

Commande robuste H_∞

Mokrane Boudaoud

Sorbonne Université
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
mokrane.boudaoud@sorbonne-universite.fr

2023/2024

Objectif

Les méthodologies de **commande robuste** visent à concevoir un contrôleur capable d'**assurer une stabilité et des performances robustes** lorsque le processus contrôlé a une **dynamique non-linéaire**, et/ou soumis à des **variations paramétriques** ou à des **perturbations externes**. Cette question se traduit souvent par un **problème d'optimisation**. L'objectif de ce cours est de fournir un aperçu des méthodologies de commande robustes pour les systèmes linéaires avec des incertitudes paramétriques en utilisant le **cadre H_∞** .

Références

G. Duc and S. Font, Commande H_∞ et μ -analyse, Hermes Science Publications, Paris, 1999.

Doyle John, Bruce Francis and Allen Tannenbaum. feedback control theory. ISBN-10 : 0023300116, 1991.

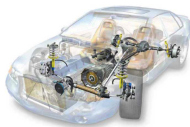
K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice-Hall, 1996.

Chapitre I: Introduction à la commande robuste



Pour un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, la relation entrée/sortie peut être définie par une fonction mathématique f :

$$f\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}, \dots, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}, t\right)$$





Le comportement d'un système LTI peut être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Fonction de transfert

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Représentation d'état

Modèle linéaire dans l'espace d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

x est le vecteur d'état contenant toutes les variables d'état du système. u et y sont respectivement le vecteur des entrées et le vecteur des sorties du système. A , B , C et D sont des matrices ou des vecteurs décrivant le comportement du système modélisé.

Question

Qu'en est-il si le système est mal connu ou mal modélisé, ou que ses paramètres varient au cours de son fonctionnement ? Quel est l'effet des incertitudes et des perturbations sur la stabilité et les performances du système bouclé ? L'emploi de méthodes classiques de synthèse de correcteurs peut conduire à des systèmes peu « robustes » dont les performances peuvent être détériorées par la moindre variation du modèle ou la moindre perturbation. Dans certains cas, le système bouclé pourra devenir instable.

Notion de robustesse

- Synthèse d'un correcteur à partir d'un modèle. Le modèle n'est qu'une approximation du comportement réel du système physique.
- Si les paramètres du modèle changent ou sont incertains (parfois, certains paramètres ne peuvent être connus précisément en raison de la difficulté d'effectuer des mesures, etc.) les performances désirées risquent de ne plus être assurées.
- Les performances peuvent être dégradées si le système est soumis à des perturbations.

Objectifs de la commande robuste

Les objectifs de la commande robuste peuvent être résumés en trois points:

1- Stabilité du système en boucle fermée

Le but premier est d'assurer la stabilité du système boucle. Dans le cas où le système est représenté par un modèle d'état, ceci conduit à :

2- Performances statiques et dynamiques en boucle fermée

Le deuxième objectif consiste à satisfaire les exigences d'un cahier des charges en termes de:

- temps de réponse,
- amortissement (vibrations),
- dépassement,
- rejet de perturbation,
- découplage,
- erreur statique,
- temps de montée,
- etc.

3- Robustesse

La robustesse consiste à assurer les points 1- et 2- malgré les incertitudes.

Début : 1940-1950

Développement de la théorie des asservissements (techniques fréquentielles graphiques, travaux de Bode, Black, Nichols, Nyquist, marges de stabilité etc.).

Début : 1970-1980

Représentation d'état, notions de commandabilité et d'observabilité, estimateurs, commande optimale, travaux de Kalman, Luenberger etc. A cette époque, on a « oublié » la robustesse. Il fut notamment constaté que l'emploi d'un asservissement par retour d'état associé à un observateur peut être non robuste.

Début : 1990-2000

Durant cette période, les automaticiens ont cherché à concilier la souplesse de la représentation d'état avec la robustesse ce qui a conduit au développement de méthodes de synthèse de correcteurs robustes (synthèse H_2 , H_∞ , théorème du faible gain, etc.). Cette période a notamment été marquée par les travaux de Doyle, Glover, Safonov, Popov, etc.

