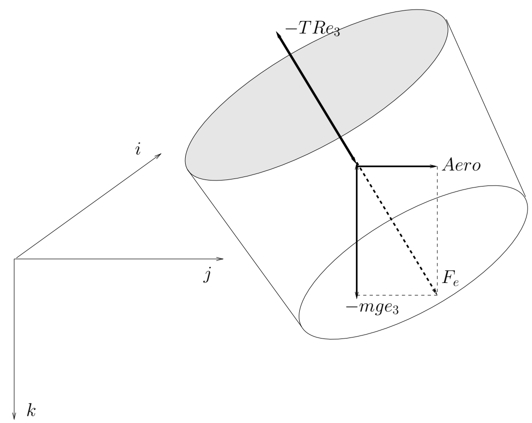
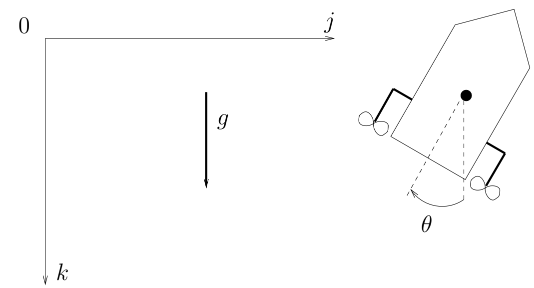
Estimation d'état

Pascal Morin
Sorbonne Université

Cours de Robotique Mobile

Objectifs





$$\begin{cases} \dot{p} &=& v \\ m\dot{v} &=& -TRe_3 + F_e \\ \dot{R} &=& RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &=& -S(\omega)J\omega + \Gamma + \Gamma_e \end{cases}$$

Objectifs: estimer les variables nécessaires pour l'implémentation des lois de commande pour différents modes de contrôle:

- Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude
- Pilotage au Joystick en mode consigne de vitesse
- Contrôle en position en mode autonome

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

- Mesures: données d'une centrale inertielle, ou IMU (Inertial Measurement Unit)
  - gyromètres: $\omega_m = \omega - b_\omega - \eta_\omega$
  - accéléromètres: $a_m = R^T(\dot{v} - ge_3) - b_a - \eta_a$
  - magnétomètres: $m_m = R^T m_I - b_m - \eta_m$
  - baromètre: $h_m = \alpha p_3 + h_0 - b_h - \eta_h$

  où les b_* représentent des biais, supposés varier lentement dans le temps, et les η_* des bruits de mesure.
- Différents objectifs possibles:
  - Pilotage en consigne de roulis/tangage + vitesse de lacet + poussée
  - Pilotage en consigne de roulis/tangage+ vitesse de lacet + vitesse verticale
  - Pilotage en consigne d'attitude (roulis/tangage/lacet) + poussée
  - Pilotage en consigne d'attitude + vitesse verticale

Pilotage au Joystick en mode consigne d’attitude

Généralités sur les centrales inertielles:

- Les centrales inertielles utilisées sur les petits drones sont des centrales de type MEMS
- Leur qualité est très inférieure à ce que l’on trouve sur l’avionique classique, ce qui exclut toute tentative de navigation inertielle
- De plus en plus souvent, une correction en température est effectuée par le constructeur, afin d’éliminer en grande partie les biais; cette correction n’est cependant pas parfaite
- Les mesures gyromètriques sont généralement assez bonnes
- Les mesures accéléromètriques peuvent être très affectées par les vibrations
- Les mesures magnétomètriques, typiquement utilisées pour estimer la direction du nord magnérique, peuvent être affectées par des champs magnétiques locaux
- Les mesures baromètriques, utilisées pour mesurer l’altitude, vont aussi être modifiées par les variations de pression au cours du temps

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Procédures préliminaires de calibration:

- Débiaiser les mesures gyrométriques:
  - La phase de près-décollage permet d'obtenir une estimée du biais gyro. b_ω, en moyennant sur quelques secondes les mesures gyromètriques: en supposant un bruit de moyenne nulle, et sachant qu'au repos $\omega = 0$, on a $\hat{b}_\omega := -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \omega_m(kT) \approx b_\omega$.
  - Cette estimée $\hat{b}_\omega$ de b_ω peut ensuite être retirée de la mesure gyromètrique pour débiaiser cette dernière: $\hat{\omega} := \omega_m + \hat{b}_\omega$
- Débiaiser les mesures accéléromètriques:
  - Le même principe peut être utilisé pour débiaiser les mesures accéléromètriques **si** l'on dispose d'une information fiable de l'orientation du drone avant décollage, e.g., sol plat en intérieur, système MOCAP, autre
- Calibrer la transformation entre le repère drone et le repère IMU:
  - On effectue des rotations autour des axes "naturels" du drone (repère drone)
  - Les gyromètres mesurent ces rotations dans leur repère propre, ce qui permet de recaler le repère IMU par rapport au repère drone

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude:

- Principe d'estimation de roulis/tangage via les mesures IMU:
  - Si l'on néglige, dans un premier temps, biais et bruits de mesure, l'accéléromètre fournit la mesure

$$a_m = R^T(\dot{v} - ge_3)$$

  - Sous l'hypothèse de faible accélération, on a donc

$$a_m \approx -gR^T e_3$$

  - Par division par $-g$, on récupère donc **a priori** l'information $\gamma := R^T e_3$, qui n'est autre que la direction de la verticale (champ de gravité), exprimée dans le repère corps.
  - Le vecteur γ contient l'information de roulis/tangage, mais elle est typiquement très bruitée.
  - Pour obtenir une estimée correcte, on va construire un observateur/filtre qui exploite en plus les informations des gyromètres.

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Estimation de roulis/tangage: observateur linéaire

- On rappelle que localement, autour de $R = I_3$,

$$R \approx I_3 + S(\Theta)\,, \quad \dot{\Theta} \approx \omega$$

  avec Θ une paramétrisation de R bien choisie.

- D'où,

$$\begin{array}{rcl} \frac{a_m}{g} & \approx & -R^T e_3 \\ & \approx & -(I_3 + S(\Theta))^T e_3 \\ & \approx & -(I_3 - S(\Theta))e_3 \\ & \approx & (S(\Theta) - I_3)e_3 \\ & \approx & (\theta_2, -\theta_1, -1)^T \end{array}$$

- Finalement,

$$-\frac{a_{m,2}}{g} \approx \theta_1\,, \quad \frac{a_{m,1}}{g} \approx \theta_2$$

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Estimation de roulis/tangage: observateur linéaire

$$-\frac{a_{m,2}}{g} \approx \theta_1 \,, \qquad \frac{a_{m,1}}{g} \approx \theta_2$$

- Puisque

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 & = & \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 & = & \omega_2 \end{cases}$$

- Ceci conduit à l'observateur suivant:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 & = & \omega_{m,1} - k_1(\hat{\theta}_1 + \frac{a_{m,2}}{g}) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 & = & \omega_{m,2} - k_2(\hat{\theta}_2 - \frac{a_{m,1}}{g}) \end{cases}$$

- La plupart du temps on choisira $k_1 = k_2 = k << 1$ (on fait plus confiance aux gyros qu'à l'accéléro).

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Estimation de roulis/tangage: observateur non-linéaire

- Afin de garantir un grand domaine de convergence de l'observateur, on peut synthétiser un observateur non-linéaire, utilisant directement le vecteur complet a_m.
- On vérifie d'abord que
$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega$$
- Expression de l'estimateur de roulis/tangage:
$$\begin{cases} \dot{\hat{\gamma}} & = & \hat{\gamma} \times (\omega - k(a_m \times \hat{\gamma})) \\ \hat{\gamma}(0) & = & -\frac{a_m(0)}{g} \end{cases}$$
- Analyse de stabilité: sous l'hypothèse d'accélération linéaire nulle et de mesures parfaites, on a $a_m = -g\gamma$. La dynamique de γ est donc donnée par
$$\dot{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma} \times (\omega - kg(\hat{\gamma} \times \gamma))$$
- On considère la fonction de Lyapunov candidate $L = 1 - \gamma^T \hat{\gamma}$.

