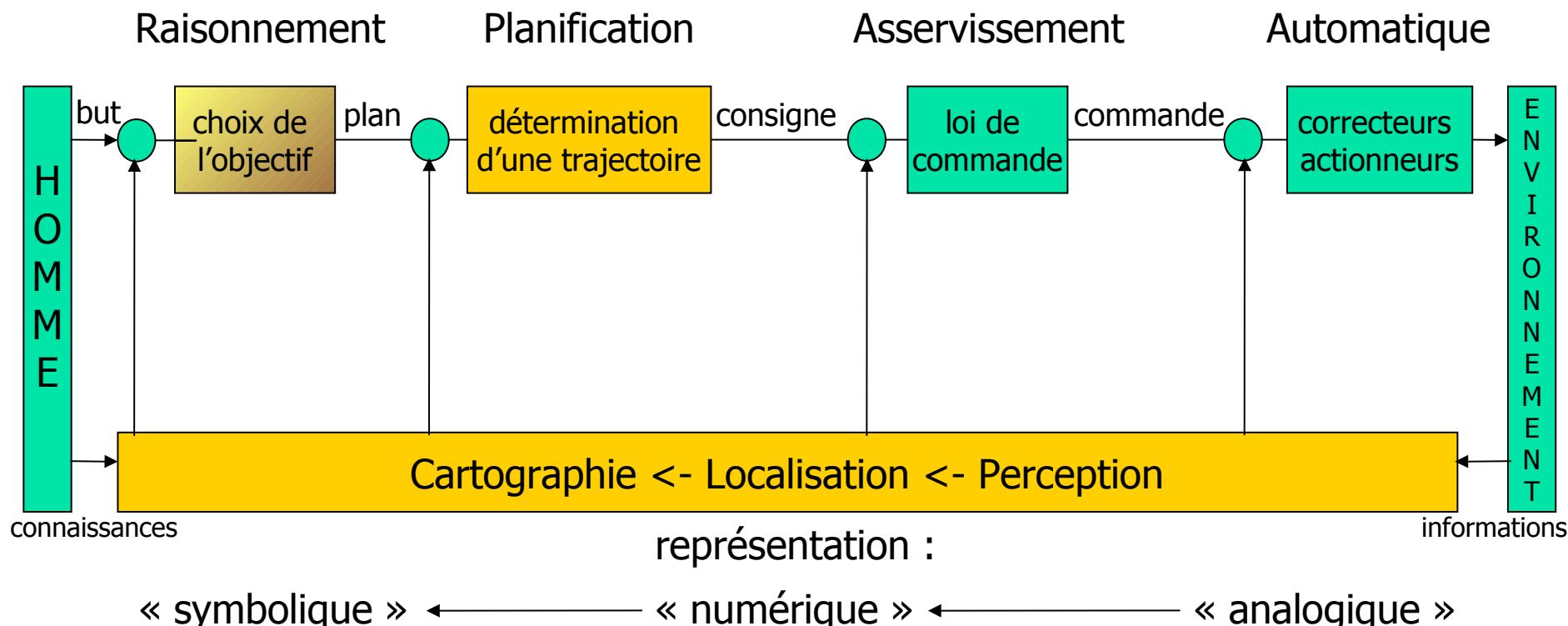
Contenu du cours

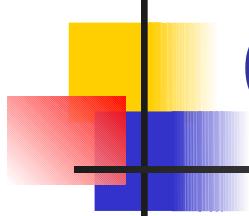
Si on représente un robot par un système bouclé...



Contenu du cours

Si on représente un robot par un système bouclé...



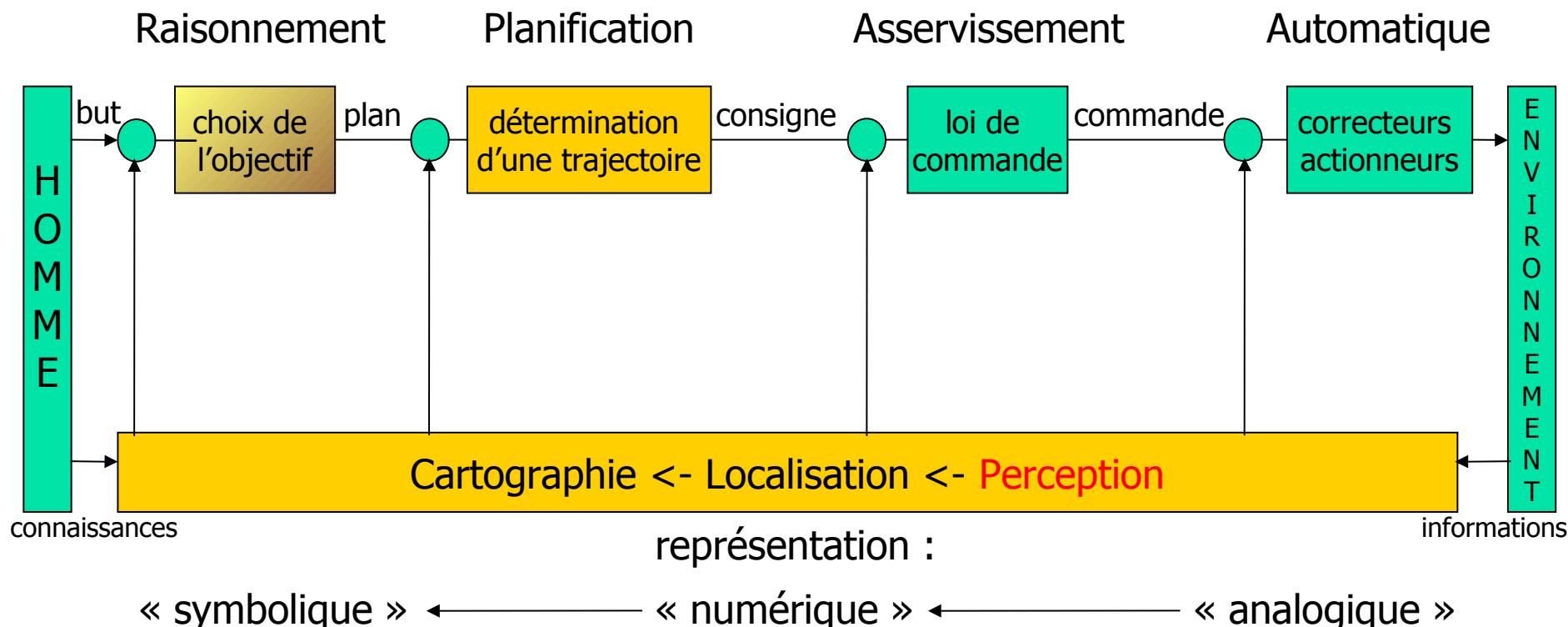


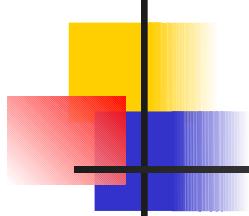
Contenu du cours

- Comment planifier un objectif ?
- Comment réaliser ce plan ?
- Comment à partir des données capteur percevoir l'environnement et soi-même (le robot) ?

Perception

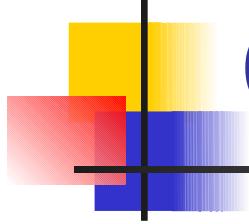
Si on représente un robot par un système bouclé...





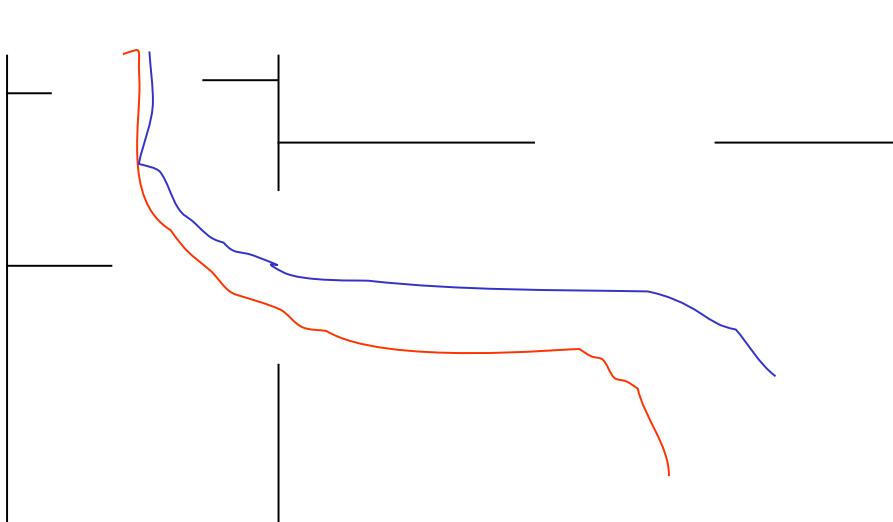
Perception

- Extéroceptifs : localisation, obstacles,...
 - capteurs passifs (caméras) = de « vrais » observateurs de l'environnement : ils capturent les signaux qui sont émis par les autres sources de l'environnement.
 - capteurs actifs (sonar, télémètre laser,...) : ils envoient de l'NRJ ; cette NRJ est réfléchie par l'environnement au capteur (Emetteur/Récepteur).
- Proprioceptifs : attitude, vitesse, articulations,...
 - informe le robot sur son propre état.
- GPS :
 - informe sur la position d'un robot / référentiel absolu.

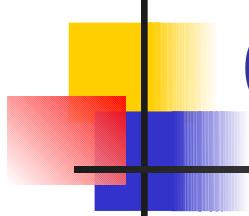


Capteurs proprioceptifs

- Shaft decoders (encodeurs) : mesure la révolution des moteurs
- Cas particulier du robot mobile : Odométrie
 - « intègre » les révolutions des roues (=mesure du parcours effectué)
 - problème de dérive + glissement des roues + forces externes

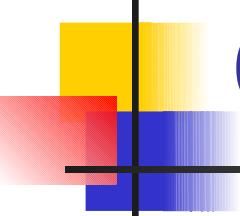


Bleu: trajectoire fournie par l'odométrie;
Rouge: trajectoire réelle



Capteurs proprioceptifs

- Accéléromètres (intégrés, airbag, drône volant)
- Gyroscope (mesure du cap, effet Sagnac optique, à faible coût: dérive mieux que 1 degré par heure, avionique: 10-3 degré/h)
- Compas électroniques (saumons, bactéries *aquaspirillum magnetotacticum*)□
- Inclinomètres (*oreille interne*)□



Capteurs extéroceptifs

■ Passifs : capteur de vision

- technologies (linéaire, matrice CCD, CMOS,...)
- configurations
- méthodes

■ Actifs (télémètres):

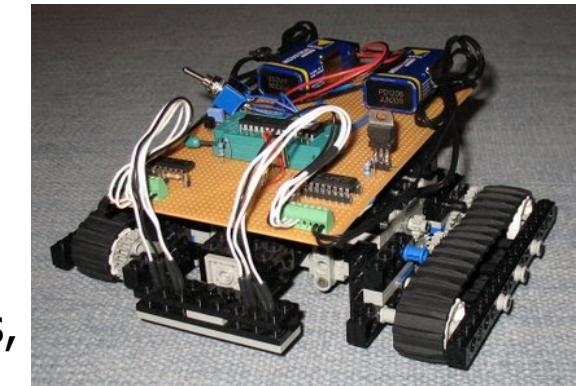
- infra-rouge
- télémètre laser
- radar – sonar – ultrasons

Vision : technologies

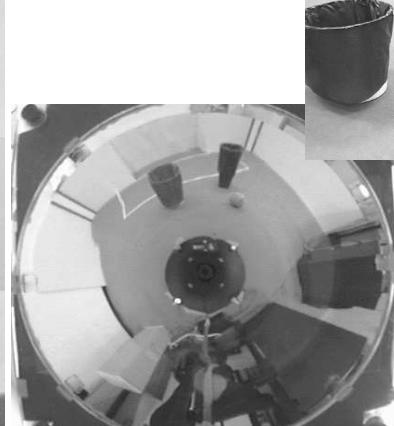
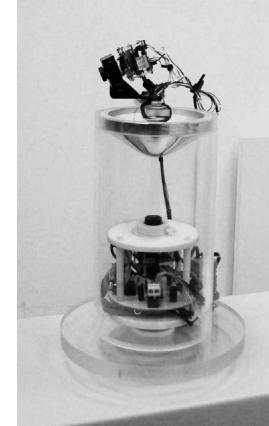
Barrette linéaire (Avantages : peu chère, fréquence plus élevé qu'avec une matrice image ; Applications : suivi de lignes, changement de voies,...)

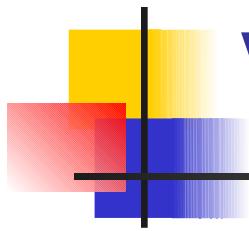
Caméra (amers visuels=repères : portes, affiches, ou des guides : route, couloir,...)

Stéréovision (\Rightarrow profondeur)



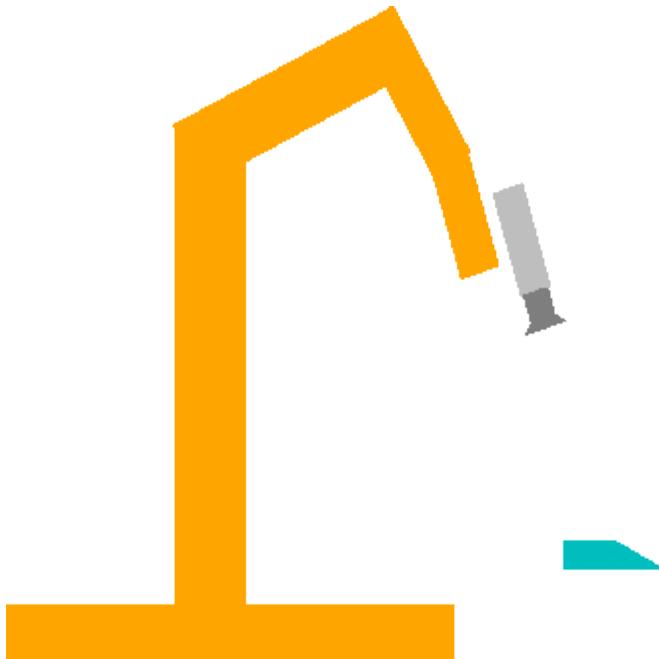
Panoramique



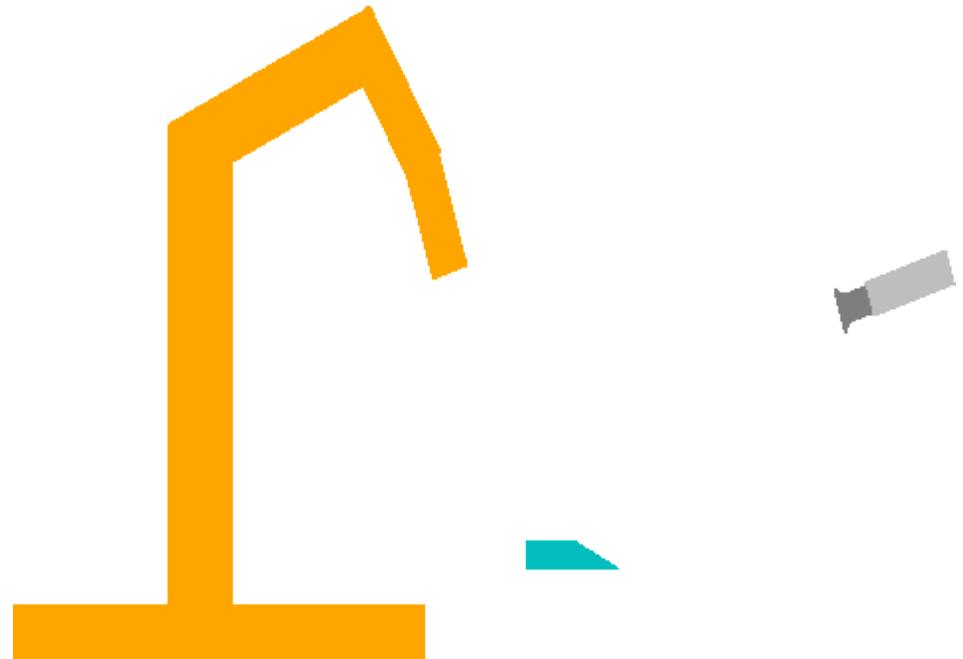


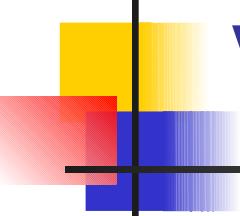
Vision : configuration

Embarqué



Déporté

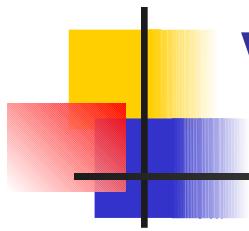




Vision : méthodes

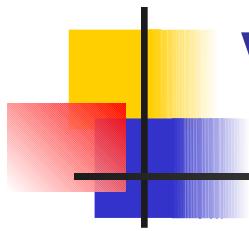
■ Coopératif/Autonome

- on dira que le système de vision est coopératif s'il utilise des amers (objets de géométrie connue) dans la scène
- Il est autonome sinon. En fait, il fera toujours des hypothèses : explicites (ex : géométrie de la route, types d'objets,...), implicites (d'après une base de données)
- L'idéal en terrain « inconnu » est un syst. autonome ; mais pour des manoeuvres de grande précision, un système coopératif est nécessaire.



