ANNEXE

Stage de technicien supérieur en conception mécanique

Institut P' CNRS UPR3346 – département GMSC – équipe ROBIOSS

du 12 avril 2021 au 18 juin 2021

Hao Yuan

Etudiant

Génie Mécanique et Productique

Institut Universitaire de Technologie de Poitiers

M Antoine Eon

Tuteur de stage

Maître de Conférence

M Arnaud Dectoire

Tuteur de stage

Ingénieur de Recherche

M Julian Le rouzic

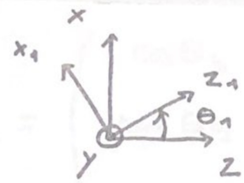
Enseignant référent

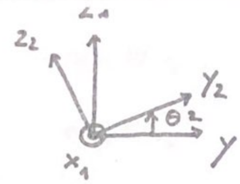
Génie Mécanique et Productique

Institut Universitaire de Technologie de Poitiers

(1)

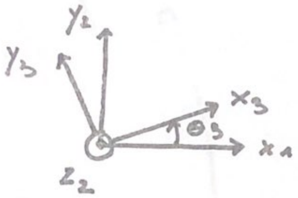
*/ On isole 3 :





x y z
y z x
z x y

$$\overrightarrow{O_0G_3} = h\vec{y} + l\vec{x_1}$$



$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = -l\dot{\theta}_1 \vec{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = -l\ddot{\theta}_1 \vec{z_1} - l\dot{\theta}_1^2 \vec{x_1}$$

$$= -l\dot{\theta}_1^2 \vec{x_1} - l\ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 \vec{y_2} - l\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 \vec{z_2}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_3 \vec{z_2} + \dot{\theta}_2 \vec{x_1} + \dot{\theta}_1 \vec{y}$$

$$= \dot{\theta}_3 \vec{z_2} + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \vec{x_3} - \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \vec{y_3} + \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \vec{y_2} - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \vec{z_2}$$

$$= (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2)\vec{z_2} + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \vec{x_3} - \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \vec{y_3} + \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \vec{x_3}$$
$$+ \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \vec{y_3}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \\ \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \end{pmatrix}_{R_3}$$

$$\vec{\sigma}_{G_3(3/0)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} \vec{\Omega}_{3/0}$$

$$= \begin{pmatrix} A_3(\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3) \\ A_3(\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \dot{\theta}_2 \sin\theta_3) \\ C_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \end{pmatrix}_{R_3}$$

$$\vec{U}_2 = P_{23}\,\vec{U}_3 \qquad P_{23} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{G_3(3/0)} = \begin{pmatrix} A_3\dot{\theta}_2 \\ A_3\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ C_3\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_0 = \cancel{\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2$$

$$= \left(\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_1\,\vec{y}\right)\wedge\vec{x}_2$$

$$= -\dot{\theta}_1\,\vec{z}_1$$

$$= -\dot{\theta}_1\sin\theta_2\,\vec{y}_2 - \dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\vec{z}_2$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_0 = \left(\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_1\,\vec{y}\right)\wedge\vec{y}_2$$

$$= \dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}_1\sin\theta_2\,\vec{x}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_0 = \left(\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_1\,\vec{y}\right)\wedge\vec{z}_2$$

$$= -\dot{\theta}_2\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}_{G_3(3/0)} = \begin{pmatrix} A_3\ddot{\theta}_2 \\ A_3\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 - A_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \dot{C}_3\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) + C_3\left(\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \underset{-\ddot{\theta}_1\sin\theta_2}{}\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -A_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ -A_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$+ \begin{pmatrix} A_3\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2\sin\theta_2 \\ 0 \\ A_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$+ \begin{pmatrix} C_3\dot{\theta}_1\cos\theta_2\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) \\ -C_3\dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}_{G_3(3/0)} = \begin{pmatrix} A_3\ddot{\theta}_2 + A_3\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2\sin\theta_2 + C_3\dot{\theta}_1\cos\theta_2\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) \\ A_3\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 - 2A_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - C_3\dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) \\ \dot{C}_3\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\sin\theta_2\right) + C_3\left(\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \underset{-\ddot{\theta}_1\sin\theta_2}{}\right) \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to 3}\right\}_{\substack{O_2 \\ = \\ G_3}} = \left\{\begin{matrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & C_{mot} \end{matrix}\right\}_{\substack{O_2 \\ = \\ G_3},\, R_2}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{pes\to 3}\right\}_{G_3} = \left\{\begin{matrix} -m_3 g\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{G_3} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -m_3 g\cos\theta_2 & 0 \\ m_3 g\sin\theta_2 & 0 \end{matrix}\right\}_{G_3,\, R_2}$$

