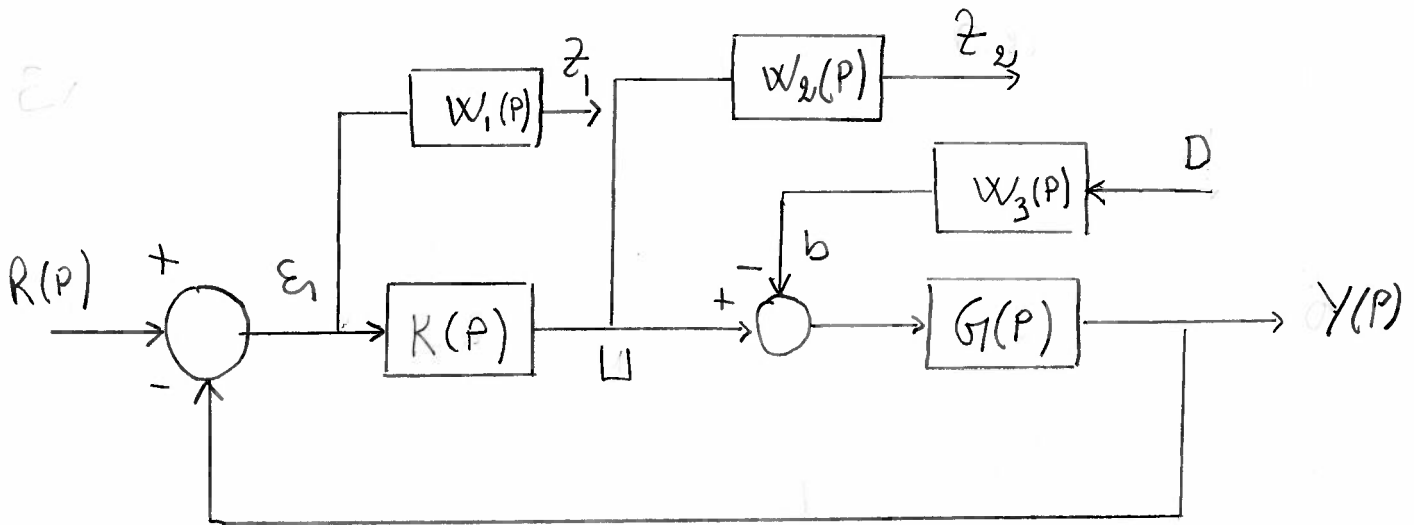


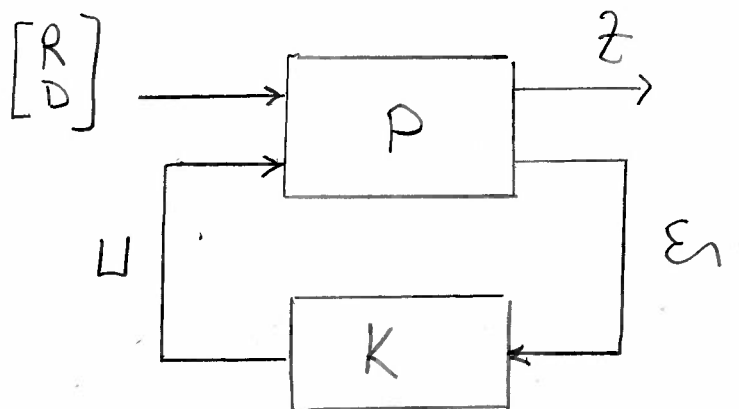
Synthèse de correcteur par la méthode Itô

Mise en forme des fonction de pondération



- Exemple de mise en place de fonctions de pondération pour un système soumis à une perturbation agissant à l'entrée de $G_1(p)$ -

- Forme standard



$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

- Structure LFT -

$$\begin{bmatrix} z \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D \end{bmatrix} \\ U \end{bmatrix} \quad \text{avec } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ P_{11} \quad P_{12} \\ \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ P_{21} \quad P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D \end{bmatrix} \\ U \end{bmatrix}$$

$$E_1 = ?$$

$$\begin{aligned} E_1 &= R - G(-W_3 D + K E_1) \\ &= R + G W_3 D - K G E_1 \end{aligned}$$

$$(I + K G) E_1 = R + G W_3 D$$

$$E_1 = \underbrace{(I + K G)^{-1}}_S R + \underbrace{(I + K G)^{-1} G W_3}_S D$$

$$E_1 = S R + S G W_3 D$$

$$z_1 = ?$$

$$z_1 = W_1 E_1 = W_1 S R + W_1 S G W_3 D$$

$$z_2 = ?$$

$$z_2 = W_2 K E_1 = W_2 K S R + W_2 K S G W_3 D$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} S & S G W_3 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Transformée Linéaire Fractionnaire (LFT).

$$F(P, K) = \frac{z}{\begin{bmatrix} R \\ D \end{bmatrix}} = P_{11} + \underbrace{P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}}_{\text{" } 0_{2 \times 2} \text{ "}}$$

$$F(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{bmatrix}$$

Rappel

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F(P, K) \begin{bmatrix} R \\ D \end{bmatrix}$$