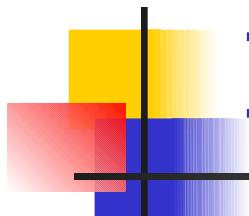
Vision : méthodes

- Un exemple de système coopératif



Vision : méthodes

- Un exemple de système autonome



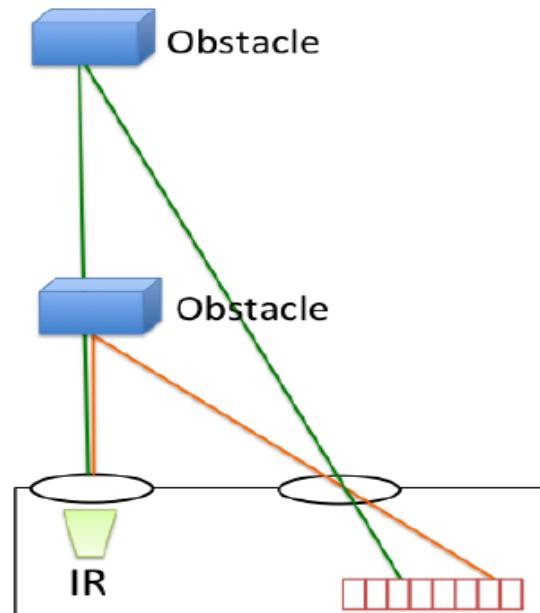
Infra-rouge actif

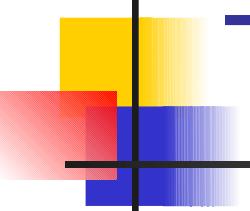
- Couple émetteur-récepteur
- efficace jusqu'à quelques dizaines de cm, très peu cher
- variation de l'énergie reçue en fonction de la surface réfléchissante



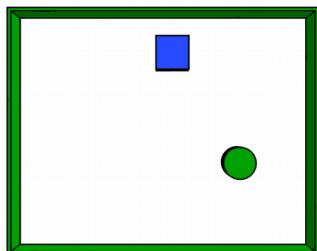
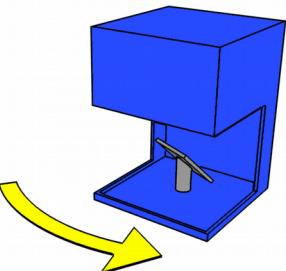
Télémètre laser

- lasers émettant dans le visible (Lidar = LIght Detection and Ranging) ou dans l'infrarouge (IRDAR).
- mesures : temps de vol, triangulation, phase





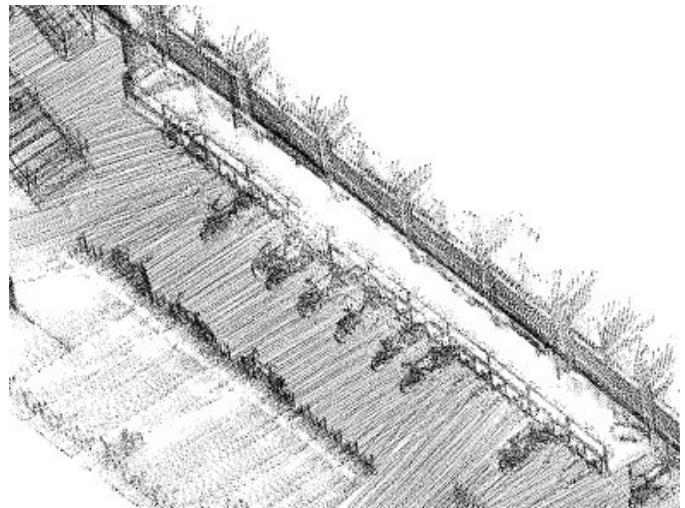
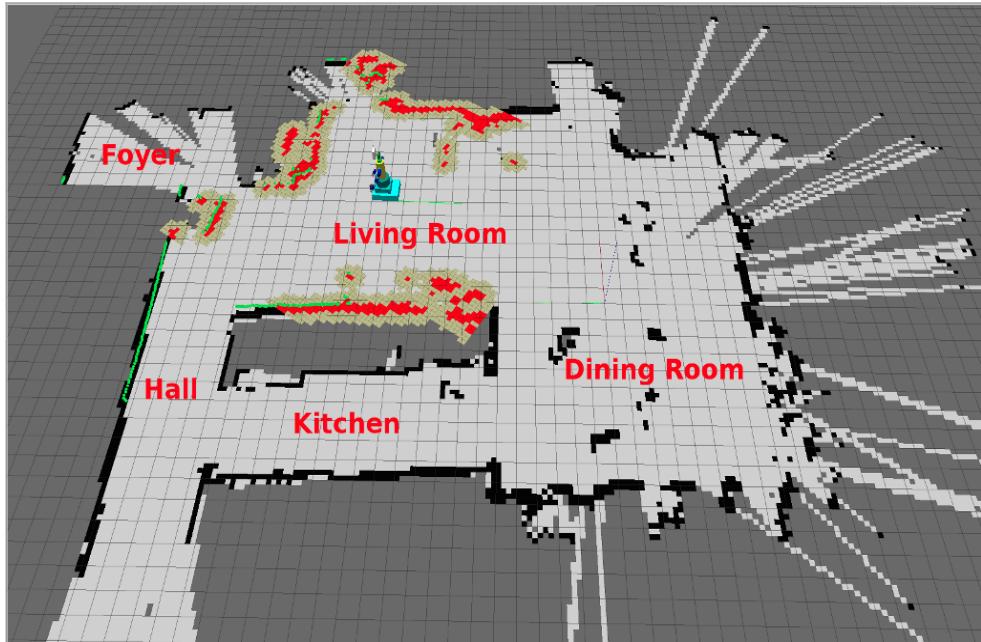
Télémètre laser



faible divergence du faisceau => bonne précision en un point (4 cm à 200m)
insensible aux conditions de luminosité, peu à la pluie

Mais : nécessité d'un balayage mécanique (tête ou/et miroir pivotants) -> vitesse d'acquisition limitée, maintenance
encombrant, consommation énergétique dans le brouillard, de nombreuses fausses détections
danger pour les yeux

Télémètre laser

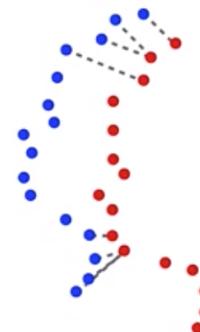
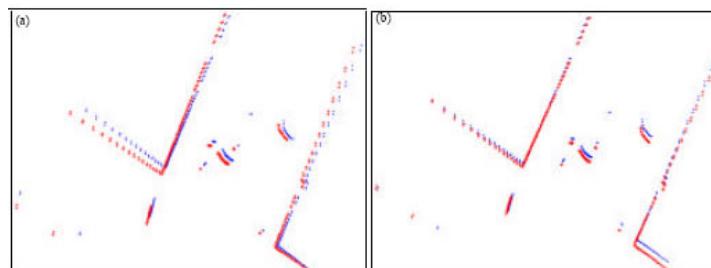


Télémètre laser

The Iterative Closest Point (ICP) Algorithm

Procedure:

1. Get an initial guess for the transformation $\{\check{\mathbf{C}}_{s's}, \check{\mathbf{r}}_s^{s's}\}$
2. Associate each point in $\mathbf{P}_{s'}$ with the nearest point in \mathbf{P}_s
3. Solve for the optimal transformation $\{\hat{\mathbf{C}}_{s's}, \hat{\mathbf{r}}_s^{s's}\}$
4. Repeat until convergence



Capteur d'ultrasons (SONAR)

- SONAR=SOund Navigation And Ranging
- Mesure du temps d'aller-retour du signal US (40khz, 200Khz), correction thermique

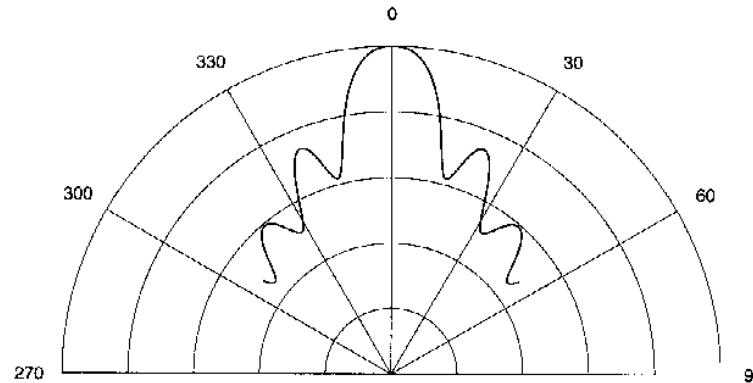
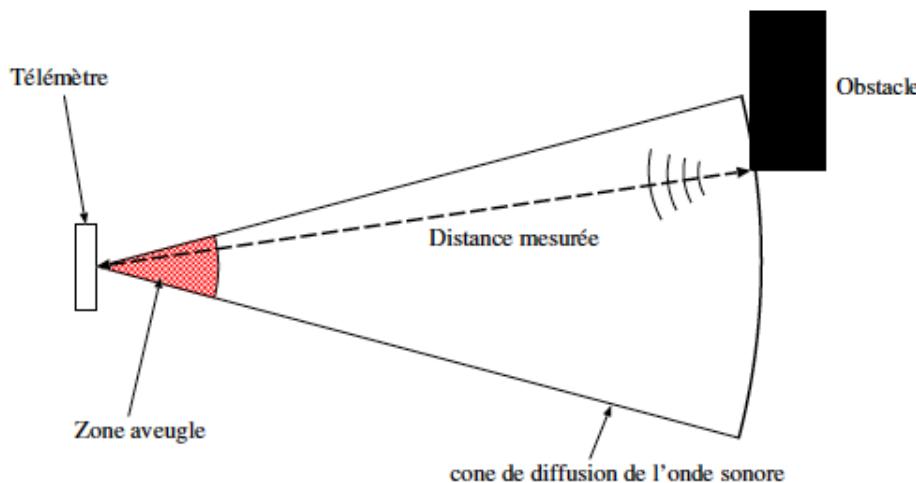
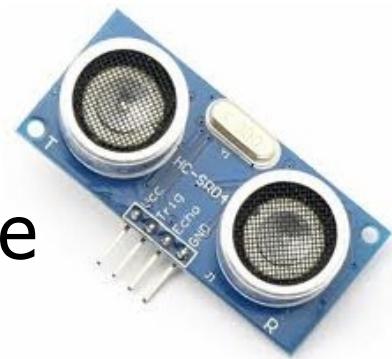
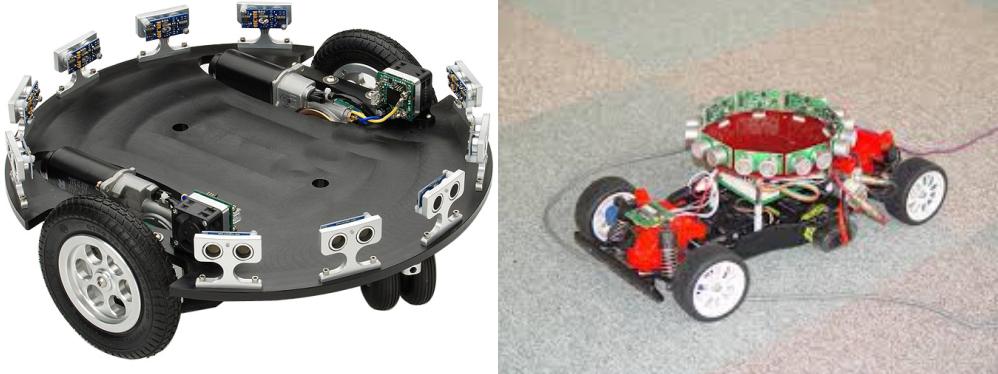


Figure 3.3. Sonar amplitude profile for the Polaroid sonar sensor showing the strength of the sonar signal as a function of orientation with respect to the center of the beam. Although most of the power is restricted to a single lobe near the center of the beam, significant side lobes exist.

Capteur d'ultrasons (SONAR)

- Portée relativement faible : de l'ordre du mètre
- Reconstruction de la vitesse par effet Doppler limité par une bande passante relativement faible (avec modulation de fréquence, on arrive jusqu'à des vitesses relatives de 10km/h)
- Résolution latérale faible => emploi de plusieurs microphones



- Sensibles aux déplacements du milieu ambiant (vent, courant marin,...)

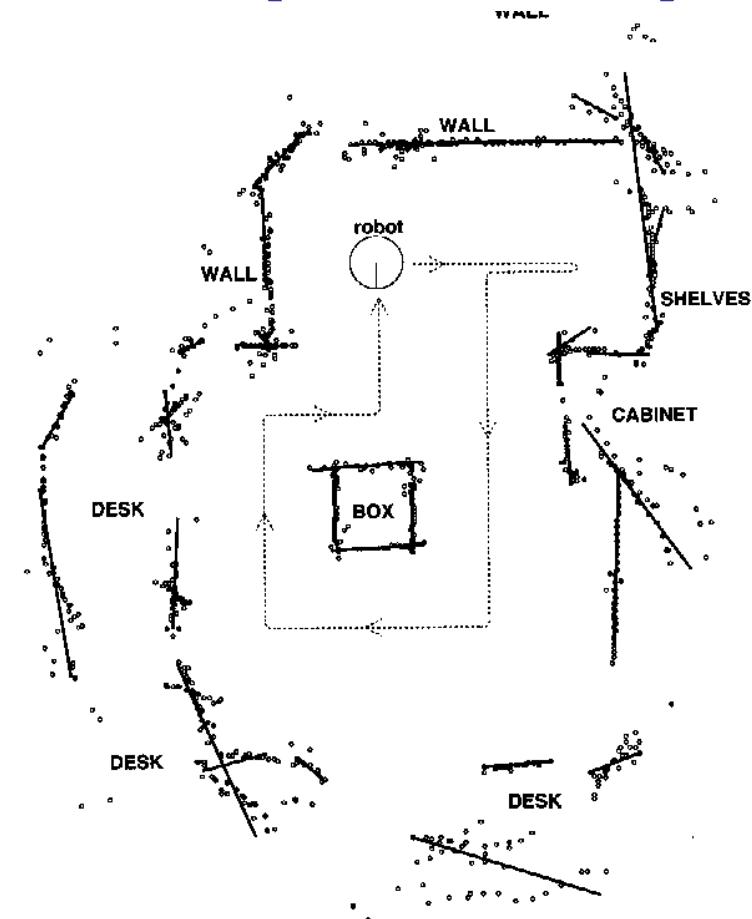
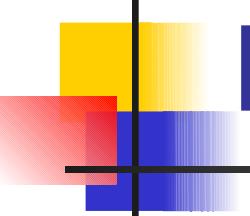
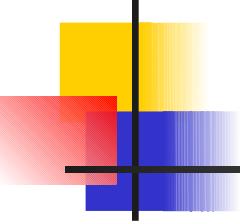


Figure 3.6. Illusory walls and other sonar artifacts. The robot is shown as a circle, and the path the robot took while taking sonar measurements is shown by a line with arrows indicating direction. Sonar measurements are grouped into line (wall) structure.



Radar

- RADAR = RAdio Detecting and Ranging
- Grande portée, vitesse par effet Doppler
- FM
- SER (Surface Equivalente RADAR) quantifie le pouvoir réflecteur d'une cible lorsqu'elle réfléchie une onde électromagnétique RADAR ; ex : voiture = 10 m^2 , piéton = 2m^2
- Faible résolution latérale + angle de vue



Radar

type	FMCW (fsk)
fréquence de fonctionnement	60,5 <i>Ghz</i>
portée	1 à 120 m $\pm 3\%$
vitesse	0.4 à 180 <i>km/h</i>
azimuth	11°
élévation	4 °

TAB. 1.2 – Un exemple de capteur RADAR à 60.5 *Ghz* MMW [122]

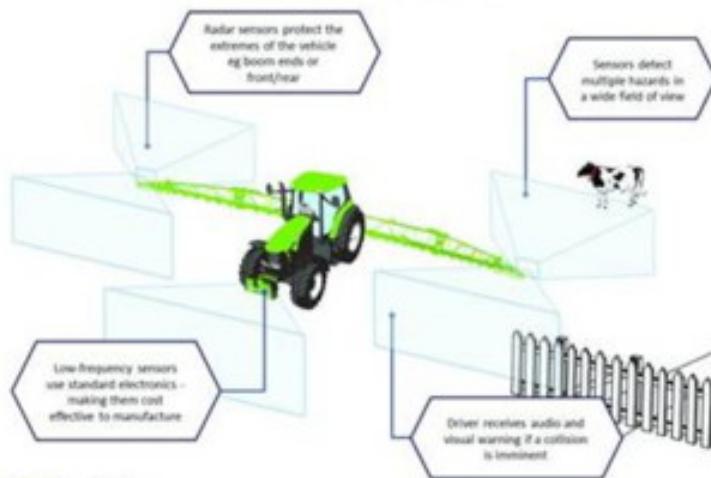
type	FMCW (fsk)
fréquence de fonctionnement	77 <i>Ghz</i>
portée	jusqu'à 200m $\pm 0.1m$
azimuth	12°
élévation	3°

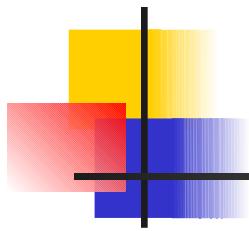
TAB. 1.3 – Un exemple de capteur RADAR à 77*Ghz* MMW [124]

Radar



Collision-avoidance radar

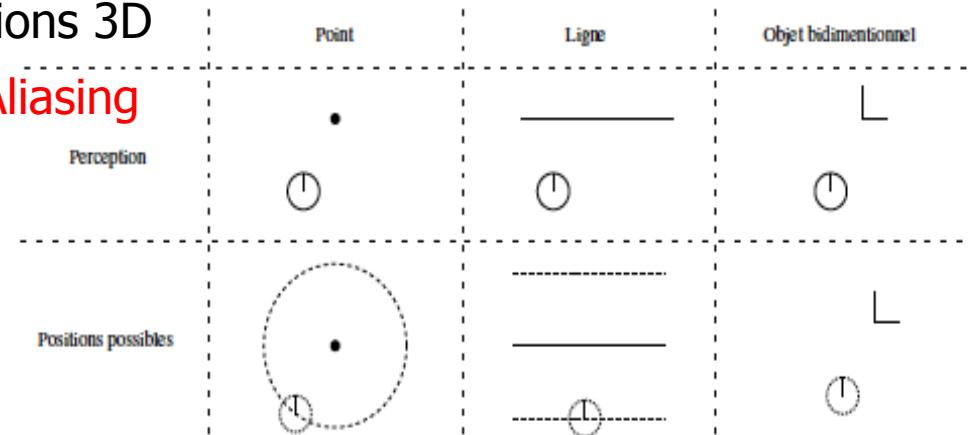
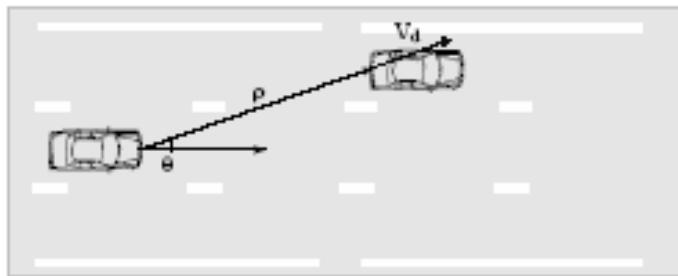




Bilan capteurs extéroceptifs

■ Capteurs actifs :

- directement les informations 3D
- problème de **Perceptual Aliasing**



■ Capteurs passifs (vision)