2000-

Techniques LMI (Linear Matrix Inequality), optimisation convexe, μ -analyse (définit les limites de la robustesse).

Valeurs singulières d'une matrice de transfert

Les valeurs singulières permettent de généraliser la notion de gain aux systèmes multivariables.

On définit les valeurs singulières $\sigma_i(G(j\omega))$ comme les racines carrées des valeurs propres de $G(j\omega)$ multipliée par sa transconjuguée.

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega))}$$

$i = 1, \min(m, p)$, avec p et m sont respectivement le nombre de sorties et d'entrée du système.

Les matrices $G(j\omega)G(-j\omega)^T$ et $G(-j\omega)^T G(j\omega)$ sont des matrices hermitiennes, semidéfinies positives. Leurs valeurs propres sont donc réelles, positives ou nulles. Elles peuvent donc être classées. On notera $\bar{\sigma}(G)$ la plus grande valeur et $\underline{\sigma}(G)$ la plus petite.

Pour un système monovariante, il n'existe qu'une seule valeur singulière :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = |G(j\omega)|$$

Le tracé de ce gain correspond au diagramme d'amplitude dans le plan de Bode.

Exemple 1: - système monovariante -

$$G(p) = \frac{2}{1+3p}$$

$$G(j\omega) = \frac{2}{1+3j\omega}$$

$$G(-j\omega) = \frac{2}{1-3j\omega}$$

$$G(j\omega)G(-j\omega) = \frac{4}{1+9\omega^2}$$

$$\sigma(G(j\omega)) = \sqrt{\frac{4}{1+9\omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+9\omega^2}} = |G(j\omega)|$$

Exemple 2: - système multivariable -

$$G(p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p^2+2p+1} \\ \frac{2}{3p+1} & \frac{1}{p^2+2p+9} \end{bmatrix}$$

$$G(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(1-\omega^2)+j2\omega} \\ \frac{2}{1+j3\omega} & \frac{1}{(9-\omega^2)+j2\omega} \end{bmatrix}$$

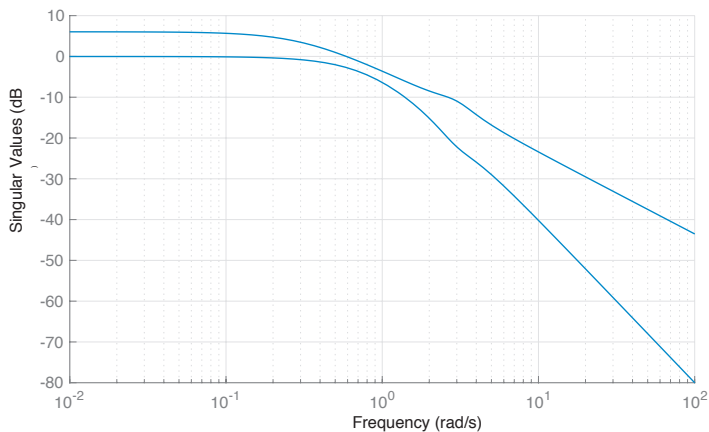
$$G(-j\omega)^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{1-j3\omega} \\ \frac{1}{(1-\omega^2)-j2\omega} & \frac{1}{(9-\omega^2)-j2\omega} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_1(G(j\omega)G(-j\omega)^T)}$$

$$\sigma_2(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_2(G(j\omega)G(-j\omega)^T)}$$

Exemple 2: - système multivariable -

$$G(p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p^2+2p+1} \\ \frac{2}{3p+1} & \frac{1}{p^2+2p+9} \end{bmatrix}$$

Figure 1: Tracé des valeurs singulières de $G(p)$

Normes

Une norme est une fonction $\|\cdot\|$ définie sur un espace vectoriel E ,

$$\|e\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

vérifiant:

- 1) $\forall e \in E, \|e\| \geq 0$
- 2) $\|e\| = 0 \implies e = 0$
- 3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall e \in E, \|\alpha e\| = |\alpha| \|e\|$
- 4) $\forall e_1, e_2 \in E, \|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$