Problème Itô

Trouver un correcteur K qui assure la stabilité interne de la boucle fermée et qui satisfasse:

$$\|F(P, K)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

$$\|W_1 S\|_\infty < \delta$$

$$\longrightarrow |S(j\omega)| < \frac{\delta}{|W_1(j\omega)|}$$

$$\|W_2 K S\|_\infty < \delta$$

$$\longrightarrow |K(j\omega) S(j\omega)| < \frac{\delta}{|W_2(j\omega)|}$$

$$\|W_1 S G W_3\|_\infty < \delta$$

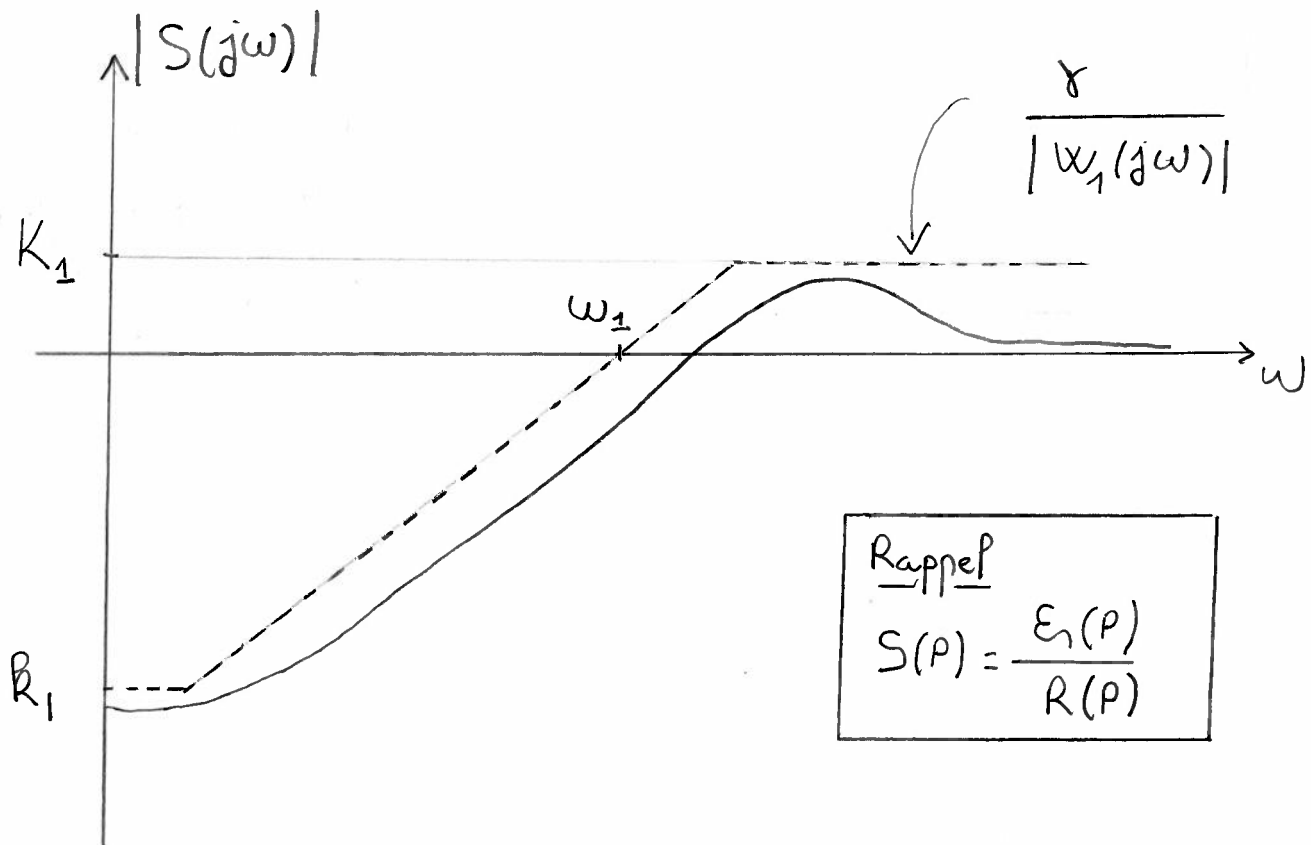
$$\longrightarrow |S(j\omega) G(j\omega)| < \frac{\delta}{|W_1(j\omega) \cdot W_3(j\omega)|}$$

$$\|W_2 K S G W_3\|_\infty < \delta$$

$$\longrightarrow |K(j\omega) S(j\omega) G(j\omega)| < \frac{\delta}{|W_2(j\omega) W_3(j\omega)|}$$