- technologie souvent moins coûteuse, plus « souple », information très riche \Rightarrow gourmande en calcul
- peuvent être fiables en milieu contrôlé ou avec des amers
- Mais plus sensible à la **variabilité perceptuelle**

Autres systèmes : balises

■ Exemple du programme PATH

- Guidage automatique de véhicules sur voies autoroutières dédiées
- Aimants permanents tous les 1,2 m.
- Précision : 5 mm en latéral, 5cm en longitudinal



(a) un plot magnétique



(b) véhicule et marqueurs magnétiques

Balises actives

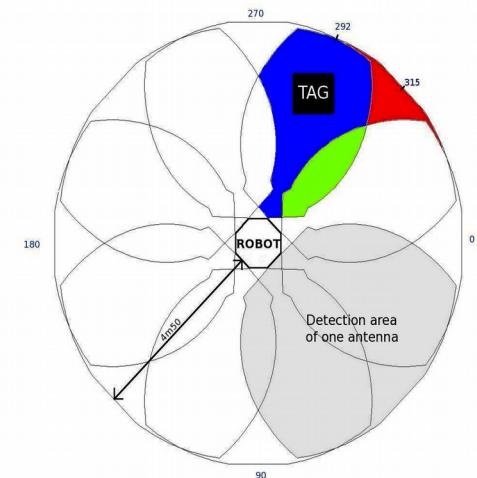
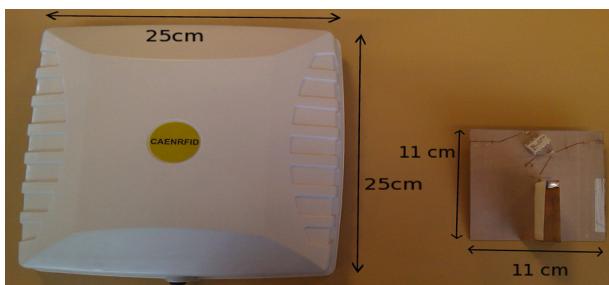
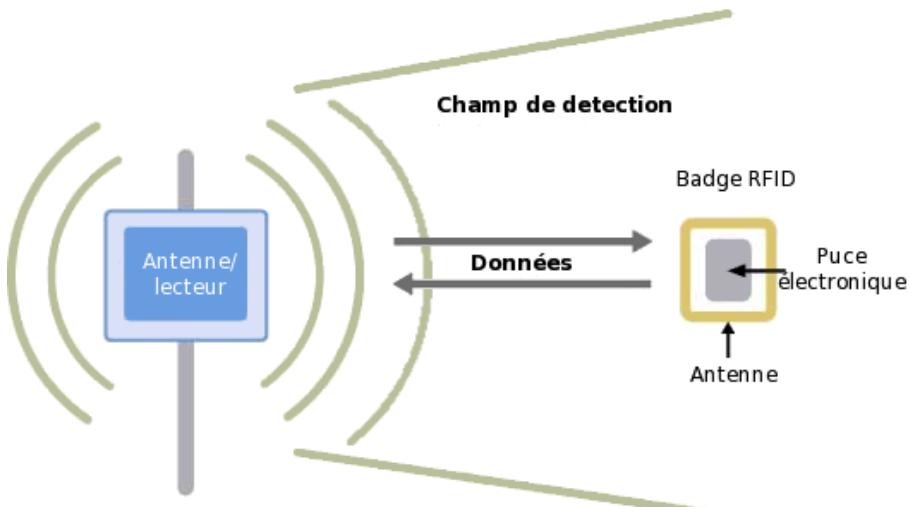


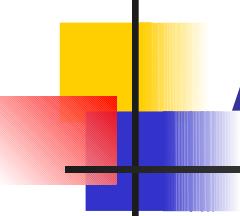
FIG. 1.6 – NAHSC Demo '97, San Diego : démonstration de conduite en convoi.



FIG. 1.7 – ASP : démonstration de navigation de chasse-neige.

Balises actives (RFID)





Autres systèmes : GPS

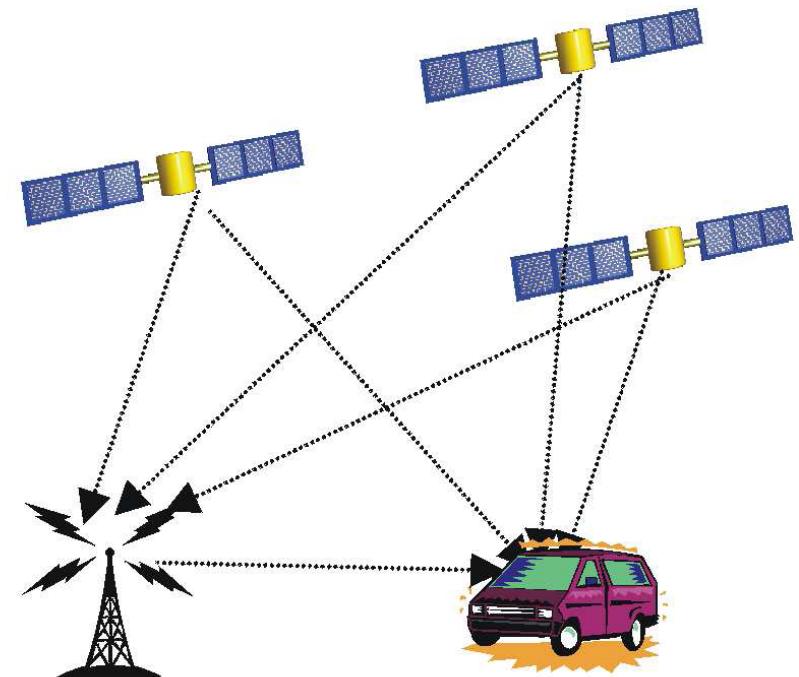
- Positionnement par satellite
(GPS : global positioning system)
- Système militaire américain (GPS, 1989-95) basé sur 24 satellites dans 6 plans orbitaux utilisant les différences de temps de vol du signal (5 à 8 satellites théoriquement visibles)
- Mesure la position (x,y,z) et la vitesse (avec au moins 4 satellites visibles)
- Inutilisable en intérieur, sous l'eau, sous terre, forêt dense, etc.
- Toutes les 100ms (système civil SPS), résolution de 100m
- DGPS (DifferentialGPS): plusieurs GPS pour annuler le bruit de cryptage → précision de 1 à 10m

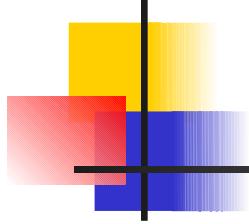
GPS

La précision de l'ordre du centimètre est obtenue avec les CP-DGPS

Carrier Phase – Differential GPS

Nécessité d'une communication radio entre la base et le robot

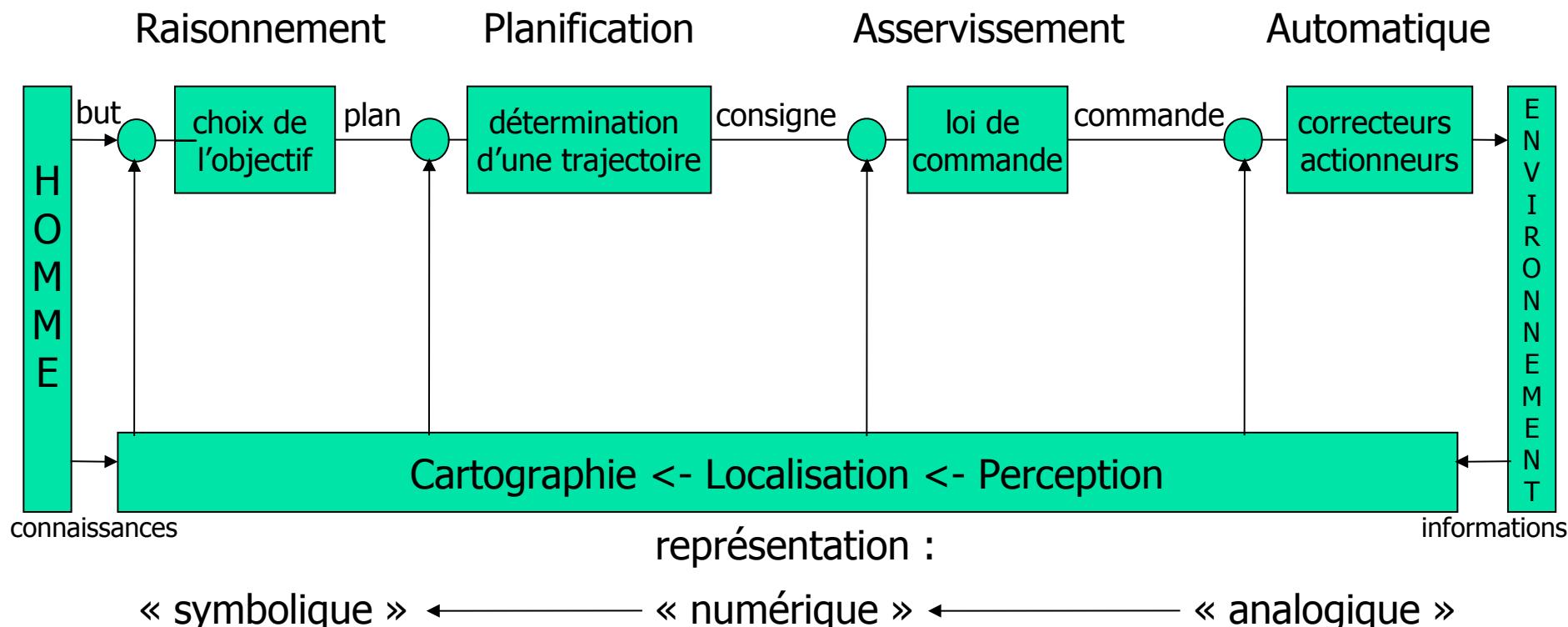


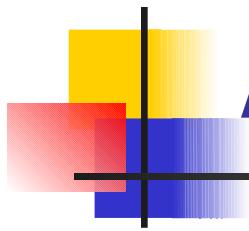


D-GPS : exemple

Contenu du cours

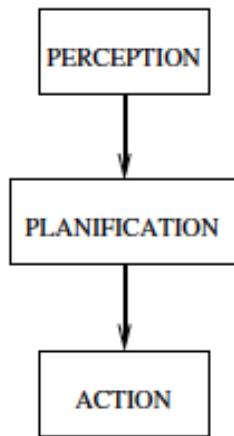
Si on représente un robot par un système bouclé...



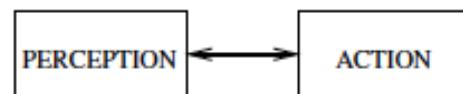


Architectures

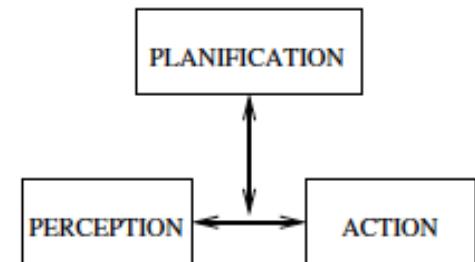
A



B



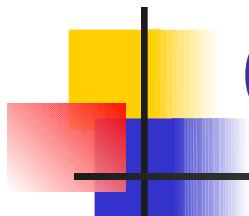
C



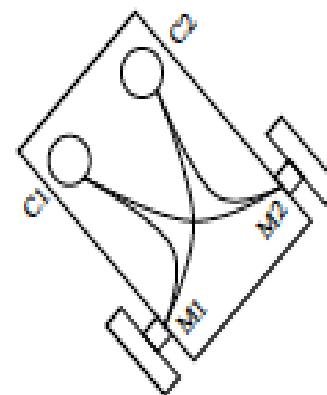
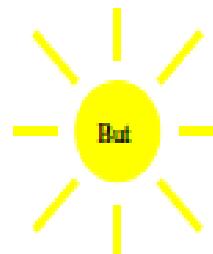
· Illustration des architectures classiques des contrôleurs pour les robots mobiles : Hiérarchique (A), Réactive (B) et Hybride (C) (Voir le texte pour la description détaillée).

Navigation/cartographie Navigation/obstacles



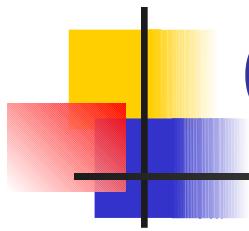


Comportements réflexes

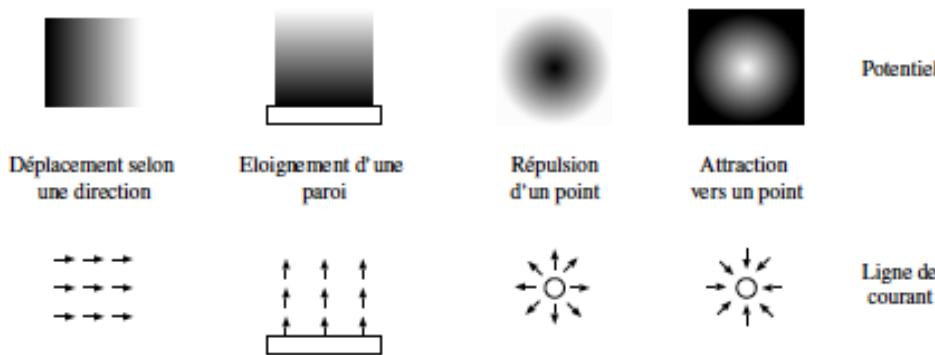


Dans les véhicules de Braatenberg, la vitesse de chacun des deux moteurs du robot dépend de la valeurs de deux capteurs qui détectent la lumière émise par le but.

=> le système fonctionne aussi en cas d'obstacle
(le comportement doit juste être inversé)



Champs de potentiels



• Illustration de potentiels primitifs dont la combinaison guide les déplacements du robot. Le robot se déplacera selon les lignes de courant.

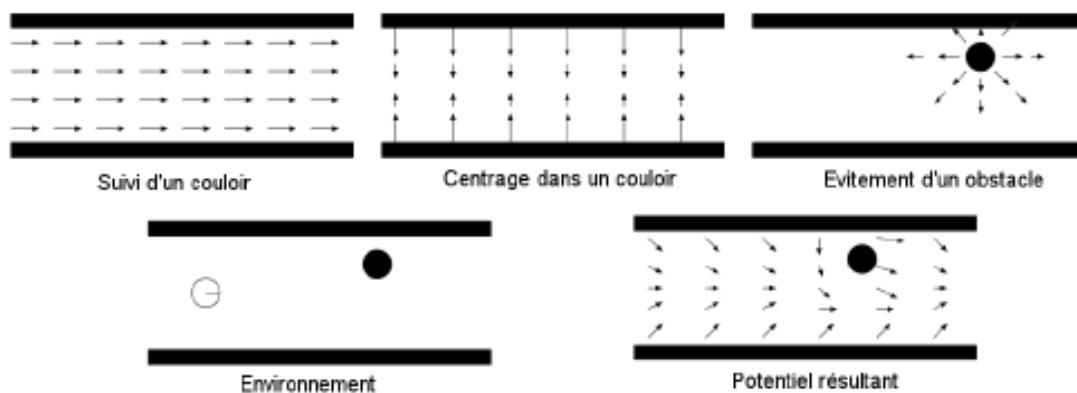
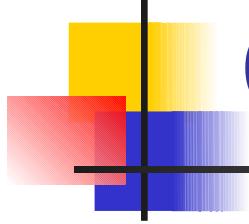
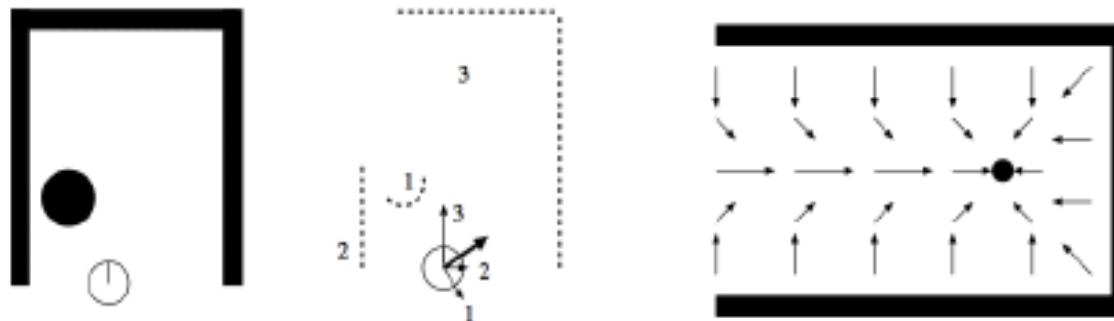


Illustration de la combinaison de différents potentiels primitifs.



Champs de potentiels

Problème des minima locaux

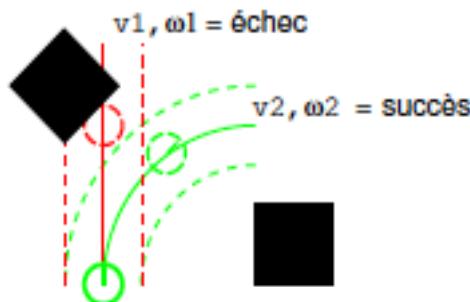


Gauche : Illustration de la combinaison de différents potentiels primitifs dans l'espace relatif au robot. Droite : Exemple de minimum local dans un champ de potentiel.