Normes d'un vecteur

$$E = \mathbb{C}^n$$

La norme p d'un vecteur peut être définie comme suit:

$$\|e\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |e_i|^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p \leq \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Fonction Matlab: "norm(e,p)"

Exemple:

$$e = [2 \quad 0 \quad -3]^T$$

$$\|e\|_1 = 5$$

$$\|e\|_2 = \sqrt{13} \quad (\text{norme Euclidienne})$$

$$\|e\|_\infty = 3$$

Normes d'une matrice

$$E = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$

Une norme matricielle doit, en plus des propriétés énoncées, vérifier la propriété multiplicative :

$$5) \|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

A et B étant des matrices.

Exemples de normes matricielles:

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}| : \text{norme somme.}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} : \text{norme deux.}$$

$$\|A\|_{max} = \max_{i,j} |a_{i,j}| : \text{norme max.}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 9, \|A\|_2 = \sqrt{41}, \|A\|_{max} = 6.$$

Normes d'un signal

Pour un signal défini par une fonction $f(t)$ continue par morceaux

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

les normes du signal sont définies comme suit:

$$\|f(t)\|_1 = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n |f_i(t)| dt = \sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_1$$

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n f_i(t)^2 dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_2^2}: \text{ racine carrée de l'énergie du signal.}$$

$$\|f(t)\|_\infty = \sup \left[\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)| \right] = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i(t)\|_\infty$$

Exemple:

$$f(t) = 1 - e^{-t} \text{ avec } t \geq 0.$$

$$\|f(t)\|_\infty = 1.$$

Normes d'un système

Soit un système linéaires à temps invariant (LTI) défini par un transfert $G(j\omega)$.

Norme H_2 :

-Cas monovariante:

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \|g(t)\|_2$$

$g(t)$: réponse impulsionnelle.

-Cas multivariable:

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} [G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega} = \sum_i \|g_i(t)\|_2$$

-La norme H_2 d'un système est la norme L_2 de sa réponse impulsionnelle.

Normes d'un système

Soit un système linéaires à temps invariant (LTI) défini par un transfert $G(j\omega)$.

Norme H_∞ :

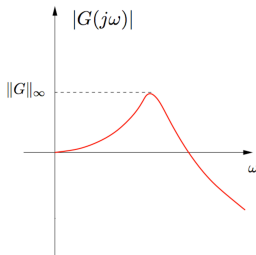
-Cas monovariante:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

-Cas multivariable:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

$\|G\|_\infty$ est la valeur la plus élevée du gain sur l'ensemble des pulsations. Elle représente le pire cas, i.e. le maximum de tous les transferts entre les entrées et les sorties.



Normes d'un système

Soit un système linéaires à temps invariant (LTI) défini par un transfert

$$G(j\omega) = \frac{z(j\omega)}{u(j\omega)}.$$

Norme H_∞ :

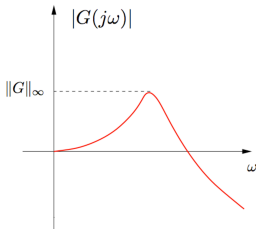
-Cas monovariante:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup \frac{\|z\|_2}{\|u\|_2}$$

-Cas multivariable:

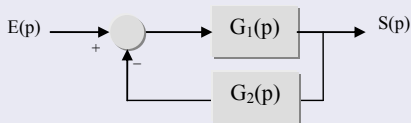
$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup \frac{\|z\|_2}{\|u\|_2}$$

$\|G\|_\infty$ est la valeur la plus élevée du gain sur l'ensemble des pulsations. Elle représente le pire cas, i.e. le maximum de tous les transferts entre les entrées et les sorties.



Ce théorème est fondamental pour la synthèse de correcteurs robustes. Il permet notamment d'étudier de manière explicite la robustesse en stabilité. Il peut être énoncé comme suit.

Soit le système bouclé représenté sur la figure ci-dessous.