$$\begin{cases} X_{23} = -m_3 l \dot{\theta}_1^2 \\ Y_{23} - m_3 g \cos\theta_2 = -m_3 l \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 \\ Z_{23} + m_3 g \sin\theta_2 = -m_3 l \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 \\ L_{23} = A_3 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 + C_3 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ M_{23} = A_3 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - 2 A_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - C_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ C_{mot} = \dot{C}_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) + C_3 (\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2) \end{cases}$$

* On isole 2 :

$${}_{O_1}\left\{ \mathcal{D}_{2/0} \right\} = {}_{O_1}\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$ masse et inertie négligeable

$${}_{O_1 = O_2}\left\{ \mathcal{T}_{3\to 2} \right\} = {}_{O_1 = O_2}\left\{ \begin{matrix} -X_{23} & -L_{23} \\ -Y_{23} & -M_{23} \\ -Z_{23} & -C_{mot} \end{matrix} \right\}_{R_2}$$

$${}_{O_1}\left\{ \mathcal{T}_{1\to 2} \right\} = {}_{O_1}\left\{ \begin{matrix} X_{12} & C_{humain} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \right\}_{R_2}$$

$$\begin{cases} X_{12} - X_{23} = 0 & X_{12} = -m_3 l \dot{\theta}_1^2 \\ Y_{12} - Y_{23} = 0 & Y_{12} = m_3 g \cos\theta_2 - m_3 l \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 \\ Z_{12} - Z_{23} = 0 & Z_{12} = -m_3 g \sin\theta_2 - m_3 l \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 \\ C_{humain} - L_{23} = 0 & C_{humain} = A_3 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 + C_3 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ M_{12} - M_{23} = 0 & M_{12} = A_3 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - 2 A_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - C_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ N_{12} - C_{mot} = 0 & N_{12} = \dot{C}_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) + C_3 (\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2) \end{cases}$$

On isole 1 :

$$\overrightarrow{O_0 G_1} = d_1 \vec{y}$$

$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \vec{0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_1(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$= -F_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 \vec{y} - D_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_0 = \cancel{\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_1}^{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{1/0}}_{\dot{\theta}_1 \vec{y}} \wedge \vec{x}_1$$

$$\dot{\theta}_1 \vec{y} \wedge \vec{x}_1$$

$$-\dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_{G_1(1/0)} = -F_1 \ddot{\theta}_1 \vec{x}_1 + B_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y} - D_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \underbrace{F_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1 - D_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1}$$

$$= (-F_1 \ddot{\theta}_1 - D_1 \dot{\theta}_1^2)\vec{x}_1 + B_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y} + (-D_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1^2)\vec{z}_1$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{2\to 1} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} -X_{12} & -C_{Humain} \\ -Y_{12} & -M_{12} \\ -Z_{12} & -N_{12} \end{matrix} \right\}_{O_1, R_2}$$

$$\vec{U}_1 = P_{12} \vec{U}_2 \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{2\to 1} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} -X_{12} & -C_{Humain} \\ -Y_{12}\cos\theta_2 + Z_{12}\sin\theta_2 & -M_{12}\cos\theta_2 + N_{12}\sin\theta_2 \\ -Y_{12}\sin\theta_2 - Z_{12}\cos\theta_2 & -M_{12}\sin\theta_2 - N_{12}\cos\theta_2 \end{matrix} \right\}_{O_1, R_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to1}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} m_3 l\dot{\theta}_1^2 & -C_{humain} \\ -m_3 g & -M_{12}\cos\theta_2 + N_{12}\sin\theta_2 \\ m_3 l\ddot{\theta}_1 & -M_{12}\sin\theta_2 - N_{12}\cos\theta_2 \end{matrix}\right\}_{O_1,\,R_1}$$