- Les fonctions S , KS , SG et $KS G$ sont contraintes par un gabarit

Choix des fonctions de pondération



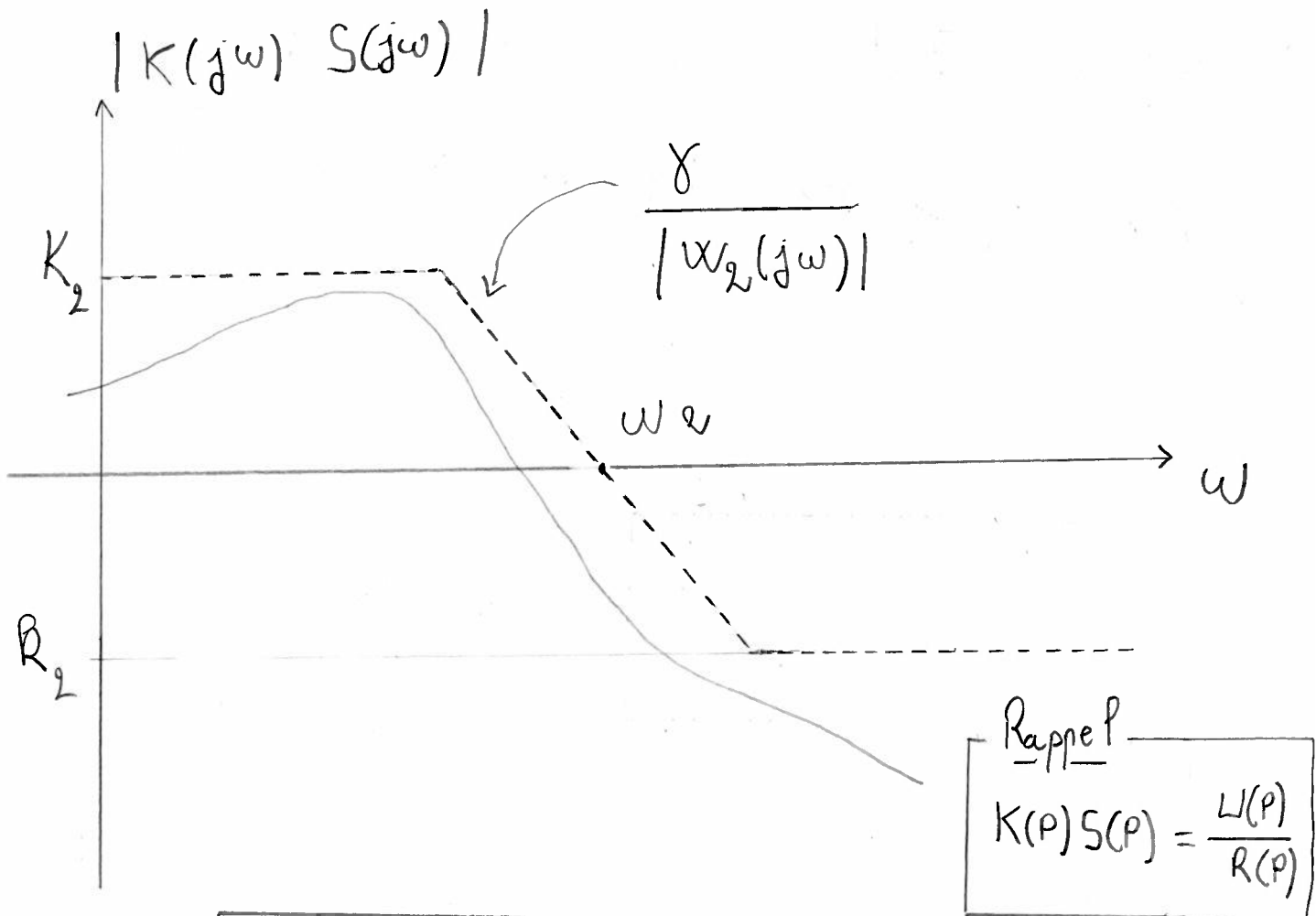
Rappel

$$S(P) = \frac{E_r(P)}{R(P)}$$

→ R_1 : valeur faible en basse fréquence pour assurer
un objectif de précision, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$ faible.

→ ω_1 : pulsation qui impose une bande passante minimale à S , et par conséquent au système en boucle fermée. ω_1 assure un objectif de rapidité.

→ K_1 : valeur qui limite $\|S\|_\infty$ en haute fréquence. K_1 assure un objectif de stabilité.