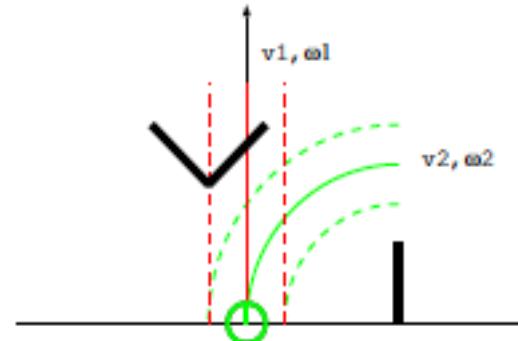
Peut être appliqué à la navigation globale (/ cartographie)
(voir cours Planification)

Fenêtre dynamique

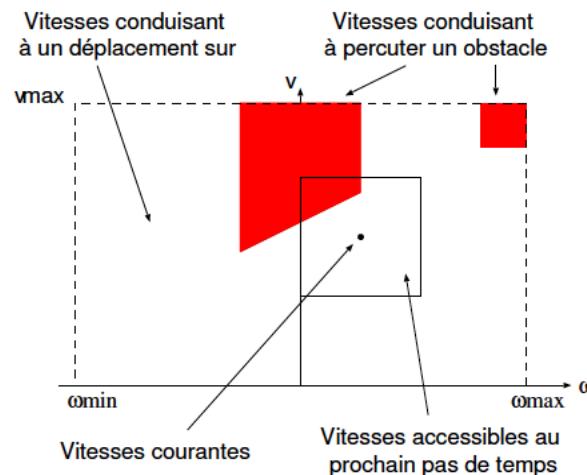
Environnement réel



Perceptions du robot

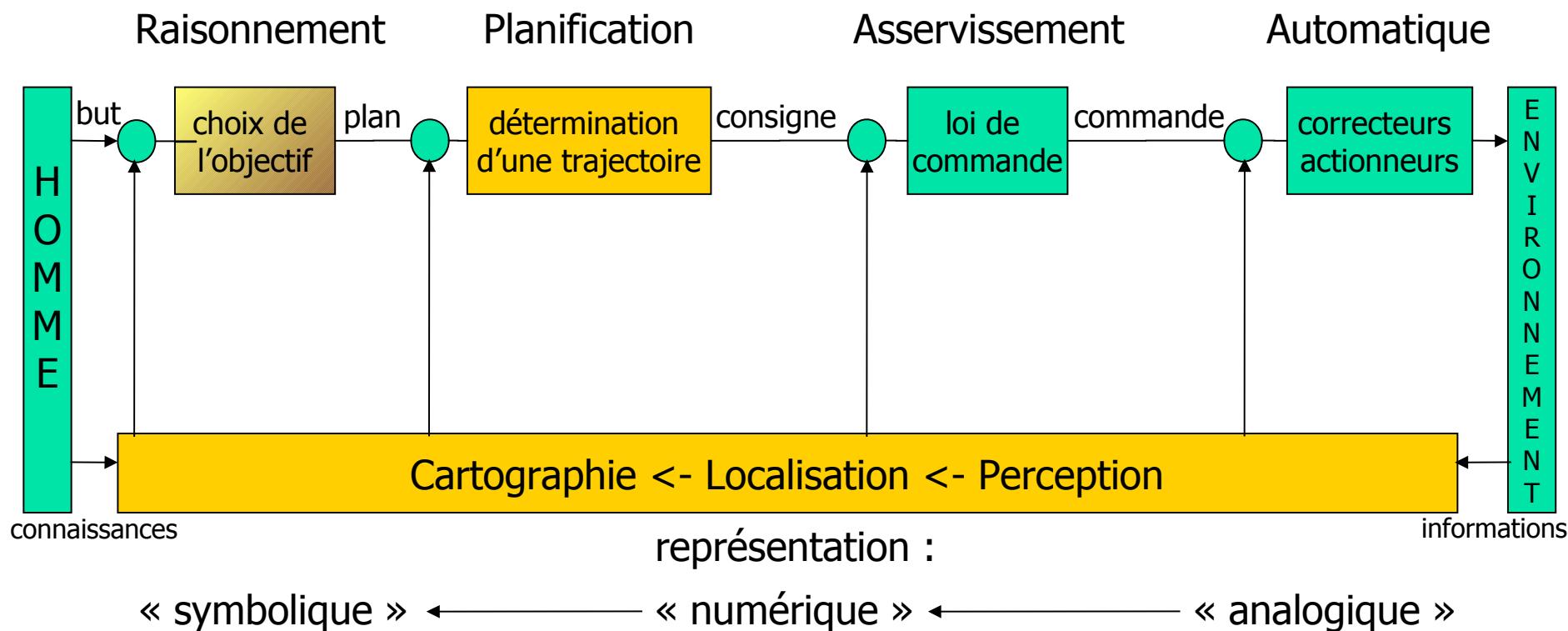


Contrainte d'évitement d'obstacles pour la méthode de la fenêtre dynamique.



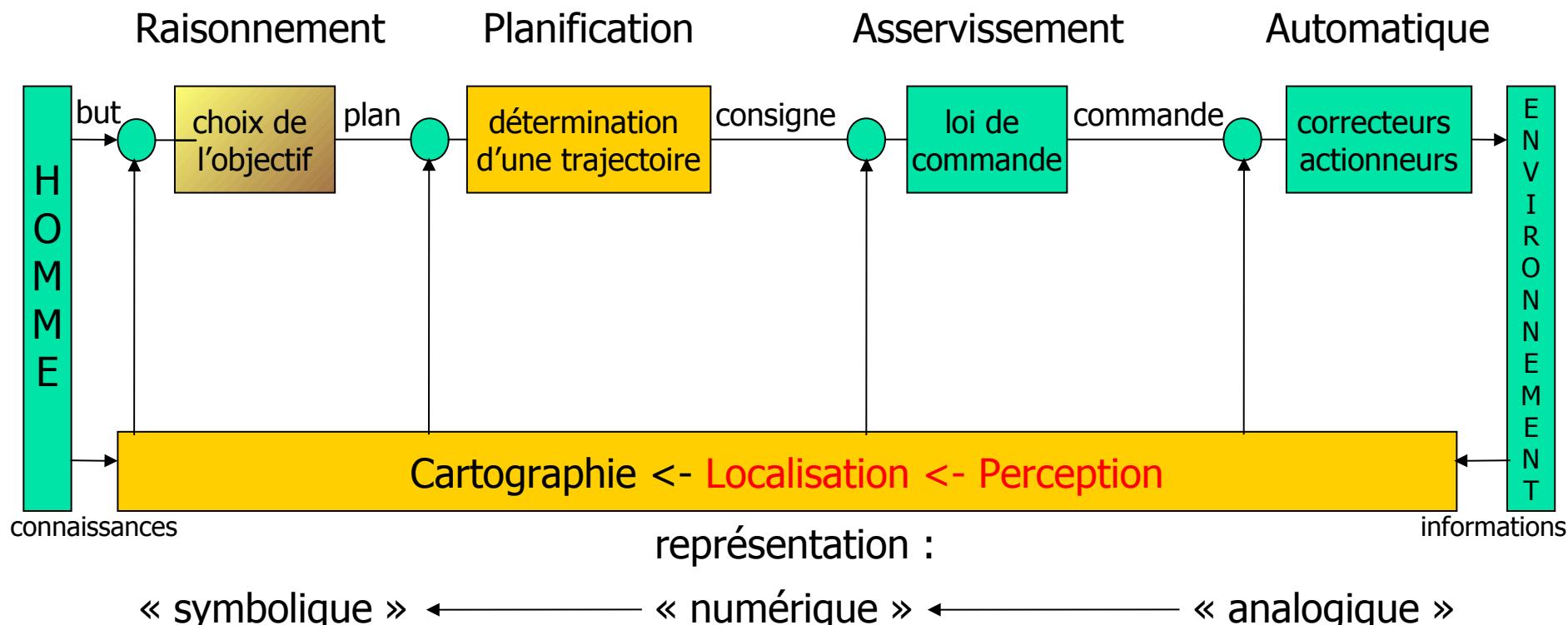
Navigation / cartographie

Si on représente un robot par un système bouclé...

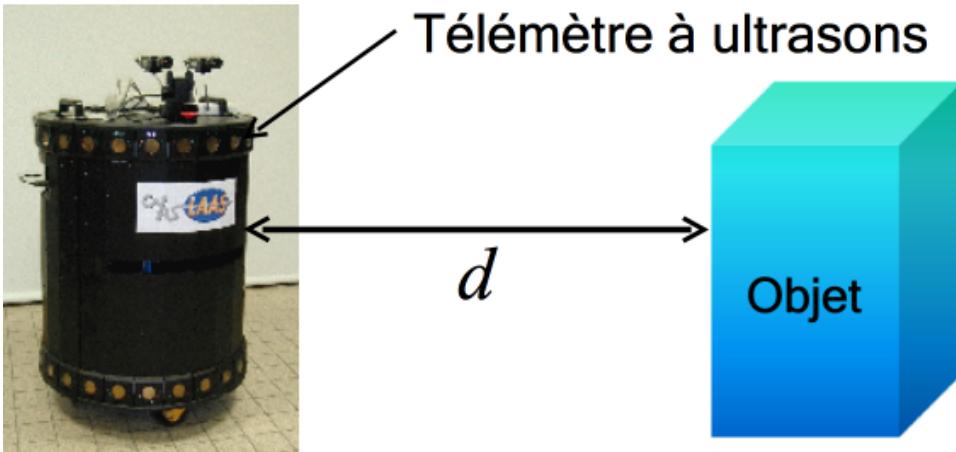


Estimation de l'Etat d'un Robot

Si on représente un robot par un système bouclé...



Estimation de l'Etat d'un Robot



Objectif : déterminer la distance, d , entre le robot et l'objet.

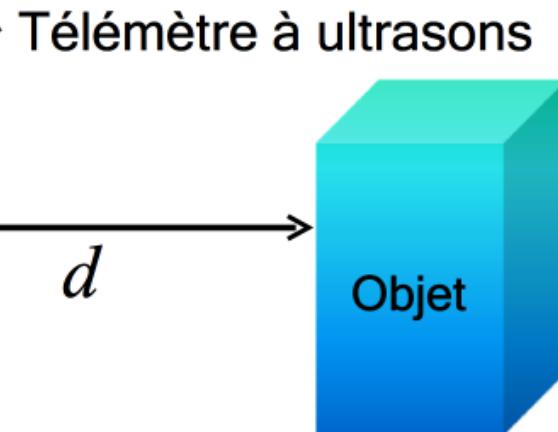
En théorie :

$$t = \frac{2d}{C}$$

Temps séparant l'émission de la réception

Célérité de l'onde

Estimation de l'Etat d'un Robot



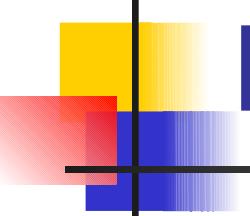
Objectif : déterminer la distance, d , entre le robot et l'objet.

En pratique :

$$t = \frac{2d}{C} + b$$

Bruit de mesure

=> à partir de la mesure de t , on ne peut chercher qu'une approximation de d , i.e. un estimé, \hat{d} de d .



Filtre de Kalman

Objectif : à partir de mesures (i.e., observations), on cherche à estimer l'état du robot

Origine : problème de l'estimation de trajectoire de satellites (+astronefs). Dans un tel problème, on cherche à estimer la position (x, y, z) et la vitesse (V_x, V_y, V_z) à partir de mesures d'angles site et azimut

Dans la terminologie de Kalman :

- > positions+vitesses = vecteur d'état X
- > observations = vecteur Z = (site, azimut)

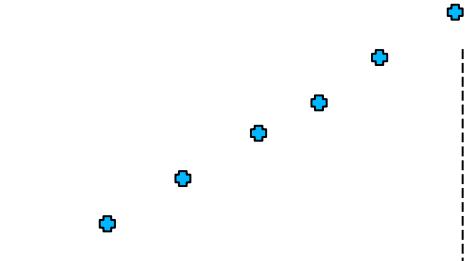
Filtre de Kalman

x



k

t



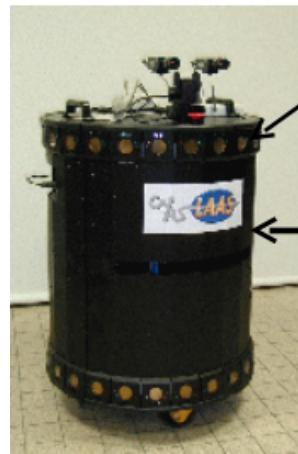
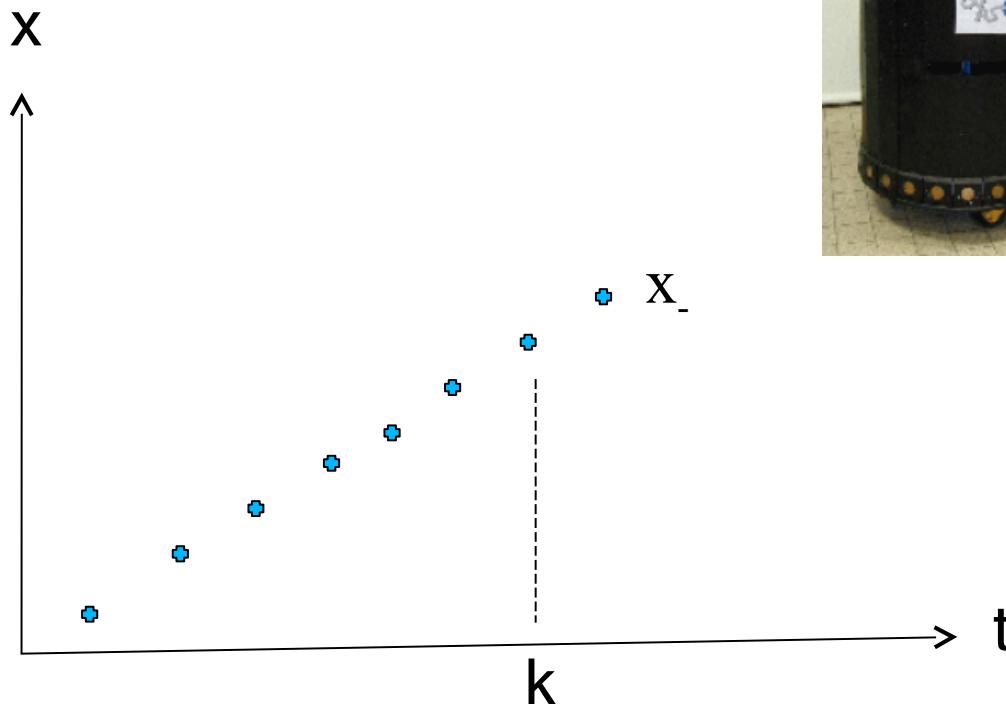
Télémètre à ultrasons

d



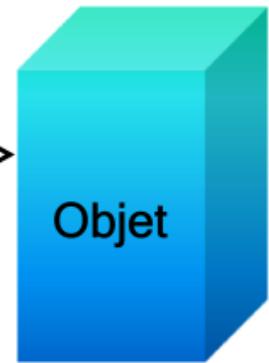
quelle est la position
du robot à l'instant $k+1$?

Filtre de Kalman



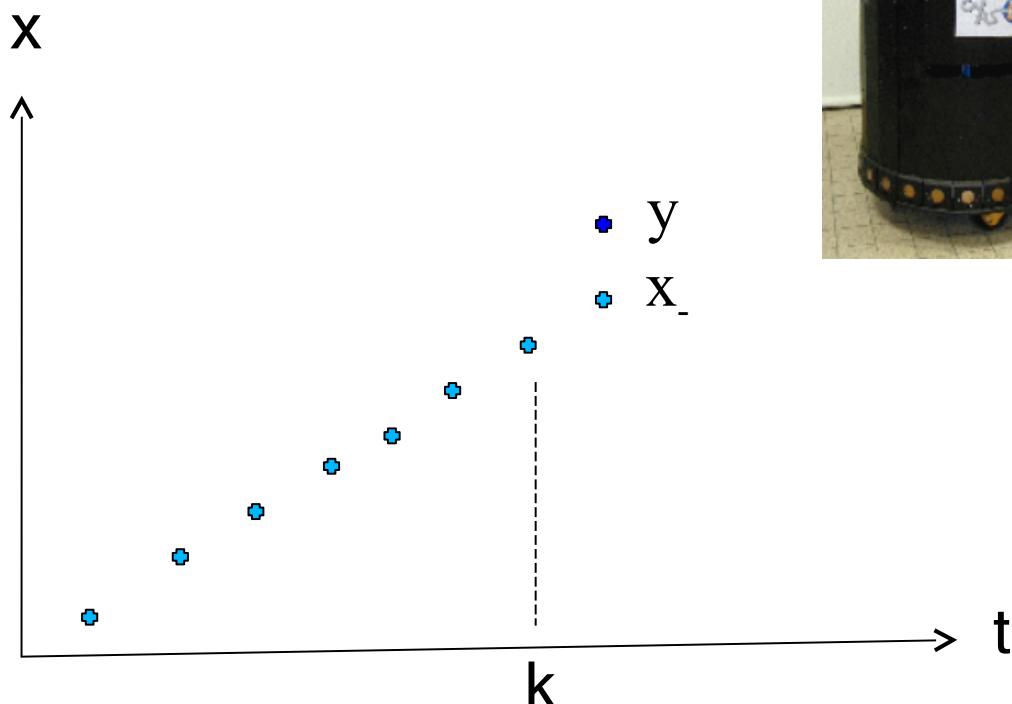
Télémètre à ultrasons

d



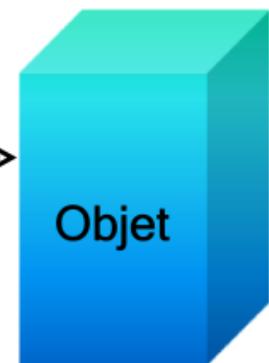
À partir des données précédentes, on en déduit une prédiction x_-

Filtre de Kalman



Télémètre à ultrasons

d

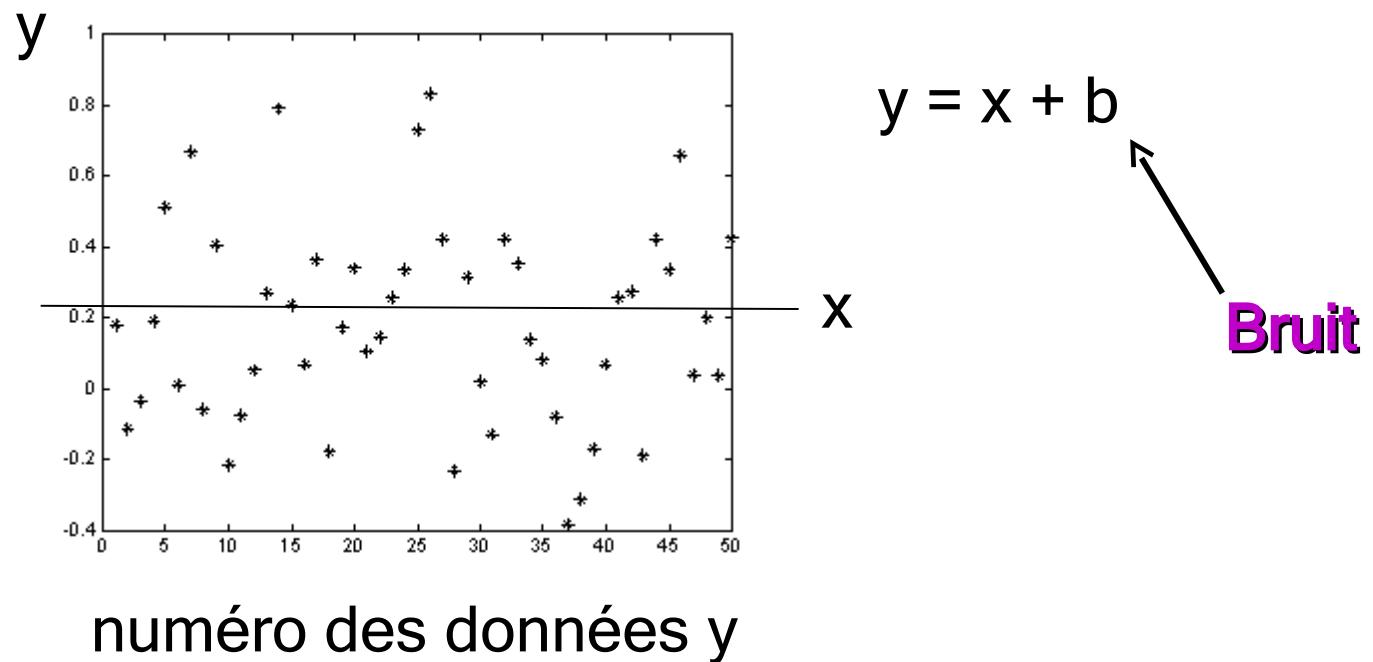


Le capteur nous donne une observation à la position y ($= Z$ à 1 dim)

Où estimez-vous la position x_+ du robot à partir de x_- et y ?