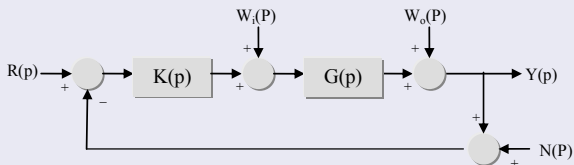
$G_1(p)$ et $G_2(p)$ sont des matrices de transfert linéaires (ou plus simplement des fonctions de transfert dans le cas monovarié) supposées stables et propres.

Si $\|G_1(p) \cdot G_2(p)\|_\infty < 1$, alors le système bouclé est stable au sens de Lyapunov.

Pour l'analyse de la robustesse, ce théorème est plus généralement utilisé sous la forme suivante:

Si $\|G_1(p)\|_\infty \|G_2(p)\|_\infty < 1$, alors le système bouclé est stable au sens de Lyapunov.

La figure ci-dessous présente la structure générale d'un système bouclé soumis à des perturbations.

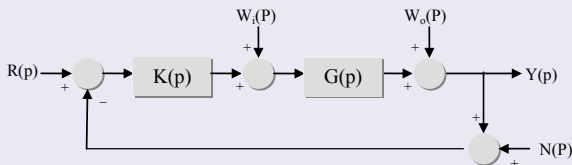


Ces perturbations peuvent être classées en trois types :

$W_i(p)$: perturbations agissant à l'entrée du système.

$W_o(p)$: perturbations agissent sur la sortie du système.

$N(p)$: bruit de mesure.



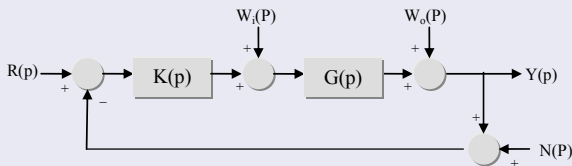
Relation entre la sortie $Y(p)$ et les entrée de perturbations $W_i(p)$, $W_o(p)$ et $N(p)$.

$$Y = W_0 + G(W_i + K(-N - Y))$$

$$Y = W_0 + GW_i - GKN - GKY$$

Ainsi:

$$Y = (I + GK)^{-1}W_0 + (I + GK)^{-1}GW_i - (I + GK)^{-1}GKN$$



Effet de W_o sur Y :

$$Y = (I + GK)^{-1}W_0$$

Pour rejeter l'effet de W_o sur Y , le terme $(I + GK)^{-1}$ doit être «petit».

Cette condition peut se traduire par:

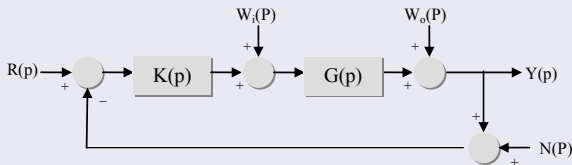
$$\overline{\sigma}((I + GK)^{-1}) \ll 1$$

$$\underline{\sigma}(I + GK) \gg 1$$

$$\underline{\sigma}(I + GK) \gg 1$$

Ainsi

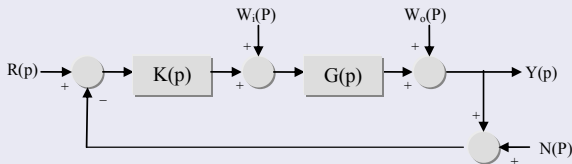
$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \rightarrow$ La réduction de l'effet des perturbations W_o sur la sortie Y nécessite un grand gain de boucle ouverte.



Effet de W_i sur Y :

$$Y = (I + GK)^{-1}GW_i$$

D'une manière analogue, il est possible de montrer que pour minimiser l'effet de W_i sur Y , il faut que le terme $(I + GK)^{-1}G$ soit « petit » donc que $(I + GK)^{-1}$ le soit également. → La réduction de l'effet des perturbations W_i sur la sortie Y nécessite un grand gain de boucle ouverte.



Effet de N sur Y :

$$Y = -(I + GK)^{-1}GKN$$

Dans ce cas, $-(I + GK)^{-1}GK$ doit être « petit ».