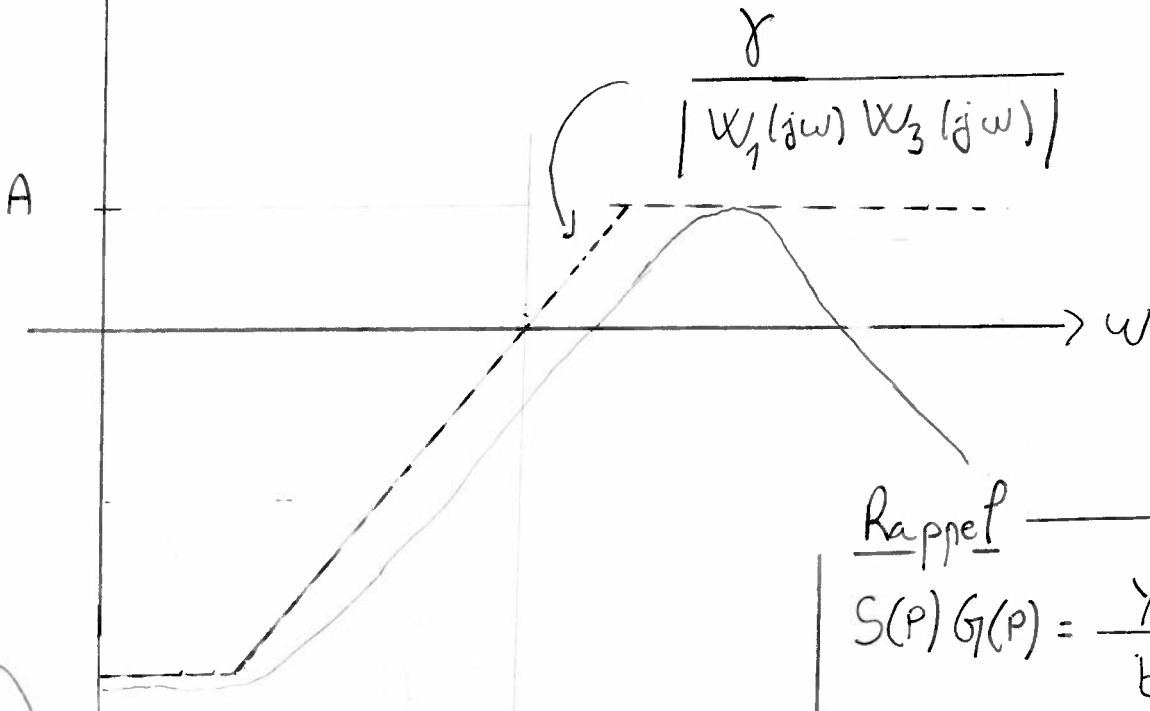
→ K_2 : Limitation de la commande U en basse fréquence.

→ R_2 : Limitation de la commande U en haute fréquence.