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Estimation de roulis/tangage: observateur non-linéaire

- On vérifie que

$$\dot{L} = -kg\|\hat{\gamma} \times \gamma\|^2$$

  D'où l'on déduit la convergence de $\hat{\gamma}$ vers γ si initialement ces deux vecteurs ne sont pas opposés.

- Remarques:
  - En pratique, cet observateur sera implémenté en discret.
  - Il conviendra de forcer numériquement la contrainte de norme de $\hat{\gamma}$ égale à un (sinon, risque de divergence de l'estimation).
  - Comme pour l'observateur linéaire, le gain k doit être choisi petit (ordre de grandeur: $k \approx 0.01$)

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude:

- Principe d'estimation de l'attitude complète via les mesures IMU:
  - Soient deux vecteurs ν_1, ν_2, fixes dans le repère inertiel $\mathcal{I}$ et non colinéaires. On note $\nu_1^I, \nu_2^I \in \mathbb{R}^3$ leurs coordonnées dans $\mathcal{I}$. Supposons que l'on connaisse/mesure également l'expression de ces vecteurs dans le repère corps $\mathcal{B}$. On note $\nu_1^B, \nu_2^B \in \mathbb{R}^3$ ces vecteurs de coordonnées. On a donc:

$$\nu_1^I = R\nu_1^B \,, \quad \nu_2^I = R\nu_2^B$$

  - Soit $\nu_3^I = \nu_1^I \times \nu_2^I$. On a $\nu_3^I = R(\nu_1^B \times \nu_2^B)$. D'où, si $\nu_3^B = \nu_1^B \times \nu_2^B$,

$$\nu^I = R\nu^B \,, \quad \nu^* = \begin{pmatrix} \nu_1^* & \nu_2^* & \nu_3^* \end{pmatrix}$$

  - Puisque les deux matrices ν^I et ν^B sont connues, on peut calculer R: $R = \nu^I(\nu^B)^{-1}$, avec ν_1, ν_2 les directions du champ de gravité et du champ magnétique terrestre.
  - Cette approche est purement algébrique. Elle date des années 1960, où le problème plus général suivant connu sous le nom de problème de Wahba a été étudié:

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude:

- Cette approche est purement algébrique. Elle date des années 1960, où le problème plus général suivant connu sous le nom de problème de Wahba a été étudié:

$$\min_R \sum_{k=1}^{K} \|\nu_k^I - R\nu_k^B\|$$

  où $K \geq 2$ et les vecteurs ν_k^I, ν_k^B sont éventuellement bruîtés.
- En pratique, comme pour l'estimation de roulis/tanguage, on va construire un observateur/filtre, pour tirer bénéfice de la mesure ω_m.
- On peut synthétiser des observateurs linéaires ou non-linéaires.

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: observateur linéaire

- L'observateur est une extension de l'observateur de roulis/tangage, qui permet déjà d'estimer les deux angles θ_1, θ_2
- Le magnétomètre est la plupart du temps utilisé pour fournir la mesure de lacet (aussi appelé cap): $m_m = R^T m_I$.
- Les composantes de m_I dans un repère NED (North-East-Down) sont de la forme $m_I = (m_{I,1}, 0, m_{I,3})^T$.
- On considère une nouvelle "mesure" $\bar{m}_m$ définie par

$$\bar{m}_m = m_m - \langle m_m, \frac{a_m}{g} \rangle \frac{a_m}{g}$$

- On remarque que

$$\bar{m}_m = R^T \bar{m}_I \,, \quad \bar{m}_I = m_I - \langle m_I, \frac{Ra_m}{g} \rangle \frac{Ra_m}{g}$$

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: observateur linéaire

- Et donc, sous l'hypothèse de faible accélération,

$$\bar{m}_I \approx m_I - \langle m_I, e_3 \rangle e_3 = (m_{I,1}, 0, 0)^T$$

- Ceci permet de récupérer l'information de cap:

$$\bar{m}_m \approx m_{I,1} R^T e_1 \approx m_{I,1} (1, -\theta_3, \theta_2)^T$$

- D'où

$$\langle \bar{m}_m, e_2 \rangle \approx -m_{I,1} \theta_3$$

- On définit alors l'estimation de θ_3 par:

$$\dot{\hat{\theta}}_3 = \omega_{m,3} - k(\hat{\theta}_3 + \langle \frac{\bar{m}_m}{m_{I,1}}, e_2 \rangle)$$