$$= \left\{\begin{matrix} m_3 l\dot{\theta}_1^2 \\ -m_3 g \\ m_3 l\ddot{\theta}_1 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix} -C_{humain} \\ -M_{12}\cos\theta_2 + N_{12}\sin\theta_2 \\ -M_{12}\sin\theta_2 - N_{12}\cos\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m_3 l\dot{\theta}_1^2 \\ -m_3 g \\ m_3 l\ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}\right\}_{O_0,\,R_1}$$

$$= \left\{\begin{matrix} m_3 l\dot{\theta}_1^2 & -C_{humain} + h l m_3\ddot{\theta}_1 \\ -m_3 g & -M_{12}\cos\theta_2 + N_{12}\sin\theta_2 - l^2 m_3\ddot{\theta}_1 \\ m_3 l\ddot{\theta}_1 & -M_{12}\sin\theta_2 - N_{12}\cos\theta_2 - l m_3 g - h l m_3\dot{\theta}_1^2 \end{matrix}\right\}_{O_0,\,R_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{pes\to1}\right\}_{G_1} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -m_1 g & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{G_1,\,R_1} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -m_1 g & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{O_0,\,R_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to1}\right\}_{O_0} = \left\{\begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{matrix}\right\}_{O_0,\,R_1}$$

$$\begin{cases} X_{01} + m_3 l\dot{\theta}_1^2 = 0 \\ Y_{01} - m_3 g - m_1 g = 0 \\ Z_{01} + m_3 l\ddot{\theta}_1 = 0 \\ L_{01} - C_{humain} + h l m_3\ddot{\theta}_1 = -F_1\ddot{\theta}_1 - D_1\dot{\theta}_1^2 \\ -M_{12}\cos\theta_2 + N_{12}\sin\theta_2 - l^2 m_3\ddot{\theta}_1 = B_1\ddot{\theta}_1 \\ N_{01} - M_{12}\sin\theta_2 - N_{12}\cos\theta_2 - l m_3 g - h l m_3\dot{\theta}_1^2 = -D_1\ddot{\theta}_1 + F_1\dot{\theta}_1^2 \end{cases}$$

$$X_{01} = -m_3 l \dot{\theta}_1^2$$

$$Y_{01} = (m_1 + m_3) g$$

$$Z_{01} = -m_3 l \ddot{\theta}_1$$

$$\begin{aligned} L_{01} = & -F_1 \ddot{\theta}_1 - D_1 \dot{\theta}_1^2 - h l m_3 \ddot{\theta}_1 + A_3 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \\ & + C_3 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & B_1 \ddot{\theta}_1 + l^2 m_3 \ddot{\theta}_1 + A_3 \ddot{\theta}_1 \cos^2\theta_2 - 2A_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \\ & - C_3 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) - \dot{C}_3 \sin\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ & - C_3 \sin\theta_2 (\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2) = 0 \end{aligned}}$$

équation de mouvement

$$\begin{aligned} N_{01} = & -D_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1^2 + l m_3 g + h l m_3 \dot{\theta}_1^2 + A_3 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \\ & - 2A_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin^2\theta_2 - C_3 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ & + \dot{C}_3 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) + C_3 \cos\theta_2 (\ddot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2) \end{aligned}$$

ANNEXE 2 : calcul des deux équation de la simulation

$* \quad \dot\theta_2 = 0$ Cas 1

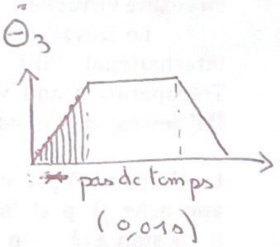
$\theta_2 = 0$

$\ddot\theta_3 = cste$

$$B_1\dddot\theta_1 + l^2 m_3 \dddot\theta_1 + A_3 \ddot\theta_1 = 0$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + A_3)\ddot\theta_1 = 0$$

$$\dot\theta_1 = cste$$



$* \quad \theta_2 = 90 \qquad C_3 = 0$ Cas 2

$\dot\theta_2 = 0 \qquad \ddot\theta_3$ variable

$$B_1\ddot\theta_1 + l^2 m_3 \ddot\theta_1 - C_3(\dddot\theta_3 - \dddot\theta_1) = 0$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + C_3)\dddot\theta_1 = C_3 \dddot\theta_3 \qquad \theta_3$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + C_3)\ddot\theta_1 = C_3 \dot\theta_3 + \alpha$$