→ ω_2 : délimite les plages fréquentielles pour la limitation de la commande

$|S(j\omega) G(j\omega)|$

Cas W_3 constante



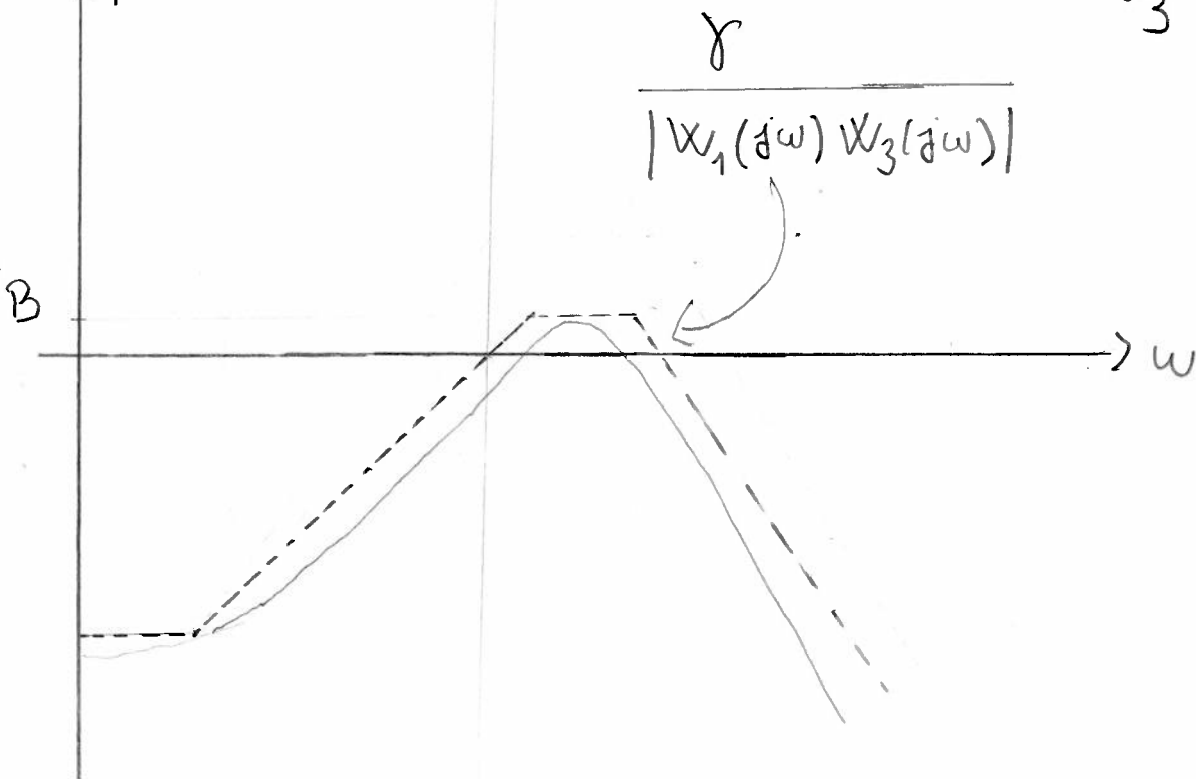
Rappel

$$S(p)G(p) = \frac{Y(p)}{b(p)}$$

$B < A$

$|S(j\omega) G(j\omega)|$

Cas W_3 variable



→ Le gabarit de SG dépend de W_1 et W_3

→ Pour W_1 réglé précédemment

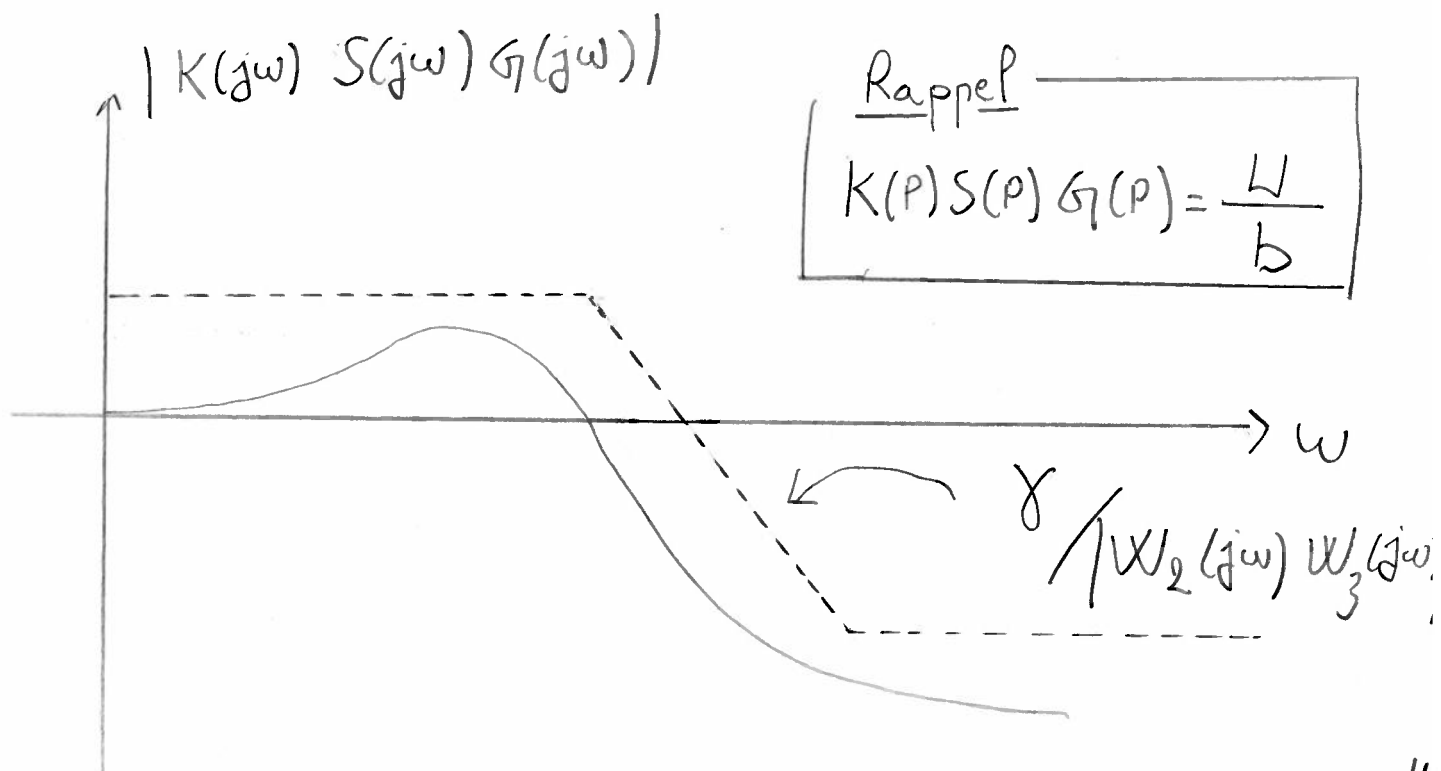
↳ Choix 1: W_3 constant → réglage

de l'atténuation γ/b [i.e. rejet de
l'effet de la perturbation à l'entrée de G]

en haute et basse fréquences.

↳ Choix 2: W_3 variable → plus
de "degrés de liberté" dans le réglage fréquentiel
de l'atténuation de l'effet de la perturbation.