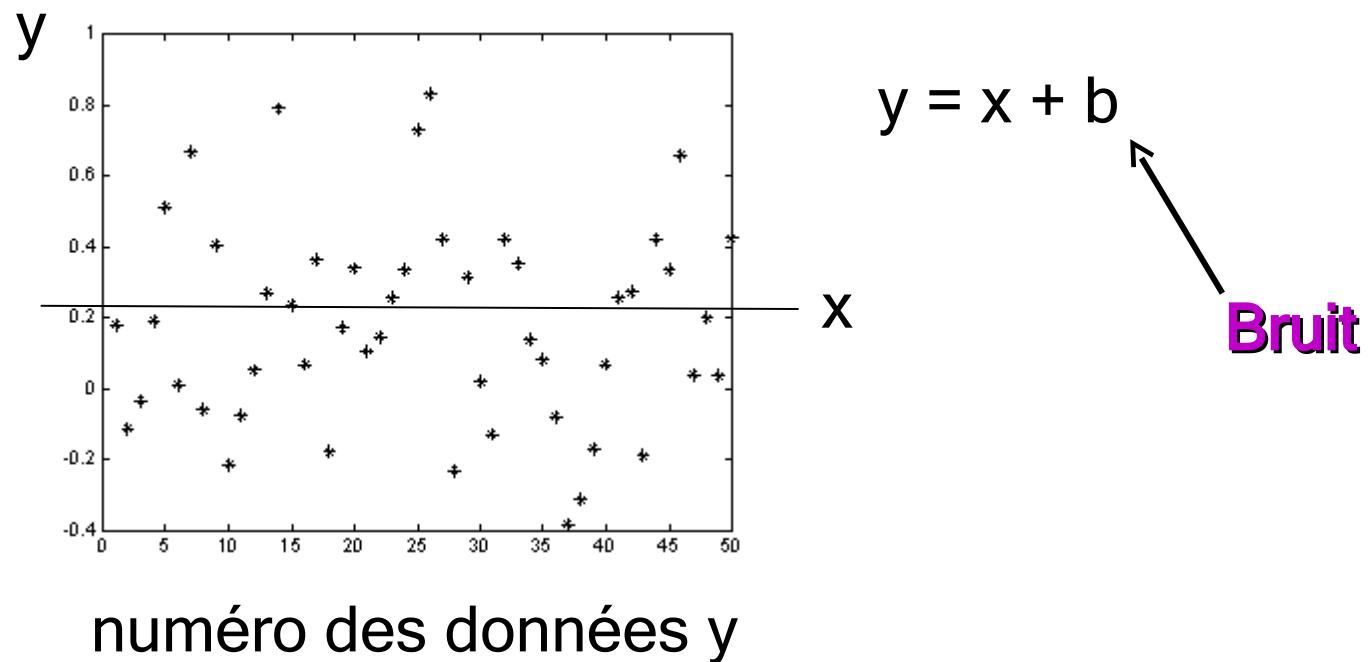
Filtre de Kalman

Définition : l'estimation est le processus via lequel on évalue la valeur d'une quantité, x , à partir de données y qui sont issues/dépendantes de x



Filtre de Kalman

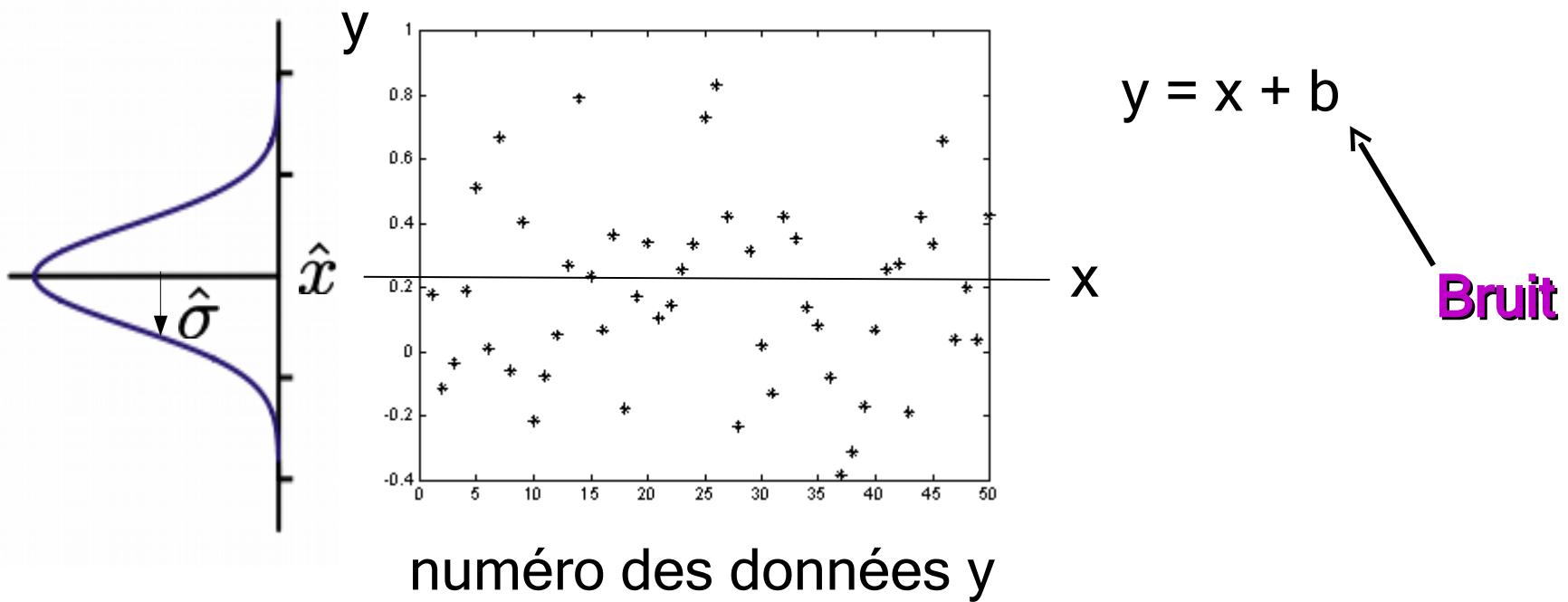
Dans le cas général, on veut obtenir la meilleure estimation \hat{X} à partir d'un ensemble de mesures $Z_{1 \rightarrow k} = (Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k)$

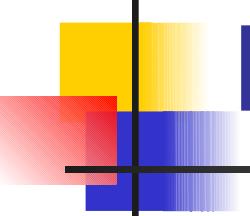


Filtre de Kalman

En termes de probabilités, on veut estimer :

$$p(X | Z_{1 \rightarrow k})$$





Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est une méthode pour calculer \hat{X} et \hat{P} de manière récursive et où on suppose que :

- $p(Z | X)$ et $p(X)$ sont des gaussiennes

-Il existe une relation linéaire entre l'observation Z et X :

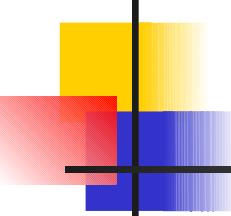
$$Z = H X + \omega$$

équation de mesure

où ω est un bruit gaussien de moyenne nulle et de covariance R :

$$p(\omega) = 1/[(2\pi)^{nz/2}|R|^{nz/2}] \exp(-1/2 \omega^T R^{-1} \omega)$$

nz = dimension de Z



Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est une méthode pour calculer \hat{X} et \hat{P} de manière récursive et où on suppose que :

$p(Z | X)$ et $p(X)$ sont des gaussiennes

Il existe une relation linéaire entre l'observation Z et X :

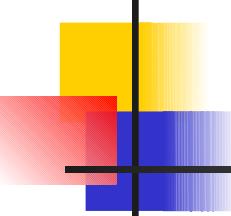
$$Z = H X + \omega$$

équation de mesure

où ω est un bruit gaussien de moyenne nulle et de covariance R :

$$p(\omega) = 1/[(2\pi)^{1/2}|R|^{nz/2}] \exp(-1/2 \omega^T R^{-1} \omega)$$

nz = dimension de Z



Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est une méthode pour calculer \hat{X} et \hat{P} de manière récursive et où on suppose que :

$p(Z | X)$ et $p(X)$ sont des gaussiennes

Il existe une relation linéaire entre l'observation Z et X :

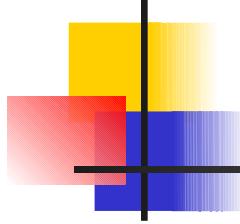
$$Z = H X + \omega$$

équation de mesure

où ω est un bruit gaussien de moyenne nulle et de covariance R :

$$p(\omega) = 1/[(2\pi)^{1/2}|R|^{nz/2}] \exp[-1/2 \omega^T R^{-1} \omega]$$

nz = dimension de Z



Filtre de Kalman

$p(Z | X)$ et $p(X)$ sont des gaussiennes

Probabilité de X , $p(X)$, est une gaussienne :

$$p(X) = 1/[(2\pi)^{1/2}|P|^{nx/2}] \exp[-1/2 (X - X_{-})^T P^{-1} (X - X_{-})]$$

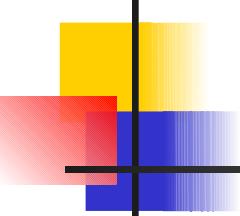
Probabilité de Z connaissant X , $p(Z | X)$, est une gaussienne :

$$p(Z | X) = 1/[(2\pi)^{1/2}|R|^{nz/2}] \exp[-1/2 (Z - HX)^T R^{-1} (Z - HX)]$$

Rappel : équation de mesure : $Z = H X + \omega \Leftrightarrow \omega = Z - H X$

nx = dimension de X

nz = dimension de Z



Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est une méthode pour calculer \hat{X} et \hat{P} de manière récursive et où on suppose que :

$p(Z | X)$ et $p(X)$ sont des gaussiennes

Il existe une relation linéaire entre l'observation Z et X :

$$Z = H X + \omega$$

équation de mesure

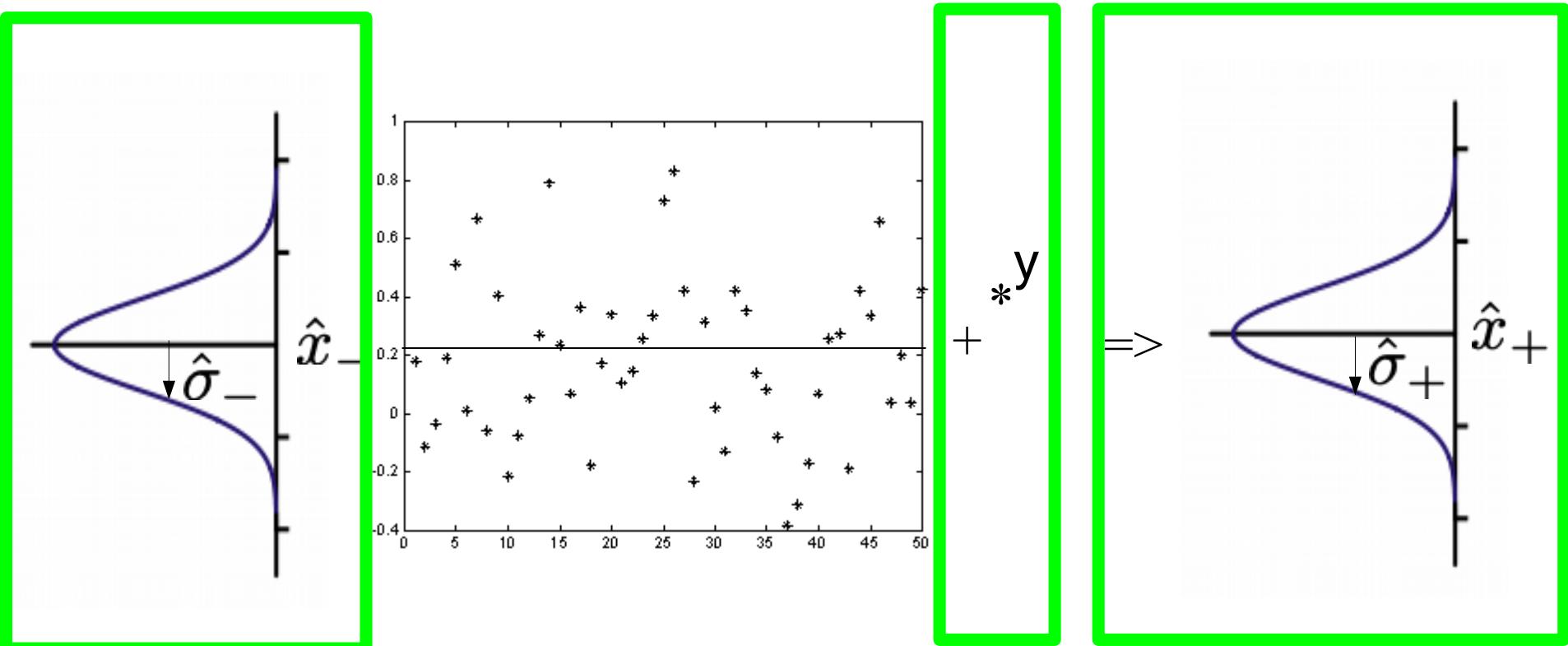
où ω est un bruit gaussien de moyenne nulle et de covariance R :

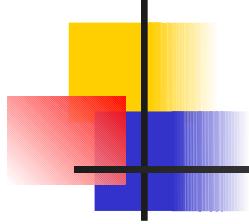
$$p(\omega) = 1/[(2\pi)^{nz/2} |R|^{1/2}] \exp[-\frac{1}{2} W^T R^{-1} W]$$

nz = dimension de Z

Filtre de Kalman

En 1D :





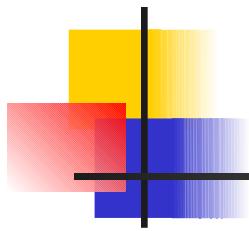
Filtre de Kalman

Suivant Bayes :

$$\begin{aligned} p(X | Z) &= p(Z | X) p(X) / p(Z) \\ &= 1/C(Z) p(Z | X) p(X) \end{aligned}$$

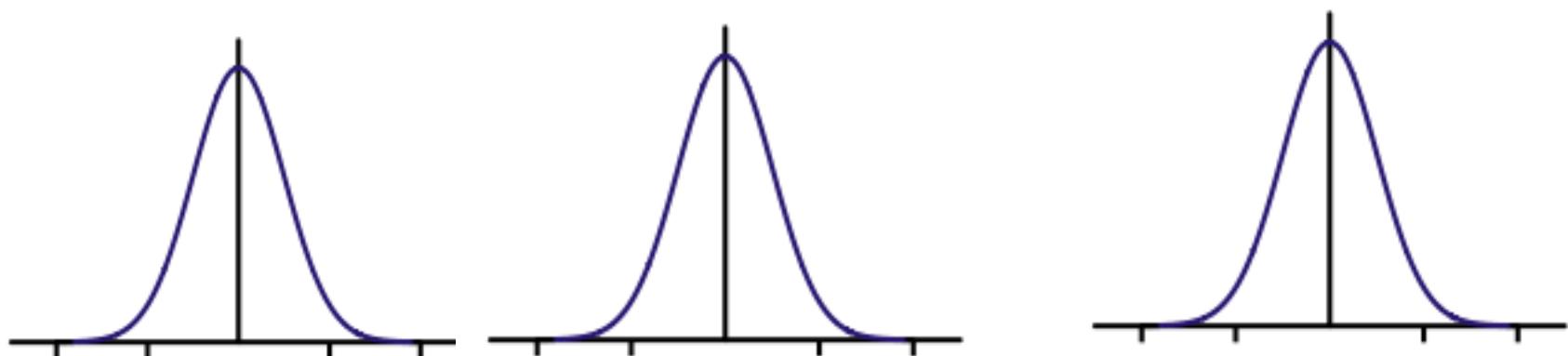
On sait que : gaussienne X gaussienne = gaussienne

Donc, en développant les équations et en identifiant les termes (en X^2 et en X), on doit pouvoir exprimer X_+ et P_+ en fonction de X_- , P_- , Z et R (et H)