- **ATTENTION: Le caractère local est beaucoup plus limitant que pour le tangage/roulis: un drone tourne facilement de 360° sur le lacet**

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: Il existe plusieurs estimateurs possibles

- Estimation à partir d'une reconstruction de R: La matrice R calculée comme indiquée dans le transparent précédent est utilisée comme entrée de l'estimateur suivant (Passive complementary filter):

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R} S \left(\omega + k \hat{R}^T \text{vex}(P_a(\tilde{R})) \right) , \quad k > 0$$

  avec $\tilde{R} = R\hat{R}^T$, $P_a(M) = \frac{1}{2}(M - M^T)$ la partie anti-symmétrique de M, et vex l'opérateur inverse de $S(.)$: vex$(S(x)) = x$, $\forall x$.

- Analyse de stabilité: Elle est basée sur la fonction de Lyapunov candidate $L = \text{Tr}(I - \tilde{R})$, avec Tr l'opérateur de trace matricielle. Avant d'établir la preuve, on rappelle des propriétés des normes matricielles...

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude:
Rappels: On peut définir sur l'espace des matrices un produit scalaire et une norme (norme de Frobenius):

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B), \quad \|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$$

Quelques propriétés de la trace et du produit scalaire:

- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$,
- $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,
- $\mathrm{Tr}(ab^T) = a^T b$, avec a et b des vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
- $\langle S(a), S(b)\rangle = -2a^T b$,
- Pour toute matrice symétrique A et toute matrice antisymétrique S, $\langle A, S\rangle = 0$,
- On déduit de la relation précédente que pour toute matrice M et toute matrice anti-symétrique S,

$$\langle M, S\rangle = \langle P_a(M), S\rangle$$

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: Il existe plusieurs estimateurs possibles

- Estimation à partir d'une reconstruction de R: Passive complementary filter):

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R}S\left(\omega + k\hat{R}^T \text{vex}(P_a(\tilde{R}))\right) \ , \quad k > 0$$

- Analyse de stabilité: Fonction de Lyapunov candidate $L = \text{Tr}(I - \tilde{R})$. On a

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{R}S(-k\text{vex}(P_a(\tilde{R})))$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= \text{Tr}(\tilde{R}S(k\text{vex}(P_a(\tilde{R}))) \\
&= \langle \tilde{R}^T, S(k\text{vex}(P_a(\tilde{R})))\rangle \\
&= -k\langle P_a(\tilde{R}), S(\text{vex}(P_a(\tilde{R})))\rangle \\
&= -k\|P_a(\tilde{R})\|^2
\end{aligned}$$

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: Il existe plusieurs estimateurs possibles

- Estimation à partir d'une reconstruction de R: Passive complementary filter):

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R} S\left(\omega + k\hat{R}^T \text{vex}(P_a(\tilde{R}))\right)\,, \quad k > 0$$

- Analyse de stabilité:

$$\dot{L} = -k\|P_a(\tilde{R})\|^2$$

Par conséquent, L décroit et, par LaSalle, les trajectoires tendent vers le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble

$$\{\tilde{R} : P_a(\tilde{R}) = 0\}$$

Cet ensemble est composé de l'identité, et des matrices de rotation d'angle π (et donc de trace -1. Par conséquent, si à l'instant initial $\text{Tr}(\tilde{R}) > -1$, alors $\tilde{R}$ tend asymptotiquement vers la matrice identité.

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: Il existe plusieurs estimateurs possibles

- Estimation à partir des mesures directes des directions (Explicit complementary filter):

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R}S\left(\omega + \sum_{i=1}^{2} k_i \nu_i^B \times \hat{R}^T \nu_i^I\right) , \quad k_i > 0$$

- Remarques: En pratique, ces observateurs seront implémentés en discret, et typiquement sous la forme quaternion associée. Il conviendra de maintenir la norme du quaternion égale à un.