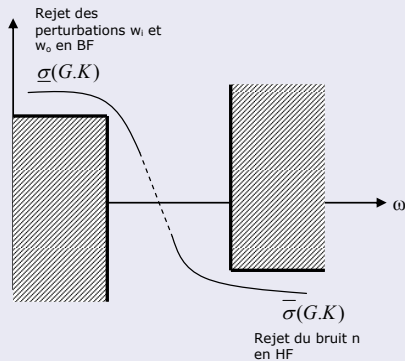
Par conséquent:

$$\bar{\sigma}((I + GK)^{-1}GK) \ll 1$$

Ainsi:

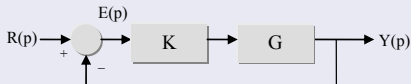
$\bar{\sigma}(GK) \ll 1 \rightarrow$ La réduction de l'effet du bruit de mesure N sur la sortie Y nécessite un faible gain de boucle ouverte.

Partage fréquentiel pour le rejet de toutes les perturbations



Le rejet de ces trois perturbations simultanément sur une même bande de fréquences est difficile. Cependant, ce problème peut être résolu en émettant une hypothèse qui, en pratique, est très souvent vérifiée : les perturbations W_i et W_o apparaissent à basse fréquence tandis que le bruit de mesure N est présent essentiellement à des fréquences largement plus élevées. On procède alors à un partage fréquentiel. Cette approche est illustrée par la figure ci-dessus.

Partage fréquentiel pour le rejet de toutes les perturbations



L'objectif est de minimiser l'écart $E = R - Y$.

$$E = (I + GK)^{-1}R$$

Réduire l'écart E revient à obtenir :

$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \rightarrow$ Le suivi de consigne est d'autant meilleur que le gain de boucle ouverte est grand.

Dans le but de faciliter l'écriture des relations entre les différents signaux, on définit les fonctions suivantes:

Fonction de sensibilité: $S = (I + GK)^{-1}$

Fonction de sensibilité complémentaire: $T = (I + GK)^{-1}GK = SGK$

$$S + T = I$$

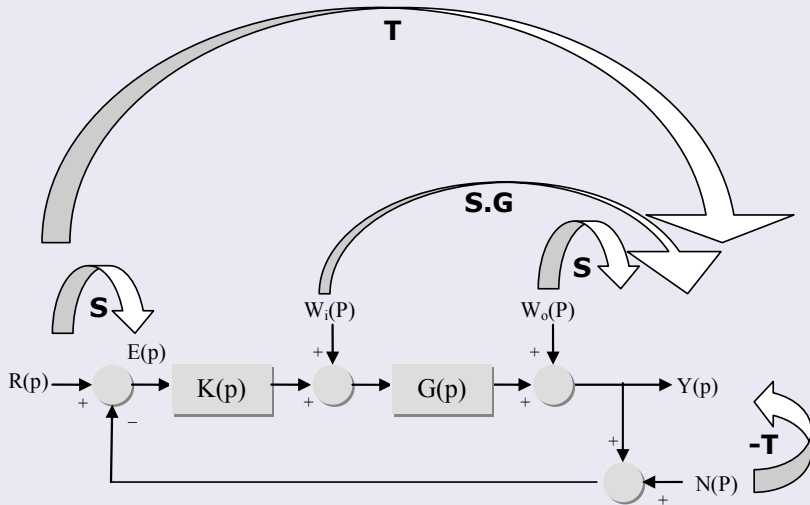
Il est ainsi possible de réécrire les relations entre les différents signaux de la boucle avec cette nouvelle notation.

Influence des perturbations et du bruit sur la sortie : $Y = SW_o + SGW_i - TN$

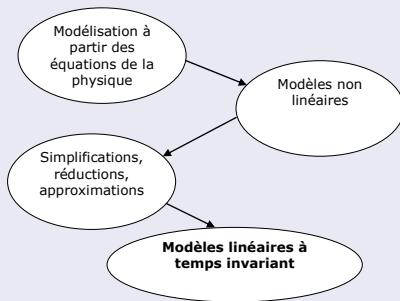
Effet du signal de référence (consigne) sur l'erreur : $E = SR$

Effet du signal de référence sur la sortie : $Y = TR$

Transferts entre les différents signaux



Processus général de modélisation et incertitudes



Les incertitudes peuvent être dues aux:

- dynamiques négligées,
- non linéarités négligées,
- incertitudes paramétriques,
- erreurs d'identification,
- saturations, hystérésis, etc.