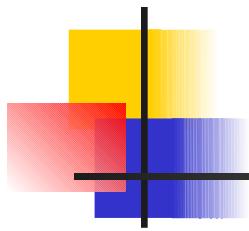
Filtre de Kalman

En 1D : $p(y \mid x)p(x) = C(y)p(x \mid y)$



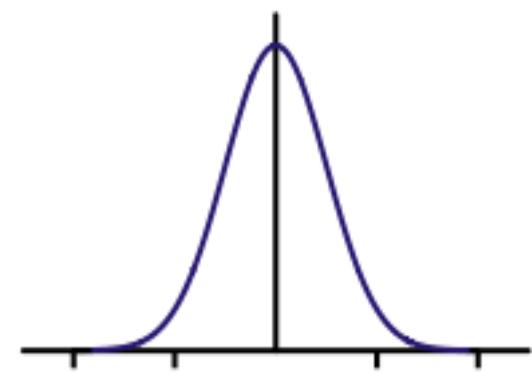
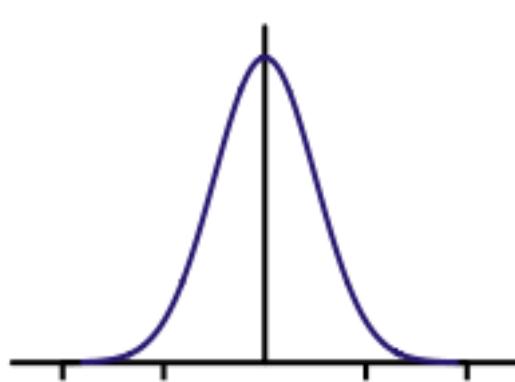
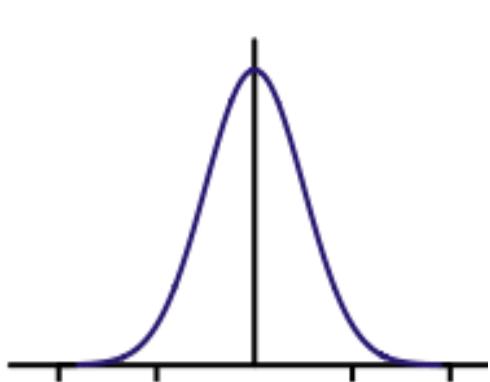
$$\langle x_-, \sigma_- \rangle \quad X \quad \langle y, \sigma_y \rangle \quad = \quad \langle x_+, \sigma_+ \rangle$$

avec $y = x + b$ (ici, $H=Id=1$)

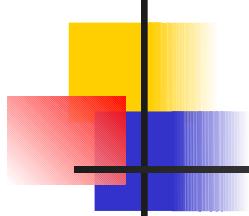


Filtre de Kalman

En 1D : $p(y \mid x)p(x) = C(y)p(x \mid y)$

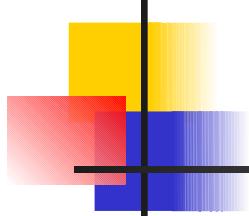


$$p(y \mid x) = K_y \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2}\right) \times p(x) = K_- \exp\left(-\frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2}\right) = C(y)p(x \mid y) = CK_+ \exp\left(-\frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2}\right)$$



Filtre de Kalman

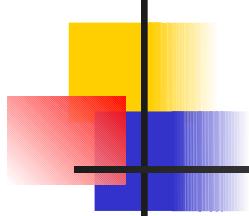
$$p(y \mid x) = K_y \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2}\right) \times p(x) = K_- \exp\left(-\frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2}\right) = C(y) p(x \mid y) = CK_+ \exp\left(-\frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2}\right)$$



Filtre de Kalman

$$p(y \mid x) = K_y \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2}\right) \times p(x) = K_- \exp\left(-\frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2}\right) = C(y) p(x \mid y) = C K_+ \exp\left(-\frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2}\right)$$

$$\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2} = \frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2} + K$$

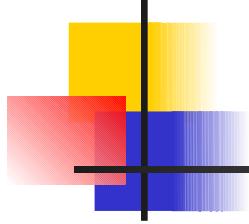


Filtre de Kalman

$$p(y \mid x) = K_y \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2}\right) \times p(x) = K_- \exp\left(-\frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2}\right) = C(y) p(x \mid y) = C K_+ \exp\left(-\frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2}\right)$$

$$\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2} = \frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2} + K$$

$$x^2\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_-^2}\right) - 2x\left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2}\right) + \dots = x^2 \frac{1}{\sigma_+^2} - 2x \frac{1}{\sigma_+^2} + \dots$$

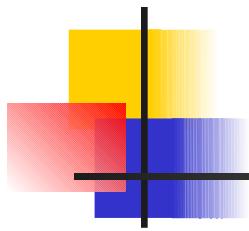


Filtre de Kalman

$$p(y \mid x) = K_y \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2}\right) \times p(x) = K_- \exp\left(-\frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2}\right) = C(y) p(x \mid y) = CK_+ \exp\left(-\frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2}\right)$$

$$\frac{(x - y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(x - x_-)^2}{\sigma_-^2} = \frac{(x - x_+)^2}{\sigma_+^2} + K$$

$$x^2 \left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_-^2} \right) - 2x \left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2} \right) + \dots = x^2 \frac{1}{\sigma_+^2} - 2x \frac{1}{\sigma_+^2} + \dots$$

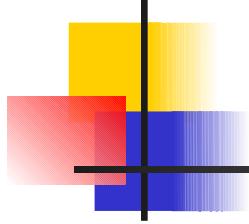


Filtre de Kalman

$$x^2 \left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_-^2} \right) - 2x \left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2} \right) + \dots = x^2 \frac{1}{\sigma_+^2} - 2x \frac{x_+}{\sigma_+^2} + \dots$$

$$\sigma_+^2 = \frac{\sigma_y^2 \sigma_-^2}{\sigma_y^2 + \sigma_-^2}$$

$$x_+ = \sigma_+^2 \left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2} \right)$$



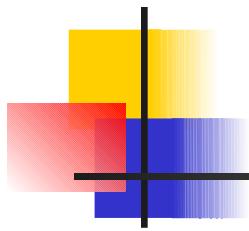
Filtre de Kalman

$$x_+ = \sigma_+^2 \left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2} \right)$$

$$\sigma_+^2 = \frac{\sigma_y^2 \sigma_-^2}{\sigma_y^2 + \sigma_-^2}$$

$$x_+ = x_- + \dots$$

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 + \dots$$



Filtre de Kalman

$$x_+ = \sigma_+^2 \left(\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x_-}{\sigma_-^2} \right)$$

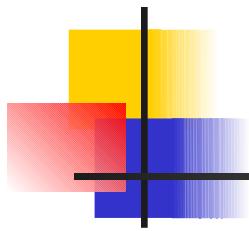
+ $x_- - x_-$

$$\sigma_+^2 = \frac{\sigma_y^2 \sigma_-^2}{\sigma_y^2 + \sigma_-^2}$$

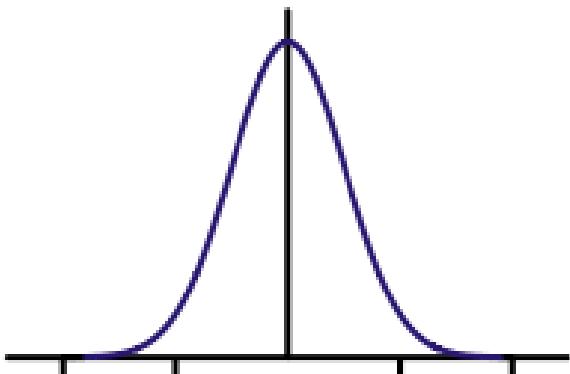
+ $\sigma_-^2 - \sigma_-^2$

$$x_+ = x_- + \dots$$

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 + \dots$$



Filtre de Kalman



$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 - K \sigma_y^2$$

$$x_+ = x_- + K (y - x_-)$$

$$K = \sigma_-^2 / (\sigma_-^2 + \sigma_y^2)$$

gain de Kalman

Filtre de Kalman

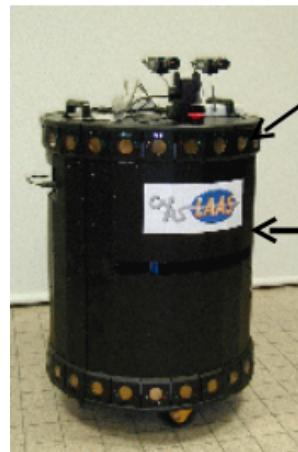
x



y
x₋

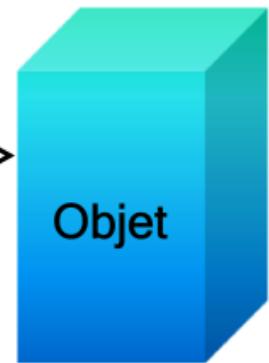
k

t



Télémètre à ultrasons

d



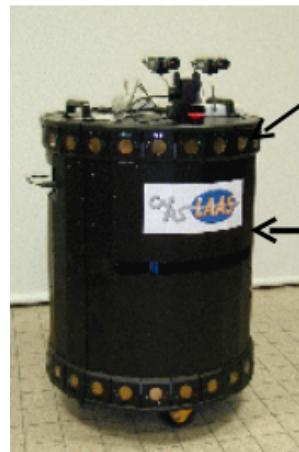
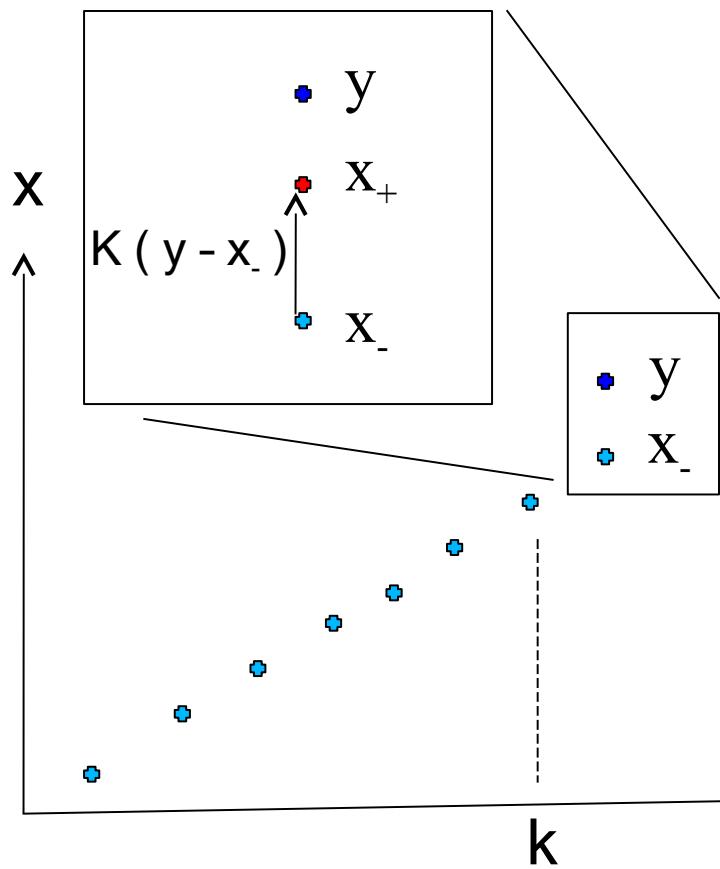
$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 - K \sigma_y^2$$

$$x_+ = x_- + K (y - x_-)$$

$$K = \sigma_-^2 / (\sigma_-^2 + \sigma_y^2)$$

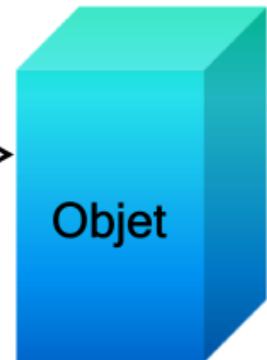
gain de Kalman

Filtre de Kalman



Télémètre à ultrasons

d

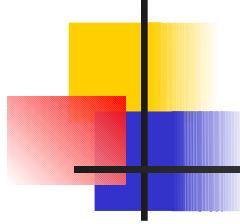


$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 - K \sigma_-^2$$

$$x_+ = x_- + K(y - x_-)$$

$$K = \sigma_-^2 / (\sigma_-^2 + \sigma_y^2)$$

gain de Kalman



Filtre de Kalman

The update equations are as follows. Given an observation \mathbf{z} with uncertainty (covariance) \mathbf{R} and a prior estimate \mathbf{x}_\ominus with covariance \mathbf{P}_\ominus the new estimate and covariance are calculated as:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\oplus &= \mathbf{x}_\ominus + \mathbf{W}\nu \\ \mathbf{P}_\oplus &= \mathbf{P}_\ominus - \mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{W}^T\end{aligned}$$

where the “**Innovation**” ν is

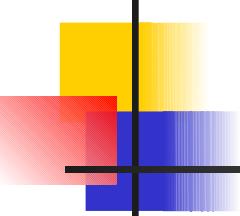
$$\nu = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_\ominus$$

the “**Innovation Covariance**” \mathbf{S} is given by

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{P}_\ominus\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

and the “**Kalman Gain**” \mathbf{W} is given by

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_\ominus\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}$$



Filtre de Kalman

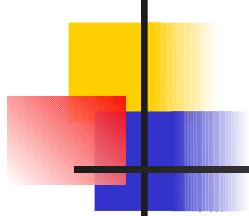
Application à la robotique : on modélise l'évolution de l'état

Equation d'Etat

$$X_k = F X_{k-1} + B u_k + G u_k$$

(ici, linéaire)

Avec : u = vecteur de commande
 u = bruit blanc (d'incertitude Q)
 X_k = état à l'instant k



Filtre de Kalman

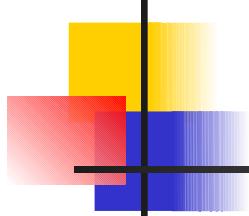
Exemple: modèle à vitesse constante $X=(d, V_d)$

Equations de récurrence :

$$Vd(t_{k+1}) = Vd(t_k)$$

$$d(t_{k+1}) = d(t_k) + Vd(t_{k+1} - t_k)$$

$$\begin{bmatrix} d(t_{k+1}) \\ Vd(t_{k+1}) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} d(t_k) \\ Vd(t_k) \end{bmatrix}$$



Filtre de Kalman

Exemple: modèle à vitesse constante $X=(d, V_d)$

Equations de récurrence :

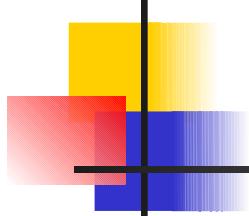
$$Vd(t_{k+1}) = Vd(t_k)$$

$$d(t_{k+1}) = d(t_k) + Vd(t_{k+1} - t_k)$$

$$\begin{bmatrix} d(t_{k+1}) \\ Vd(t_{k+1}) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} d(t_k) \\ Vd(t_k) \end{bmatrix}$$

)

$$\Rightarrow F = [1 \ T ; \\ 0 \ 1]$$



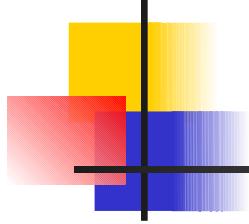
Filtre de Kalman

Exemple: modèle à vitesse constante $X=(d, V_d)$

$$F = [1 \ T ; 0 \ 1]$$

$$G = [T^2/2; \ T]$$

avec T la période d'échantillonnage



Filtre de Kalman

i | j notations :

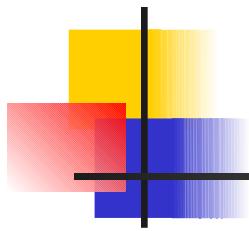
$\hat{X}^i (i | j)$ = estimée de X à l'instant i à partir des mesures $Z^{1 \rightarrow j}$

$\hat{P}^i (i | j)$ = incertitude de X à l'instant i à partir des mesures $Z^{1 \rightarrow j}$

Avec cette notation :

$\hat{X}^i (k | k)$ = estimation

$\hat{X}^i (k | k-1)$ = prédition



Filtre de Kalman

prediction:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{P}(k|k-1) &= \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T\end{aligned}$$

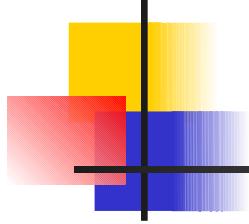
update:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{W}(k)\nu(k) \\ \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{W}(k)\mathbf{S}\mathbf{W}(k)^T\end{aligned}$$

where $\nu(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{W}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}$$



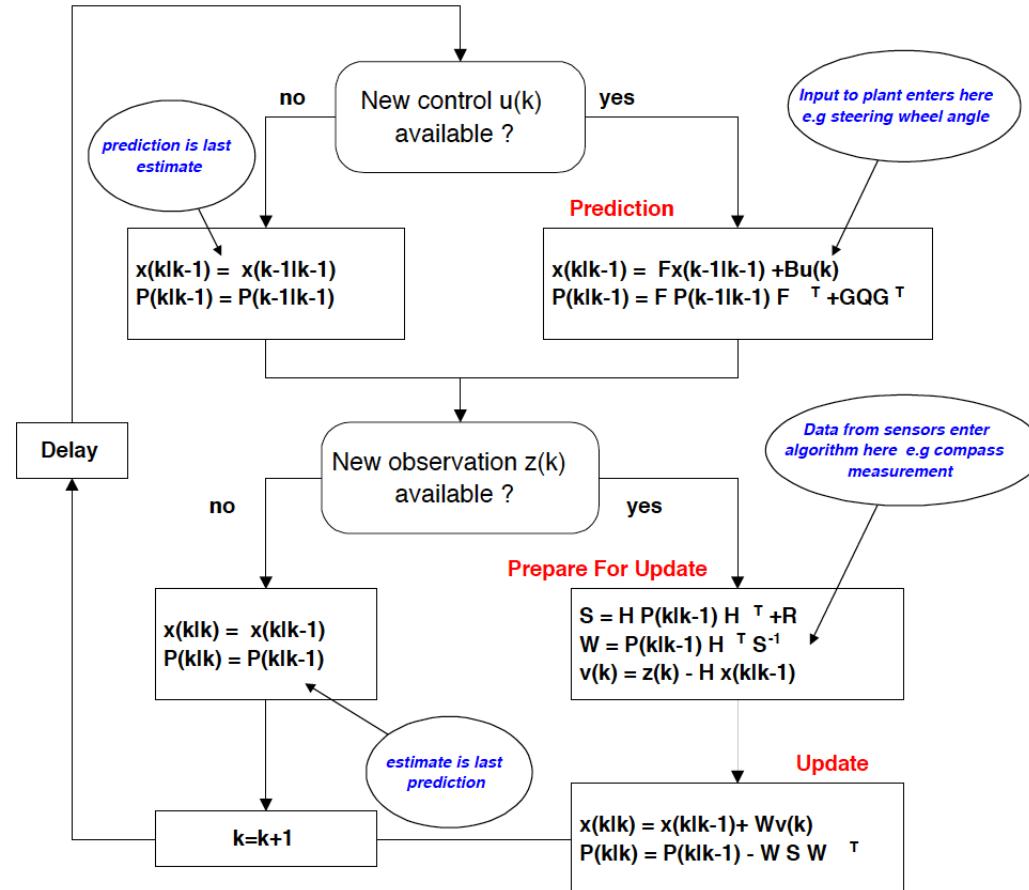
Filtre de Kalman

Commentaires :

- Récursif
- Initiation ($P(0|0)$ et $X^*(0|0)$ empiriques)
- Structure : prédiction / correcteur (mise à jour)
- Asynchrone : on peut tenir compte d'une mesure non valide
(alors estimée = prédiction)