Pour $t = 0$, $\dot\theta_1(0) = 0$

$$C_3 \dot\theta_3(0) + \alpha = 0$$

$$\alpha = - C_3 \dot\theta_3(0)$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + C_3)\dot\theta_1 = C_3\left(\dot\theta_3 - \underbrace{\dot\theta_3(0)}_{0 \text{ (Par choix)}}\right)$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + C_3)\,\dot{\theta}_1 = C_3\,\dot{\theta}_3$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{C_3\,\dot{\theta}_3}{B_1 + l^2 m_3 + C_3}$$

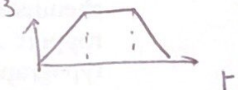
$$\downarrow$$

$$(B_1 + l^2 m_3 + C_3)\,\theta_1 = C_3\,\theta_3$$

$$\theta_1 = \frac{C_3}{B_1 + l^2 m_3 + C_3}\,\theta_3$$

* $\theta_2 = 90$ C_3 variable, $\dot{C}_3 =$ constante, ~~$C_3(t - 0_0) = C_{30}$~~ $\dot{C}_3$

$\dot{\theta}_2 = 0$ $\dot{\theta}_3 =$ cste Cas 3



$$B_1\,\ddot{\theta}_1 + l^2 m_3\,\ddot{\theta}_1 - \dot{C}_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) + C_3\,\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_1\,(B_1 + l^2 m_3 + C_3) + \dot{C}_3\,\dot{\theta}_1 = \dot{C}_3\,\dot{\theta}_3$$

$$\ddot{\theta}_1\,(B_1 + l^2 m_3 + \dot{C}_3 \times t + C_{30}) + \dot{C}_3\,\dot{\theta}_1 = \dot{C}_3\,\dot{\theta}_3$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_3\,C_3}{B_1 + l^2 m_3 + C_3}$$

* Donnée : B_1, l, $\dot{\theta}_{1\,max} \simeq 180°/s$

$\ddot{\theta}_{1\,max} \simeq 180°/s^2 \simeq 3{,}14$

inconnues : $\underbrace{m_3 \ (\uparrow 2\,\text{kg max}),\ \cancel{A_3},\ C_3,\ \theta_3}$

Comment évolue $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}$ en fonction de $\rightarrow$ pour Cas 2 et 3

C_{moteur}

C_{humain}

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\dot{C}_3\,\dot{\theta}_3 - \dfrac{\dot{C}_3\,\dot{\theta}_3\,C_3}{B_1 + m_3 l^2 + C_3}}{B_1 + m_3 l^2 + C_3}$$

$$= \frac{\dot{C}_3\,\dot{\theta}_3\,(B_1 + m_3 l^2)}{(B_1 + m_3 l^2 + C_3)^2}$$

$$\ddot{\theta}_1 (B_1 + l^2 m_3 + c_3) + \dot{c}_3 \dot{\theta}_1 = \dot{c}_3 \dot{\theta}_3 \quad ①$$

$$\int \ddot{\theta}_1 (B_1 + l^2 m_3) = \dot{\theta}_1 (B_1 + l^2 m_3) + \alpha$$

$$\int \ddot{\theta}_1 c_3 = \int \left((\dot{\theta}_1 c_3)' - \dot{\theta}_1 \dot{c}_3 \right) + \beta$$

$$= \dot{\theta}_1 c_3 - \int \dot{\theta}_1 \dot{c}_3 + \beta$$

$$= \dot{\theta}_1 c_3 - \int \left((\theta_1 \dot{c}_3)' - \theta_1 \ddot{c}_3 \right) + \beta$$