Exemple: atténuation autour des fréquence
de résonance:

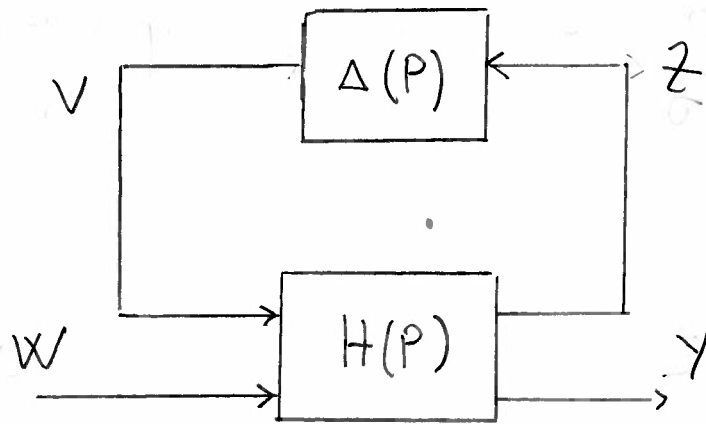


→ Cas 1: W_1 , W_2 et W_3 sont déjà réglé

→ Cas 2: W_3 est conçu pour modéliser

KSG plutôt que SG. pour
par exemple satisfaire un gabarit
d'atténuation assurant une robustesse
de stabilité aux dynamiques négligées.

Représentation LFT des incertitudes de modélisation



- Représentation par une LFT des incertitudes -

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{zv} & H_{zw} \\ H_{yv} & H_{yw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

$$V = \Delta z$$

- Calcul du transfert entre W et Y

$$y = H_{yv} V + H_{yw} W$$

$$V = \Delta z$$

$$V = \Delta (H_{zv} V + H_{zw} W)$$

$$V = (I - \Delta H_{zv})^{-1} \Delta H_{zw} W$$

$$Y = \left[H_{yv} (I - \Delta H_{zv})^{-1} \Delta H_{zw} + H_{yw} \right] W$$

$$\boxed{F_u(H, \Delta) = \left[H_{yv} (I - \Delta H_{zv})^{-1} \Delta H_{zw} + H_{yw} \right]}$$

\hookrightarrow LFT upper.

$(I - \Delta H_{zv})$ doit être inversible. Dans ce cas
la LFT $F_u(H, \Delta)$ est "bien posée".

Structure générale de la matrice d'incertitude

$$\Delta(P) = \text{diag} \left\{ \Delta_1(P), \dots, \Delta_q(P), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \right. \\ \left. \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c} \right\}$$

$$\delta_i \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon_i \in \mathbb{C}$$

Avec

$$\left(\|\Delta_i(P)\|_\infty < 1 ; \delta_i \in]-1; +1[; |\varepsilon_i| < 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (\|\Delta(P)\|_\infty < 1)$$

Exemple

Soit un système de fonction de transfert $G(P)$ avec un modèle nominal $G_0(P)$.

Supposons que $G(P)$ néglige une dynamique du 1^{er} ordre avec une constante de temps $\tau < \tau_{\max}$, alors

$$G(P) = G_0(P) \frac{1}{1 + \tau P} \quad ; \quad \tau < \tau_{\max}$$

Sachant que $\tau < \tau_{\max}$ alors:

$$\forall \omega \quad \left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| = \left| \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right| \leq \left| \frac{\tau_{\max} j\omega}{1 + \tau_{\max} j\omega} \right|$$

↳ Ainsi, il est possible de modéliser la dynamique négligée comme suit

A - " Δ_i "

$$\frac{G(P)}{G_0(P)} - 1 = W_1(P) \cdot \Delta_1(P)$$

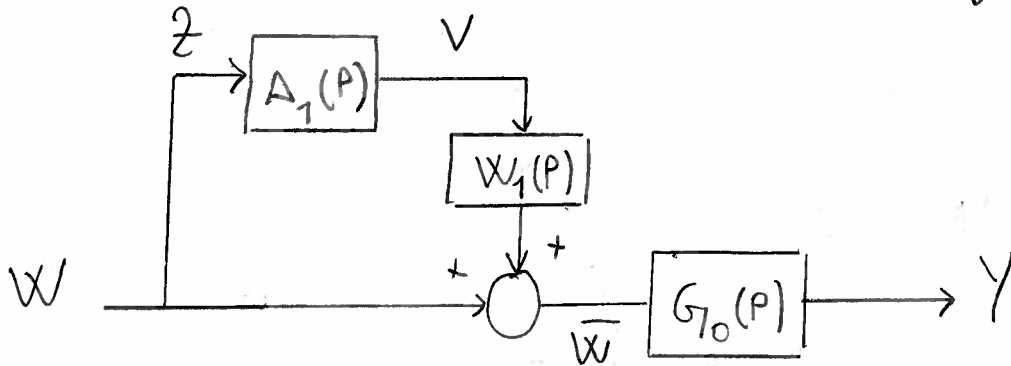
$$\text{ou encore} \quad G(P) = G_0(P) \left[1 + W_1(P) \Delta_1(P) \right]$$

Avec

$$W_1(p) = \frac{2_{\max} p}{1 + 2_{\max} p}$$

$$\text{et } \forall \omega \quad |\Delta_1(j\omega)| < 1$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta_1(s)\|_{\infty} < 1$$



$$\begin{bmatrix} z(p) \\ y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ G_0 W_1 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(p) \\ w(p) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(p) = \Delta_1(p)$$