Filtre de Kalman

Algorithme :

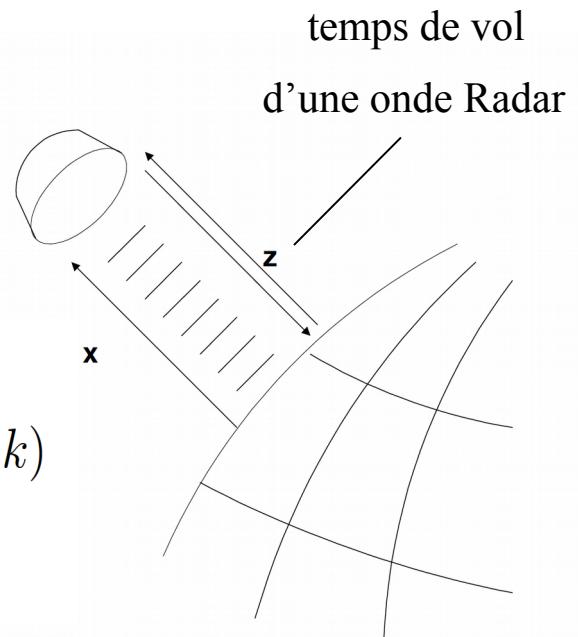


Filtre de Kalman

Exemple : Mars lander

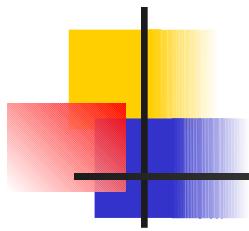
$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

Equation d'état : $\mathbf{x}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_F \mathbf{x}(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\delta T^2}{2} \\ \delta T \end{bmatrix}}_G \mathbf{v}(k)$

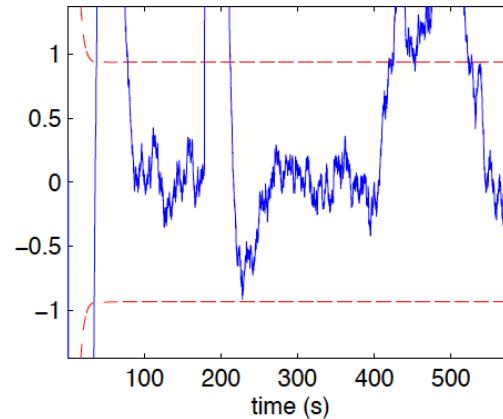
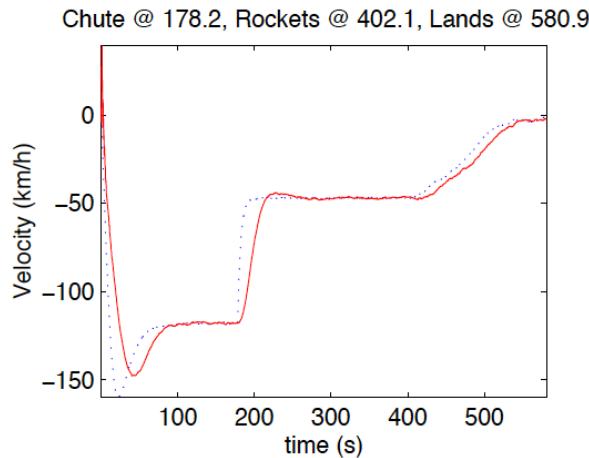
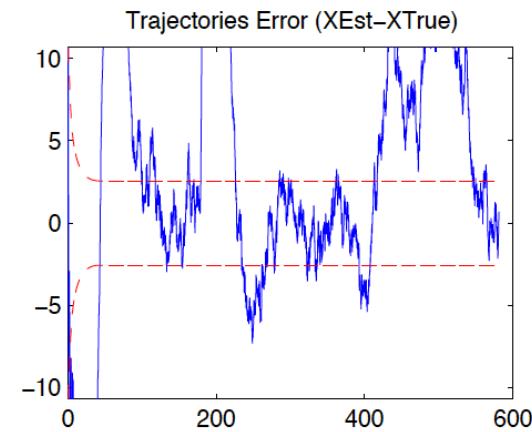
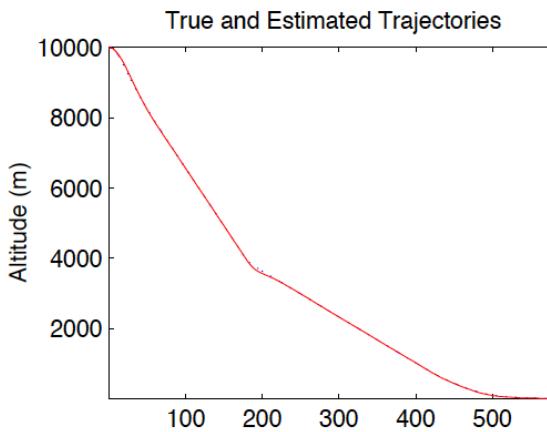


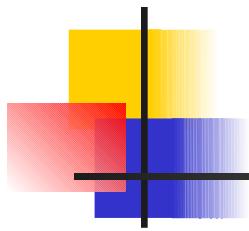
Equation de mesure : $\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \frac{2}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \end{bmatrix} + \mathbf{w}(k)$$



Filtre de Kalman





EKF = Extended Kalman Filter

Prediction:

$$\underbrace{\hat{x}(k|k-1)}_{\text{predicted state}} = \overbrace{f(\hat{x}(k-1|k-1), u(k), k)}^{\text{plant model}}$$

$$\underbrace{P(k|k-1)}_{\text{predicted covariance}} = \underbrace{\nabla F_x P(k-1|k-1) \nabla F_x^T}_{\text{old est covariance}} + \underbrace{\nabla G_v Q \nabla G_v^T}_{\text{process noise}}$$

$$\underbrace{z(k|k-1)}_{\text{predicted obs}} = \overbrace{h(\hat{x}(k|k-1))}^{\text{observation model}}$$

Update:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{x}(k|k)}_{\text{new state estimate}} &= \overbrace{\hat{x}(k|k-1) + W \underbrace{\nu(k)}_{\text{innovation}}}^{\text{prediction and correction}} \\ \underbrace{P(k|k)}_{\text{new covariance estimate}} &= \underbrace{P(k|k-1) - W S W^T}_{\text{update decreases uncertainty}} \end{aligned}$$

where

$$\nu(k) = \underbrace{z(k)}_{\text{measurement}} - z(k|k-1)$$

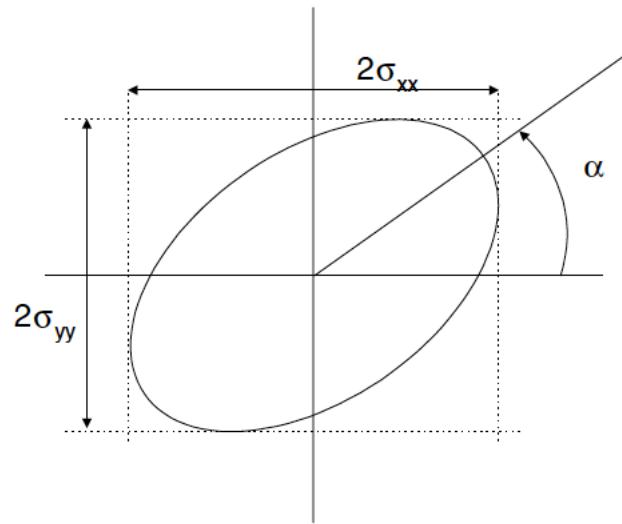
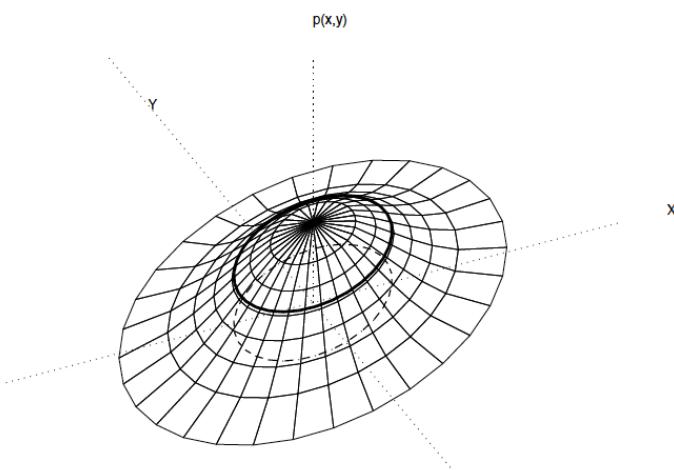
$$W = \underbrace{P(k|k-1) \nabla H_x^T S^{-1}}_{\text{kalman gain}}$$

$$S = \underbrace{\nabla H_x P(k|k-1) \nabla H_x^T + R}_{\text{Innovation Covariance}}$$

$$\nabla F_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad \nabla H_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

evaluated at $\hat{x}(k-1|k-1)$

Filtre de Kalman

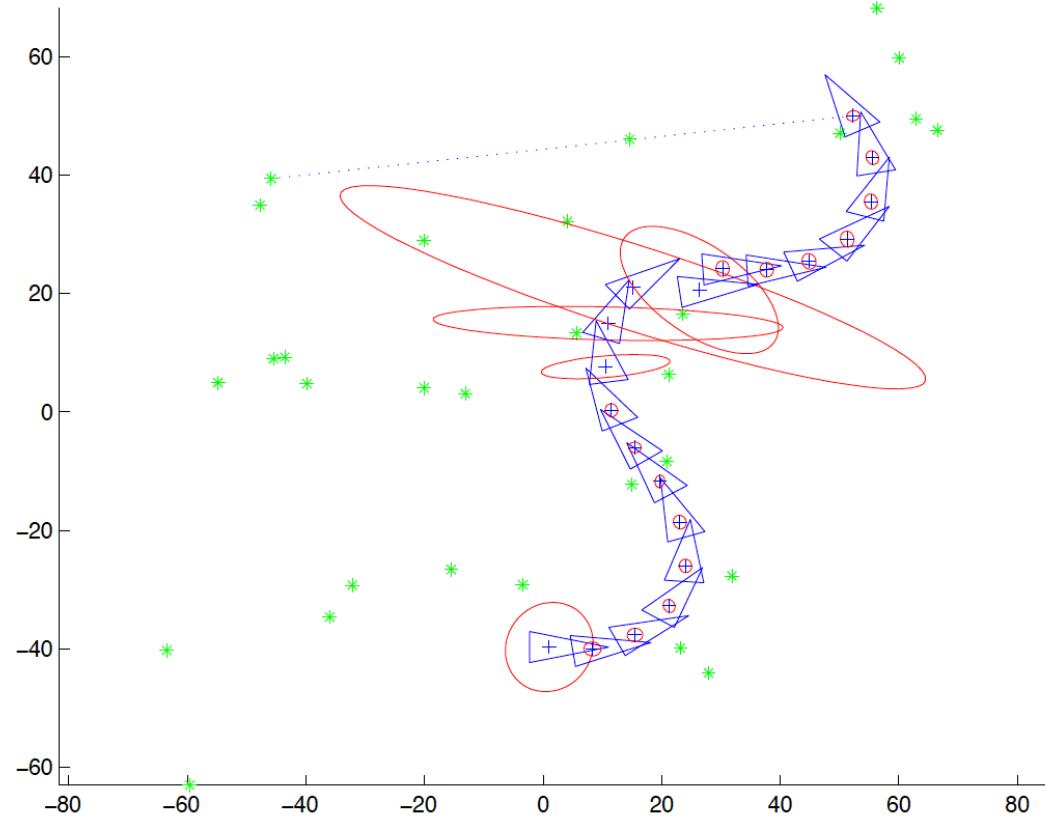
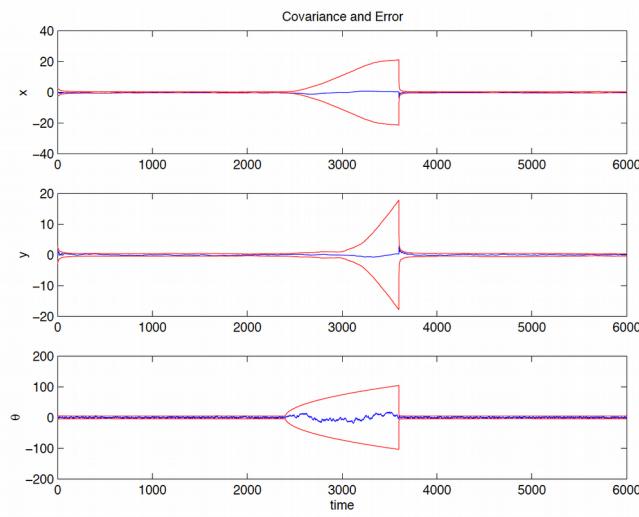


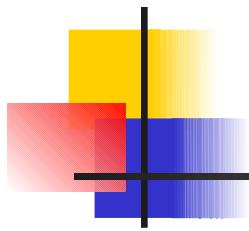
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_{yy}^2 \end{bmatrix}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2}$$

Filtre de Kalman

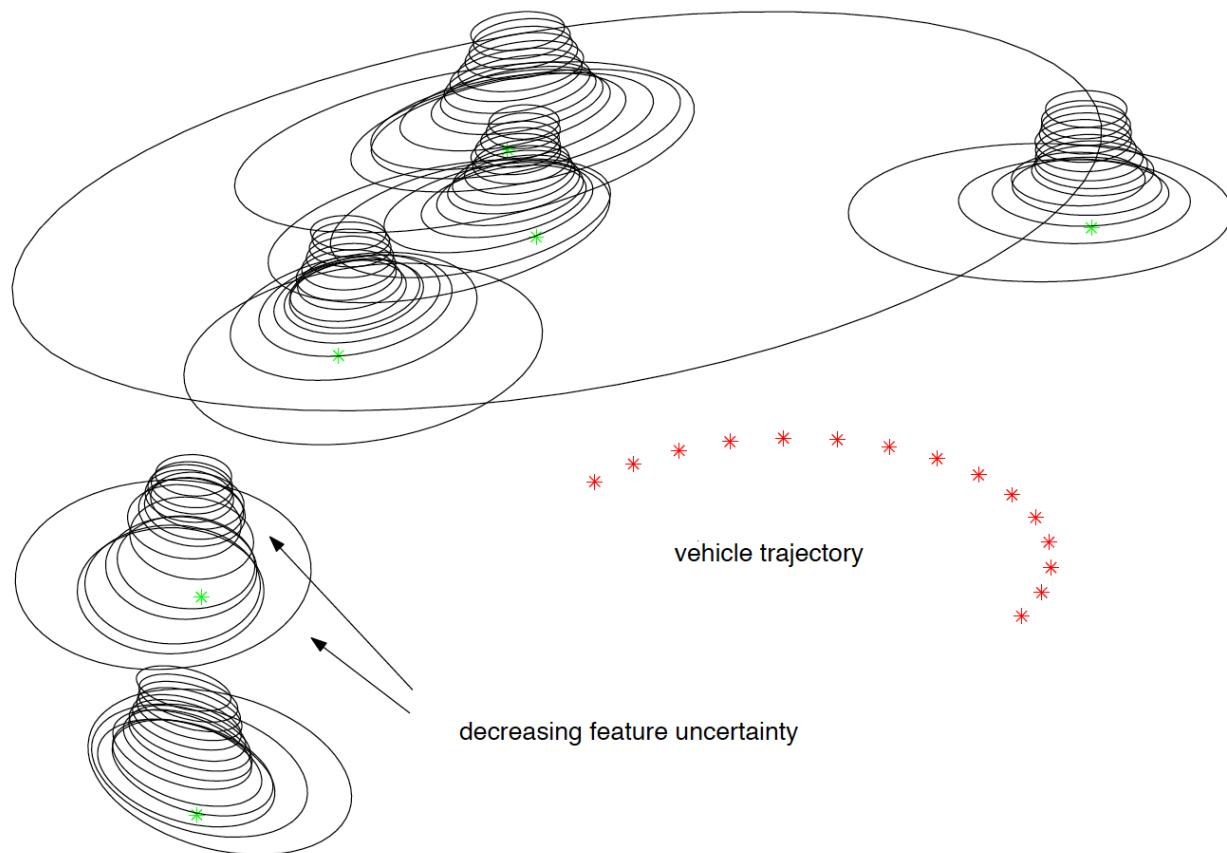
Localisation
(par rapport à
des balises)





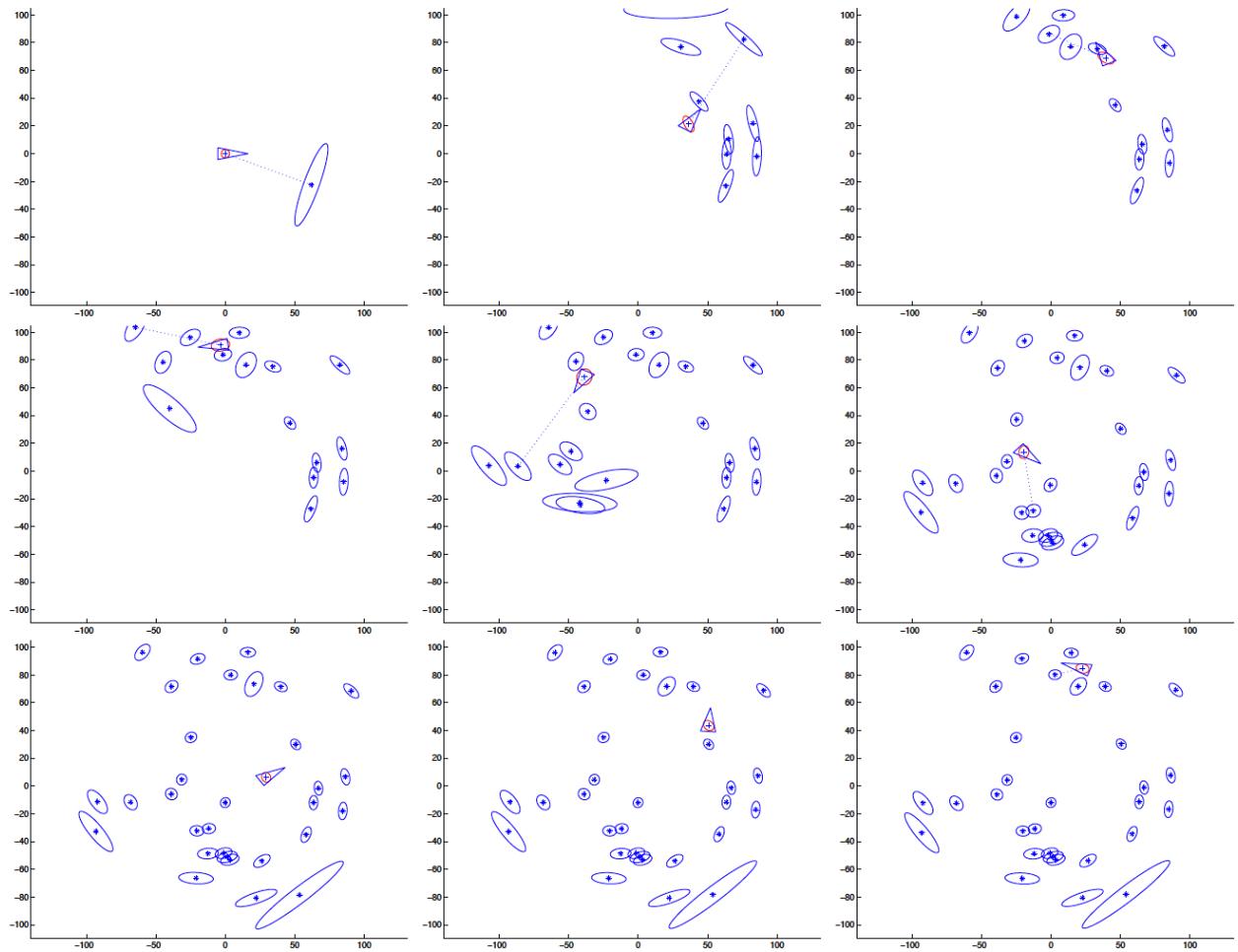
Filtre de Kalman

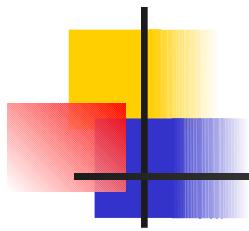
Mapping
(cartographie):