Incertitudes structurées et non structurées

Incertitudes structurées ou incertitudes paramétriques: elles résultent de variations ou d'erreurs d'estimation sur certains paramètres physiques du système. La manière dont les paramètres influent sur le comportement du système détermine la « structure » de l'incertitude.

Exemple:

Un circuit RC modélisé par une transmittance du premier ordre $G(p) = \frac{1}{1+RCp}$

$\tau = RC$: constante de temps.

Les valeurs des composants électroniques sont toujours données avec une tolérance. Dans un même lot de composants, la valeur d'une résistance ou d'une capacité peut varier dans de larges proportions, typiquement entre 1% et 20%.

→ incertitude sur la valeur de τ .

Lors de la synthèse d'un correcteur robuste, on veillera à prendre en compte cette incertitude pour satisfaire le cahier des charges.

Incertitudes structurées et non structurées

Incertitudes non structurées ou incertitudes dynamiques : elles regroupent toutes les dynamiques négligées dans le modèle. Ces incertitudes sont mal connues car elles sont dues soit à des phénomènes complexes, soit à des simplifications de modèle (e.g. non linéarités, variabilités, négligence de comportement en hautes ou très basses fréquences...).

Lors de la synthèse d'un correcteur robuste, on veillera à prendre en compte cette incertitude pour satisfaire le cahier des charges. Généralement, le correcteur robuste est synthétisé afin de donner des résultats satisfaisants dans le pire des cas.

Représentation des incertitudes de modélisation

$$G_{réel}(p) = G(p) + \Delta(p)$$

$G_{réel}(p)$: modèle de la représentation exacte du système.

$G(p)$: modèle nominal du système.

$\Delta(p)$: modèle du système perturbateur représentant l'ensemble des incertitudes non structurées. Ce modèle doit être stable, linéaire et invariant dans le temps.

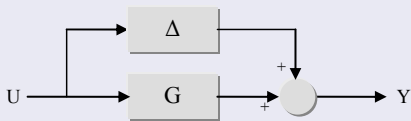
$\Delta(p)$ n'est pas parfaitement connu. On dispose en général d'une borne donnant l'amplitude maximale des incertitudes.

→ dynamiques négligées en hautes fréquences pour simplifier le modèle. Cela permet d'obtenir un bon modèle uniquement dans la bande de fréquences (relativement basse) de fonctionnement du système considéré.

Représentation des incertitudes de modélisation

Incertainité additive:

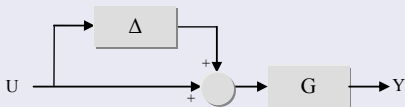
$$G_{rel}(p) = G(p) + \Delta(p)$$



Représentation des incertitudes de modélisation

Incertainité multiplicative à l'entrée:

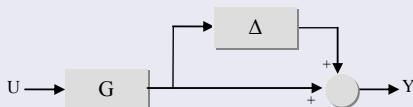
$$G_{réel}(p) = G(p)(I + \Delta(p))$$



Représentation des incertitudes de modélisation

Incertainité multiplicative en sortie:

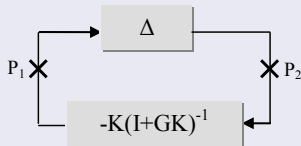
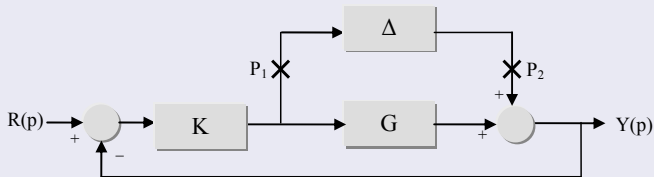
$$G_{rel}(p) = (I + \Delta(p))G(p)$$



Les critères classiques algébriques ou graphiques permettent de vérifier la stabilité du système bouclé en considérant le modèle nominal. Qu'en est-il si le système est sujet à des fluctuations ?