Pilotage au Joystick en mode consigne d'attitude

Algorithmes pour l'estimation d'attitude: Estimation d'attitude + estimation de biais gyro.
Les observateurs précédents peuvent être étendu au cas où les mesures gyro. sont biaisées. Un exemple:

- Le modèle:

$$\begin{cases} \dot{R} & = & RS(\omega_m + b_\omega) \\ \dot{b}_\omega & = & 0 \end{cases}$$

- L'observateur:

$$\begin{cases} \dot{\hat{R}} & = & \hat{R}S\left(\omega_m + \hat{b}_\omega + k_1 \hat{R}^T \text{vex}(P_a(\tilde{R}))\right), \quad k > 0 \\ \dot{\hat{b}}_\omega & = & -k_2 \hat{R}^T \text{vex}(P_a(\tilde{R})) \end{cases}$$

- Analyse de stabilité: Fonction de Lyapunov candidate

$$L = \text{Tr}(I - \tilde{R}) + \frac{k_2}{2} \|\hat{b}_\omega - b_\omega\|^2$$

- Exercice: Etablir la preuve de stabilité. Peut-on spécifier le domaine de stabilité en fontion des gains?

Pilotage au Joystick en mode consigne de vitesse

- Principe:
  - On dispose d’une mesure de vitesse (GPS, vitesse verticale baro ou laser, etc)
  - On envoie des consignes de vitesse
  - Le drone doit asservir sa vitesse sur les consignes
- Que peut-on/doit-on faire de plus?
  - Suivant la qualité/fréquence des mesures de vitesse, on va vouloir améliorer l’estimation de vitesse
  - L’information de vitesse peut servir à améliorer l’estimation d’attitude

Pilotage au Joystick en mode consigne de vitesse

Améliorer l'estimation de vitesse: Deux types de méthodes:

- On utilise le modèle dynamique du drone, éventuellement complété avec un terme de perturbation:

$$\begin{cases} m\dot{v} &= mge_3 - TRe_3 + P_e \\ \dot{P}_e &= 0 \end{cases}$$

- On utilise le modèle de mesure des accéléromètres:

$$\dot{v} = ge_3 + Ra_m$$

- Ceci donne les observateurs suivants:

$$\begin{cases} m\dot{\hat{v}} &= mge_3 - TRe_3 + \hat{P}_e - mk_1(\hat{v} - v) \\ \dot{\hat{P}}_e &= -mk_2(\hat{v} - v) \end{cases}$$

et

$$\dot{\hat{v}} = ge_3 + Ra_m - k_1(\hat{v} - v)$$

Pilotage au Joystick en mode consigne de vitesse

Améliorer l'estimation d'attitude:

- Objectif: améliorer l'estimation de vitesse classique, qui repose sur l'hypothèse d'accélération nulle
- Principe: On cherche à estimer conjointement v et R à partir du modèle:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{v} & = & ge_3 + Ra_m \\ \dot{R} & = & RS(\omega) \end{array} \right.$$

- Un observateur possible:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{v}} & = & ge_3 + Ra_m - k_1(\hat{v} - v) \\ \dot{\hat{R}} & = & \hat{R}S\left(\omega + k_2((m_m \times \hat{R}^T m_I)^T a_m)a_m + k_3 a_m \times \hat{R}^T(v - \hat{v})\right) \end{array} \right.$$

où les k_i sont des gains positifs et m_I correspond aux coordonnées du champ magnétique terrestre exprimé en repère inertiel.

Contrôle en position en mode autonome

- Il s'agit d'une extension directe de la commande en vitesse
- Plusieurs cas de figure peuvent se présenter:
  - On mesure la position mais pas la vitesse et on souhaite l'estimer
  - On mesure position et vitesse (e.g., GPS) et on souhaite améliorer leur estimation en prenant en compte la dynamique
- Comme pour l'estimation de vitesse, on peut a priori utiliser deux types de modèles:

$$\begin{cases} \dot{p} & = & v \\ m\dot{v} & = & mge_3 - TRe_3 + P_e \\ \dot{P}_e & = & 0 \end{cases}$$

  ou

$$\begin{cases} \dot{p} & = & v \\ \dot{v} & = & ge_3 + Ra_m \end{cases}$$

- Et l'on peut aussi rajouter la cinématique de rotation: $\dot{R} = RS(\omega)$.