Filtre de Kalman

Simultaneous
Localization
And
Mapping :





SLAM

nécessité de boucles

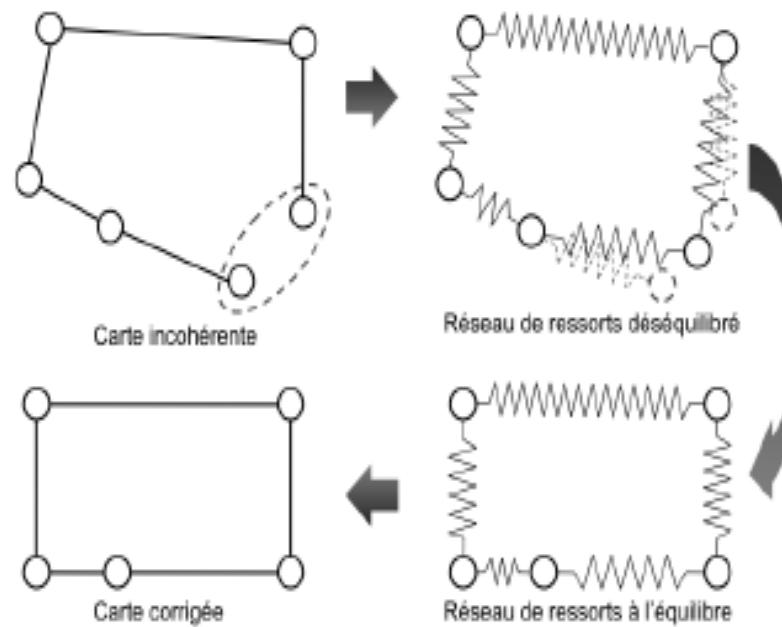
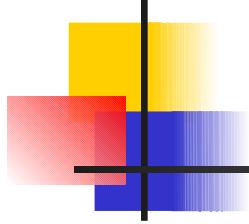
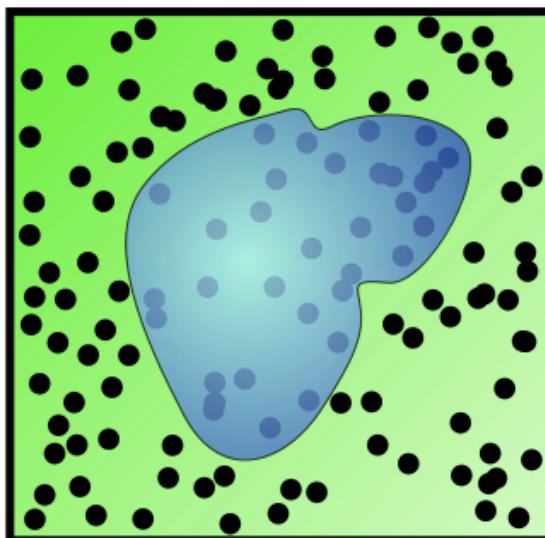
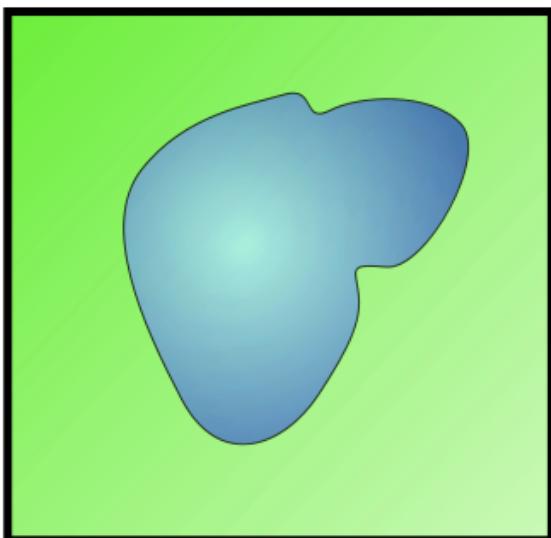


FIGURE 11.6 – Illustration du principe des méthodes de relaxation.



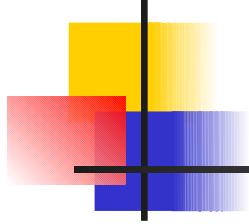
Autre estimateur : Filtre à particules

Méthode de Monte-Carlo : estimation (approchée) d'une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires

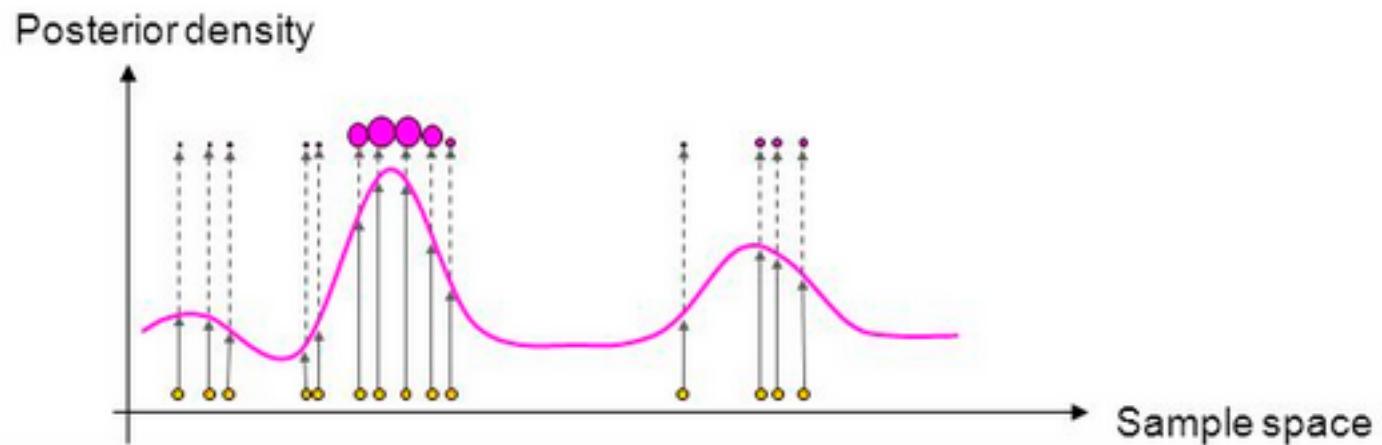


X = nombre de boulets tirés
 N = nombre de boulets sur le terrain

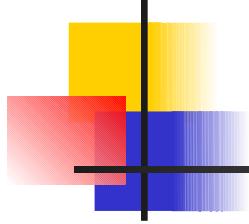
$$\frac{\text{superficie}_{\text{terrain}}}{\text{superficie}_{\text{lac}}} = \frac{X}{X - N}$$
$$\Rightarrow \quad \text{superficie}_{\text{lac}} = \frac{(X - N)}{X} \times \text{superficie}_{\text{terrain}}$$



Autre estimateur : Filtre à particules

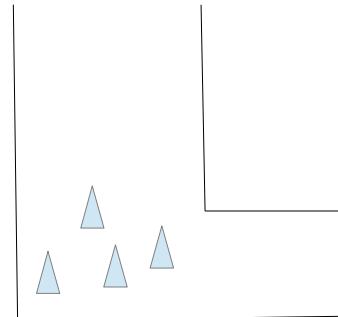


On représente la densité de proba par un ensemble de particules aléatoires avec des poids associés.

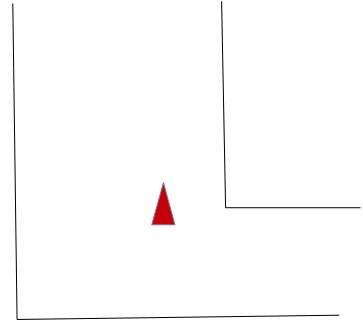


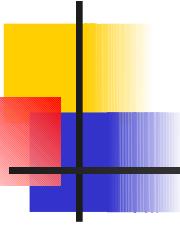
Filtre à particules : algorithme

robots virtuels = particules



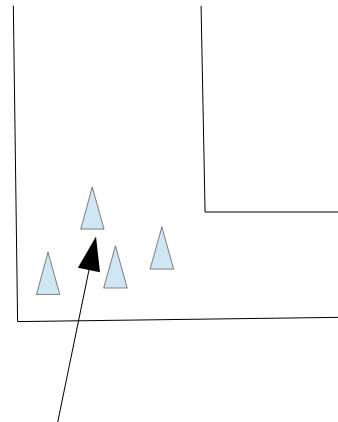
robot réel perçoit :



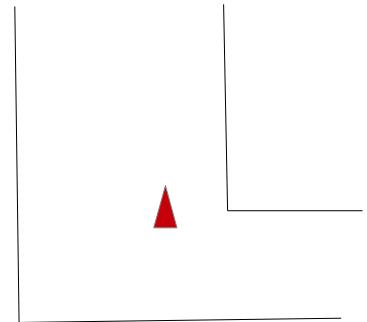


Filtre à particules : algorithme

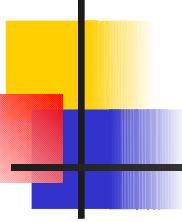
robots virtuels = particules



robot réel perçoit :

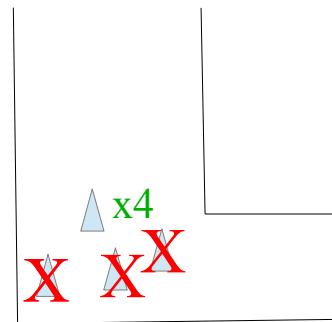


Ce robot virtuel a la perception la plus proche de celle du robot réel

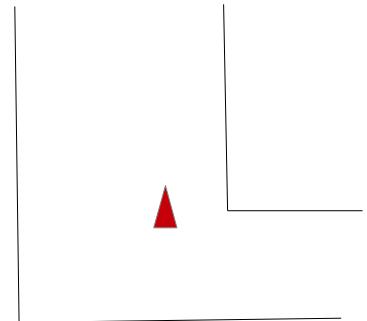


Filtre à particules : algorithme

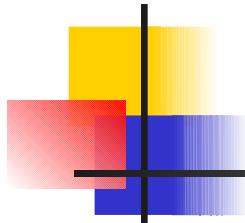
robots virtuels = particules



robot réel perçoit :

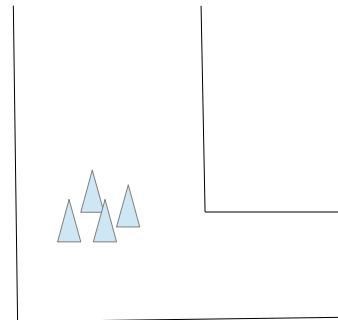


On supprime les robots virtuels les moins probables et on multiplie celui le + probable

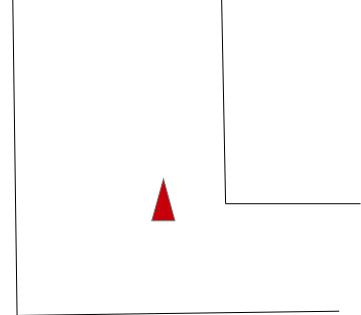


Filtre à particules : algorithme

robots virtuels = particules



robot réel perçoit :



On disperse ces nouveaux robots virtuels et on recommence

Filtre à particules : algorithme

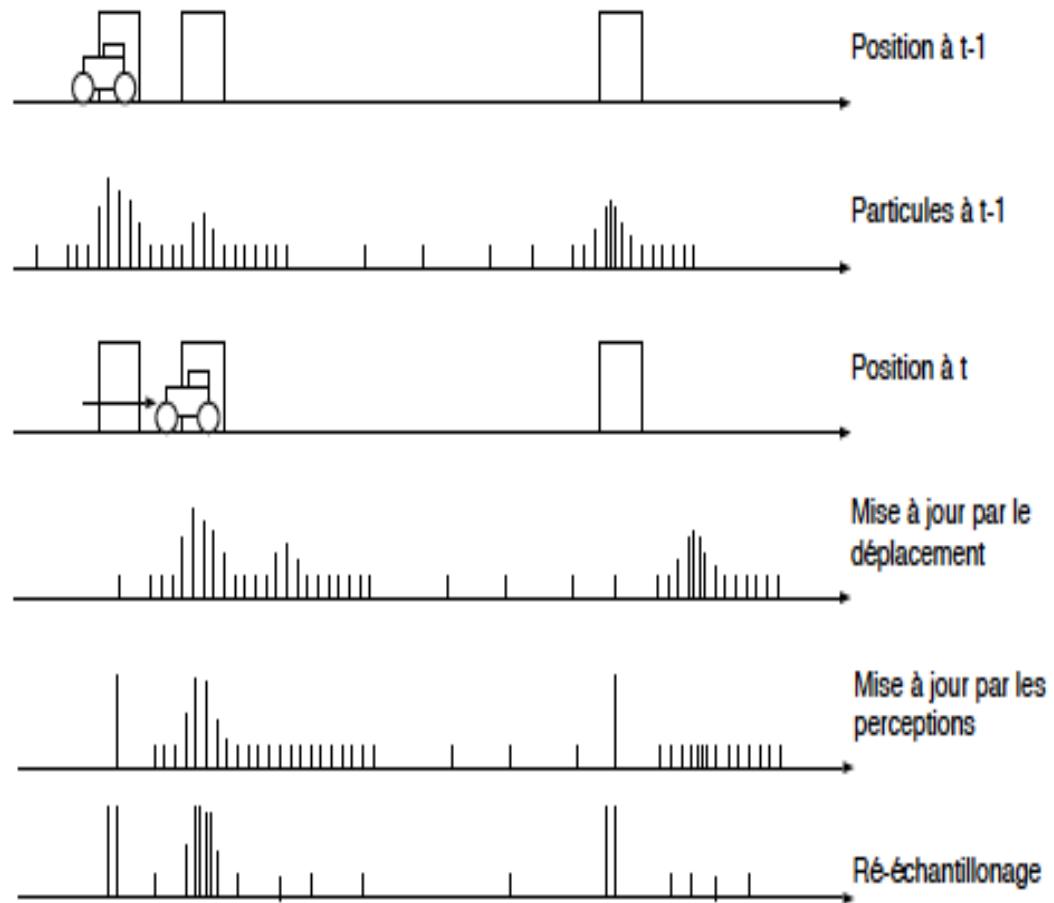
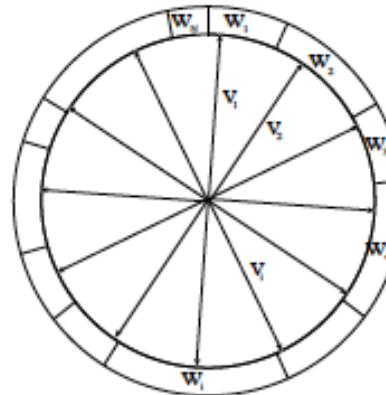


FIGURE 10.19 – Illustration du fonctionnement de l'algorithme de filtrage particulaire. Les particules se concentrent autour des positions de plus forte probabilités.



Filtre à particules : algorithme



$v_1 = w_1$
 $v_2 = w_2$
 $v_3 = w_3$
 $v_4 = w_4$
 $v_5 = w_5$
 $v_6 = w_6$
 \vdots

FIGURE 10.17 – Illustration de la méthode d'échantillonage. L'ensemble de particules w est ré-échantillonné en l'ensemble v .

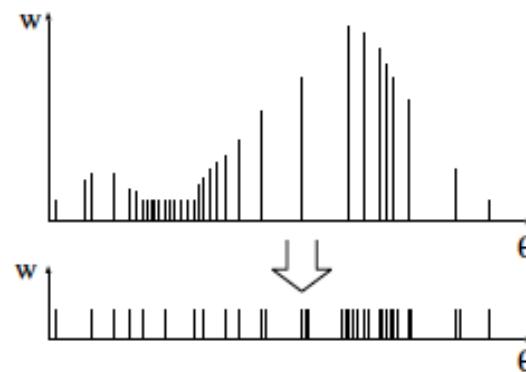
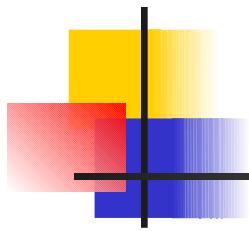
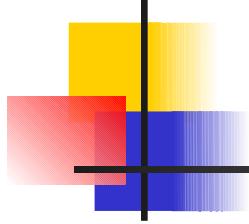


FIGURE 10.18 – Illustration de l'effet de la méthode de ré-échantillonnage. Les particules ayant initialement un poids fort conduisent à des zones de particules plus denses. Les particules ayant initialement un poids faible conduisent à des zones de particules moins denses.



Filtres à particules : vidéos



Autres estimateurs

- Moindres carrées : linéaires/non-linéaires, méthodes robustes (médian,...)
- Grid-based/sampled