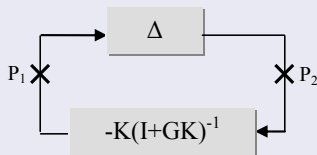
L'un des objectifs majeurs de la commande robuste est d'assurer la propriété fondamentale de stabilité du système bouclé malgré les variations du modèle dans la limite de l'amplitude maximale $\Delta(p)$

Cas d'une incertitude additive



Vu de l'incertitude Δ , le reste du système apparaît comme un bloc unique dont l'entrée se situe au point P_2 et la sortie au point P_1 . Dans le schéma équivalent de cet exemple $R = 0$.

Cas d'une incertitude additive



L'application du théorème du petit gain permet d'établir la condition de stabilité suivante :

$$\|\Delta K(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

Cas d'une incertitude multiplicative à l'entrée

Condition de stabilité:

$$\|\Delta KG(I + KG)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

Cas d'une incertitude multiplicative en sortie

Condition de stabilité:

$$\|\Delta GK(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

Les lois de commande habituellement utilisées en automatique permettent de satisfaire deux critères :

stabilité en boucle fermée. Critère fondamental.

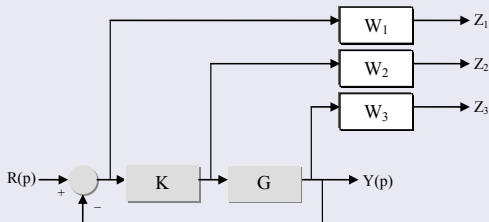
performances dans lesquelles peuvent être regroupées les exigences du cahier des charges en termes de temps de réponse, amortissement, dépassement, erreur statique, temps de montée, découplage, rejet de perturbations, etc.

→ Une loi de commande robuste doit satisfaire les critères précédents malgré les incertitudes du modèle.

Il existe plusieurs méthodes de synthèse de correcteurs robustes. Dans ce cours, nous nous focaliserons sur la méthode H_∞ qui représente une approche puissante fondée sur l'emploi de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour obtenir des correcteurs robustes.

Structure de synthèse typique

Soit le système représenté sur la figure ci-dessous.



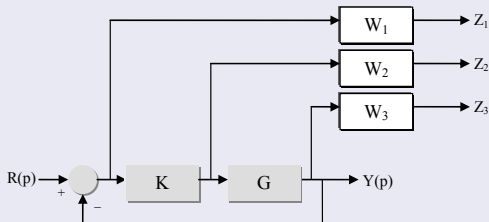
G : système à commander.

K : correcteur.

W_1, W_2, W_3 : fonctions de pondération. Ces fonctions serviront à définir les performances du système.

Z_1, Z_2, Z_3 : sorties de fonctions de pondération W_1, W_2, W_3 respectivement.

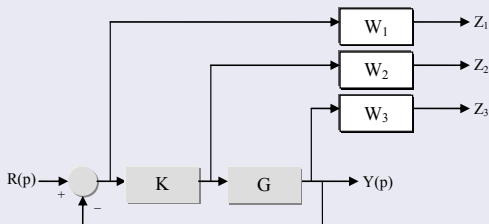
Système augmenté



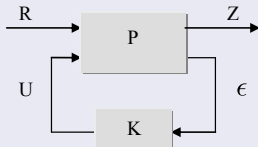
Remarque: les fonctions de pondération n'ont pas d'existence physique. Elles sont uniquement utilisées pour le calcul du correcteur.

L'introduction des fonctions de pondération conduit à un nouveau système dit "augmenté".

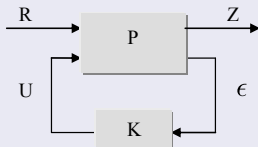
Système augmenté



Forme standard



Forme standard



P ensemble constitué du système G et des fonctions de pondération.

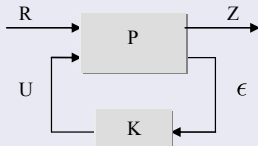
ϵ et U entrée et sortie respectivement du correcteur.

R et Z entrées et sorties respectivement du système P .