B - " δ_i "

Supposons à présent que $G_0(p)$ s'écrit

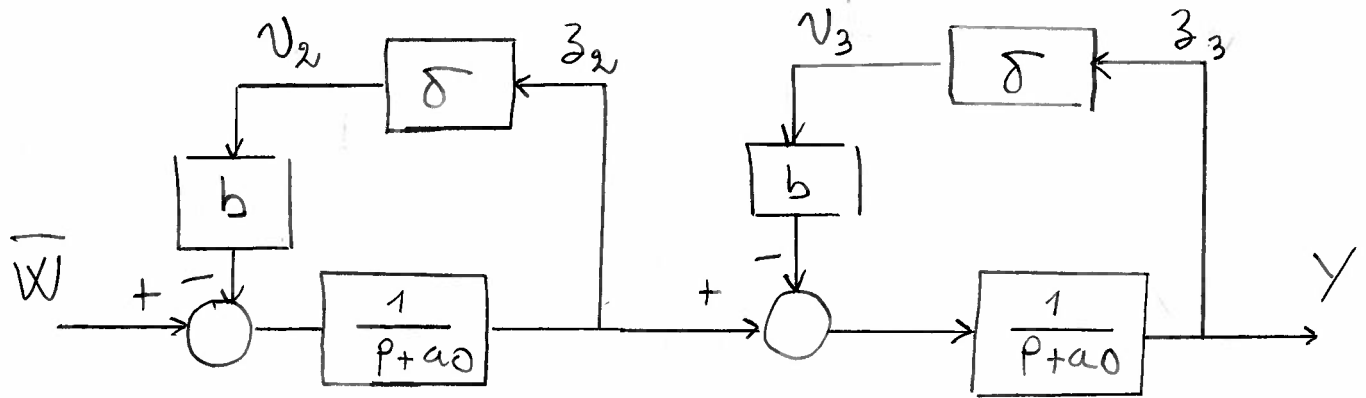
$$G_0(p) = \frac{1}{(p+a)^2} \quad \text{avec } a_0 - b < a < a_0 + b$$

$$a = a_0 + \delta b \quad \text{avec } -1 < \delta < +1$$

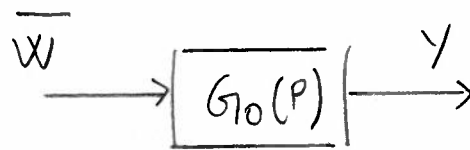
Sachant que

$$\frac{1}{p+a} = \frac{1}{p+a_0} \left[1 + \delta \frac{b}{p+a_0} \right]^{-1}$$

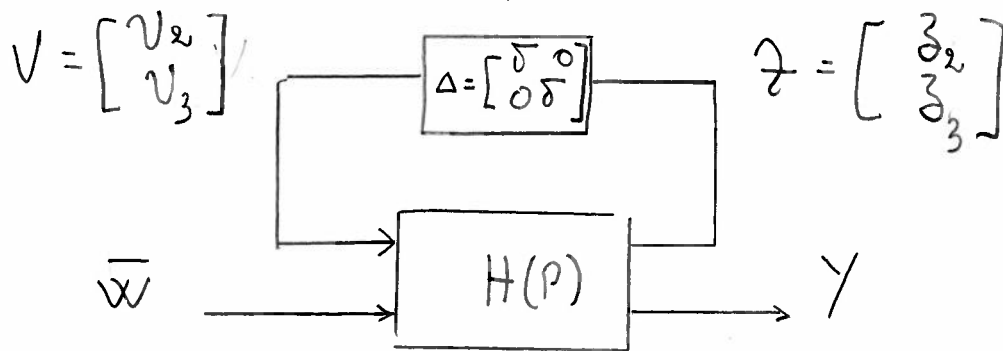
Le schéma bloc suivant peut être obtenu :



|||



|||



LF T_u

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-b}{p+a_0} & 0 \\ \frac{-b}{(p+a_0)^2} & \frac{-b}{p+a_0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{p+a_0} \\ \frac{1}{(p+a_0)^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{-b}{(p+a_0)^2} & \frac{-b}{p+a_0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{(p+a_0)^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \bar{w} \end{bmatrix}$$

De manière générale, il est possible d'établir que toute fonction matricielle dépendant rationnellement de variables $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ peut être écrite sous la forme d'une LFT, avec une matrice $H(p)$ indépendante des σ_i , avec
$$\Delta(p) = A = \text{diag} \left\{ \sigma_1 I_{n_1}, \dots, \sigma_r I_{n_r} \right\} \quad n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$$

C- " ϵ_i "

- Il est possible de prendre en compte une incertitude conjointe sur le gain et la phase en introduisant une incertitude complexe, par exemple:

$$G_1(p) = k e^{j\varphi} = 1 + S_c \epsilon_c; \quad S_c \in \mathbb{R}; \quad \epsilon_c \in \mathbb{C}, \quad |\epsilon_c| \leq 1$$