$$= \dot{\theta}_1 c_3 - \cancel{\theta_1 \dot{c}_3} + \cancel{\int \theta_1 \ddot{c}_3} + \beta$$

$$\int \dot{c}_3 \dot{\theta}_1 = \int \left((\theta_1 \dot{c}_3)' - \theta_1 \ddot{c}_3 \right) + \gamma$$

$$= \cancel{\theta_1 \dot{c}_3} - \cancel{\int \theta_1 \ddot{c}_3} + \gamma$$

$$\int \dot{c}_3 \underbrace{\dot{\theta}_3}_{cst} = c_3 \dot{\theta}_3 + cst$$

Donc $\dot{\theta}_1 (B_1 + l^2 m_3) + \dot{\theta}_1 c_3 = c_3 \dot{\theta}_3 + cst$

$$\dot{\theta}_{1(0)} = 0 \qquad \theta_{1(0)} = 0 \qquad \dot{\theta}_{3(0)} = 0 \qquad cst = 0$$

Donc $\dot{\theta}_1 = \dfrac{c_3 \dot{\theta}_3}{B_1 + l^2 m_3 + c_3}$ ②

$$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \Rightarrow \quad \ddot{\theta}_1 = \frac{\dot{c}_3 \dot{\theta}_3 - \dfrac{c_3 \dot{c}_3 \dot{\theta}_3}{m_3 l^2 + B_1 + c_3}}{m_3 l^2 + B_1 + c_3}$$

$$= \frac{\dot{c}_3 \dot{\theta}_3 (B_1 + m_3 l^2)}{m_3 l^2 + B_1 + c_3}$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

On recherche la relation entre la matrice d'inertie en A du solide S et la matrice d'inertie en G le centre d'inertie du solide.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{AM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)\mathrm{d}m$$
$$\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}\cdot\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

soit

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \int_S \left(\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)\right)\right)\mathrm{d}m$$
$$\begin{aligned}\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} &= \int_S \left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m\\ &+ \int_S \left(\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m\end{aligned}$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

Les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ termes sont nuls car $\displaystyle\int_S \overrightarrow{GM}\mathrm{d}m = \vec{0}$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

il reste

- Second terme : $\displaystyle\int_S \left(\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}\cdot\vec{u}$ (opérateur d'inertie en G).
- Premier terme : $d\int_S \left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m = m\left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)$

D'où le théorème de Huygens généralisé

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}\cdot\vec{u} + m\left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right) \qquad (4)$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

Déterminons $\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)$ avec $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{AG}=(a,b,c)$.

$$\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right) = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c\\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c\\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

On pose pour les matrices d'inertie en G et A :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A\\ -F_A & B_A & -D_A\\ -E_A & -D_A & C_A\end{pmatrix}_{\substack{A\\(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}} \quad \text{et } \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G\\ -F_G & B_G & -D_G\\ -E_G & -D_G & C_G\end{pmatrix}_{\substack{G\\(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

On déduit, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, la relation entre ces matrices :

$$\begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A\\ -F_A & B_A & -D_A\\ -E_A & -D_A & C_A\end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G\\ -F_G & B_G & -D_G\\ -E_G & -D_G & C_G\end{pmatrix}_G + m\cdot\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c\\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c\\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

Opérateur d'inertie
Changement de base

Connaissant la matrice d'inertie du solide S en un point A dans la base B_1, on se propose de déterminer cette matrice en ce même point dans la base B_2.

Matrice de Passage : On appelle P_{B_1,B_2}, la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B_2 écrits dans la base d'origine B_1. On l'appelle aussi matrice de changement de base, cette matrice est une matrice inversible.

Soit $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1}$ et $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2}$ les matrices d'inertie d'un solide S respectivement dans la base B_1 et la base B_2, et P_{B_1,B_2} la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2, on a alors :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2} = P^{-1}_{B_1,B_2}\cdot\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1}\cdot P_{B_1,B_2}$$

avec $P^{-1}_{B_1,B_2}$ la matrice inverse de P_{B_1,B_2}.