Problème H_∞ standard

Minimiser l'effet des entrées R sur les sorties Z . Cela équivaut en pratique à faire en sorte que le comportement du système bouclé corresponde le mieux possible aux performances demandées.

Forme standard



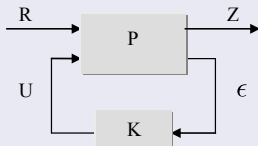
P peut être représenté sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} Z \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U \end{pmatrix}$$

qui correspond à:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \epsilon \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -W_1 G \\ W_2 \\ W_3 G \\ -G \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U \end{pmatrix}$$

Forme standard

**Transformée Linéaire Fractionnaire (LFT)**

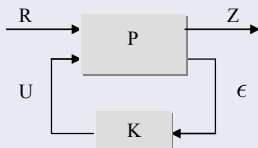
Le transfert entre l'entrée R et la sortie Z , noté $F(P, K)$ est appelé Transformée Linéaire Fractionnaire.

$$F(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Ainsi

$$F(P, K) = \frac{Z}{R} = \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{pmatrix}$$

Forme standard

**Problème H_∞**

Trouver un correcteur K qui assure la stabilité interne de la boucle et qui satisfasse :

$$\|F(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

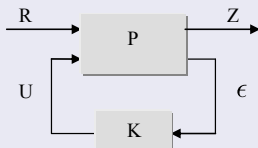
Si cette propriété est vérifiée et en utilisant les propriétés de la norme, il est possible de déduire que :

$$\|W_1 S\|_\infty < 1$$

$$\|W_2 K S\|_\infty < 1$$

$$\|W_3 T\|_\infty < 1$$

Forme standard

**Problème H_∞**

Trouver un correcteur K qui assure la stabilité interne de la boucle et qui satisfasse :

$$\|F(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

Si cette propriété est vérifiée et en utilisant les propriétés de la norme, il est possible de déduire que :

$$\|W_1 S\|_\infty < 1$$

$$\|W_2 K S\|_\infty < 1$$

$$\|W_3 T\|_\infty < 1$$

Forme standard

Problème H_∞

$$\|W_1 S\|_\infty < 1$$

$$\|W_2 K S\|_\infty < 1$$

$$\|W_3 T\|_\infty < 1$$

En exploitant les propriétés de la norme, il est possible de déduire dans le cas d'un système G monovarié que:

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)|}$$

$$|K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)|}$$

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_3(j\omega)|}$$

Ce résultat important montre que par un choix judicieux des fonctions de pondération W_1 , W_2 et W_3 il est possible de choisir le comportement du système bouclé.

Solution optimale

La recherche de la solution optimale peut être effectuée de différentes manières. L'une des plus connues étant l'utilisation de l'algorithme DGKF (du nom de ses inventeurs, Doyle, Glover, Khargonekar, Francis). Cet algorithme utilise des équations de Riccati et des itérations pour rechercher un contrôleur K et un scalaire γ_{opt} le plus petit possible vérifiant:

$$\|F(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma_{opt}$$

- Si $\gamma_{opt} = 1$, toutes les exigences sont vérifiées.
- Si $\gamma_{opt} < 1$, on pourra être encore plus exigeant.
- Si $\gamma_{opt} > 1$, au moins une des exigences n'est pas satisfaite.

Fonction Matlab pour trouver un correcteur K avec l'algorithme DGKF:
"hinfric"

Une autre manière de résoudre le problème d'optimisation consiste à utiliser des inégalités linéaires matricielles (LMI). Cet algorithme est également implanté dans Matlab via la fonction "hinflmi".

Exercice 1

Donner la norme H_∞ des transmittances suivantes :

$$G_1(p) = \frac{10}{p+1}, G_2(p) = \frac{1}{0,01p^2+0,02p+1}, G_3(p) = \frac{1}{p}$$

Exercice 2

Montrer que dans le cas d'une incertitude multiplicative à l'entrée, la condition de stabilité est:

$$\|\Delta KG(I + KG)^{-1}\|_\infty < 1$$

Montrer que dans le cas d'une incertitude multiplicative en sortie, la condition de stabilité est:

$$\|\Delta GK(I + GK)^{-1}\|_\infty < 1$$