Dans le modèle précédent, nous avons

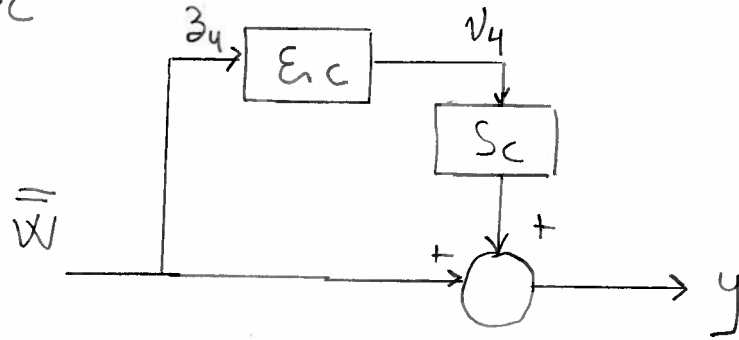
$$\frac{G_1(p)}{G_0(p)} - 1 = W_1(p) \Delta_1(p)$$

Pour $G_0(p) = 1$, $G_1(p) = 1 + \underbrace{W_1(p)}_{S_c} \underbrace{\Delta_1(p)}_{\epsilon_c}$

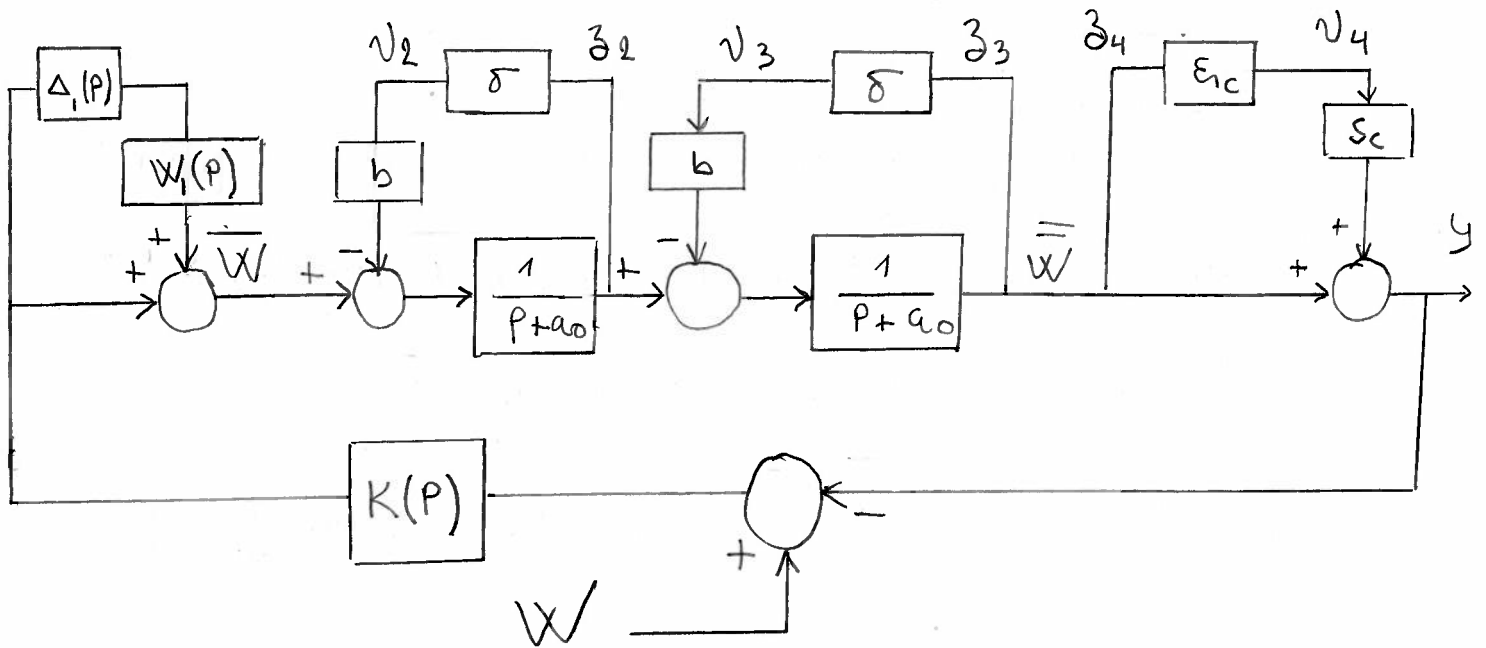
$$Y = G_1(P) \bar{W}$$

$$= [1 + S_c E_c] \bar{W}$$

$$Y = \bar{W} + S_c E_c \bar{W}$$



Boucle d'asservissement avec 3 types d'incertitude



$$\Delta(P) = \text{diag} \left\{ \Delta_1(P), \delta, \delta, E_c \right\}$$

avec $\|\Delta_1(P)\|_\infty < 1$; $-1 < \delta < 1$; $|E_c| < 1$